Cand.merc.(mat.)-studiet

Institut for Finansiering

Kandidatafhandling

Inflationsprodukter i portefølje- og risikostyring

Inflation-linked products in portfolio- and risk management

Af Mads Berendt Søndergaard

Afleveringsdato: 17. maj 2010

Vejleder: Jesper Lund

Antal anslag: 124.425

Handelshøjskolen i København

Copenhagen Business School

Executive summary

The main objective of this thesis is to analyse the use of inflation-linked products such as indexed-linked bonds and inflation derivatives in asset and risk management. To get a thorough knowledge of what the inflation means, the relationship between the nominal interest rate, the real interest rate and the inflation is established using the Fisher relation, which says that nominal interest rate is the sum of the real interest rate and the inflation leading to the definition of the break-even inflation, which is the inflation that makes the investor indifferent between investing in an inflation-indexed bond and a nominel bond with the same characteristics.

To get a better understanding of the reasons to issue or invest in indexed-linked bonds these motives have been analysed. One of the primary reasons to issue inflation-linked bonds is if you have revenues depending on the price movements. Another reason is if you want to reduce the risk premium associated with the bonds. One of the primary reasons to invest in inflation-linked bonds is if you have liabilities depending on the inflation. Furthermore, these bonds have nice properties regarding diversification: Low correlation with other assets and a low volatility. These properties will be analysed in the last part of the thesis.

With the basic knowledge of the inflation and the market, the different types of inflation-linked securities will be introduced. There are several different types of inflation-linked bonds each having different cash flow profiles, which all will be analysed.

Along with the market for inflation-linked bonds, a market for inflation derivatives has been growing providing a great deal of flexibility, especially for hedging purposes. This thesis focuses on two types of inflation swaps: Zero-Coupon Swap and Year-on-Year Swap.

There is still a lack of pricing models designed to pricing inflation-linked securities, but one approach that is used is the Heath-Jarrow-Morton framework. The two main conclusions of this approach are shown. These include a fast evaluation of the model and few parameters to estimate, which is due to the fact that the dynamics are described as shifts away from the forward curve.

Having a pricing model defined the focus will be changed to the main purpose: Inflation-linked securities in risk and asset management. Normally, duration is a wellknown risk measure for bonds, but you need to decompose the duration into both real rate duration and inflation duration when using this measure for indexed-linked bonds.

When hedging your liabilities with inflation-linked securities, you need to distinguish between bonds ans swaps, with inflation swaps giving you a much better match of your liabilities, which is the last focus in this thesis along with a short discussion of tactical asset allocation including these securities.

Indhold

Figurer

1 Indledning

I løbet af de senere år har det finansielle marked oplevet en kraftig fremgang i antallet af produkttyper. Mange fordringer er kommet til, og den handlede mængde er ligeledes vokset.

En type af aktiver, der har oplevet en stor fremgang i de seneste ti år, er aktiver, der afhænger af, hvor stor inflationen er - de såkaldte indekserede produkter. Disse inflationsindekserede aktiver giver mulighed for aktivt at styre inflationsrisikoen for en specifik portefølje.

Markedet for inflationsindekserede aktiver har i en del år været kendetegnet ved forholdsvis begrænsede og illikvide obligationer, men i de senere år er dette marked vokset med hensyn til både størrelse, likviditet og antallet af aktivtyper. Dette skyldes blandt andet, at inflationen er et stort emne politisk set, hvor man eksempelvis i EU har et inflationsmål på 2 %. Desuden har man herhjemme i Danmark oplevet en opblomstring af investeringsforeninger, hvis fokus er på indekserede obligationer, selvom der i nærmeste fremtid ikke forventes stigende inflation. Disse foreninger har tidligere været underlagt særlige skatteregler, der gjorde, at foreningerne ikke kunne foretage nyemission, men til gengæld havde et skattefrit afkast. Denne skattemæssige fordel blev imidlertid fjernet i 2007, og nu har flere investeringsforeninger så relanceret deres indeksobligationsafdeling, så de har et bredere investeringsunivers end blot danske indeksobligationer. Dermed er muligheden for private investorer for at sikre sig mod inflationsrisiko forbedret gevaldigt.

En anden grund til at markedet for inflationsprodukter er vokset er, at nogle pensionsfonde har lovet investorerne et realt afkast frem for et nominelt afkast. Disse pensionsfonde skal altså sikre, at en eventuel fremtidig høj inflation - fx som følge af de øjeblikkelige pengepolitiske lempelser - ikke udhuler pensionsafkastet.

Denne afhandling vil behandle inflationsindekserede produkter og muligheden for at bruge disse produkter i porteføljesammenhæng; enten som portefølje- eller risikomanager. Der vil således være et betydeligt fokus på den konkrete anvendelse af produkterne, men med et teoretisk afsæt i prisningen af produkterne.

1.1 Problemformulering

Denne afhandlings formål er at analysere brugen af inflationsprodukter, og hvordan disse produkter kan anvendes i praksis. Dette indebærer dog, at der bruges en del ressourcer på det teoretiske element, hvorfor denne afhandlings fokus i den første del er et teoretisk udgangspunkt, medens anden del vil have en mere praktisk tilgang til anvendelsen af inflationsprodukter inden for asset management.

For at kunne arbejde med inflationsindekserede produkter er det vigtigt at definere, hvad inflation egentlig er, og hvordan inflationen påvirker den nominelle og reale rente. Det er desuden vigtigt at forstå forholdet mellem de forskellige rente- og inflationskurver, der handles produkter på:

- Hvad er sammenhængen mellem den nominelle og reale rente, og hvad betyder begrebet "break-even inflation"?

Dette skal udelukkende behandles som en introduktion til inflationsbegrebet og ikke ud fra en decideret makroøkonomisk indgangsvinkel. Der vil desuden blive redegjort for, hvad der forstås ved inflationsrisiko.

Inden anvendelsen af inflationsprodukter kan blive analyseret vil jeg danne mig et overblik over, hvilke typer af produkter, der findes på markedet, samt hvad der kendetegner en aktør på markedet. Det vil blive behandlet kortvarigt med det formål at skabe en forståelse for, hvorfor der er et marked for inflationsprodukter. Jeg vil således forsøge at besvare følgende spørgsmål:

- Hvilke karakteristika har indekserede obligationer?

- Hvad er de forskellige inflationsswaps karakteristika?

Da markedet for inflationsindekserede produkter stadig er forholdsvis ungt - eller i hvert fald stadig under kraftig udvikling - findes der endnu ingen entydige prisningsmodeller. Derfor vil der blive forsøgt at finde prisningsformler for inflationsprodukter ved hjælp af Heath-Jarrow-Morton-tilgangen. Den tilgang er specielt velegnet til at prisfastsætte inflationsderivater, da der med et stigende marked for inflationsindekserede obligationer også har fulgt et marked for inflationsderivater såsom inflationsswaps. Derfor vil følgende spørgsmål blive forsøgt besvaret:

- Hvordan prisfastsættes indekserede derivater?

Med den fundamentale teori om inflationsprodukter på plads påbegyndes hovedformålet med afhandlingen, som er at vise, hvordan sådanne produkter kan bruges i forbindelse med styringen af en porteføljes risiko og aktivallokering. Derfor vil jeg forsøge at besvare følgende hovedspørgsmål:

- Hvorledes kan man bruge inflationsprodukter i risiko- og porteføljestyring?

Jeg vil således vise, hvordan man kan bruge aktiver, der afhænger af inflationen, i en investeringsmæssig situation. For at besvare det ovennævnte spørgsmål er følgende delspørgsmål behjælpelig:

- Hvordan kan inflationsderivater bruges til at afdække inflationsrisiko?

I besvarelsen af det ovennævnte spørgsmål vil jeg fokusere på varigheden, som først forklares generelt for derefter at blive anvendt på en inflationsobligation. Et andet risikomål er betaværdien - som også kendes fra standard porteføljeteori (CAPM) - og det vil også blive forklaret. En af de helt store fordele ved inflationsobligationer i porteføljesammenhæng er deres lave korrelation med øvrige aktivklasser. Desuden har de en lav volatilitet. Derfor vil der i denne afhandling blive forklaret, hvilke diversifikationsgevinster, der kan være ved at inkludere indekserede produkter i porteføljen, og her vil det velkendte performancemål, *Sharpe Ratio*, blive brugt.

Afslutningsvist vil jeg vise, hvordan man kan hedge sine forpligtelser ved at anvende inflationsswaps i en pensionskasse med udgangspunkt i en diskussion om indeksobligationer contra inflationsswaps som hedginggrundlag.

Formålet med afhandlingen er således på en overskuelig måde at forklare og analysere, hvordan man i praksis kan anvende inflationsprodukter samt give en generel forståelse for inflationsprodukternes karakteristika, udfordringer og muligheder.

1.2 Afgrænsning

Selvom denne afhandling har til hensigt at behandle inflationsprodukter, er der ikke fokus på selve måden, hvorpå inflation opstår eller hvilke makroøkononomiske faktorer, der har indflydelse på inflationen. Inflationen ses således som en slags objektiv variabel, der ikke kan blive påvirket af de forskellige deltagere på markedet. Inflation er altså bare et begreb, der har indflydelse på det forventede afkast, og som man ikke kan påvirke.

Måden hvorpå inflation beregnes, vil kun blive berørt sporadisk, men der vil dog stadigvæk være tilstrækkelig stor fokus på dette område, så en investor forstår, hvad inflation er rent beregningsmæssigt.

Desuden vil negativ inflation - det vil sige deflation eller faldende priser - ikke blive behandlet. Det skyldes, at stort set alle inflationsindekserede obligationer har en indbygget floor, således at man er garanteret hovedstolen på obligationen. Kun på indekserede obligationer udstedt af den svenske regering før 1999 er der risiko for, at obligationen ikke kan indfries til minimum pari. I det nuværende marked er deflation imidlertid heller ikke en risiko, man aktivt tager højde for, selvom den i slutningen af 2008 var større end længe set. Derudover vil de fleste af hovedkonklusionerne være upåvirkede af, om inflationen er positiv eller negativ.

Ydermere udelades beskatningsaspektet, da dette varierer meget og vil fjerne fokus fra opgavens formål.

Endelig vil den empiriske behandling af inflationsprodukter blive afgrænset til, hvordan de kan bruges i praksis. Der vil således ikke være en større empirisk analyse af et datasæt, da en sådan analyse hurtigt kan blive forældet, men der vil i stedet blive inddraget konkrete indeksobligationer og andet data fra markedet i de tilfælde, hvor det kan give en god forståelse for en problemstilling. Til dette er henholdvis Bloomberg og Nordea Analytics anvendt til at indsamle viden om konkrete indeksobligationer, ligesom forskellige empiriske analyser er inddraget undervejs i afhandlingen.

1.3 Metodevalg

Dette afsnit vil beskrive afhandlingens metode samt hvilke valg, der er foretaget. Først og fremmest er det formålet, at denne afhandling skal have en praktisk tilgang med udgangspunkt i et teoretisk afsæt. Den praktiske tilgang søges opretholdt ved kontinuerlig brug af empiriske eksempler fra Bloomberg og andre kilder, så det kan ses, hvordan der beregnes på de forskellige typer af produkter i den "rigtige" verden. Da markederne hele tiden ændrer sig, er der som bilag vedlagt udskrifter fra Bloomberg på de relevante datoer, så der er mulighed for at validere de forskellige empiriske beregninger i opgaven. Jeg har valgt at replikere tal fra Bloomberg, da Bloomberg for det første er et af de mest anvendte analyseværktøjer og samtidig er det redskab, jeg har haft til rådighed.

Målet er således at give en generel forståelse for inflationsprodukternes karakteristika og anvendelsesmuligheder, samt hvorfor sådanne produkter med fordel kan inddrages i porteføljebeslutninger. Flere af de teoretiske påstande søges bevist ved brug af empirisk materiale og grafer. Der er derfor hele tiden et naturligt link mellem den teoretiske del og den empiriske del af opgaven, hvilket skaber den overordnede sammenhæng for læseren.

Prisningsprocesserne tager udgangspunkt i et standard no-arbitrage princip, hvilket vises i opgaven. I opgaven vil hovedprisningsmodellen for derivater blive vist for at give en forståelse for de bagvedliggende antagelser og idéer. Det indebærer en del matematik, der dog er nødvendig for at give en fuld forståelse af modellen, som desuden udvides til en specifik prisningsmodel for inflationsswaps. Som allerede nævnt er formålet med afhandlingen ikke at analysere et givent datasæt, men i højere grad at vise, hvordan indekserede produkter kan anvendes i porteføljesammenhæng. Derfor vil den gennemgåede prisningsmodel ikke blive implementeret i praksis, men den bliver derimod brugt til at understøtte nogle af de forskellige risikotal.

Da teorien primært er henlagt til afhandlingens første dele, vil der ikke være så meget nyt teori i afhandlingens sidste del omhandlende brugen af indekserede produkter i asset management, men til gengæld vil der blive foretaget konkrete beregninger inden for varighedsbegrebet, diversifikationsmulighederne samt anvendelsen af indeksprodukter i hedgingøjenmed.

2 Inflation, Fisher-ligning og break-even inflation

Dette afsnit vil definere begrebet inflation, og kort illustrere hvordan inflationen måles. Desuden vil sammenhængen mellem den nominelle og reale rente blive forklaret. Dette gøres gennem Fishers ligning, der viser forholdet mellem inflationen og den nominelle rente. Derudover vil begrebet break-even inflation blive introduceret og forklaret, da det er en vigtig komponent i forståelsen af indekserede obligationer, ligesom de forskellige elementer i break-even inflationen også vil blive forklaret.

Undervejs i introduktionen til de forskellige begreber vil der blive inddraget henvisninger til indeksobligationer, men kun i en sådan grad, at det ikke er nødvendigt at læse kapitel 4 om inflationsprodukter først. Således vil de relevante begreber, der skal bruges for at kunne forstå teorien, blive introduceret i dette kapitel i det omfang, det er nødvendigt.

2.1 Hvad er inflation og inflationsrisiko?

Inflationen er et udtryk for en prisændring (stigning) på en given vare eller serviceydelse over en given periode. Det mest anvende mål for inflationen er forbrugerprisindekset, hvilket på engelsk hedder Consumer Price Index og forkortes CPI. Dette udtryk vil også blive brugt i denne afhandling. Forbrugerprisindekset er en bred sammensætning af varer og tjenesteydelser, som købes af husholdninger, og det inkluderer alt fra fødevarer til elektricitet. Inflationen udtrykker altså en stigning i det generelle prisniveau, man oplever i samfundet.

Inflationen beregnes således:

$$Inflation_t = \pi_t = \frac{Forbrugerprisindeks_t}{Forbrugerprisindeks_{t-1}} - 1 = \frac{CPI_t}{CPI_{t-1}} - 1 \tag{1}$$

Så hvis fx forbrugerprisindekset for 2007 var 114.2 og for 2008 118.1, er inflationen i 2008:[1]

$$Inflation_{2008} = \pi_{2008} = \frac{118.1}{114.2} - 1 = 3.4\%$$

Det som imidlertid interesserer folk er, hvor meget de har mulighed for at købe om fx et år, det vil sige ændringen i deres købekraft. Hvis man har kr. 100, som sættes ind på en bankbog til 10 % i rente pro anno, har man efter et år kr. 110. Men hvis inflationen i samme periode har været 6 %, er ens reelle købekraft kun steget

[1] Tallene er taget fra Danmarks Statistik

med 4 % eller fire kroner. Det er altså forbrugsmulighederne, man er interesseret i, og det er grunden til, at inflationen er et vigtigt begreb - og en risiko, man skal kalkulere med i en investeringsmæssig situation. Inflationsrisiko er således den risiko, der er, at ens penge er blevet mindre værd i en given periode. Det er et udtryk for, at man ikke kender den fremtidige inflation.

Selv i lande eller områder med lav inflation, der oftest kommer som et udtryk for en decideret inflationspolitik med et mål om et vist inflationsniveau, er der inflationsrisiko. Inflationen optræder som en stokatisk variabel, hvorfor den ikke kan forudsiges, og dermed opstår inflationsrisikoen.

2.2 Nominel og real rente

Den rente man får i banken kaldes den nominelle rente. Det vil sige i eksemplet fra før er den nominelle rente 10 %. Det er også den nominelle rente, der optræder på konventionelle standardobligationer. Den reale rente er derimod stigningen i købekraften, hvilket altså er de 4 % fra før.

Grunden til at vi er så interesserede i det reale versus det nominelle afkast illustreres bedst med følgende eksempel:

2.2.1 Eksempel 1: Nominel vs. real rente

Antag, at en investor står over for valget mellem to obligationer med samme tid til udløb:

1. En standardobligation med en årlig nominel rente på 5 %

2. En indekseret obligation med en årlig realrente på 3 %

Dette giver i henhold til næste afsnit om break-even inflation en markedsforventning for inflationen på 2 % årligt. Hvis den realiserede inflation bliver 4 % pr. år - det vil sige højere end den forventede inflation - da vil den indekserede obligation naturligvis stadig have genereret et realafkast på 3 %, medens standardobligationens nominelle afkast på 5 % er blevet til et realafkast på kun 1 %. Naturligvis vil det være anderledes, såfremt den realiserede inflation kun er på 1 %. Så vil standardobligationen få et realt afkast på 4 % pr. år, medens den indekserede obligation stadig vil have et realt afkast på de 3 %. Derfor er det vigtigt at skelne mellem nominelt og realt afkast, og i det følgende afsnit vises sammenhængen mellem den nominelle rente, realrenten og inflation, ligesom break-even inflationen introduceres.

2.2.2 Fisher-relationen

Med udgangspunkt i den nominelle rente over tid kan følgende relation opstilles, når den realiserede inflation er kendt:

$$(1 + i_{n_t}) = (1 + i_{r_t}) * (1 + \pi_t) \tag{2}$$

Her er i_{n_t} den nominelle rente, i_{r_t} den reale rente og π_t er inflationen over tid.

Ligning (2) beskriver, hvordan den historiske relation mellem den nominelle rente, den reale rente og inflationen ser ud. Denne relation blev undersøgt af den amerikanske økonom Irving Fisher, som i 1930'erne fandt en relation til at beskrive forholdet mellem de tre termer under inflationsusikkerhed. Hvis vi kalder i_n den nominelle rente, i_r den reale rente og π^e for den forventede inflation, har vi følgende relation - Fisher-relationen:

$$(1 + i_n) = (1 + i_r) * (1 + \pi^e) \tag{3}$$

Denne relation er udledt med udgangspunkt i, at investorer er interesserede i at opretholde samme købekraft, hvorfor det nominelle afkast er en funktion af realrenten og den forventede inflation.

For små værdier af henholdsvis i_r, i_n og π^e er følgende en god approksimation til ligning (3):

$$i_n = i_r + \pi^e \tag{4}$$

Det vil sige, at den nominelle rente er summen af den reale rente og den forventede, fremtidige inflation. På grund af usikkerheden omkring den nominelle rente vil der være inkluderet en risikopræmire, λ, så den udvidede Fisher-relation siger, at den nominelle rente er summen af den risikofri forventede realrente, den forventede inflation samt risikopræmien:

$$i_n = i_r + \pi^e + \lambda \tag{5}$$

Risikopræmien udtrykker den kompensation, en investor vil have for ikke at kende den fremtidige inflation og dermed påtage sig inflationsrisiko - altså risikoen for at den realiserede fremtidige inflation overstiger den forventede fremtidige inflation, når der handles med nominelle obligationer. Inkluderet i denne risikopræmie er også en likviditetspræmie, da likviditeten i markedet for inflationsobligationer er mindre end likviditeten i markedet for nominelle obligationer. Denne likviditetspræmie trækker dog risikopræmien i modsat retning. Estimation af de forskellige elementer kompliceres af, at hverken den forventede inflation, π^e, eller risikopræmien, λ, kan ses i praksis. Desuden varierer risikopræmien over tid samt markederne imellem.[2]

En bedre forståelse af de underliggende risici ved investering i inflationsobligationer kan fås ved at sammenligne med en udenlandsk investering i fx amerikanske nominelle obligationer. En amerikansk investor vil udelukkende fokusere på renterisikoen og har derfor ingen valutarisiko ved at investere i en sådan obligation. Derimod har en udenlandsk investor også dollarrisikoen er tænke på, da den udenlandske investor som oftest er interesseret i afkastet i egen valuta. Derfor skal der også tænkes på valutakursrisikoen ved investering i den amerikanske obligation. Sagt på en anden måde kan dollarkursen fortolkes som et slags indeks på obligationen, hvor indeksets udvikling udgør risikoen for afkastet. Overført til indeksobligationer har en investor, der kun er interesseret i det reale afkast, ingen inflationsrisiko, men kun realrenterisikoen at tænke på. Det er således kun en investor, der er interesseret i det nominelle afkast, der påtager sig en inflationsrisiko.

Med de forskellige rentebegreber defineret og forklaret er vi nu klar til at forklare et af de helt centrale begrebet inden for inflationsteori og indeksobligationer: break-even inflationen.

2.3 Break-even inflation

Break-even inflationen[3] er den ligevægtsinflation, der gør, at man som investor er indifferent mellem at investere i en indekseret obligation eller en nominel obligation - altså den inflation der tilsikrer, at afkastet på henholdsvis en nominel obligation og en indeksobligation er identisk. Når man skal vurdere en investering i indeksobligationer henholdsvis i nominelle obligationer, er break-even inflationen det helt centrale nøgletal. Sammenlignet med valutamarkedet svarer break-even inflationen til den forwardkurs, der tilsikrer, at afkastet på ellers ligestillede obligationer udstedt i forskellige valutaer, er identisk.

Formlen for break-even inflation er følgende:

$$BEI = \frac{(1 + i_n)}{(1 + i_r)} - 1 \tag{6}$$

[2] Jf. Hansen: Indeksobligationer i porteføljebeslutninger

[3] I noget litteratur bruges som oftest forkortelsen "BEI", men den forkortelse bruges kun i forbindelse med formler i denne afhandling

Som med ligning (3) er der også en approksimation:

$$BEI = i_n - i_r \tag{7}$$

Det vil sige, at break-even inflationen er forskellen mellem den nominelle rente og den reale rente og er et udtryk for summen af inflationsforventningerne og risikopræmien.

Hvis break-even inflationen er højere end investors egne forventninger til den fremtidige inflation, vil det forventede afkast på indeksobligationen være lavere end det på den nominelle obligation. Såfremt break-even inflationen er lavere end investors egne forventninger, vil det forventede afkast på indeksobligation derimod være højere end det forventede afkast på den nominelle obligation. Overført til en ex post-betragtning betyder det, at hvis den realiserede inflation i den forgangne periode er højere end break-even inflationen, vil investor have fået det højeste afkast ved at investere i indeksobligationen.

Break-even inflationen er typisk en volatil størrelse, eftersom forholdet mellem de nominelle og reale renter ikke er konstant. I perioder med høj efterspørgsel efter indeksobligationer vil break-even inflationen ofte stige. Det samme gør sig gældende, når løbetiden på obligationen stiger, hvilket skyldes, at inflationsrisikopræmien stiger, når løbetiden stiger, hvilket er illustreret i nedenstående figur, der viser data for den europæiske break-even inflation på henholdsvis 1 og 20 års sigt:

Figur 1: Break-even inflation. Kilde: Nordea Analytics

2.3.1 Dekomponering af break-even inflation

Break-even inflationen består af flere forskellige ting, og dette delafsnit vil forklare hvilke komponenter, der indgår. Den første og største del af break-even inflationen er naturligt den *forventede inflation*, men der er også tre andre dele, som man skal være opmærksom på.[4]

Den anden del er *risikopræmien,* som kommer fra det faktum, at man modtager sikkerhed for den reale værdi ved at købe indeksobligationer og dermed betaler en præmie for denne sikkerhed. Risikopræmien trækker break-even inflationen i positiv retning i forhold til den forventede inflation.

Den tredje del af break-even inflationen er, at *konveksitetseffekten,* der er andenordens priseffekten, når inflationen ændrer sig, stiger med tid til udløb. Høj konveksitet er attraktivt for investorer, idet prisen stiger mere, end hvad inflationsvarigheden indikerer, når inflationen stiger, og falder mindre end indikationen, når inflationen falder. Dermed trækker konveksitetseffekten i modsat retning af risikopræmien.

Den fjerde og sidste del af break-even inflationen er *renters rente-effekten,* som er en matematisk effekt. Hvis den annualiserede inflation fra tid 0 til tid T, $\pi_{0,T}$, er randomiseret, da vil betalingen fra en indeksobligation være højere, end hvis den skulle følge den forventede annualiserede inflation, hvilket kan skrives som:

$$E\left[(1+\pi_{0,T})^T\right] \geq (1+E\left[\pi_{0,T}\right])^T \tag{8}$$

hvor E udtrykker forventningen. Dermed har renters rente-effekten er positiv indflydelse på break-even inflationen. Ligning (8) er desuden en speciel udgave af Jensens ulighed, der siger, at gennemsnittet af funktionsværdierne er større end eller lig funktionsværdien af gennemsnittet.

[4] Jf. Kerkof: "Inflation Derivatives Explained"

3 Aktørerne på markedet for indeksprodukter

Dette kapitel vil handle om aktørerne på markedet for indekserede produkter. Formålet er at give en introduktion til, hvorfor der er nogle, der udsteder indeksobligationer, og hvorfor der er nogle, der gerne vil købe sådanne produkter. Med markedet menes derfor ikke det geografiske marked, og kapitlet vil således ikke komme ind på, hvilke produkter der handles hvor, og hvor lang tid de forskellige lande har haft indekserede produkter. Kapitlet vil i stedet fokusere på grundene til at handle indekserede produkter.

Til at starte med vil der blive redegjort for, hvorfor et lands regering (eller bare landet generelt) eller øvrige parter vælger at udstede indeksobligationer. Det vil sige, at det indledningsvise fokus er på de aktører, der sælger indeksobligationer. Dernæst vil en potentiel investors bevæggrunde til at inkludere indeksobligationer i vedkommendes portefølje blive forklaret, ligesom øvrige aftagere af indekserede produkter vil blive introduceret.

3.1 Hvorfor udstede indeksobligationer og -produkter?

Der er en række grunde til at udstede indeksobligationer:

- Man har indtægter, der afhænger af inflationen
- Man vil spare risikopræmien
- Man vil give en signalværdi
- Man vil opnå en diversifikationsmulighed
- Man vil udvide investorkredsen
- Man vil opnå sociale fordele
- Man vil imødekomme efterspørgsel efter indeksobligationer

Disse motiver forklares i dette afsnit.

De typiske udstedere af indekserede obligationer er enheder, hvis fremtidige indtægter er afhængige af inflationen, hvilket er hovedgrunden til at udstede inflationsafhængige produkter. Det mest naturlige eksempel er *staten*, hvis største indtægtskilde er skatter og andre afgifter, som må forventes at have en høj grad af korrelation med inflationsudviklingen, idet reallønstilvæksten sikrer, at den af lønnen betalte skat også er korrigeret for inflation. Desuden må det antages, at momsindtægterne er afhængige af inflationen, eftersom momsen er direkte afhængig af de enkelte varers prisudvikling, som inflationen jo er en stor del af. Dermed er statens fremtidige indtægter afhængige af den fremtidige inflation. Et andet eksempel på en enhed, hvis fremtidige indtægter er inflationsafhængige, er *forsyningsselskaber*, hvis indtægter er karakteriseret ved, at de ændres i takt med, at prisudviklingen på eksempelvis el forandres.

For enheder med fremtidige indtægter, der afhænger af inflationen, er udstedelsen af indeksobligationer således et naturligt hedgeinstrument mod inflationsændringer, hvilket gør dem attraktive til Asset-Liability Management-formål (ALM).

En anden grund til at udstede indeksobligationer er muligheden for at spare *risikopræmien*. Investorer er ofte interesseret i reale afkast, hvilket indeksobligationer giver mulighed for at opnå, hvorimod nominelle obligationer garanterer et nominelt, men ikke realt afkast. For at kompensere investorer, der køber nominelle obligationer og dermed påtager sig inflationsrisiko, må den effektive nominelle rente være tilpas høj, således at det forventede reale afkast på nominelle obligationer er større end det garanterede reale afkast på indeksobligationer. Som beskrevet i forrige kapitel er denne ekstra præmie benævnt risikopræmien, og ved at udstede indeksobligationer kan udstederen altså spare denne præmie.

Desuden kan udstedelsen af indeksobligationer bruges af en regering til at sende et *signal* til markedet om, at man vil bekæmpe inflation eller - for udviklede og etablerede økonomier - have et inflationsmål, som det er kendt fra EU (og Danmark). På den måde kan et land opnå større grad af troværdighed. Hvis en regering gerne vil nedbringe den langsigtede inflation, har den interesse i at udstede indeksobligationer, medens inflationsforventningerne er høje. Så vil markedet være mere villig til at tro på de ændringer, som regeringen har implementeret for at nedbringe inflationen, da det vil være dyrt for staten at udstede inflationsobligationer, hvis inflationen i fremtiden er høj, da den jo forpligter sig til at betale en real rente af udstedelsen.

En fjerde grund til at udstede indeksobligationer er *diversifikationsmuligheden*. Selv i lande hvor man ikke foretrækker nominel gæld fremfor real gæld, bør man have nogle indeksobligationer på gældssiden, med mindre man ser det som fuldstændigt usandsynligt, at den fremtidige inflation bliver mindre end markedsforventningerne. Ved at medtage indeksobligationer får man derfor en mere balanceret passivside, og det er denne diversifikationsgevinst, der gør, at det kan være interessant at udstede indeksobligationer, selvom den implicitte inflation er lavere end inflationsforventningerne.

Desuden kan man se på diversifikationsmuligheden fra investors side og på den måde bruge det som en måde at tiltrække investorer, der er interesseret i muligheden for at få de diversifikationsfordele, der ligger i at investere i indeksobligationer. Dette er altså en form for *udvidelse af investorkredsen*, og man kan få fat i de investorer, der ikke er interesseret i at investere i nominelle obligationer.

Den sjette grund til at udstede indeksobligationer er *de sociale fordele*. Dette forklares med, at evnen til let at kunne finde markedets inflationsforventninger kan være en fordel for politikerne, hvis break-even-spændene mellem inflationsobligationer og de nominelle obligationer hjælper til med at forhindre fejl i de monetære politiker. Relative stabile spænd kan nemlig være et selvforstærkende værktøj til at styre troværdigheden i et lands inflationsmål.

Den sidste grund til at udstede indeksobligationer er naturligvis at imødekomme efterspørgslen efter inflationsobligationer. Dette bringer os til næste afsnit, der omhandler, hvilke aftagere der findes, og hvad deres motiver er til at efterspørge indekserede produkter.

3.2 Hvorfor aftage indeksobligationer og -produkter?

Inflationsprodukter henvender sig til bred gruppe af investorer såsom banker, pensionskasser, investeringsforeninger, forsikringsselskaber og hedgeforeninger, og der er derfor en lang række grunde til at købe indekserede produkter:

- Man har forpligtelser, der afhænger af inflationen
- Man vil opnå lav korrelation med andre aktivklasser
- Man vil have aktiver med lav volatilitet
- Man har svært ved at få eksponering mod inflation fra andre aktivklasser
- Man har en stigende bevidsthed om inflationsrisikoen
- Man har haft lovmæssige ændringer
- Mulighed for at få merafkast (excess returns)

De forskellige grunde til at inkludere indeksobligationer i sin portefølje/aktivside forklares i det følgende.

En af de vigtigste grunde til at købe inflationsprodukter er, hvis man har *forpligtelser, der afhænger af inflationen.* De mest oplagte eksempler er pensionskasser og forsikringsselskaber. Specielt pensionskasser har forpligtelser langt ude i fremtiden, og derfor er inflationen af afgørende betydning, hvis der er tale om reale tilsagn. Eftersom pensionskasser skal minimere risikoen for, at værdien af aktiverne bliver mindre end værdien af passiverne med så lave præmier som muligt, har de en naturlig interesse i at matche de inflationsafhængige forpligtelser med inflationsafhængige aktiver. Denne matchning kræver imidlertid, at indeksobligationerne har samme løbetid som forpligtelserne. Hvis løbetiden er forskellig, vil der fortsat være en realrenterisiko. Men ved at have inflationsafhængige aktiver kan man stadig reducere risikoen for, at passiverne overstiger aktiverne.

En anden grund til at købe indekserede produkter er den *lave korrelation, som indeksobligationer har med øvrige aktivklasser.* Dette er en særlig stor fordel i porteføljebetragtninger. Ved at inkludere indeksobligationer kan man således opnå en mere veldiversificeret portefølje. I kapitel 6 vil denne diversifikationsegenskab blive behandlet.

Desuden har indeksobligationer historisk haft en *lav volatilitet*, hvilket betyder, at risikoen ved investering i indeksobligationer alt andet lige er lavere end ved investering i andre aktivklasser såsom aktier.

En fjerde grund til at investere i indeksobligationer er, at det kan være svært at få *eksponering mod inflationen* gennem andre produkter på markedet. Indeksobligationer er jo naturligt afhængig af inflationen modsat nominelle obligationer og andre aktiver som fx aktier. Der findes dog enkelte andre aktivklasser med mulighed for at få eksponering til inflationen: ejendomme og infrastrukturfonde. Ejendomme giver en god sikkerhed mod inflation, idet lejeindtægterne ofte reguleres med udviklingen udviklingen i inflationen, ligesom ejendomsværdien kan have en tendens til at følge prisudviklingen, selvom der kan forekomme store udsving fra år til år. Infrastrukturfonde har også indtægter, der følger det generelle prisniveau. Det kunne fx være en fond, der driver en betalingsvej. Men den mest direkte måde at opnå sikkerhed mod inflationen er altså investering i deciderede indeksprodukter.

Derudover har *inflationsrisikoen opnået større fokus* blandt investorer på markedet, hvilket selvsagt afføder en større efterspørgsel efter produkter, der kan afdække denne risiko. Dermed repræsenterer de institutionelle investorer også en stadig stigende andel af det totale marked for inflationsprodukter.

Ydermere har *lovmæssige ændringer* nogle steder[5] gjort, at indeksobligationer ikke længere er at betragte som et derivat, men i stedet som en standardobligation, hvilket har gjort det lettere at handle med indeksobligationer for både investeringsforeninger samt institutionelle og private investorer.

Endelig er der mulighed for at skabe *merafkast* ved at inkludere indekserede obligationer i sin portefølje. Dette skal ses i forlængelse af den lavere volatilitet som beskrevet før. Dette vil blive diskuteret yderligere i kapitel 6.

[5] Fx Spanien og Tyskland

4 Inflationsprodukter

I de foregående kapitler er den indledende teori om inflation blevet gennemgået. Desuden er der redegjort for, hvorfor der handles med indeksprodukter både set ud fra udsteders og fra købers synsvinkel.

Det bringer os nu til behandlingen af selve de indekserede produkter, hvilket er fokus i dette kapitel. Til at starte med vil de typiske former for indeksobligationer blive beskrevet. For hver type vil der blive gennemgået et eksempel på pengestrøm, der illustrerer, hvorledes inflationen påvirker henholdsvis kupon- og hovedstolsbetalingen.

Med henblik på den praktiske anvendelse vil der blive gennemgået et konkret eksempel på, hvordan en indeksobligations kurs er beregnet. Inden da vil overvejelserne omkring indekseringslags være gennemgået.

Afslutningsvist i kapitlet vil fokus være på inflationsderivater. Det vil især være de to typer af swaps, der vil blive gennemgået: nulkuponswaps og year-on-year-swaps.

4.1 Inflationsobligationer

Inflationsobligationer er obligationer, hvis hovedstol og/eller kuponbetalinger reguleres med inflationen, således at inflationsrisikoen elimineres. Der findes adskillige forskellige typer af inflationsobligationer, der kan variere alt efter, hvilket underliggende inflationsindeks, der anvendes, eller hvilken pengestrømsstruktur[6] som obligationen har. Det er med udgangspunkt i pengestrømsstrukturen, de forskellige typer af indeksobligationer vil blive introduceret. Gennemgangen har sit udspring i Deacon et al.'s gennemgang af indeksobligationer.[7]

Der findes fem primære typer af indeksobligationer: Capital Indexed Bonds (CIB), Interest Indexed Bonds (IIB), Current Pay Bonds (CPB), Indexed Annuity Bond (IAB) og Indexed Zero-coupon Bonds (IZCB). Disse obligationers karakteristika overfor inflationen gennemgås i de følgende afsnit. Der vil komme et beregningseksempel til hver af de fem typer af indeksobligationer for at vise, hvordan deres kuponbetalinger og hovedstol udvikler sig i takt med inflationen. Det vil være en fiktiv 5-årig indeksobligation i den forstand, at realrenten er fast på 6 kr., men med rigtige tal for inflationen for 2004-2008 jf. Danmarks Statistik.

[6] På engelsk: Cash flow structure

[7] Jf. Deacon et al.: Inflation-linked securities, kapitel 2

4.1.1 Capital Indexed Bonds

CIBs er den mest udbredte type af indeksobligationer. De har en fast realrente og en nominel hovedstol, der er linket til inflationen og dermed stiger i takt med, at inflationen stiger. De enkelte rentebetalinger bliver beregnet som den reale rentebetaling, C_r, ganget med den inflationsjusterede hovedstol, N_r. Ved udløb bliver den inflationsjusterede hovedstol tilbagebetalt sammen med den sidste rentebetaling. De enkelte nominelle kuponbetalinger i kroner og øre bliver udregnet således:

$$C_n = C_r \pi_t \tag{9}$$

medens den sidste betaling bliver:

$$N_r \pi_T + C_r \pi_T = (N_r + C_r)\,\pi_T \tag{10}$$

Nedenfor vises et eksempel på, hvordan de enkelte betalinger beregnes for en 5-årig CIB:

År	Real kupon	Inflation	Sml. inflation	Just. kupon	Nom. kupon	Just. hovedstol
2004	6,00	1,20%	1,0120	0,07	6,07	
2005	6,00	1,80%	1,0302	0,18	6,18	
2006	6,00	1,90%	1,0498	0,30	6,30	
2007	6,00	1,70%	1,0676	0,41	6,41	
2008	6,00	3,40%	1,1039	0,62	6,62	110,39

Fx er den samlede inflation i 2006 beregnet som $1,0302 * 1,9\% = 1,0498$, inflationsjusteringen af kuponen er beregnet som $6*(1,0498-1) = 0,30$ og den nominelle kuponbetaling er beregnet som $6 * 1,0498 = 6,30$, hvilket naturligvis også er den reale kupon plus inflationsjusteringen.

4.1.2 Interest Indexed Bonds

IIBs betaler en fast kupon plus en procentdel svarende til inflationen af den faste hovedstol hver periode. Hovedstolsbetalingen ved udløb er *ikke* indekseret og er således bare kurs pari som for en nominel obligation. Dermed ligger inflationssikringen kun i de løbende kuponbetalinger, som blot er den reale kupon plus inflationen:

$$C_n = C_r + \pi_t * 100 \tag{11}$$

Det er den væsentligste forskel fra CIB, som således også giver en bedre beskyttelse mod inflation. En IIB er derfor en slags inflationsbeskyttende obligation med variabel rente. Det numeriske eksempel for en 5-årig IIB vises her:

År	Real kupon	Inflation	Just. hovedstol	Nom. kupon	Hovedstol
2004	6,00	1,20%	1,20	7,20	
2005	6,00	1,80%	1,80	7,80	
2006	6,00	1,90%	1,90	7,90	
2007	6,00	1,70%	1,70	7,70	
2008	6,00	3,40%	3,40	9,40	100

For år 2006 er inflationsjusteringen af hovedstolen beregnet således: $1,9\% * 100 = 1,90$, medens den nominelle kupon er beregnet som $6 + 1,9\% * 100 = 7,90$.

4.1.3 Current Pay Bond

En CPB minder meget om IIB'en, eftersom der ikke foreligger inflationsjustering af hovedstolen ved udløb. Men hvor IIB'en betaler en fast kupon plus en procentdel af den faste hovedstol hver periode, betaler en CPB både en inflationsjusteret kupon samt en procentdel svarende til inflationen af den faste hovedstol. Den samlede kuponbetaling bliver dermed:

$$C_n = C_r + \pi_t * (100 + C_r) \tag{12}$$

Dermed er en CPB også en slags inflationsbeskyttende obligation med variabel rente. Det numeriske eksempel er givet nedenfor:

År	Real kupon	Inflation	Just. kupon	Just. hovedstol	Nom. kupon	Hovedstol
2004	6,00	1,20%	0,07	1,20	7,27	
2005	6,00	1,80%	0,11	1,80	7,91	
2006	6,00	1,90%	0,11	1,90	8,01	
2007	6,00	1,70%	0,10	1,70	7,80	
2008	6,00	3,40%	0,20	3,40	9,60	100

For år 2006 er inflationsjusteringen af kuponen beregnet som $6*((1 + 1,9\%) - 1) = 0,11$, inflationsjusteringen af hovedstolen er $1,9\%*100 = 1,90$, og den samlede kupon er $6 + 1,9\% * (100 + 6) = 8,01$ eller bare de tre elementer lagt sammen.

4.1.4 Indexed Annuity Bond

En IAB består af en fast annuitetsbetaling, B, plus en variabel del, der kompenserer for inflationen. Den faste annuitetsbetaling beregnes med udgangspunkt i den reale renteprocent, r_t, medens den variable del korrigerer den faste del for inflationen.

Den faste del beregnes altså således:

$$B = N * \frac{r_t}{1 - (1 + r_t)^{-n}} \tag{13}$$

hvilket er kendt fra standard rentesregning for annuitetsformler.[8]

Nedenfor vises et numerisk eksempel med en IAB:

År	Fast betaling	Inflation	Sml. inflation	Variabel del	I alt
2004	23,74	1,20%	1,0120	0,28	24,02
2005	23,74	1,80%	1,0302	0,72	24,46
2006	23,74	1,90%	1,0498	1,18	24,92
2007	23,74	1,70%	1,0676	1,61	25,35
2008	23,74	3,40%	1,1039	2,47	26,21

Den faste betaling er beregnet på følgende måde jf. ovenstående formel: $B = 100 * \frac{0{,}06}{1-(1{,}06)^{-5}} = 23,74$, medens den variable del for 2006 er beregnet som $23,74 * (1,0498 - 1) = 1,18$. Den samlede pengestrøm er derfor $23,74 + 1,18 = 24,92$, og den samlede betaling stiger naturligvis i takt med, at inflationen stiger.

4.1.5 Indexed Zero-Coupon Bond

Den sidste type af indeksobligationer, der vil blive gennemgået her, er den indekserede nulkuponobligation, IZCB. En IZCB består udelukkende af betaling ved udløb, og denne betaling er korrigeret for den løbende inflation igennem perioden. Der er derfor ingen løbende kuponbetaling. På næste side er det numeriske eksempel vist.

[8] Jf. Astrup Jensen: Rentesregning, s. 14

År	Real kupon	Inflation	Sml. inflation	Just. hovedstol
2004	0,00	1,20%	1,0120	
2005	0,00	1,80%	1,0302	
2006	0,00	1,90%	1,0498	
2007	0,00	1,70%	1,0676	
2008	0,00	3,40%	1,1039	110,39

4.2 Indekseringslags

Meningen med indeksobligationer er som bekendt, at de skal give sikkerhed for den reale rente og således eliminere inflationsrisikoen. Derfor bør de betalinger, der skal inflationskorrigeres, også være linket så tæt som muligt til den rigtige inflation. Det vil naturligvis være bedst, hvis man man kan opgøre inflationen på de tidspunkter, hvor der foreligger kuponbetalinger, men dette lader sig ikke gøre i praksis, og derfor skal man bruge en "lagget" værdi for inflationen på valørdatoen for indeksobligationen. Det medfører, at inflationsrisikoen ikke elimineres fuldstændigt i den sidste periode af løbetiden for obligationen. Det forholder sig generelt således, at inflationen i den perfekte indekseringsperiode ikke er den samme som inflationen i den laggede periode. For stabile økonomier er det dog ikke noget uoverskueligt problem, men man skal være opmærksom på, at desto længere lagget er, desto større bliver inflationsrisikoen.

Der er hovedsageligt to grunde til, at der opstår indekseringslags. Den første er, at det underliggende inflationsindeks ikke offentliggøres samtidig med, at rentebetalingen skal ske, men det i stedet offentliggøres med en forskydning. Denne forskydning skyldes, at det tager tid at indsamle, kontrollere og offentliggøre data for prisændringerne. Fx offentliggøres den danske inflation med ca. ti dages forsinkelse, hvilket betyder, at inflationen for september bliver offentliggjort omkring d. 10. oktober.

Den anden grund til at der opstår indekseringslags er, når der handles indeksobligationer mellem to kupondatoer. Hvis dette sker, skal sælger naturligvis kompenseres for at have haft obligationen fra seneste rentebetaling og til handelsdatoen helt som, hvis der havde været tale om en nominel obligation, hvor der betales en vedhængende rente. Denne vedhængende rente skal også reguleres for inflation, og det er altså endnu en grund til, at der opstår indekseringslags.

Den mest normale måde at indarbejde indekseringslags på er den canadiske måde, som nu er standardmetoden til at behandle lags for stort set alle udstedere af indeksobligationer. Ved den canadiske metode beregner man det laggede indeks, *Daily Inflation Reference Index - DIR_t*, med udgangspunkt i inflationsindekset (det vil sige forbrugerprisindekset eller CPI jf. kapitel 2) for tre måneder siden, og det beregnes på denne måde:

$$DIR_t = CPI_{m-3} + \frac{\text{antal dage siden månedens start-1}}{\text{antal dage i måneden}} * (CPI_{m-2} - CPI_{m-3}) \quad (14)$$

Det vil sige, at hvis man skal beregne det laggede indeks for december 2009, skal man tage udgangspunkt i værdien af indekset for september 2009.

For at finde ud af hvad den nominelle kupon skal korrigeres med, beregner man en såkaldt *Index Ratio,* der er det laggede inflationsindeks i forhold til startværdien af inflationsindekset ved udstedelsen af indeksobligation. Index Ratio til tidspunkt t, IR_t, findes således:

$$IR_t = \frac{DIR_t}{DIR_0} \quad (15)$$

hvor DIR_0 er værdien af inflationsindekset ved udstedelse af indeksobligationen.[9] Hvis man har købt en indeksobligation d. 31. januar 1994, hvor $DIR_{31011994} = 245,1$, og man står i december 2009 og har en $DIR_{29122009} = 301,059$, da er $IR_{29122009} = \frac{301,059}{245,1} = 1,228312$, som altså er det, der skal ganges på kuponen for at korrigere den for inflationen.[10]

4.3 Empirisk eksempel

Dette afsnit omfatter et dybdegående eksempel på den empiriske behandling af inflationsjustering og indekseringslags. Eksemplet vil gennemgå, hvordan de nominelle betalinger korrigeres for inflationen, og det vil blive udførligt vist, hvordan Index Ratio er beregnet, herunder hvordan indeksfaktoren er beregnet.

Eksemplet tager udgangspunkt i den svenske indeksobligation SGB 4 12/01/20 #3102 med aftaledato d. 29. december 2009.[11] Obligationen er udstedt af den svenske stat med udløb d. 1. december 2020, og der ses på obligationen pr. 29. december 2009. I bilag 1 er vist et screen shot fra Bloomberg pr. 29. december

[9] Eller alternativt den værdi udsteder vælger til at være startværdi for inflationsindekset

[10] Disse tal er for den svenske indeksobligation, som vi vil se på i næste afsnit

[11] Den kan findes på Bloomberg ved at skrive ID SE0000317943 og "Go", hvor SE0000317943 er obligationens ISIN-kode

2009, hvoraf det fremgår, at der skal opnås en inflationsjusteret pris på $154,44$.[12] For at beregne den korrigerede pris skal man igennem følgende seks trin:

1. Find betalingsprofilen uden inflationskorrigering

2. Tilbagediskontér betalingerne med den reale rente og find den ujusterede pris inklusiv vedhængende rente[13]

3. Find den vedhængende rente og træk den fra den ujusterede pris i punkt 2. for at få den ujusterede clean price

4. Find IR_t (og herunder DIR_t)

5. Multiplicér IR_t på den ujusterede dirty price og på den vedhængende rente for at finde den justerede dirty price

6. Træk den justerede vedhængende rente fra den justerede dirty price for at få den justerede clean price, som er den pris, vi vil finde

Vi starter derfor med at finde betalingsprofilen for obligationen. Det er en 4 % obligation, så den årlige rentebetaling er på SEK 4 i hvert af årene fra 1. december 2010 til 1. december 2020, hvor hovedstolen på SEK 100 også forfalder, så der i alt er en betaling på SEK 104 d. 1. december 2020. I trin 2 skal hver betaling tilbagediskonteres til udgangsdatoen d. 29. december 2009 med den reale rente, som er givet fra Bloomberg og er $1,437\%$. Summen af de tilbagediskonterede betalinger er den ujusterede pris inklusive vedhængende rente. Trin 1 og 2 er skitseret i nedenstående skema på næste side:

[12] Denne pris betegnes også som *adjusted clean price*

[13] Som også kaldes *dirty price*

Dato	Real betaling	T	Nutidsværdi
01/12/2010	4	0,92	3,95
01/12/2011	4	1,92	3,89
01/12/2012	4	2,92	3,84
01/12/2013	4	3,92	3,78
01/12/2014	4	4,92	3,73
01/12/2015	4	5,92	3,68
01/12/2016	4	6,92	3,62
01/12/2017	4	7,92	3,57
01/12/2018	4	8,92	3,52
01/12/2019	4	9,92	3,47
01/12/2020	104	10,92	88,99
Ujust. pris inkl. vedhængende rente			126,04

Fx angiver $T = 0,92$, at der er fra d. 22. december 2009 til 1. december 2010 er 0,92 år. Den tilbagediskonterede rentebetaling er angivet som: $PV_{01122010} = 4 * (1 + 0,01437)^{-0,92} = 3,95$.

På trin 3 findes den vedhængende rente som $6 * \frac{28}{360} = 0,31111$, da den vedhængende rente i Sverige beregnes udfra en antagelse om en måned på 30 dage. Denne vedhængende rente trækkes fra den ujusterede dirty price, og dermed fås den ujusterede clean price på $126,04 - 0,31111 = 125,733$, som det fremgår af udskriftet i bilag 1 med forbehold for afrunding.

Herefter skal vi finde Index Ratio, $IR_{2912009}$. Indledningsvist skal vi finde $DIR_{29122009}$, hvor vi bruger formel (14):

$$DIR_{29122009} = 300,35 + \frac{29-1}{30} * (301,11 - 300,35) = 301,059 \quad (16)$$

Her er $300,35$ værdien af den svenske prisindeks i september 2009 (det vil sige tre måneder før december), medens $301,11$ er værdien af indekset i oktober 2009. Desuden ses fra bilag 1, at $DIR_0 = 245,1$, hvorfor Index Ratio bliver:

$$IR_{29122009} = \frac{301,059}{245,1} = 1,228312 \quad (17)$$

I trin 5 skal Index Ratio ganges på henholdsvis den vedhængende rente samt den ujusterede dirty price. Dermed fås en justerede vedhængende rente på $0,311 * 1,228312 = 0,382$, medens den justerede dirty price bliver $126,04 * 1,228312 =$

154, 82.

I sidste trin trækker vi den justerede vedhængende rente fra den justerede dirty price for at få prisen på indeksobligationen i henhold til Bloomberg:

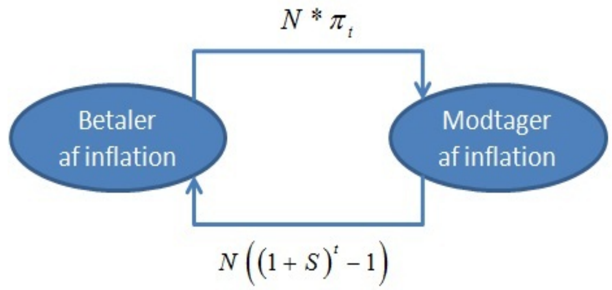
$$P = 154,82 - 0,382 = 154,44 \tag{18}$$

Dermed er vi kommet frem til den inflationsjusterede pris, som fremgår af Bloomberg. Dette empiriske eksempel har således belyst, hvordan man i praksis behandler en inflationsindekseret obligation.

4.4 Inflationsderivater

I de første afsnit af dette kapitel har fokus været på konventionelle inflationsprodukter, i og med indeksobligationerne er blevet behandlet. Der findes imidlertid et kraftigt voksende marked for inflationsderivater, hvilket dette afsnit vil behandle. Det interessante i inflationsderivater er deres fleksibilitet, der tager sit udspring i, at timingen af inflationsderivatets betalinger og valg af det underliggende prisindeks ikke ligger fast, men i stedet vælges af de enkelte aktører på markedet. På den måde komplementerer inflationsderivaterne det underliggende marked for inflationsobligationer. Inflationsderivater giver derfor muligheden for henholdsvis at overføre risiko, for at opnå større likviditet, for at optimere markedstiming, for at hedge porteføljen og for at tilpasse pengestrømme til de enkelte aktører. Den mest udbredte form for inflationsderivater er inflationsswappen, hvilket også er fokus i dette afsnit. Desuden vil idéen bag en inflation-linked asset swap kort blive introduceret til sidst i kapitlet.

En inflationsswap er en fordring, hvor den ene part modtager inflationen over en tidsrække mod til gengæld at betale en fast præmie kaldet swapspread til den anden part. Dermed er der både et flydende ben (inflationsbenet), der først kendes ved kontraktens udløb og et fast ben, der allerede kendes ved kontraktens indgåelse, hvilket er kendt fra traditionelle renteswaps. Hvis vi lader swappens hovedstol være angivet ned N, inflationen $\pi_t = \frac{CPI_t}{CPI_0} - 1$ og swapspreadet være angivet ved S, så kan betalingsstrukturen illustreres som i nedenstående figur på næste side:



Figur 2: Inflationsswap. Kilde: Egen tilvirkning

Det faste swapspread er kendt ved kontraktens indgåelse og er bestemt af markedets forventninger til inflationen i den periode, som swappen løber over.

Der findes to primære swapstrukturer, der handles på markedet for inflationsswaps: nulkuponswappen og year-on-year-swappen. Forskellen i disse to strukturer skal findes i, at nulkuponswappen kun har en enkelt betaling ved swappens udløb og dermed kan betragtes som en forwardaftale, medens year-on-year-swappen har betalinger i hvert af swappens leveår. I nedenstående to delafsnit behandles de to strukturer mere dybdegående.

4.4.1 Nulkuponswap (ZCIIS)[14]

Den bagvedliggende tanke er, at nutidsværdien af den samlede swap skal være 0. Derfor må henholdsvis det variable og faste ben have samme værdi. Til at starte med findes værdien af det variable ben - altså det ben, der afhænger af inflationen over swappens løbetid. Det variable ben består af to led:

1. $N\left(\frac{CPI_t}{CPI_0}\right)$, som svarer til betalingen ved udløb af en indekseret nulkuponobligation
2. N, som svarer til betalingen ved udløb af en nominel obligation, der udløber til pålydende værdi

Standard no-arbitrage teori giver, at værdien af det flydende ben på tidspunkt t, $0 \leq t \leq T$, er:

$$ZCIIS_{t,flydende} = NE_n \left\{ e^{-\int_t^T n(u)du} \left[\frac{CPI_T}{CPI_0} - 1 \right] |\mathcal{F}_t \right\} \tag{19}$$

[14]På engelsk "Zero-coupon inflation-indexed swap" hvorfor forkortelsen "ZCIIS" er angivet

Her er $\mathcal{F}_t$ σ-algebraen, der stammer fra den underliggende proces op til tid t, og E angiver som altid den forventede værdi. Hvis vi som i afsnit 2.2.2 bruger tankegangen bag en valutainvestering i fremmed valuta, er den nominelle pris på en real nulkuponobligation det samme som den nominelle pris på en kontrakt, der udbetaler en enhed af CPI-indekset ved obligationens udløb. Det giver os:

$$CPI_t P_{t,r} = CPI_t E_r \left\{ e^{-\int_t^T r(u)du} | \mathcal{F}_t \right\} = E_n \left\{ e^{-\int_t^T n(u)du} CPI_T | \mathcal{F}_t \right\} \tag{20}$$

Derfor bliver (19) til:

$$ZCIIS_{t,flydende} = N \left[\frac{CPI_t}{CPI_0} P_{t,r} - P_{t,n} \right] \tag{21}$$

som på tid 0 bliver:

$$ZCIIS_{flydende} = N \left[P_r - P_n \right] \tag{22}$$

Dette kan også ses fra definitionen af inflationen, da fortegnet på den nominelle del af det variable ben er negativt, så ved at have en position i det variable ben af nulkuponswappen har man reelt en lang position i den indekserede nulkuponobligation samt et kort ben i den tilsvarende nominelle nulkuponobligation. Derfor er værdien af det variable ben defineret ved forskellen mellem prisen på den indekserede og nominelle obligation som i de to ovenstående formler.

Værdien af swapkontraktens faste ben kendes som beskrevet allerede ved indgåelse af kontrakten. Dermed er al stokastik fjernet, og derfor kan værdien tilbagediskonteres på den nominelle rentekurve, hvilket giver:

$$ZCIIS_{fast} = P_n N \left[(1+S)^t - 1 \right] \tag{23}$$

Ved at sætte de to ligninger på tidspunkt 0 lig hinanden på, kan vi finde frem til en sammenhæng for den reale og nominelle diskonteringsfaktor samt swapspreadet:

$$N \left[P_r - P_n \right] = P_n N \left[(1+S)^t - 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$P_r = P_n (1+S)^t \tag{24}$$

Af ovenstående ligning fremgår det, at for at opretholde ligevægt og dermed forhindre arbitrage må swapspreadet være identisk med break-even inflationen. Swapspreadet skal altså indeholde en kompensation for, at sælgeren af det variable ben ikke kender den reelle inflation, når swapaftalen indgås, ligesom der skal kompenseres for markedets forventede inflation i swappens løbetid, hvilket jo netop svarer til break-even inflationen jf. kapitel 2.

At swapspreadet skal svare til break-even inflationen illustreres ved nedenstående eksempel. Betalingsstrømmene for henholdsvis den reale og nominelle obligation samt det faste og flydende ben af nulkuponswappen indledningsvist er sat op tabelmæssigt nedenfor.

	Tidspunkt	
Instrument	$t=0$	*Udløb*
Indeksobligation	$-P_r$	$N\left[\frac{CPI_t}{CPI_0}\right]$
Nominel obligation	P_n	$-N$
ZCIIS, fast ben	0	$N\left[(1+S)^t-1\right]$
ZCIIS, flydende ben	0	$-N\left[\frac{CPI_t}{CPI_0}-1\right]$

Hvis break-even inflationen er mindre end swapspreadet, vil det være muligt at opnå en arbitrage ved at indgå en ZCIIS-aftale, hvor det faste ben købes mod betaling af inflationen i det variable ben, samtidig med at man køber en indeksobligation med pris P_r og sælger en nominel obligation til pris P_n med identisk løbetid. Som allerede vist, svarer positionen i det flydende ben til at have en lang position i indeksobligationen og en kort position i den nominelle obligation. Dermed er det eneste tilbageværende mellemværende ved udløb det faste ben af inflationsswappen.

Der ses nu nærmere på forskellen mellem de enkelte positioner. Forskellen mellem indeksobligationen og den nominelle obligation er break-even inflationen tilbagediskonteret med den nominelle rente:

$$P_r - P_n = \frac{N(1+BEI)^t-1}{(1+i_n)^t}$$

For at forhindre arbitragemuligheder skal nutidsværdien af det faste ben i swapkontrakten i ligning (23) stemme overens med forskellen mellem P_r og P_n, hvilket medfører, at swapspreadet skal være identisk med break-even inflationen:

$$\frac{N\left(1+S\right)^t-1}{\left(1+i_n\right)^t} = \frac{N\left(1+BEI\right)^t-1}{\left(1+i_n\right)^t} \tag{25}$$

hvilket naturligt giver, at swapspreadet skal være identisk med break-even inflationen.

Hvis denne sammenhæng ikke forefindes, kan der opnås en arbitrage ved at foretage de i ovenstående tabel viste transaktioner, hvis swapspreadet altså er større end break-even inflationen. Såfremt swapspreadet er mindre end break-even inflationen, kan man naturligvis også opnå en arbitragegevinst ved foretage de modsatrettede handler; det vil sige købe det flydende ben mod at betale swapspreadet i inflationsswappen samt sælge en indeksobligation og købe en nominel obligation.

For at kunne udnytte en eventuel uoverensstemmelse mellem swap- og obligationsmarkedernes fastsættelse af break-even inflationen kræver det dog, at de pågældende obligationer og inflationsswaps eksisterer. I skrivende stund er det kun på de færreste markeder, at der rent faktisk er tilstrækkeligt med instrumenter til, at der ikke forekommer afvigelser mellem swapspreads og break-even inflation på de enkelte løbetider, men såfremt der er tilstrækkeligt med obligationer og swaps, bør swapspreadet teoretisk være lig med break-even inflationen.

4.4.2 Year-on-year inflation-indexed swap (YYIIS)

En YYIIS er den anden type af inflationsswap, og som beskrevet før er den karakteriseret ved årlige betalinger over dens løbetid.[15] Helt ligesom en ZCIIS betaler det faste ben et årligt swapspread, medens det flydende ben betaler inflationen i løbet af året. Det betyder, at swapspreadet i en YYIIS kan betragtes som et gennemsnit af den årlige inflation over inflationens løbetid.

Det flydende ben af year-on-year swappen betaler i hver periode:

$$N\psi_i \left[\frac{CPI_{T_i}}{CPI_{T_{i-1}}} - 1 \right] \tag{26}$$

hvor ψ_i er en brøkdel af et år som fx $\frac{30}{360}$. Det faste ben betaler hvert år

$$N\psi_i S \tag{27}$$

Da der er betalinger hvert år, er der lidt mere notation, når der skal findes en værdi for YYIIS'en end for ZCIIS'en, men strukturen i YYIIS'en er stadig lineær. Derfor kan værdien af det flydende ben i ligning (26) på tidspunkt $t < t_i$ skrives som:

$$YYIIS_{t,flydende} = N\psi_i E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_i} n(u)du} \left[\frac{CPI_{T_i}}{CPI_{T_{i-1}}} - 1 \right] |\mathcal{F}_t \right\} \tag{28}$$

[15] Der kan også forekomme andre periodemæssige betalinger end år

Hvis vi desuden antager, at $t < T_{i-1}$, hvilket gør, at vi ikke ender med en ZCIIS igen, kan formlen skrives som:

$$N\psi_i E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(u)du} E_n \left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} n(u)du} \left(\frac{CPI_{T_i}}{CPI_{T_{i-1}}} - 1 \right) |\mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] |\mathcal{F}_t \right\} \tag{29}$$

hvor den indre forventning svarer til en ZCIIS som i formel (19), hvilket giver:

$$\begin{aligned} & N\psi_i E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(u)du} \left[P_{T_i,r}(T_{i-1}) - P_{T_i,n}(T_{i-1}) \right] |\mathcal{F}_t \right\} \\ = {} & N\psi_i E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(u)du} P_{T_i,r}(T_{i-1}) |\mathcal{F}_t \right\} - N\psi_i P_{T_i,n}(T_{i-1}) \end{aligned} \tag{30}$$

Den sidste forventning kan ses som den nominelle pris af en ZCIIS i nominelle termer. Hvis de reale renter er deterministiske, fås:

$$\begin{aligned} E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(u)du} P_{T_i,r}(T_{i-1}) |\mathcal{F}_t \right\} &= P_{T_i,r}(T_{i-1}) P_{T_i,r}(T_{i-1}) \\ &= \frac{P_{T_i,r}(t)}{P_{T_{i-1},r}(t)} P_{T_{i-1},r}(t) \end{aligned} \tag{31}$$

Dermed er prisen nutidsværdien i nominelle termer af forwardprisen på indeksobligationen. Men i praksis er realrenterne stokastiske, og derfor er den forventede værdi i ligning (30) modelafhængig.

4.4.3 Inflation-linked Asset Swap (ILAS)

Den sidste type af swaps, der vil blive gennemgået kort, er en inflation-linked asset swap. En traditionel asset swap er en kombination af en renteswap og en obligation, og den omdanner obligationens betalingsstrøm til et spænd til LIBOR (London Interbank Offered Rate). Det er renteswappens konstruktion, der tilsikrer, at det faste ben svarer til obligationens betalingsstrøm, medens spændet til LIBOR på det flydende ben sørger for, at nutidsværdien af swappen er nul til at starte med.

For en traditionel assep swap med en nominel obligation består swappen af selve obligationen med faste kuponbetalinger samt en fixed-for-floating renteswap, hvor den ene part betaler et fast beløb til den anden part, som så betaler et variabelt beløb, der afhænger af udviklingen i LIBOR. Dermed fjerner renteswappen den varighed og konveksitet, som obligationen har, hvorfor obligationen altid har pålydende værdi, og asset swappen kan således ses som en syntetisk par-floater.

For en ILAS er det i stedet for en nominel obligation en indeksobligation, hvis kuponer jo er i reale termer. Det betyder, at en ILAS først omdanner de fremtidige betalinger af inflationen til en række faste betalinger i nominelle termer, som bestemmes af break-even inflationen for derefter at omdanne de faste betalinger til LIBOR plus et spænd. Den store forskel i konstruktionen af en ILAS versus en traditionel assep swap ligger i, at betalingerne fra indeksobligationen omdannes til nominelle betalinger, før man definerer spændet overfor LIBOR. Dette ekstra trin er afhængig af et veludviklet inflationsswapmarked, da swaprentekurven dermed kan genereres.

Asset swaps giver udstederen en lang eksponering over for inflationen i markedet, hvilket er en fordel i og med, der er et naturligt mismatch mellem udbud af og efterspørgsel efter inflationseksponering. Dermed kan en ILAS hjælpe med til at mindske spændet mellem break-even inflationen genereret på henholdsvis swap- og obligationsmarkedet.[16]

[16] Jf. Barclays Capital: Inflation Derivatives - A User' Guide

5 Prisningsmodeller for inflationsswaps

I sidste kapitel blev de forskellige indeksobligationer og inflationsswaps introduceret og gennemgået. Fokus i dette kapitel vil være på, hvordan man kan prisfastsætte inflationsswaps ud fra en teoretisk synsvinkel, og der vil således ikke være decideret fokus på konkret anvendelse i praksis modsat den øvrige del af afhandlingen.

Den mest udbredte prisningsstruktur i forbindelse med prisning af inflationsderivater er Heath-Jarrow-Morton-modellen (HJM-modellen), som første gang blev brugt til prisning af inflation. Det er denne model, som dette kapitel vil tage sit udgangspunkt i. Indledningsvist introduceres den generelle HJM-model. Den udvides herefter til den tre-faktor Gaussiske HJM-model til brug for prisfastsættelse af inflationsswaps, hvilket også vises i dette kapitel. Afslutningsvist forklares nogle tidligere empiriske resultater fundet ved brug af den tre-faktor Gaussiske HJM-model.

5.1 Heath-Jarrow-Morton-modellen

Dette afsnit introducerer idéen bag Heath-Jarrow-Morton-tilgangen til prisfastsættelse af derivater. Det tager udgangspunkt i Astrup Jensen: Lecture Notes in Continuous Time Finance, kapitel 12 samt Munk: Fixed Income Analysis - Securities, Pricing, and Risk Management, kapitel 10. Idéen med HJM-modellen er, at man udleder et udtryk for driften i forwardrenteprocessen under $\mathbb{Q}$-målet, som alene afhænger af forwardrentevolatiliteterne.

En HJM-model er en prisningsmodel, der fokuserer på, hvordan man prisfastsætter derivater. Én af de helt store fordele ved HJM-modellen i forhold til andre anvendte prisningsmodeller er, at den forholder sig til hele dynamikken bag forwardkurven ved at inddrage al tilgængelig information i markedet som input. En naturlig måde at opnå konsistens med observerede priser er ved at tage udgangspunkt i den observerede rentestruktur og derefter modellere udviklingen i hele rentestrukturen, således at arbitrage udelukkes.

Følgende notation bruges:

- $P^T(t)$: Prisen på tid t på en nulkuponobligation, der udløber på tid T
- $f_u(t)$: Den infinitesimale forwardrente på tid t startende på tid $u > t$[17]
- $r_t(t)$: Den instantane spotrente på tid t, og den kalder vi blot $r(t)$

[17] Denne notation afviger fra Astrup Jensen, der betegner forwardrenten som $r_u(t)$, men notationen korresponderer bedre med den notation, der skal bruges i næste afsnit

Det ses altså, at hævede bogstaver refererer til obligationspriser, medens sænkede bogstaver refererer til forwardrenter.

Følgende relationer gælder mellem de stokastiske differentialligninger og deres parametre for nulkuponpriser og forwardrenter:

$$P^T(t) = \exp\left(-\int_t^T f_u(t)\,du\right) = \exp\left(-y_t^T(t)(T-t)\right) \tag{32}$$

$$f_T(t) = -\frac{\partial \log P^T(t)}{\partial T} = y_T(t) + (T-t)\frac{\partial y_T(t)}{\partial T} \tag{33}$$

Antag desuden at for et fast udløbstidspunkt T vil forwardrenten udvikle sig således:

$$df_T(t) = \mu_T(t)\,dt - \sigma_T(t)\,dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \tag{34}$$

hvor W_t er uafhængige standard Brownske bevægelser under $\mathbb{Q}$-sandsynligheden, medens $\mu_T(t)$ er forwardrentens drift, og $\sigma^T(t)$ er volatiliteten.

Med disse relationer defineret fås følgende dynamik for nulkuponprisen $P^T(t)$ under $\mathbb{Q}$-sandsynligheden:

$$\begin{aligned}
dP^T(t) &= P^T(t)\left[\mu^T(t)\,dt + \sigma^T(t)\,dW_t\right] \Leftrightarrow \\
\frac{dP^T(t)}{P^T(t)} &= \mu^T(t)\,dt + \sigma^T(t)\,dW_t && (35)\\
\mu^T(t) &= r(t) - \int_t^T \mu_u(t)\,du + \frac{1}{2}\left(\sigma^T(t)\right)^2 && (36)\\
\sigma^T(t) &= \int_t^T \sigma_u(t)\,du && (37)
\end{aligned}$$

hvor ligning (35) svarer til ligning (12.2) i Astrup Jensen og er en antagelse om, at nulkuponobligationskursen drives af en univariat Brownsk bevægelse. Hvis volatiliteten ikke er stokastisk, følger nulkuponobligationens pris en Gaussisk model. Ved at anvende Iô's lemma på $\log P^T(t)$ findes processen for den logaritmiske prisfunktion, $\log P^T(t)$:

$$d\log P^T(t) = \frac{dP^T(t)}{P^T(t)} - \frac{1}{2}\sigma^T(t)^2\,dt = \left(\mu^T(t) - \frac{1}{2}\sigma^T(t)^2\right)dt + \sigma^T(t)\,dW_t \tag{38}$$

som på integraleform skrives således:

$$\log P^T(t) = \log P^T(0) + \int_0^t \left(\mu^T(s) - \frac{1}{2}\sigma^T(s)^2\right) ds + \int_0^t \sigma^T(s)\, dW_t \tag{39}$$

Ved at analysere ligningerne (36) og (37) følger det, at volatiliteten i forwardrentens proces - kaldet volatilitetsstrukturen - bestemmer volatiliteten for prisprocessen for hver enkelt nulkuponobligation. Desuden fremgår det af ligning (36), at det forventede afkast for nulkuponobligationerne består af tre led:

1. Spotrenten, $r(t)$
2. Den forventede ændring i forwardrenterne, $\mu_u(t)$ for $t \leq u \leq T$
3. Forwardrenternes volatilitetsstruktur, $\sigma^T(t)$

Desuden fremgår risikopræmien på nulkuponobligationerne også af ligning (36), idet den defineres som:

$$\lambda^T(t) = -\int_t^T \mu_u(t)\, du + \frac{1}{2}\left(\sigma^T(t)\right)^2 \tag{40}$$

Hvis den forventede ændring i forwardrenterne er negativ, vil risikopræmien blive mindre, i og med komponenten $\int_t^T \mu_u(t)\, du$ er mindre end nul, og derfor vil det forventede afkast blive større. Hvis den forventede ændring i forwardrenterne omvendt er positiv, vil det medføre, at det forventede afkast vil blive mindre.

Fra ligning (36) og (37), der jo beskriver det forventede afkast og volatiliteten på nulkuponobligationen, får vi tilsvarende det forventede afkast og volatiliteten på forwardrenten:

$$\sigma_T(t) = \frac{\partial \sigma^T(t)}{\partial T} \wedge \sigma^t(t) = 0 \tag{41}$$

$$\mu_T(t) = -\frac{\partial \mu^T(t)}{\partial T} + \sigma^T(t)\,\sigma_T(t) \tag{42}$$

Det fremgår altså af ligning (41), at volatiliteten på den infinitesimale nulkuponobligations pris er 0, da man jo således er tæt på obligationens udløb, hvor den kendte kuponbetaling foreligger.

Ligningerne (36) og (37) er også valide, hvis vi tager udgangspunkt i den risikoneutrale prisproces for nulkuponobligationerne. Så er risikopræmien nul, hvor det forventede afkast på nulkuponobligationerne svarer til spotrenten udtrykt ved

$\mu^T(t) = r(t)$, medens volatiliteten er uændret. Under det risikoneutrale mål $\mathbb{Q}$ vil driftkoefficienterne for forwardprocessen udelukkende være bestemt ud fra volatilitetsstrukturen:

$$\mu_T(t) = \sigma^T(t)\,\sigma_T(t) = \sigma_T(t)\int_t^T \sigma_u(t)\,du \tag{43}$$

Ligning (43) kaldes **HJM drift-restriktionen.** Denne restriktion har to vigtige karakteristika:

For det første er den måde, hvorpå forwardrenterne agerer under det risikoneutrale mål $\mathbb{Q}$, karakteriseret ved den initiale forwardrentekurve samt forwardrentevolatiliteten, $\int_t^T \sigma_u(t)\,du$. Driften på forwardrenten skal således ikke defineres eksogent.

For det andet så medfører det faktum, at derivatpriser afhænger af rentestrukturen under det risikoneutrale mål, at disse priser på derivater kun afhænger af den initiale forwardrentekurve og forwardrentevolatiliteten. De afhænger således ikke af, hvad risikopræmien er. Af den grund behøver vi ikke lave nogle antagelser omkring prisen på risiko for at prisfastsætte derivater i en HJM-model, hvorfor HJM-modeller siges at være rene arbitragefri modeller.

Vi fortsætter nu med at udlede koefficienterne i processen for spotrenten, $r(t)$:[18]

$$\begin{aligned} dr(t) &= \mu(t)\,dt - \sigma(t)\,dW_t \Leftrightarrow \\ r(t) &= r(0) + \int_0^t \mu(s)\,ds - \int_0^t \sigma(s)\,dW_s \end{aligned} \tag{44}$$

I den forbindelse observeres det, at spotrenten, $r(t)$, er skæringen med forwardrentekurven. Ved at anvende reglen om at en differentiabel funktion er integralet af dens afledte, får vi følgende:

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0) + \int_0^t \frac{\partial f_u(0)}{\partial u}du + \int_0^t \left[\mu_s(s) + \int_s^t \frac{\partial \mu_u(s)}{\partial u}du\right] ds - \\ &\int_0^t \left[\sigma_s(s) + \int_s^t \frac{\partial \sigma_u(s)}{\partial u}du\right] dW_s \end{aligned} \tag{45}$$

Ved at omordne og reformulere findes følgende relation, der svarer til formel (12.23) i Astrup Jensen:

[18] For at kunne lave denne opskrivning skal HJM-modellen generelt være en såkaldt Markovian HJM-model, hvor rentekurven er en funktion af et endeligt antal state variable

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \mu_s(s)\,ds - \int_0^t \sigma_s(s)\,dW_s + \int_0^t \frac{\partial f_u(s)}{\partial u}|_{u=s} ds \qquad (46)$$

Dette gør os i stand til at identificere koefficienterne i processen for den korte rente, $r(t)$:

$$\mu(s) = \mu_s(s) + \frac{\partial f_u(s)}{\partial u}|_{u=s} \wedge \sigma(s) = \sigma_s(s) \qquad (47)$$

Det fremgår af ligning (47), at tidsvariablen s optræder to steder i processen for den korte rente. Det medfører, at som tiden går, vil forwardrentekurven forskydes, hvilket er udtrykt ved koefficienten $\mu_s(s)$. Simultant sker der et ryk langs forward-kurven, eftersom den til ethvert tidspunkt indeholder information om de fremtidige spotrenter - i et fuldstændig deterministisk scenarium vil forwardrenterne blive til de fremtidige spotrenter. Det fremgår af koefficienten $\frac{\partial r_u(s)}{\partial u}|_{u=s}$ samt af forwardkurvens hældning. Desuden viser ligning (47), hvorfor processen for den korte rente nogle gange kan være en smule umedgørlig, selvom processen for forwardrenten er pæn i form af en Markov-proces. Det skyldes nemlig, at leddet $\frac{\partial r_T(s)}{\partial T}|_{T=s}$ kan indeholde en anselig mængde information og således medføre stiafhængighed.

Hvis vi vender tilbage til den risikoneutrale verden, ser vi, at leddet $\mu_s(s)$ vil forsvinde i processen for den korte rente. Denne del af driften kan ses som "minus risikopræmien" på obligationens pris. Da betingelsen om ingen arbitrage medfører, at risikopræmien er uafhængig af, hvilken nulkuponobligation, der ses på, fås følgende:

$$\lambda(t) = \frac{\mu^T(t) - r(t)}{\sigma^T(t)} \quad \forall T \qquad (48)$$

Denne relation gælder også i grænseværdien, når $T \to t$, hvilket ses ved at bruge l'Hôpitals regel:

$$\lambda(t) = \lim_{T\to t} \frac{\mu^T(t)}{\sigma^T(t)} = \lim_{T\to t} \frac{\mu^T(t)}{\sigma^T(t)} = -\frac{\mu_t(t)}{\sigma_t(t)} \qquad (49)$$

Vi kan således omskrive processen for den korte rente til:

$$dr(t) = \frac{\partial r_u(t)}{\partial u}|_{u=t} dt - \sigma(t)\left(dW_t + \lambda(t)\,dt\right) = \frac{\partial r_u(t)}{\partial u}|_{u=t} dt - \sigma(t)\,d\hat{W}_t \qquad (50)$$

Som det fremgår af (50), vil det umedgørlige led i processen for den korte rente stadig være til stede i den risikoneutrale verden.

5.2 Tre-faktor Gaussisk HJM-model

Den generelle HJM-model er nu blevet gennemgået, og vi vil derfor udvide den for at vise, hvorledes man kan bruge HJM-tilgangen til at prisfastsætte inflationsderivater. Der findes adskillige udvidelser, men denne afhandling vil fokusere på en tre-faktor Gaussisk HJM-model udledt af Lars Kjærgaard.[19] Modellen tager udgangspunkt i den originale Jarrow & Yildirim-model (1992 & 2003), men i forhold til Jarrow & Yildirim-modellen (2003) er dynamikken hos Kjærgaard beskrevet som skift væk fra forwardkurven, hvilket sikrer, at modellen automatisk passer til den initiale rentekurve og forwardindeks. Det er der to fordele ved:

1. Den simple fremstilling af inflationsderivaternes dynamikker medfører en hurtig evaluering af modellen

2. Der skal estimeres få paramatre i modellen

Modellens tre faktorer er henholdsvis den nominelle og reale nulkuponrentekurve samt det fremtidige prisindeks, som optræder som modellens stokastiske variable.

5.2.1 Modelbeskrivelse

Lad $P_0^T(t)$ og $P_1^T(t)$ være priserne på tid t på henholdsvis en nominel og real nulkuponobligation med udløb på tid T. De nominelle og reale instantane forwardrenter er som ligning (33) givet som:

$$f_i^T(t) = -\frac{\partial \log P_i^T(t)}{\partial T}, \quad i \in \{0,1\} \tag{51}$$

medens de tilsvarende nominelle og reale spotrenter defineres som:

$$r_i(t) = -\frac{\partial \log P_i^T(t)}{\partial T}|_{T=t}, \quad i \in \{0,1\} \tag{52}$$

Det fremtidige indeks $I(t,T)$ udtrykker indeksværdien fra tid t til T; dvs:

$$I(t,T) = I(t)\frac{P_1^T(t)}{P_0^T(t)} \tag{53}$$

Hvis vi formulerer (52) ved hjælp af forwardrenter på tid t_0, fås:

$$r_i(t) = f_i(t_0,t) + x_i(t), \quad i \in \{0,1\} \tag{54}$$

[19] Kjærgaard: "Modelling Inflation"

hvor $x_i(t)$ angiver et skift.

På den tilsvarende måde kan indekset formuleres i log-termer i forhold til det fremtidige indeks:

$$\log I(t) = \log I(t_0, t) + x_2(t) \tag{55}$$

Dynamikkerne vil også blive skrevet på en form, hvor disse skift indgår. Den til vektoren $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ hørende proces i forhold til forwardkurven er som følgende:

$$dx(t) = (\Theta(t) + \phi(t)x(t))\,dt + \Sigma(t)\,dW_0(t) \tag{56}$$

hvor $\phi(t), \Sigma(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ og $x(t), \Theta(t), W_0(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$, medens W_0 som i den generelle HJM-model er en Brownsk bevægelse under det risikoneutrale mål $\mathbb{Q}_0$. $\phi(t)$ benævnes som mean reversion-hastigheden, og $\Sigma(t)\Sigma(t)'$ er den lokale kovariansmatrix, som vi vil skrive således:

$$\begin{aligned} cov(t) &= \Sigma(t)\Sigma(t)' \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_n^2(t) & \rho_{nr}(t)\sigma_n(t)\sigma_r(t) & \rho_{nI}\sigma_n(t)\sigma_I(t) \\ & \sigma_r^2(t) & \rho_{rI}(t)\sigma_r(t)\sigma_I(t) \\ & & \sigma_I^2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{57}$$

Her er $\sigma_n(t)$, $\sigma_r(t)$ og $\sigma_I(t)$ volatiliteten på henholdsvis den nominelle og reale rente samt logaritmen til indekset, medens $\rho_{nr}(t)$, $\rho_{nI}(t)$ og $\rho_{rI}(t)$ er de tilsvarende korrelationer.

Lad endvidere ι_i' være den transformerede i'te enhedsvektor: $\iota_i' = (0, ..., 0, 1, 0..., 0)$ og antag følgende:

$$\iota_i'\phi(t) = (\iota_1 - \iota_2)' = (1, -1, 0) \tag{58}$$

Antag desuden, at der eksisterer et $\Phi(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, og at I er enhedsmatricen, så følgende gælder for, at modellen er en tredimensional arbitragefri Gaussisk inflationsmodel:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \phi(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I \tag{59}$$

Mean reversion-matricen vælges således:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -\kappa_n(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_r(t) & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

For at løse ligning (59) bruges følgende matrix:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22}(t) & 0 \\ \Phi_{31}(t) & \Phi_{32}(t) & 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

hvor:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{11}(t) &= -\kappa_n(t)\,\Phi_{11}(t)\,, \quad \dot{\Phi}_{22}(t) = -\kappa_r(t)\,\Phi_{22}(t) \\ \dot{\Phi}_{31}(t) &= \Phi_{11}(t)\,, \quad \dot{\Phi}_{32}(t) = -\Phi_{22}(t) \\ \Phi_{11}(0) &= \Phi_{22}(0) = 1, \quad \Phi_{31}(0) = \Phi_{32}(0) = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

Disse ligninger kan løses numerisk. Hvis mean reversion-hastigheden er konstant, er $\Phi(t) = e^{\phi t}$ en løsning til (59), og så er:

$$\phi = \begin{pmatrix} -\kappa_n & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_r & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = e^{\phi t} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa_n t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_r t} & 0 \\ \frac{1-e^{-\kappa_n t}}{\kappa_n} & -\frac{1-e^{\kappa_r t}}{\kappa_r} & 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

hvor κ_n og κ_r er mean reversion-hastigheden for de korte nominelle og reale renter.

Lad nu W_0^t være en tredimensional Brownsk bevægelse under det nominelle t-forward mål $\mathbb{Q}_0^t$ med $P_0^t(u)$ som numeraire og definér herefter følgende:

$$\begin{aligned} B^T(t) &= -\int_t^T \Phi(u)\,du \\ A(t) &= \int_0^t \Phi(u)^{-1}\,\Sigma(u)\left(\Phi(u)^{-1}\,\Sigma(u)\right)'\,du \\ \hat{x}(t) &= \int_0^t \Phi(u)^{-1}\,\Sigma(u)\,dW_0^t(u) \end{aligned} \tag{64}$$

Så findes der et lukket udtryk for nulkuponobligationen og indekset:[20]

$$
\begin{aligned}
P_0^T &= \frac{P_0^T(0)}{P_0^t(0)} e^{-\frac{1}{2}\iota_1' B^T(t) A(t) B^T(t)' \iota_1 + \iota_1' B^T(t)\hat{x}(t)} \\
P_1^T &= \frac{P_1^T(0)}{P_1^t(0)} e^{-\frac{1}{2}\left(\iota_t' B^T(t) + 2\iota_3' \Phi(t)\right) A(t) B^T(t)' \iota_2 + \iota_2' B^T(t)\hat{x}(t)} \qquad (65)\\
I(t) &= \frac{I(0) P_1^t(0)}{P_0^t(0)} e^{-\frac{1}{2}\iota_3' \Phi(t) A(t) \Phi(t)' \iota_3 + \iota_3' \Phi(t)\hat{x}(t)}
\end{aligned}
$$

Ved at bruge ligning (54), (55) og (65) samt definere:

$$
a_i(t,T) = -\iota_{i+1}' \int_t^T \Phi(y)\, dy \Phi(t)^{-1} \Sigma(t), \quad i \in \{0,1\} \qquad (66)
$$

kan vi opnå et eksplicit udtryk for x og Θ:

$$
\begin{aligned}
x_i(t) &= \iota_{i+1}' \Phi(t) \left(\hat{x}(t) - \frac{\delta_{i2}}{2} A(t) \Phi(t)' \iota_{i+1}\right) \\
\Theta(t)_i &= \iota_{i+1}' \left[\left(\Phi(t) A(t) \Phi(t)' \iota_1 - \Sigma(t) a_0(t,t)'\right)\right. \qquad (67)\\
&\quad \left. -\frac{\delta_{i2}}{2} \left(\Sigma(t) \Sigma(t)' \iota_{i+1} + \Phi(t) A(t) \Phi(t)' \phi(t)' \iota_{i+1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Her skal man være opmærksom på, at når man går fra det risikoneutrale mål $\mathbb{Q}_i$ til forwardmålet $\mathbb{Q}_i^T$ for $i \in \{0,1\}$, så er $dW_i^T(t) = dW_i(t) - a_i(t,T)' dt$.

Den Gausisske model beskrives ved de første to momenter af $x(t)$; det vil sige middelværdien og kovariansmatricen for $x(t)$. Det følger af ligning (67), at de under det nominelle t-forward mål med konstant mean reversion bliver:

$$
\hat{\mu} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_0^t}(x(t)) = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\iota_3' \Phi(t) A(t) \Phi(t)' \iota_3\right) \qquad (68)
$$

$$
\begin{aligned}
cov(x_0(t), x_0(t)) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_0^t}\left(x(t)^2\right) \\
&= \int_0^t \iota_1' \Phi^{-1}(u) \Sigma(u) \Sigma(u)' \Phi^{-1}(u)' \Phi(t)' \iota_1 du \qquad (69)\\
&= \iota_1' \Phi(t) A(t) \Phi(t)' \iota_1
\end{aligned}
$$

og tilsvarende for de øvrige dele af kovariansmatricen. Med antagelsen om konstant mean reversion simplificeres det sidste led til $e^{-2\kappa_n t} A_{00}(t)$. Leddet A_{ij} er simpel

[20] Jf. Andreasen: A Gaussian Exchange Rate and Term Structure Model og Jamshidian: Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model

og hurtig at evaluere på, hvorfor de første momenter af $x(t)$ er lette at bestemme. Hvis der ikke er konstant mean reversion, kan man stadig godt beregne momenterne numerisk før en Monte Carlo-simulering. Da modellen er Gaussisk, er det tilstrækkeligt at kende kende modellens momenter for at bestemme den fulde model. Det betyder, at når man udfører en Monte Carlo-simulering af modellen, er det kun nødvendigt at inkludere event-tidspunktet for inflationsderivatet. Dette - sammenholdt med det lukkede udtryk for diskonteringsfaktorerne og indekset - medfører en hurtig evaluering af inflationsderivaterne i modellen.

En nærmere gennemgang af Monte Carlo-simulering dog ligger uden for denne afhandlings rammer.

5.2.2 Year-on-year inflation-indexed swap

Efter at have gennemgået den tre-faktor Gaussiske model for derivater generelt vil vi bruge den til at finde prisningsformler for year-on-year inflation indexed swaps (YYIIS), som blev introduceret i afsnit 4.4.2. Som beskrevet i det afsnit betales der i en YYIIS et årligt fast swapspread mod at modtage inflationen hvert år. Da middelværdien af indeksratioen er forskellig fra ratioen af indeksmiddelværdien (som omtalt i afsnit 2.3.1), vil YYIIS'en have en konveksitetskorrektion sammenlignet med inflationsforwardkurven.

Ved at anvende ligning (64), (65), (66) og (67) bliver konveksitetseffekten under det nominelle forward T-mål:

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}^T}\left(\frac{I(T)}{I(S)}\right) = \frac{I(0,T)}{I(0,S)} e^{\iota_3'\left((\Phi(S)-\Phi(T))A(S)\Phi(S)'\iota_3 + \Phi(S)A(S)\int_S^T \Phi(y)' dy \iota_1\right)} \tag{70}$$

Hvis vi som tidligere antager, at mean reversion-hastigheden er konstant, får vi:

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}^T}\left(\frac{I(T)}{I(S)}\right) = \frac{I(0,T)}{I(0,S)} e^{\left(e^{-\kappa_r S} - e^{-\kappa_r T}\right)\left(A_{10}(S)\frac{1-e^{\kappa_n S}}{\kappa_r \kappa_n} - A_{11}(S)\frac{1-e^{-\kappa_r S}}{\kappa_r \kappa_r} + A_{12}(S)\frac{1}{\kappa_r}\right)} \tag{71}$$

Her er $A_{10}(S)$, $A_{11}(S)$ og $A_{12}(S)$ udregnet ved at bruge (63) og (64).

5.2.3 Empiriske resultater

Dette afsnit giver en kort gennemgang af de resultater, som den Gaussiske trefaktormodel gav i Kjærgaards undersøgelse. Formålet med afhandlingen er som beskrevet i afgrænsningen ikke at udfærdige en decideret empirisk analyse af et givent datasæt, men i stedet at give en praktisk gennemgang af inflationsprodukter, deres karakteristika, og empiriske eksempler på, hvordan man kan anvende dem i investerings- og porteføljesammenhænge. Men for at udbygge dette teoretiske kapitel vil dette afsnit beskrive måden, hvorpå man kan implementere prisningsmodellen i praksis samt de resultater, som modellen i en tidligere undersøgelse har givet.

Inflationsmodellen er specificeret, så snart mean reversionerne, κ_r og κ_n, samt kovariansmatricen i (57) er bestemt. Disse parametre kalibreres til handlede instrumenter, når det er muligt. Den nominelle volatilitet, σ_n, og mean reversion, κ_n, kalibreres til det nominelle volatilitetsmarked som fx caps, floors og swaptioner.

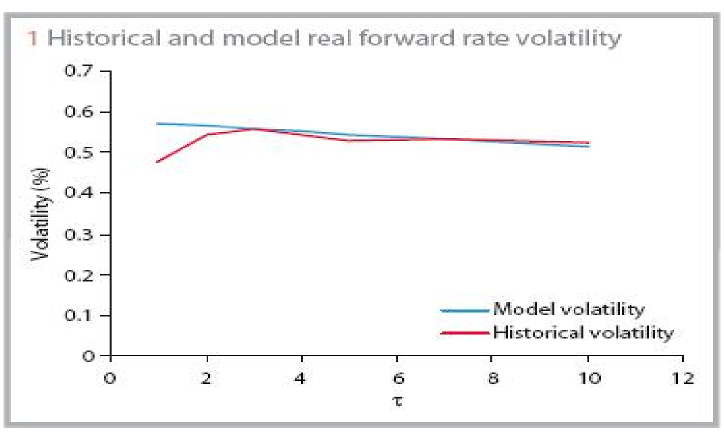
For at estimere korrelationerne ρ_{nr}, ρ_{nI} og ρ_{rI} anvendes tidsserier for den nominelle, reale og inflationsforwardkurven, der genereres fra handlede instrumenter - både nominelle og inflationsindekserede.

De reale forwardrenternes volatilitet, $\sigma_r(t,T)$, kalibreres ved at bruge antagelsen: $\sigma_r(t,T) = \sigma_r e^{-\kappa_r \tau}$, hvor $\tau = T - t$ og $\sigma_r, \kappa_r \in \mathbb{R}_+$. Så estimeres σ_r og κ_r ud fra historiske data på de reale forwardrenter.

På tilsvarende vis estimeres volatiliteten på indekset, σ_I, som kan kalibreres ud fra inflationsoptioner, medens κ_r kan kalibreres fra spændet mellem year-on-year- og nulkuponswaprenterne.

Konkret har Kjærgaard set på det svenske marked og euromarkedet d. 27. oktober 2005, hvad angår tidsserierne, ligesom nominelle swaps og inflationsswaps på HICP[21] er taget med.

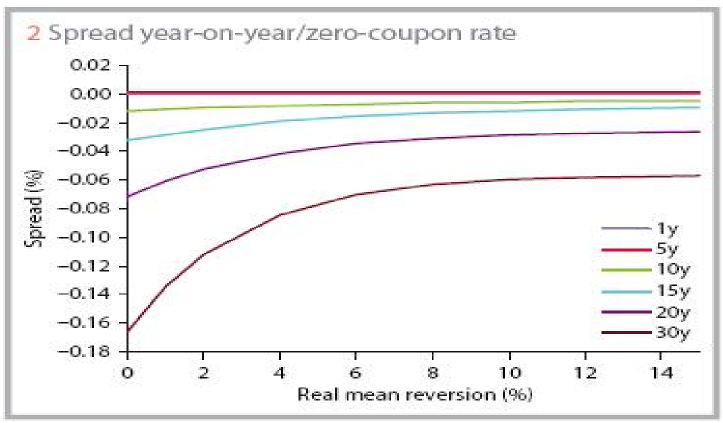
Et eksempel på estimering af σ_r og κ_r er vist i nedenstående figur. For $\tau = 1$ estimeres modellen parametrene til at blive $\sigma_r = 0,58\%$ og $\kappa_r = 1,2\%$.



Figur 3: Estimering af σ_r og κ_r. Kilde: Kjærgaard

[21] Forkortelse for Harmonised Index of Consumer Prices

Mean reversion-parametren, κ_r, kan også kalibreres fra konveksitetskorrektion af year-on-year inflation-indexed swaps. Ved at bruge ligning (71) plottes spændet mellem year-on-year- og nulkuponswappen for HICP i nedenstående figur som en funktion af den reale mean reversion for forskellige løbetider. Som korrelationer er henholdsvis $\rho_{nr} = 0,65$ og $\rho_{nI} = \rho_{rI} = 0,2$ anvendt. Volatiliteten på inflationen er sat til 1 %, den nominelle volatilitet er taget fra en én-faktor Gaussisk model, og den reale volatilitet er sat til 0,58 % jf. ovenstående. De forskellige spænd ser da således ud:



Figur 4: Spænd som funktion af real mean reversion. Kilde: Kjærgaard

Nedenstånde tabel viser det empiriske spænd mellem year-on-year- og nulkuponswappen for forskellige løbetider ligesom spændet fundet i en lineær model uden konveksitetskorrektion fremgår. Desuden er der vist spændet fra den Gaussiske model for forskellige reale mean reversions.

B. Spreads between year-on-year and zero-coupon inflation swaps in euros for different maturities (bp)

Maturity	Market	Linear model	$\kappa_r = 1\%$	$\kappa_r = 1.2\%$	$\kappa_r = 2\%$
5y	−1.0	0.0	0.1	0.1	0.1
10y	−2.5	−0.3	−1.1	−1.1	−1.0
15y	−5.0	−0.8	−2.9	−2.8	−2.5
30y	−11.0	−5.0	−13.4	−12.9	−11.2

Figur 5: Empirisk spænd mellem YoY- og nulkuponswappen. Kilde: Kjærgaard

Det fremgår af figur 4 og 5, at de reale mean reversioner fra prisningsmodellen er i overensstemmelse med de historiske estimater af κ_r i niveauet $\kappa_r \approx 1\% - 2\%$ pr. 27. oktober 2005.

Et eksempel på en teoretisk prisfastsættelsesmodel i form af en tre-faktor Gaussisk HJM-model er nu blevet gennemgået og de empiriske resultater fra Kjærgaard er blevet listet. Formålet med denne afhandling har ikke været selv at foretage en empirisk analyse af en model, men i næste kapitel omkring brugen af indeksede produkter i asset management vil der i højere grad inddrages empiriske observationer.

6 Risikostyring med inflationsprodukter

Efter at have gennemgået teorien omkring de forskellige typer af indekserede produkter rettes opmærksomheden nu mod hovedformålet med denne afhandling: brugen af inflationsprodukter i risikostyring og asset management. Som beskrevet i kapitel 2 er inflationsrisikoen den risiko, der er for, at ens penge er blevet mindre værd i en given periode. Med et stigende marked for inflationsprodukter er der imidlertid en række muligheder for at mindske eller helt eliminere denne risiko. I afhandlingen har der indtil videre ikke været fokus på, hvordan man kan bruge inflationsprodukter til at styre inflationsrisikoen, og derfor naturligvis heller ikke hvordan risikoen måles.

Som beskrevet i kapitel 3 har indeksobligationer en række positive egenskaber i en investeringsmæssig sammenhæng. De har både en lav korrelation med øvrige aktivklasser, og de har en lav volatilitet, hvilket kan være med til at give en høj Sharpe Ratio, som det vises i dette kapitel.

Der vil således i dette kapitel være fokus på, hvordan risikoen på inflationsprodukter kan måles, og hvordan man skal bruge inflationsprodukter til at opnå diversificering af ens portefølje. Til at starte med forklares, hvordan man bruge det velkendte varighedsbegreb på en indeksobligation.

6.1 Varighed - det centrale begreb

Varigheden er det helt centrale begreb, når der skal måles risiko på konventionelle obligationer. Varigheden sammenfatter en række forskellige oplysninger i ét nøgletal, der derfor kan gives flere forskellige fortolkninger. Først og fremmest er varigheden defineret som den gennemsnitlige tid, der vil gå, før man får nutidsværdien af obligationen. En anden væsentlig fortolkning af varigheden er, at den er et mål for ændringer i obligationskursen ved parallelle ændringer i rentekurven; det vil sige, at den måler obligationskursens rentefølsomhed, og derfor er den et væsentligt begreb inden for risikostyring af obligationer.

Varigheden for en nominel obligation, der jo er eksponeret overfor ændringer i den nominelle rente, er defineret således:

$$D_n = -\frac{1+i_n}{P}\frac{\partial P}{\partial i_n} \tag{72}$$

hvor det ses, at det er elasticiteten af prisen P med hensyn til ændringer i størrelsen $1 + i_n$.

Ofte normeres varigheden med $1 + i_n$, hvorved den *modificerede varighed* opnås:

$$MD_n = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i_n} \tag{73}$$

Den modificerede varighed udtrykker tilnærmelsesvist den procentvise ændring i obligationens værdi som følge af en parallelforskydning af den nominelle rentekurve med et procentpoint. Hvis vi i stedet for den procentvise ændring i obligationens værdi vil se på ændringer i kroner og øre, kan kronevarighedsbegrebet anvendes. Kronevarigheden[22] er defineret således:

$$DD_n = MD_n \frac{MV}{100} \tag{74}$$

hvor MV angiver markedsværdien for obligationen.

Umiddelbart bør det være oplagt at henføre teorien om varigheder til indeksobligationer, men det er ikke helt så oplagt, som det umiddelbart ser ud til. For det første er vi interesseret i ændringer i realrentekurven, når vi har at gøre med indeksobligationer. For det andet bør der differentieres mellem følsomhed overfor realrenten og overfor inflationen, hvilket ovenstående varighedsbegreber ikke gør. Man skal således passe på med at sammenligne varigheden for en indeksobligationen med varigheden for den tilsvarende nominelle obligation. Forklaringen fremgår af Fisher-relationen i formel (3), hvoraf det ses, at en nominel obligation reagerer både på ændringer i realrenten og den forventede inflation, hvorfor den nominelle varighed umiddelbart indeholder følsomheden overfor begge disse to faktorer. Derfor vil de følgende afsnit analysere de enkelte komponenter af varigheden. Denne dekomponering af varigheden i en realrentevarighed og en inflationsvarighed kaldes *dual duration*.[23]

6.1.1 Dekomponering af varigheden for nominelle obligationer

Som skrevet er der to komponenter i den nominelle varighed:

1. Inflationsvarigheden

2. Realrentevarigheden

Begrebet modificeret varighed kan let blive udvidet til også at omhandle inflationen ved at definere den modificerede inflationsvarighed som den procentvise ændring i

[22] På engelsk kalldes kronevarigheden for *dollar duration*, hvorfor udtrykker hedder DD_n

[23] Jf. Siegel og Waring: TIPS, the Dual Duration, and the Pension Plan

obligationens værdi som følge af en ændring i inflationen på et procentpoint:

$$\begin{aligned} D_\pi &= -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \pi} && (75) \\ &= (1+i_r)\, D_n && (76) \end{aligned}$$

Helt ækvivalent defineres den modificerede realrentevarighed som den procentvise ændring i obligationens værdi som følge af en ændring i realrentekurven på et procentpoint:

$$\begin{aligned} D_r &= -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r} && (77) \\ &= (1+\pi)\, D_n && (78) \end{aligned}$$

For små værdier af i_n, i_r og π gælder derfor følgende approksimation:

$$D_n \approx D_i \approx D_r \tag{79}$$

I praksis kan man imidlertid ikke se om en ændring i den nominelle rente stammer fra en ændring i inflationen eller i realrenten, hvorfor der sættes lighedstegn mellem de tre varighedsbegreber. Derfor er én af ulemperne ved at bruge nominelle obligationer til at hedge, at man ikke kan hedge inflationsrisiko og realrenterisiko hver for sig, da man ikke kan se, hvorfra en ændring i den nominelle obligationspris stammer. Dette lader sig imidlertid gøre med indeksobligationer, og derfor er de særdeles attraktive i risiskostyringøjenmed og generel aktivallokering, hvor fokus nu rettes mod varighedsbegreberne for indeksobligationer.

6.1.2 Dekomponering af varigheden for indeksobligationer

Hvor det for nominelle obligationer ikke giver ekstra anvendelig information ved at dekomponere varigheden, da de forskellige varighedskomponenter er lig hinanden, er det anderledes for indekserede obligationer. Indledningsvist ses der på prisen for en nulkuponindeksobligation:

$$P = \frac{N\,(1+\pi)^t}{(1+\pi)^t\,(1+i_r)^t} \tag{80}$$

Det fremgår af ligning (80), at inflationen både optræder i tælleren og nævneren, hvorfor prisen ikke ændrer sig med hensyn til ændringer i inflationen, men kun med hensyn til ændringer i realrenten.

Dermed bliver inflationsvarigheden lig 0:

$$D_\pi = 0 \tag{81}$$

medens realrentevarigheden er:

$$D_r = \frac{t}{1 + i_r} \tag{82}$$

Hvis ligning (80) generaliseres til også at inkludere en indeksobligation med kuponbetalinger - altså en Capital Indexed Bond som blev beskrevet i afsnit 4.1.1 - fås følgende relation:

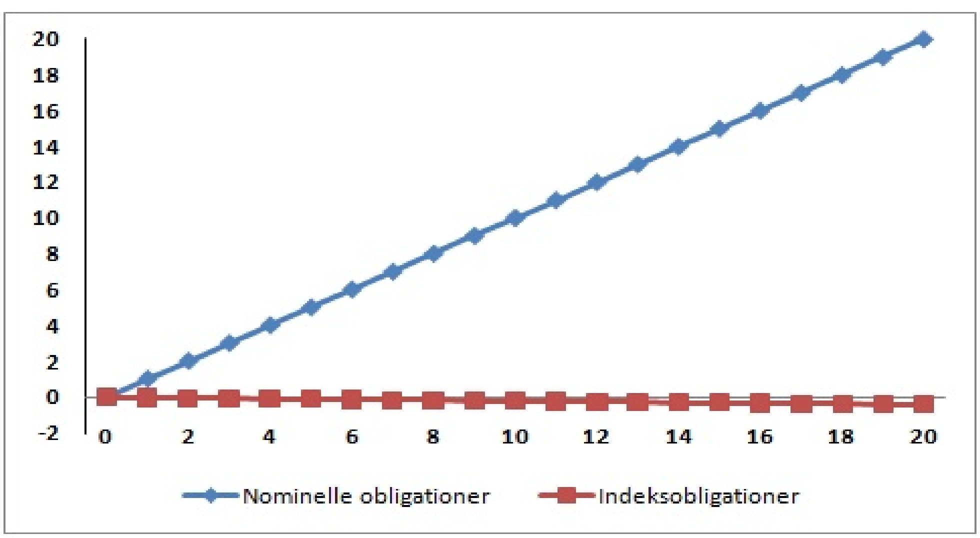
$$P = \sum_{j=1}^{t} \frac{C\,(1+\pi)^j}{(1+\pi)^j\,(1+i_r)^j} + \frac{N\,(1+\pi)^t}{(1+\pi)^t\,(1+i_r)^t} \tag{83}$$

Inflationsvarigheden er naturligvis igen 0, medens realrentevarigheden nu er:

$$D_r = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial i_r} \tag{84}$$

Dette er oftest et stort negativt tal grundet de lave realrenter.

Dual duration giver os mulighed for i højere grad at være i stand til at hedge passiver, da vi således inkluderer realrenteobligationer i stedet for kun nominelle obligationer og andre aktiver såsom aktier eller bare likvider. I nedenstående diagram er dual duration-begrebet vist grafisk:



Figur 6: Dual duration. Kilde: Egen tilvirkning på baggrund af Siegel og Waring

Det fremgår af figuren, hvordan man kan opnå en ønsket risikoeksponering ved at kombinere nominelle obligationer og indeksobligationer med dertilhørende typer af varigheder som gennemgået ovenover, hvor realrentevarigheden er vist på 1. aksen, og inflationsvarigheden er vist på 2. aksen. De nominelle obligationers mulige eksponering overfor realrenten og inflationen er repræsenteret ved 45 graders linjen fra origo, medens inflationsobligationernes mulige eksponering overfor realrenten og inflationen er udtrykt ved den linje, der er næsten parallel med 1. aksen. Dermed er området mellem de to linjer et udtryk for den eksponering, man kan opnå ved at kombinere nominelle obligationer og indeksobligationer.

Det leder os hen til at finde varighedsudtryk for porteføljer af obligationer.

6.1.3 Varigheder for porteføljer

Når en portefølje består af både nominelle obligationer og indeksobligationer, vil realrentevarigheden være et værdivægtet gennemsnit af relarentevarigheden for hver af de to typer obligationer:

$$\begin{aligned} D_{r,PF} &= \frac{1}{P_{PF}}\frac{\partial P_{PF}}{\partial i_r} \\ &= \frac{P_N}{P_{PF}}D_{r,N} + \frac{P_R}{P_{PF}}D_{r,R} \end{aligned} \tag{85}$$

Inflationsvarigheden vil udelukkende bestå af den vægtede inflationsvarighed for den nominelle obligation, idet der jo huskes på, at inflationsvarigheden for en indeksobligation er lig 0:

$$\begin{aligned} D_{\pi,PF} &= \frac{1}{P_{PF}}\frac{\partial P_{PF}}{\partial i_\pi} \\ &= \frac{P_N}{P_{PF}}D_{\pi,N} \end{aligned} \tag{86}$$

Porteføljens nominelle varighed vil ligge et sted mellem de to varigheder, men den vil ikke længere være brugbar, såfremt der ikke kan sættes lighedstegn mellem realrentevarigheden og inflationsvarigheden. Porteføljen vil nemlig reagere forskelligt på en ændring i rentekurven alt efter, hvad ændringen skyldes. Hvis en ændring i den nominelle rentekurve skyldes, at realrenten har ændret sig, vil den nominelle varighed for porteføljen, $D_{n,PF}$, være den som inflationsvarigheden var for porteføljen, $D_{r,PF}$, men hvis ændringen i den nominelle rentekurve skyldes, at inflationsforventningerne er ændrede, da vil den nominelle varighed for porteføljen være lig med inflationsvarigheden for porteføljen, $D_{\pi,PF}$.

6.1.4 Eksempel på beregning af varighed for en indeksobligation

Vi vil nu beregne varigheden for den samme konkrete obligation, som der blev set på i kapitel 4, hvor prisen på den svenske indeksobligation blev beregnet. Varigheden vil blive beregnet på samme dag, som prisen blev beregnet på, nemlig d. 29. december 2009.

Vi fandt i kapitel 4, at dens indekserede clean price var på 154,44 SEK. Vi udvider nu skemaet fra kapitel 4 med de relevante dele til at beregne varigheden; tiden multipliceret med nutidsværdien ($T * PV$):

Dato	Real betaling	T	Nutidsværdi	$T * PV$
01/12/2010	4	0,92	3,95	3,64
01/12/2011	4	1,92	3,89	7,48
01/12/2012	4	2,92	3,84	11,22
01/12/2013	4	3,92	3,78	14,84
01/12/2014	4	4,92	3,73	18,36
01/12/2015	4	5,92	3,68	21,77
01/12/2016	4	6,92	3,62	25,09
01/12/2017	4	7,92	3,57	28,31
01/12/2018	4	8,92	3,52	31,43
01/12/2019	4	9,92	3,47	34,45
01/12/2020	104	10,92	88,99	972,08
Ujust. pris inkl. vedhængende rente			126,04	1.168,67

Hermed fås den nominelle varighed for obligationen til $D_n = \frac{1.168,67}{126,04} = 9,272$, hvilket på nær afrunding svarer til varigheden fra Bloomberg på $9,271$. Denne varighed kan omregnes til modificeret varighed[24] ved at dividere med den effektive rentesats på $1,437\%$. Dermed fås en modificeret varighed på $MD_n = \frac{9,272}{(1+1,437\%)} = 9,141\%$. Det vil sige, at hvis renten stiger med et procentpoint, falder obligationens værdi med $9,141\%$. Hvis vi vil se tabet i kroner og øre, skal vi jo se på kronevarigheden[25] jf. forrige afsnit. Vi tager udgangspunkt i den indekserede pris inklusive vedhængende renter og deler med den modificerede varighed. Dermed fås en kronevarighed på $DD_n = 9,141\% * 154,82 = 14,152$. Det vil sige, at hvis renten stiger

[24] Den modificerede varighed hedder på Bloomberg *Effective Duration*

[25] Kronevarigheden hedder på Bloomberg *Risk*

med et procentpoint, vil kursen falde med $14,15$ SEK.

6.1.5 Diskussion af varigheden som risikomål - link til HJM-modellen

Selvom varigheden er det helt centrale begreb inden for risikostyring af obligationer, er det blevet kritiseret som risikomål. Dette skyldes antagelsen om infinitesimale og parallelle skift i rentekurven, hvilket gør varigheden sårbar overfor store og ikke-parallelle ændringer i rentekurven. Derudover er varigheden ikke udledt på baggrund af moderne porteføljeteori, hvorfor det ikke relaterer risikoen til afkastet. Men det viser sig, at varigheden er konsistent med den i kapitel 5 udledte HJM-model. Forklaringen skal søges i, at det i HJM-modellen kun er den ikke-forventede del af rentekurveskiftet, som antages at være parallelle. Den forventede del af skiftet i rentekurven er altid ikke-parallel og er bestemt ved drift-restriktionen som vist i ligning 43. Når de ikke-forventede ændringer i rentekurvn ikke er parallelle, kan varigheden bruges til at hedge mod ændringer i renteniveauet. Varigheden bliver således et partielt risikomål. Man skal dog stadig være opmærksom på, at risikomål af højere orden stadig bør bruges som supplement til at hedge imod renteændringer.

Ved at bruge modellen i kapitel 5 som prisningsmodel kan man således i højere grad anvende varigheden som risikomål, hvorfor der også har været stor fokus på varighedsbegrebet indtil nu.

Disse udledninger af, hvordan man kan dekomponere den nominelle varighed i en realrentevarighed og en inflationsvarighed, gør os dog stadig ikke i stand til at sammenligne varigheden - og dermed risikoen - på henholdsvis nominelle obligationer og indeksobligationer. Derfor bør der introduceres et alternativt risikomål, der kan muliggøre en sammenligning af risikoen på de to obligationstype, således at der kan tages højde for risikoen i en investeringsbeslutning, og dette muliggøres ved at inddrage *betaværdien* for obligationerne.

6.2 Betaværdier (β) som risikomål

Et aktivs betaværdi (β) er meget kendt fra og udbredt i aktieanalysen, hvor det angiver en akties samvariation med markedsindekset, hvorfor det angiver hvor følsom aktien er, når markedet bevæger sig med en enhed. Jo højere *beta* er, desto mere volatil er aktien, hvorfor der kan forventes større udsving i aktiens pris, når markedet ændrer sig. Hvis fx $\beta = 0,5$, vil aktien kun bevæge sig halvdelen af, hvad hele markedet ændrer sig.

Betaværdier for indeksobligationer fortæller noget om forholdet mellem de nominelle og reale renter. Der er ikke nogen entydig måde at beregne beta på, hvilket blandt andet skyldes, at det er en forholdsvis ny tilgang til risikostyring af indeksprodukter. Derfor anvendes som oftest der en kombination af både historisk data - som det er kendt fra aktieanalysen, hvor der foretages statistisk analyse af samvariationerne - og af en teoretisk analyse af, hvad beta er.

Man kan gøre sig forskellige betragtninger, når man vil beregne beta for en indeksobligation: hvis man er interesseret i at bibeholde obligationen til udløb, er det interessant at se på renteniveauet for de forskellige obligationer, medens en investor, der er interesseret i den daglige risiko, vil se nærmere på renteændringer i stedet for niveauet for renterne. Den mest anvendte formel til at beregne beta på er følgende, som til forveksling minder meget om betaberegningen for en aktie:

$$\beta = \rho_{i_r,i_n} \frac{\sigma_{i_r}}{\sigma_{i_n}} \tag{87}$$

Betaværdien får således den betydning, at man ser på, hvor meget realrenten ændringer sig, når den nominelle rente ændres. Hvis korrelationen mellem de nominelle og reale renter er $\rho_{i_r,i_n} = 0,75$, den reale rente ligger på $i_r = 10\%$ og den nominelle rente på $i_n = 13\%$, får vi at $\beta = 0,75 * \frac{10\%}{13\%} = 0,58$. Det betyder, at realrenten kun ændrer sig lidt over halvdelen af, hvad den nominelle rente ændrer sig, hvilket jo er helt analogt med aktiefortolkningen.

Den empiriske analyse har vist, at betaværdier for indeksobligationer varierer over tid og over tid til udløb for de enkelte obligationer.

6.3 Volatiliteten på indeksobligationer

En komponent i β-beregningen fra forrige afsnit er volatiliteten på henholdsvis den reale og nominelle rente. Dette afsnit vil analysere volatiliteten på to givne obligationer. Når der ses på obligationsanalyse, findes der to typer af volatilitet:

1. Rentevolatilitet

2. Prisvolatilitet

Rentevolatiliteten, σ_i, siger naturligvis noget om ændringer i renteniveauet, i, medens prisvolatiliteten, σ_P, siger noget om ændringen i de enkelte obligationers kurs, P.

Forholdet mellem de to volatiliteter er som følgende:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= MD * i * \sigma_i \Leftrightarrow \\ \sigma_i &= \frac{\sigma_P}{MD * i}\end{aligned} \tag{88}$$

I det følgende fokuserer vi på prisvolatiliteten, da det jo altid vil være muligt at finde rentevolatiliteten ud fra prisvolatiliteten.

6.3.1 Volatilitet på indeksobligationer versus nominelle obligationer

Hvis vi ser nærmere på volatiliteten for både en indeksobligation og en tilsvarende nominel obligation, ser vi, at der er en tendens til lavere volatilitet på indeksobligationen end på den nominelle obligation jf. også afsnit 3.2 omkring motiverne til investering i indeksprodukter. I denne konkrete situation ses der igen på den svenske indeksobligation SGB 4 12/01/20 #3102, hvis bedste nominelle alternativ er SGB 5 12/01/20.[26] Den letteste metode til at sammenligne volatiliteten på de to obligationer er ved at bruge volatilitetsfunktionen på Bloomberg, som fås ved at skrive **HVT**, når man har fundet den pågældende obligation.

I bilag 2 er vist et øjebliksbillede af volatiliteten for de to obligationer pr. 1. januar 2010 og tilbage til 16. oktober 2009. De er vist skematisk på næste side, hvor der er valgt en 5 ugers og en 50 ugers horisont:[27]

[26] Denne obligation har ISIN SE0001149311

[27] I bilaget fremgår desuden 30 og 100 ugers horisont

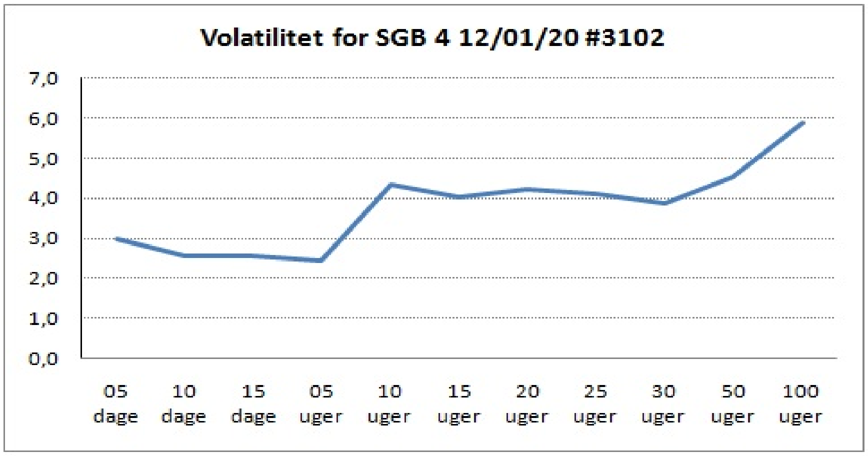
Prisvolatilitet for SGB 4 12/01/20 og SGB 5 12/01/20						
	5 ugers horisont			50 ugers horisont		
Dato	Infl.obli.	Nom. obli.	Forskel	Infl.obli.	Nom. obli.	Forskel
01-01-2010	2,436	6,492	-4,056	4,533	6,855	-2,322
25-12-2009	3,394	6,798	-3,404	4,610	7,268	-2,658
18-12-2009	5,430	6,040	-0,610	4,613	7,283	-2,670
11-12-2009	5,702	4,679	1,023	4,612	7,371	-2,759
04-12-2009	5,588	4,933	0,655	4,612	7,375	-2,763
27-11-2009	4,868	3,855	1,013	4,530	7,397	-2,867
20-11-2009	3,813	4,332	-0,519	4,682	8,135	-3,453
13-11-2009	3,111	5,062	-1,951	5,488	8,516	-3,028
06-11-2009	1,951	5,437	-3,486	5,873	8,980	-3,107
30-10-2009	3,363	5,645	2,282	5,838	9,129	3,291
23-10-2009	4,314	7,478	3,164	6,152	9,630	3,478
16-10-2009	4,993	6,320	1,327	6,352	9,794	3,442
Gennemsnit	4,080	5,589	1,509	5,158	8,144	2,987

Det fremgår, at prisvolatiliteten for indeksobligationen pr. 1. januar 2010 var på $2,436$ på en 5 ugers horisont, medens volatiliteten for den tilsvarende nominelle obligation var på $6,492$. Som det fremgår af skemaet, er volatiliteten på 5 ugers horisonten højere for den nominelle obligation end for indeksobligationen for næsten samtlige dage. På 50 ugers horisonten er det gældende for samtlige dage, at volatiliteten på indeksobligationen er lavere end på den nominelle obligation. Den gennemsnitlige volatilitet på en 5 ugers horisont var i perioden på $4,080$ for indeksobligationen mod $5,589$ for den nominelle obligation, svarende til at den nominelle obligation i gennemsnit havde en volatilitet, der var $5,589 - 4,080 = 1,509$ højere end indeksobligationen.

Sammenlignes differencen mellem indeksobligationen og den nominelle obligation på henholdsvis 5 ugers og 50 ugers horisont, ser vi, at der er større forskel på 50 ugers horisonten. Til gengæld er der ikke så stor variation i forskellen på 50 ugers horisont, som der er på 5 ugers horisont. Forklaringen skal søges i, at der over tid er mulighed for større variationen i både prisen og renten, hvilket naturligvis er afledt af hinanden.

Denne empiriske analyse har altså underbygget påstanden i kapitel 3 om, at en af grundene til at investere i indeksobligationer er den lavere volatilitet sammenlignet med de tilsvarende nominelle obligationer.

Hvis der i stedet udelukkende fokuseres på indeksobligationen, kan vi se på sammenhængen mellem volatiliteten og tidshorisonten for volatiliteten. Vi ser nu kun på d. 1. januar 2010 og ser på, hvordan volatiliteten udvikler sig fra 1 uge til 100 uger. Igen er der tale om den svenske indeksobligation SGB 4 12/01/20 #3102, og dens volatiliteter er illustreret grafisk i følgende figur:



Figur 7: Volatilitet for SGB 4 12/01/20 #3102. Kilde: Egen tilvirkning

Det fremgår af tabellen og figuren, at prisvolatiliteten som udgangspunkt er stigende med tidshorisonten. Dog er der en tendens til, at figuren på daglig basis (de tre første punkter) er aftagende, hvilket skyldes, at der er negativ seriel korrelation. Det vil sige, at afkastvolatiliteten er påvirket af ting som fx bid-ask bounces, der er et udtryk for, at hvis en obligation handles lidt for højt den ene dag på grund af stor interesse, kan man forvente, at kursen falder en smule den efterfølgende dag. At volatiliteten falder fra tidshorisonten på 25 uger til 30 uger, skyldes, at der er en form for heteroskedasticitet - altså variation i volatiliteten over tid, som man ofte ser i finansielle tidsserier. Dermed kan det aktuelle estimat af volatiliteten på baggrund af henholdsvis de 25 og 30 uger være forskellig alt afhængig af, om den tidsvarierende volatilitet er steget eller faldet over de forskellige tidshorisonter.

6.4 Diversifikation med indeksobligationer

Som det blev beskrevet i kapitel 3 om aktørerne på markedet for indeksprodukter, er der en lang række grunde til at investere i disse produkter. Vi så før, at den lave volatilitet er en fordel, men én af de andre markante fordele er den lave korrelation med andre aktivklasser, hvilket giver mulighed for at opnå en *diversifikationsgevinst*, idet man kan nedbringe rentefølsomheden for hele porteføljen ved at inkludere indeksobligationer. Det vil blive eksemplificeret i dette afsnit.

6.4.1 Eksempel med diversifikation

I dette afsnit gives et eksempel på, hvordan man kan bruge indeksobligationer til at opnå en diversifikationsgevinst i henhold til en højere Sharpe Ratio for hele porteføljen. Empiriske analyser af indeksobligationer viser, at de har haft signifikant højere Sharpe Ratios end andre aktivklasser siden 1999.[28]

Sharpe Ratio er et af de mest anvendte mål for risikojusteret afkastmål og udviklet af William F. Sharpe i 1966 og blev da også oprindeligt benævnt "Excess Reward to Variability Ratio". Det angiver, hvor meget merafkast en investor har fået pr. risikoenhed set i forhold til det risikofri aktiv. Et aktiv med en højere Sharpe Ratio end et andet, giver et højere merafkast for samme risikoniveau. Klassisk porteføljeteori siger, at hvis man medtager et nyt aktiv til en portefølje, vil det teoretisk set altid optimere porteføljen set ud fra et risikojusteret perspektiv, med mindre der er perfekt positiv korrelation på 1. Formlen for Sharpe Ratio er følgende:

$$SR = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\bar{r}}{\sigma_p} \tag{89}$$

hvor r_p er afkastet for porteføljen/aktivet, r_f er den risikofri rente, $\bar{r} = r_p - r_f$ er merafkastet, og σ_p er standardafvigelsen på porteføljen/aktivet.

Da der som omtalt i kapitel 4 er et lag på inflationen ved en indeksobligation, er korrelationen mellem inflationen og indeksobligationen ikke helt 1, hvorfor indeksobligationer altså kan anvendes til at give en diverficeret portefølje. Det illustreres i følgende eksempel, hvor det vises, hvordan man som investor kan opnå en fortjeneste ved at inkludere indeksobligationer i sin portefølje.[29]

Betragt en markedsportefølje, M, der består af standardobligationer og aktier. Denne portefølje er kendetegnet ved et merafkast på $2,22\%$; det vil sige $\bar{r} = 2,22\%$ samt en volatilitet på $\sigma_p = 8,30\%$. Dette giver en Sharpe Ratio på:

$$SR = \frac{2{,}22\%}{8{,}30\%} = 0,268$$

Investor overvejer at investere i en anden aktivklasse bestående af indeksobligationer, der i forhold til porteføljen M har risiko, der er ukorreleret, hvorfor porteføljen benævnes U. Spørgsmålet er så, om der skal allokeres penge til denne nye aktivklasse

[28] Jf. De Coster et al.: Diversification and hedging qualities of inflation-linked instruments

[29] Eksemplet tager udgangspunkt i et eksempel fra kurset "Understanding Inflation Products" fra Financial Training Partner

og i givet fald hvor mange. Det afhænger naturligvis, om investor forventer at få en positiv Sharpe Ratio eller ej fra U.

Vi starter med at se på den samlede porteføljes volatilitet, der kan skrives på følgende måde, da korrelationen mellem U og M er nul:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_U^2} \tag{90}$$

medens merafkastet kan skrives således:

$$\begin{aligned} \bar{r}_p &= \bar{r}_M + \bar{r}_U \\ &= SR_M \sigma_M + SR_U \sigma_U \end{aligned} \tag{91}$$

Hvis nu investor er af den opfattelse, at porteføljen bestående af indeksobligationer kan opnå en Sharpe Ratio på $0,1$, hvad skal investor så gøre for at holde volatiliteten for hele porteføljen uændret på $\sigma_p = 8,30\%$? Til at begynde med omskrives formel (90) til:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_U^2} \Rightarrow \sigma_M = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_U^2} \tag{92}$$

Da σ_p jo fortsat skal være $8,30\%$, indsættes det i formlen, hvorefter det samlede merafkast maksimeres:

$$\begin{aligned} max\left(\bar{r}_p\right) &= SR_M \sigma_M + SR_U \sigma_U \\ &= 0,268\sqrt{8,30\%^2 - \sigma_U^2} + 0,10\sigma_U^2 \end{aligned} \tag{93}$$

der løses for:

$$\sigma_U = 2,90\%$$

Dermed bliver merafkastet for den samlede portefølje:

$$\bar{r} = 0,268\sqrt{8,30\%^2 - 2,90\%^2} + 0,10 * 2,90\%^2 = 2,37\% \tag{94}$$

medens Sharpe Ratio bliver:

$$SR_p = \frac{2,37\%}{8,30\%} = 0,286 \tag{95}$$

Denne procedure kan gentages adskillige gange for forskellige værdier af SR_U, hvilket så vil give et overblik over, hvordan SR_p udvikler sig, når σ_U ændres. Det vises i nedenstående tabel.

SR_U	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
σ_M	8,30%	8,16%	7,78%	7,24%	6,65%	6,07%
σ_U	0,00%	1,52%	2,90%	4,05%	4,96%	5,66%
σ_p	8,30%	8,30%	8,30%	8,30%	8,30%	8,30%
SR_p	0,268	0,273	0,286	0,307	0,334	0,367

Det fremgår af tabellen, at Sharpe Ratio er positiv og en stigende funktion af volatiliteten på indeksobligationerne med ukorreleret risiko. Derfor kan investor opnå en højere Sharpe Ratio ved at inkludere indeksobligationen i sin portefølje, hvilket netop var, hvad dette eksempel skulle påpege, og dermed kan man opnå en diversifikationsgevinst ved at inkludere én eller flere indeksobligationer i sin portefølje.

6.4.2 Hvad med globale indeksobligationer?

I løbet af 2008 og 2009 skiftede adskillige danske investeringsforeninger med afdelinger for indeksobligationer fokus, således at afdelingerne fremover også kan investere i globale indeksobligationer og ikke kun danske.[30] Det er der flere grunde til. Først om fremmest skyldes det, at der ikke længere bliver udstedt indeksobligationer i Danmark, hvorfor udbudet naturligt begrænses. Desuden ændrede man i 2007 skattereglerne, der tidligere havde gjort afkastet på indeksobligationer skattefri, men det blev ændret, hvorfor afkastet for fondene var negativt i 2007. Derfor har nogle af de forskellige investeringsforeninger altså relanceret deres afdelinger for indeksobligationer til at have et globalt fokus.

Som investor er der endnu flere fordele ved også at inkludere globale indeksobligationer i sin portefølje. Det er allerede blevet nævnt, at indeksobligationer har en lav volatilitet og lav korrelation med andre aktiver, ligesom de besidder en høj korrelation med inflationen, hvilket gør dem ideelle til at hedge reale forpligtelser med. Foruden disse egenskaber har globale porteføljer af indeksobligationer også de egenskaber, at de har en endnu lavere risiko, de giver endnu bedre mulighed for at diversificere den samlede porteføljer af aktiver, og så har de en højere likviditet. Kapitalforvalteren Bridgewater[31] har undersøgt volatiliteten på henholdsvis indenlandske porteføljer og

[30] Jf. Henriksen: Forsikring mod inflation, Morningstar. Det drejer sig blandt andet om Danske Invest og BankInvest, der begge relancerede deres afdelinger i slutningen af 2008

[31] Læs mere på Bridgewaters hjemmeside: http://www.bwater.com samt Inflation-Linked Products - A Guide for Investors and Asset & Liability Managers, kapitel 2

globale porteføljer af indeksobligationer og fandt altså frem til, at volatiliteten på de globale porteføljer var lavere end volatiliteten på de indenlandske porteføljer, hvilket altså betyder, at risikoen på de globale indeksobligationsporteføljer er lavere end de indenlandske porteføljer. Det er vist i nedenstående tabel, der viser den årlige volatilitet på de forskellige markeder:[32]

Land	National infl.obl.portefølje	Global infl.obl.portefølje
Australien	6,47	3,70
Canada	4,77	3,72
Euroland (Frankrig)	4,60	4,01
England	6,46	3,64
USA	5,55	3,81
Gennemsnit	**5,57**	**3,78**

Bridgewater har også undersøgt korrelationen mellem henholdsvis porteføljer af globale og nationale indeksobligationer og konventionelle obligationer og aktier, og de fandt altså, at de globale indeksobligationsporteføljer har stort set de samme korrelationsegenskaber som de nationale indeksobligationsporteføljer har. Det er vist i nedenstående tabel, der viser korrelationen for de forskellige aktivklasser:

	National infl.obl.portefølje	Global infl.obl.portefølje
Nationalt obligationsindeks	0,36	0,29
MSCI nationalt aktieindeks	-0,05	-0,06
Int. aktier	0,02	-0,03

Selvom man måske kunne forvente, at det vil resultere i et hedge, der ikke er perfekt ved at anvende globale indeksobligationer til at hedge nationale realforpligtelser, er dette faktisk ikke tilfældet. Det er igen Bridgewater, der har vist, at globale porteføljer af indeksobligationer faktisk udgør et godt grundlag for at hedge den nationale inflation. Forklaringen skal søges i, at de industrialiserede landes inflation i høj grad er afhængig af de samme underliggende varegrupper, ligesom der er en høj grad af samhørighed mellem landenes økonomiske vækst og monetære politik, hvorfor et globalt inflationsindeks ikke er så forskelligt fra de industrialiserede landes inflationsindeks. Det kan også ses i en analyse af korrelationen mellem inflationen for de

[32]Figurerne fra Bridgewater er lavet på baggrund af Inflation-Linked Products - A Guide for Investors and Asset & Liability Managers, kapitel 2. En global portefølje af indeksobligationer består af hhv. 10% AUS, 10% CAN, 30% EUR, 15% UK og 35%US

største udbydere af indekserede produkter. Disse korrelationer er vist i nedenstående tabel:

	Australien	Canada	Euroland (FR)	Japan	Sverige	England	USA
Australien	1	0,84	0,81	0,77	0,73	0,81	0,72
Canada		1	0,88	0,69	0,79	0,79	0,87
Euro (FR)			1	0,78	0,84	0,84	0,81
Japan				1	0,63	0,80	0,68
Sverige					1	0,76	0,71
England						1	0,80
USA							1
Gns.	**0,78**	**0,81**	**0,83**	**0,73**	**0,74**	**0,80**	**0,78**

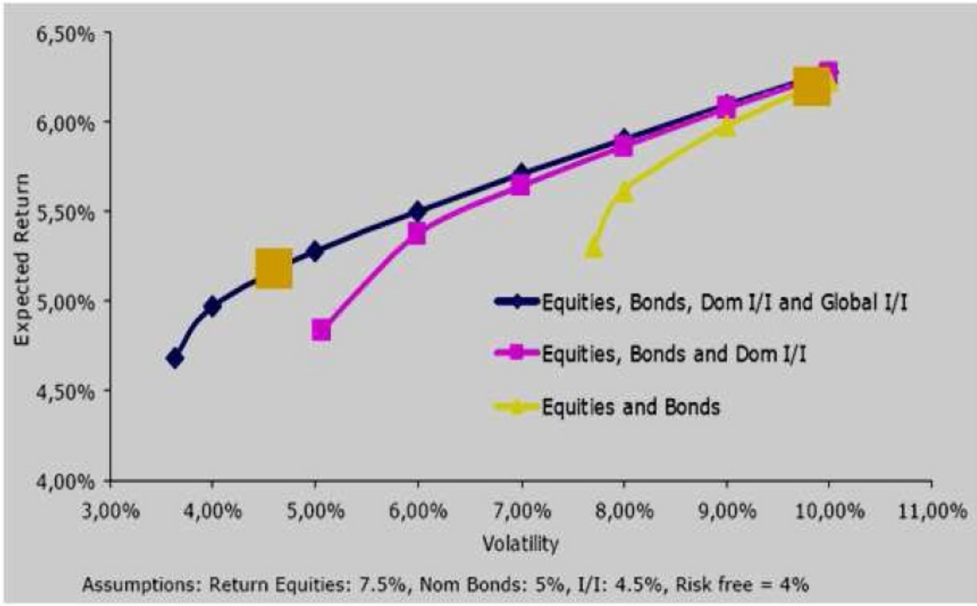
Det fremgår af ovenstående tabel, at den laveste gennemsnitlige korrelation med de øvrige økonomier er $0,73$, som er den korrelation Japan i gennemsnit har med de andre lande. Og med sammenligningen af Japan og de øvrige lande er vigtigt at fokusere på ændringer i inflationen og ikke niveauet for inflationen, da Japan jo har oplevet deflationslignende tilstande i længere tid. Desuden skal man være opmærksom på, at energipriser har en mere dominerende rolle end deres indeksvægt antyder. Dette skyldes, at energipriser er mere volatile end andre priser, ligesom energipriser implicit optræder i priser for andre varegrupper såsom industrivarer. Fx viser Bridgewater, at i England er vægten af energi i det engelske CPI 5,5%, men faktisk influerer energiprisen på 50,6% af CPI, hvilket altså skyldes korrelationen mellem energi og de øvrige varegrupper.

En anden grund til at inkludere globale indeksobligationer i investors portefølje kan findes i en analyse af den efficiente rand for forskellige typer af porteføljer. En sådan analyse har den danske undervisningsvirksomhed Financial Training Partner foretaget. De prøver at se på fordelene ved at inkludere henholdsvis nationale og globale indeksobligation i en portefølje og herefter se på den efficiente rand. På næste side er det vist i figuren, der består af tre porteføljer:

1. En portefølje udelukkende med konventionelle aktier og obligationer

2. En portefølje med konventionelle aktier og obligationer samt nationale indeksobligationer

3. En portefølje med konventionelle aktier og obligationer samt nationale og globale indeksobligationer



Figur 8: Efficient rand. Kilde: Financial Training Partner

Det fremgår af figuren, at porteføljen, der udelukkende består af konventionelle aktier og obligationer, bliver domineret af begge de andre porteføljer, da dens rand ligger under randen for de to andre porteføljer på hele kurven. Dermed kan man opnå et højere forventet afkast ved en given risiko, når der medtages indeksobligationer i porteføljen. Hvis vi udelukkende ser på de to porteføljer indeholdende indeksobligationer, ser vi, at ved at inkludere globale indeksobligationer i porteføljen opnås en endnu bedre diversifikation og dermed et endnu højere afkast for en given risiko udtrykt ved volatiliteten.

Ved at se på to porteføljer på grafen kommer vi frem til samme konklusion. De to gule firkanter indikerer henholdsvis portefølje 3 (den til venstre med indeksobligationen) og portefølje 1 (den til højre med kun aktier og obligationer). De to porteføljer analyseres med hensyn til det føromtalte Sharpe Ratio, der jo viser forholdet mellem merafkastet og risikoen på en portefølje.

Porteføljen, der kun består af aktier og obligationer, har et afkast på omkring $r_{aktier,obligationer} = 6,2\%$ samt en volatilitet på $\sigma_{aktier,obligationer} = 10,1\%$. Da den risikofri rente er sat til $r_f = 4,0\%$, fås en Sharpe Ratio på $SR_{aktier,obligationer} = \frac{6,2\%-4,0\%}{10,1\%} = 0,219$. Porteføljen, der inkluderer alle aktivtyper, har et afkast på ca. $5,2\%$ men til gengæld er volatiliteten kun ca. $4,9\%$, hvorfor Sharpe Ratio er $SR_{aktier,obligationer,indeksobl.} = \frac{5,2\%-4,0\%}{4,9\%} = 0,245$, hvilket jo er højere end for porteføljen, der kun består af aktier og obligationer. Den højere Sharpe Ratio skyldes udelukkende, at volatiliteten er så meget lavere jf. også afsnittet omkring volatilitet.

6.5 Hedging med indeksprodukter

En vigtig aftager af indeksprodukter er virksomheder med reale forpligtelser som fx pensionskasser, der har forpligtelser langt ude i fremtiden. De bruger indeksprodukter til at hedge deres forpligtelser for derigennem at tilsikre, at de kan betale forpligtelserne i fremtiden. Dette forventes at blive mere relevant i de kommende år, efter at det modsatte af inflationsrisiko - deflationsrisiko - har været aftagende gennem hele 2009 med deraf afledt større inflationsrisiko. Dette afsnit viser brugen af henholdsvis indeksobligationer og inflationsswap i hedgingøjenmed.

Afsnittet fokuserer hovedsageligt på pensionskasser og disses muligheder for at hedge deres fremtidige forpligtelser ved hjælp af indekserede produkter. Det skyldes, at netop pensionskasser har et naturligt behov for at sikre, at de kan imødekommende deres fremtidige forpligtelser, der ofte afhænger af, hvordan den generelle økonomi i samfundet bevæger sig jf. afsnit 3.2, hvilket jo i særdeleshed er relevant, hvis forpligtelserne er reale. Desuden har pensionskasser en forholdsvis kompleks hedgingstruktur, hvilket skyldes deres asset-liability-profil.

Indtil for nylig anvendte pensionskasser hovedsageligt strategiske benchmark til at hedge deres passiver med. Strategiske benchmark er den sammensætning af aktiver, som vurderes at give det bedste afkast i forhold til risikoen, og det fastlægges af pensionskassens bestyrelse. Fastlæggelsen sker på baggrund af en afvejning af både afkast og risiko, og det har den største betydning for pensionskassens totale langsigtede afkast og risiko. Det fastlægges typisk én gang årligt på baggrund af en aktiv/passiv-analyse - ALM-analysen.

Men i stedet for et sådant approksimeret strategisk benchmark bør det relevante benchmark for en pensionskasse være dens passivprofil. Udover risikoen for at folk lever længere end forventet, er der to store risikokilder forbundet med passivprofilen i et pensionsselskab; nemlig *varigheden af forpligtelserne* samt *inflationen*. For at tilsikre en korrekt hedging af forpligtelserne er det derfor vigtigt at se på, hvordan det valgte benchmark behandler de to risici i forsøget på at replikere passivprofilen.[33]

Ofte anvender pensionsselskaberne et obligationsbenchmark til at hedge med, hvilket skyldes obligationernes kendte betalingsprofil, men et sådant benchmark skelner ikke mellem ændringer i den reale rente og inflationen i forhold til varigheden. Desuden er det kun de allerfærreste obligationsbenchmark, der indeholder obligatio-

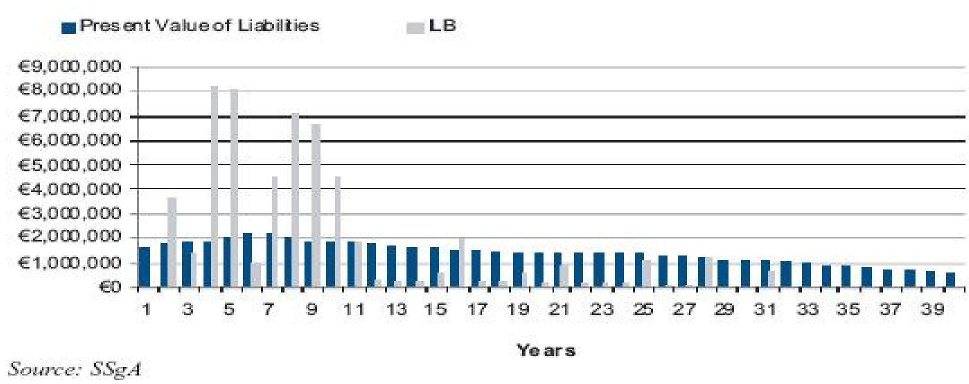
[33] Jf. van Dootingh: Using Pooled Inflation Swaps to Better Match Pension Liabilities

ner med løbetid længere end 35 år, medens pensionskassernes forpligtelser har en noget længere løbetid. Det vises også af van Dootingh, der i 2005 undersøgte det hollandske pensionsmarked og kom frem til, at varigheden på en typisk hollandsk pensionsforening var omkring 15 år, medens den typiske løbetid for forpligtelserne var på op imod 60 år. Derfor udgør konventionelle obligationsbenchmark heller ikke et specielt godt benchmark for udløbsprofilen for forpligtelserne og er derfor ikke velegnede til at hedge disse forpligtelser.

Vi vil derfor nu se på alternative muligheder for at hedge de fremtidige forpligtelser for et pensionsselskab. Først analyseres brugen af indeksobligationer, men det viser sig, at det ved hjælp udelukkende af disse ikke er muligt at opnå et perfekt hedge af inflationsrisikoen udelukkende ved brug af indeksobligationer, hvorfor inflationsswaps som tidligere gennemgået analyseres i en hedgingsammenhæng.

6.5.1 Hedging med indeksobligationer

Brugen af indeksobligationer er umiddelbart den mest enkle måde, hvorpå man kan hedge inflationsrisikoen på passiverne. Som tidligere nævnt er markedet for indeksobligationer steget signifikant i løbet af de senere år, og det giver selvsagt bedre mulighed for at sammensætte en portefølje af aktiver, der modsvarer passivsiden optimalt, hvorved en perfekt hedge opnås. Der findes imidlertid endnu ikke tilstrækkeligt med udløbstider til at kunne afdække en pensionskasses passivprofil. Desuden findes der ingen indeksobligationer med meget lange løbetider, hvorfor varighedsrisikoen til dels stadig forefindes, når der anvendes indeksobligationer til at hedge med. Det er illustreret i nedenstående figur, der viser fordelingen af henholdsvis nutidsværdien af forpligtelserne samt værdien af indeksobligationer på markedet.



Figur 9: Hedging med indeksobligationer. Kilde: van Dootingh

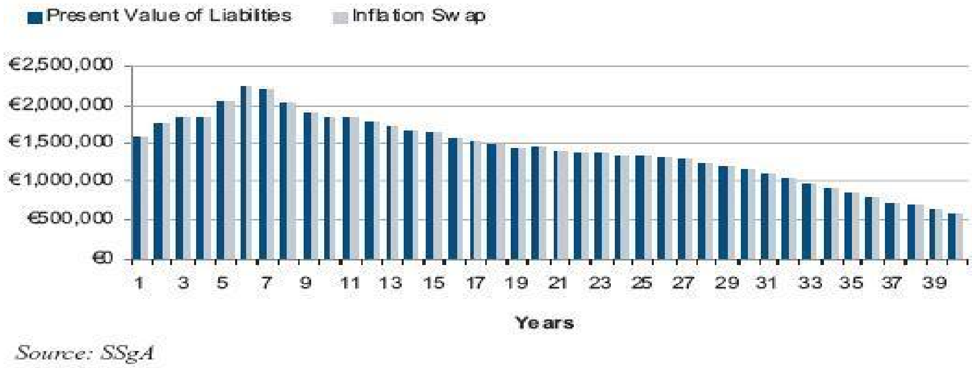
Som det fremgår af figuren, er der for de korte løbetider rigeligt med indeksobligationer til at imødekomme forpligtelserne, men i takt med at løbetiden stiger, kommer der et større og større mismatch mellem nutidsværdien af forpligtelsen og porteføljen af indeksobligationer. Umiddelbart kan man som pensionsselskab så vælge at købe de indeksobligationer med de kortere løbetider for så at reinvestere dem, når de udløber. Men en sådan strategi medfører en *reinvesteringsrisiko*, da de fremtidige betingelser ikke kendes i dag, og denne reinvesteringsrisiko fremgår også af ovenstående figur.

Derfor kan det være behjælpeligt at hedge ved hjælp af inflationsswaps, som vi tidligere har set på i kapitel 4.

6.5.2 Hedging med inflationsswaps

I stedet for at bruge et decideret benchmark af obligationer kan vi tage udgangspunkt i pensionskassens kendte passivstruktur og på baggrund af denne prøve at konstruere en portefølje med samme karakteristika i form af tid til udløb og inflationsprofil for at minimere rente- og inflationsrisikoen. Og her kan det være interessant at inkludere inflationsswaps, da markedet for disse som tidligere beskrevet er i hastig vækst. Inflationsswaps har nemlig den fleksibilitet, der skal til, for at man opnå en bedre afvejning mellem aktiverne og passiverne, selvom likviditeten dog falder gevaldigt på løbetider længere end 30 år. Med inflationsswaps kan pensionskasserne således opnå den rette eksponering af forpligtelserne ved bruge den kendte plain vanilla swaprente til at matche de fremtidige reale pengestrømme, medens inflationskomponenten bruges til at at forsikre de fremtidige pensionsudbetalingers, som dermed bevarer købekraften.

På næste side er det forbedrede match mellem aktiver og passiver er illustreret i figuren, der viser henholdsvis nutidsværdien af forpligtelserne samt værdien af inflationsswapsne.



Figur 10: Hedging med indeksswaps. Kilde: van Dootingh

Det fremgår af figuren, at værdien af inflationsswapsne i langt højere grad modsvarer nutidsværdien af forpligtelserne end tilfældet med indeksobligationerne.

Ved at medtage inflationsswaps formindskes risikoen for et mismatch i høj grad. Pensionskassen låser i dag den reale rente, sikrer den faste rente og sikrer dermed imod en hvilkensomhelst stigning i inflationen fremover.

6.5.3 Inflationsswaps i pensionskasser

Vi ser nu på et konkret eksempel for en pensionskasse, der gerne vil hedge sine fremtidige forpligtelser mod inflationen. Lad os antage, at pensionskassen i maj 2009 har forpligtelser om fem år på i alt 100 millioner euro. De 100 millioner euro placeres i 5-årige nominelle statsobligationer naturligvis til den nominelle rente. Dette sikrer ikke pensionskassen mod inflationen, da pensionskassen ikke modtager realrenten. Derfor ønsker den at indgå en ZCIIS; altså en nulkuponswap som gennemgået i kapitel 4. Pensionskassen ser på en ZCIIS med følgende karakteristika:

Handelsdato	07/05/2009
Startdato	11/05/2009
Løbetid	5 år
Swapspread	$1,852\%$
Hovedstol	€10m
Indeks	Euro HICP ex Tobacco
Indeksværdi	107,26

Der skal altså indgås ti kontrakter i alt, men det er bare et spørgsmål af skalering. Pensionskassen vil gerne være sikker på at kunne betale dens forpligtelser uafhængigt af, hvad inflationen bliver, og den vil derfor gerne modtage den realiserede inflation.

Pensionsselskabet skal derfor købe det flydende ben af inflationsswappen og betale det faste ben. Den samlede værdi af de faste ben udgør følgende jf. figur 2 i kapitel 4.

$$N\left[(1+S)^t-1\right]=100.000.000\left[(1+0,01852)^5-1\right]=9.609.401,62 \tag{96}$$

Værdien af det flydende ben, som pensionskassen skal modtage, er til gengæld ukendt, da det jo afhænger af den realiserede inflation. Vi deler op i to scenarier:

1. Den årlige, realiserede inflation er i gennemsnit lavere end swapspreadet, fx $\bar{\pi}_l = 1,6\%$
2. Den årlige, realiserede inflation er i gennemsnit højere end swapspreadet, fx $\bar{\pi}_h = 2,3\%$

I første tilfælde vil værdien af det flydende ben udgøre:

$$N*\pi=100.000.000\left[(1+0,016)^5-1\right]=8.260.128,87 \tag{97}$$

hvilket medfører et tab på swappen på $1.349.272,75$ €. Men da pensionskassen har investeret forpligtelserne i nominelle obligationer til den nominelle rente, tjener den til gengæld på obligationerne i forhold til inflationen.

I det andet tilfælge vil værdien af det flydende ben udgøre:

$$N*\pi=100.000.000\left[(1+0,023)^5-1\right]=12.041.307,56 \tag{98}$$

Det giver altså en gevinst på inflationsswappen på $12.041.307,56-9.609.401,62=2.431.905,94$ €, hvilket modsvarer tabet på den nominelle obligation.

6.6 Taktisk aktivallokering[34]

Et væsentligt spørgsmål i forbindelse med brugen af indeksobligationer i praksis er, hvorvidt man skal over- eller undervægte eksponeringen overfor inflation i sin portefølje i forhold til benchmark. Dette er kendt som taktisk aktivallokering. Hvornår skal man som investor så have en overvægt af indeksobligationer? Det vil fx være aktuelt, hvis man forventer høj vækst i samfundet. I så fald vil det nemlig være en god idé at øge andelen af indeksobligationer, da den høje vækst alt andet lige medfører en højere inflation. Desuden vil den dertilhørende inflationsrisiko føre til en stigning

[34]Måske bedre kendt som *Tactical Asset Allocation*

i de korte renter; det vil sige på en horisont mindre end et år. Obligationer med kortere løbetid vil være mere eksponeret overfor inflationen end obligationer med lang løbetid, da dem med lang løbetid omfatter flere perioder med forskellig økonomisk vækst.

Når den optimale allokering skal bestemmes, skal man dog være opmærksom på, at den stigende inflation optræder med et lag i forhold til den økonomiske vækst og derfor først vil slå igennem senere. Hvis man man forventer økonomisk vækst i foråret 2010, vil det først slå igennem på inflationen tidligst i efteråret 2010, og det betyder således noget, hvornår man påbegynder overvægten af indeksobligationer.

7 Konklusion

Denne afhandling har fokuseret på inflationsprodukter, hvordan disse kan prisfastsættes samt den empiriske anvendelse af disse produkter.

Markedet for inflationsprodukter er stadig i rivende udvikling, da investorerne i høj grad er blevet bevidste om inflationsrisikoen. Det medfører et stigende antal produkttyper inden for indekserede produkter som fx inflationssswaps. For at kunne forstå mekanismerne på inflationsproduktmarkedet er det nødvendigt med kendskab til sammenhængen mellem den nominelle og reale rente. Denne sammenhæng forklares via Fisher-relationen, som siger, at den nominelle rente kan dekomponeres i den reale rente og inflationen. Med udgangspunkti Fisher-relationen kan break-even inflationen - det vil sige den ligevægtsinflation, der tilsikrer, at afkastet på henholdsvis en nominel obligation og en indeksobligation er identisk - forklares. Break-even inflationen er altså differencen mellem den nominelle og den reale rentekurve.

For at skabe en forståelse for markedet for inflationsprodukter vil det være fordelagtigt at se på for motiverne til at aftage henholdsvis udstede inflationsprodukter. Én af de primære grunde til at udstede indekserede produkter er, hvis man har indtægter, der afhænger af inflationen, ligesom en grund er, at man som udsteder kan spare risikopræmien. De primære grunde til at investere i indeksprodukter er, hvis man har forpligtelser, der afhænger af prisudviklingen. Desuden har indeksobligationer pæne egenskaber i diversifikationsøjenmed; det vil sige lav korrelation med øvrige aktivklasser samt en lav volatilitet, hvilket også kan vises empirisk.

Der findes adskillige forskellige typer af indeksobligationer. De adskiller sig hver især på deres betalingsprofil - altså hvordan de enkelte betalinger (kupon og hovedstol) bliver korrigeret for inflation. Den mest udbredte type af indeksobligationer er Capital Indexed Bonds, som er karakteriseret ved fast rente i reale termer og en nominel hovedstol, der er linket til inflationen og dermed stiger i takt med, at inflationen stiger. Ved alle typer af indeksobligationer skal man være opmærksom på, at der opstår indekseringslags, hvilket hovedsageligt skyldes, at det underliggende inflationsindeks ikke offentliggøres samtidig med, at rentebetalingerne skal ske, men i stedet offentliggøres med en forskydning.

Et stigende marked for indeksobligationer har foranlediget et stigende marked for inflationsderivater. Især inflationsswaps har nydt stor udbredelse. De to mest udbredte typer af inflationsswaps er nulkuponswappen og year-on-year-swappen. Begge typer er kendetegnet ved, at betaleren af inflation betaler den realiserede inflation til en modtager, som så betaler et fast swapspread, der bestemmes ved aftalens indgåelse. Dette swapspread skal svare til break-even inflationen, hvilket blev vist i afhandlingen.

Et område, hvor der endnu ikke foreligger en masse teori, er inden for prisningsmodeller for inflationsprodukter. Der findes dog enkelte teoretiske prisfastsættelsesmodeller for inflationsderivater - blandt andet med udgangspunkt i Heath-Jarrow-Morton-modellen, hvor idéen bag er, at man udleder et udtryk for driften, som alene afhænger af forwardrentevolatiliteterne, i forwardrenteprocessen under det risikoneutrale mål.

En udvidelse af HJM-modellen er den tre-faktor Gaussiske HJM-model. Denne model kan konkret bruges til at prisfastsætte inflationsderivater. Modellens to hovedkonklusioner er:

1. Hurtig evaluering af modellen

2. Få parametre at estimere

De to hovedkonklusioner i modellen skyldes, at dynamikken er beskrevet som skift væk fra forwardkurven, som sikrer, at modellen automatisk passer til den initiale rentekurve samt forwardkurven. Den tre-faktor Gaussiske HJM-model kan således bruges til at finde formler for blandt andet en year-on-year inflation-indexed swap.

Hovedformålet med afhandlingen er at analysere brugen af inflationsprodukter i risiko- og porteføljestyring. Et af de mest centrale begreber inden for risikostyring af obligationsporteføljer er varigheden. Hvis man skal anvende dette risikomål til at styre risikoen på indeksobligationer, kræver det dog en dybere analyse. Det vil sige, at varigheden skal dekomponeres i henholdvis inflationsvarighed og realrentevarighed, hvilket man kan gøre for både nominelle obligationer og indeksobligationer. I den forbindelse viser det sig, at inflationsvarigheden for indeksobligationer - naturligvis - er nul, medens realrentevarigheden er priselasticiteten med hensyn til realrenten.

Et andet risikomål er beta-begrebet, som er kendt fra aktieanalysen. β fortæller i dette henseende noget om forholdet mellem de nominelle og reale renter, men der er endnu ingen entydig måde at beregne det på for indeksobligation, da det er forholdsvis ny tilgang til risikostyring af disse produkter. En komponent i β-beregningen er volatiliteten for henholdsvis den reale og nominelle rente. Derfor analyseredes prisvolatiliteten for både en indeksobligation og en tilsvarende nominel obligation. Det blev vist, at volatiliteten på indeksobligationen generelt var lavere en volatiliteten på den tilsvarende nominelle obligation helt i overensstemmelse med teorien.

Den lave volatilitet er en fordel ved at investere i indeksobligationer. En anden fordel er den lave korrelation med andre aktivklasser, hvilket kan anvendes i diversifikationsøjenmed. Ved at sammensætte en portefølje af markedsporteføljen og en portefølje med ukorreleret risiko kan man optimere Sharpe Ratio, som angiver merafkastet per risikoenhed. Det er ikke nødvendigvis kun nationale indeksobligationer, der kan modsvare inflationsrisikoen. Faktisk kan man med fordel inkludere globale indeksobligationsporteføljer, som har en endnu lavere volatilitet end nationale indeksobligationer.

Et andet anvendelsesområde med inflationsprodukter er i hedgingøjenmed, hvortil inflationsswaps er særdeles anvendelige, da de kan replikere endnu flere løbetider end indeksobligationer og dermes i højere matche forpligtelserne i fx et pensionsselskab. Den empiriske anvendelse af inflationsswaps blev illustreret med et konkret eksempel, hvor et pensionsselskabs forpligtelse blev afdækket med brug af en inflationsswap.

Inflationsprodukter bliver også anvendt inden for taktisk aktivallokering, og når den optimale allokering skal bestemmes, skal man som investor blandt andet være opmærksom på, at den stigende inflation optræder med et lag.

Indekserede produkter har altså vist sig at have en masse muligheder og fordele inden for portefølje- og risikostyring, og selvom markedet er forholdsvis nyt, findes der allerede adskillige muligheder for at afdække inflationsrisikoen.

8 Litteraturliste

8.1 Bøger

Benaben, Brice (editor): Inflation-Linked Products - A Guide for Investors and Asset & Liability Managers, Risk Books, 2005

Benaben, Brice (editor): Inflation Risks and Products - The Complete Guide, Risk Books, 2008

Deacon, Mark, et al.: Inflation-indexed securities - Bonds, Swaps and Other Derivatives, Second Edition, Wiley Finance, 2004

Jensen, Bjarne Astrup: Rentesregning, 4. udgave, Jurist- og Økonomforfundets Forlag, 2005

Jensen, Bjarne Astrup: Lecture Notes in Continuous Time Finance, 2009

Mankiw, N. Gregory: Macroeconomics, Fifth Edition, Worth Publishers, 2003

Munk, Claus: Fixed Income Analysis - Securities, Pricing, and Risk Management, 2008

Nawalkha, Sanjay K., et al.: Interest Rate Risk Modeling, Wiley Finance, 2005

Segreti, Ralph: Global Inflation-Linked Products: A User's Guide, Barclays Capital Research, 2008

8.2 Artikler

Andreasen, Jesper: A Gaussian Exchange Rate and Term Structure Model, University of Aarhus, 1997

Balling, Katrine Munck: Bestemmende faktorer for prisdannelsen på markedet for inflationsindekserede produkter, Copenhagen Business School, 2007

De Coster, Filip, et al.: Diversification and hedging qualities of inflation-linked instruments, ING

Dootingh, Susanne van: Using Pooled Inflation Swaps to Better Match Pension Liabilities, State Street Global Advisors, VBA Journal, 2005

Gerlach, Ditte Marie Kjærsgaard: Inflation-linked Instruments, Copenhagen Business School, 2008

Hansen, Bo William: Indeksobligationer i porteføljebeslutninger, Danmarks Nationalbank, 2. kvartal 2004

Henriksen, Karsten: Forsikring mod inflation, Morningstar, 2009

Hughston, L. P.: Inflation Derivatives, King's College London, 1998

Jamshidian, Farshid: Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model, Research in Finance 9, 1991

Kerkof, Jeroen: Inflation Derivatives Explained - Markets, Products, and Pricing, Lehman Brothers, 2005

Kjærgaard, Lars: Modelling Inflation, Risk Magazine, 2007

Leung, Kwai Sun & Wu, Lixin: Inflations Derivatives - HJM Framework and Market models, The Chinese University of Hong Kong, 2008

Liebak, Michael: Reduceret varighed på indeksobligationer - bias på BEI, Nykredit Markets, 2009

Nielsen, Heidi Modvig: Inflation-linked securities - from a risk manager's view, Copenhagen Business School, 2009

Peat, Tim & Segreti, Ralph: Inflation Derivatives: A User's Guide, Barclays Capital Research, 2005

Siegel, Laurence B. & Waring, M. Barton: TIPS, the Dual Duration, and the Pension Plan, Financial Analysts Journal, Volume 60, Number 5, 2004

Wanningen, C.F.A.R: Inflation Derivatives, University of Twente, 2007

8.3 Præsentationer

Understanding Inflation Products, Financial Training Partner, 2009

8.4 Datakilder

Bloomberg

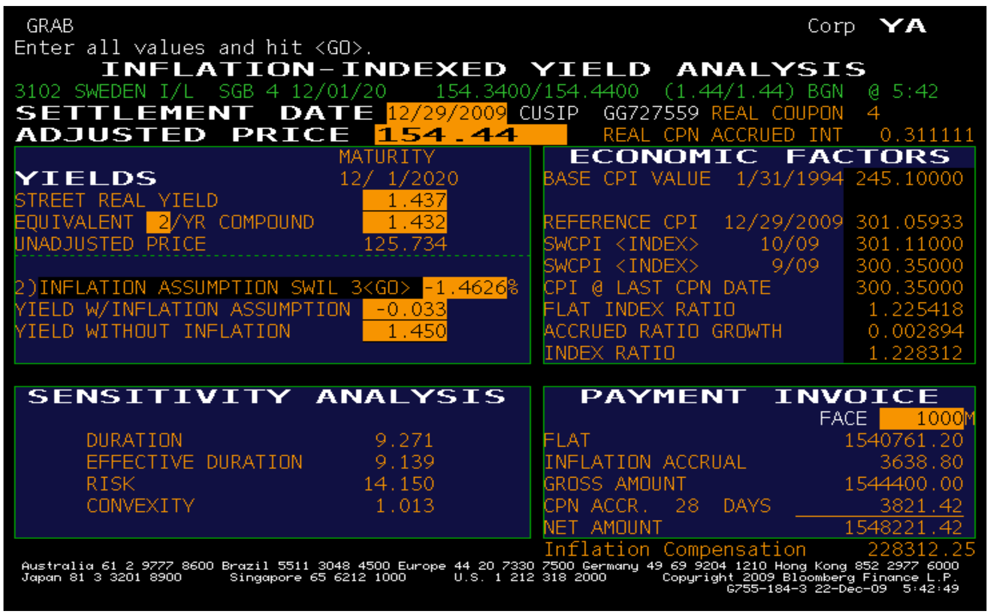
Danmarks Statistik - www.dst.dk

Nordea Analytics

9 Bilag

9.1 Bilag 1 - Prisfastsættelse af obligation jf. Bloomberg

Nedenstående udtræk fra Bloomberg viser prisen på den svenske obligation, som vi kom frem til i kapitel 4. Desuden fremgår de forskellige risikotal, som blev beregnet i kapitel 6.



9.2 Bilag 2 - Volatilitet for obligation jf. Bloomberg

Nedenstående to udtræk fra Bloomberg viser prisvolatiliteten, som blev analyseret i kapitel 6, på først indeksobligationen og dernæst den tilsvarende nominelle obligation, begge udstedt af den svenske stat:

GRAB Corp HVT
END DATE SHIFTED

HISTORICAL PRICE VOLATILITY

3102 SWEDEN I/L SGB 4 12/01/20 153.8800/153.9800 (1.47/1.47) BGN @ 5:00

Period W Daily,Weekly,Monthly

	Prices	N = 5 week	30	50	100
1/ 1/10	154.00	2.436	3.859	4.533	5.881
12/25/ 9	154.77	3.394	3.787	4.610	5.878
12/18/ 9	155.19	5.430	3.746	4.613	5.874
12/11/ 9	154.72	5.702	3.776	4.612	5.878
12/ 4/ 9	154.91	5.588	3.811	4.612	5.881
11/27/ 9	156.21	4.868	3.657	4.530	5.880
11/20/ 9	154.72	3.813	4.187	4.682	5.844
11/13/ 9	153.84	3.111	4.130	5.488	5.877
11/ 6/ 9	153.24	1.951	4.101	5.873	5.872
10/30/ 9	154.20	3.363	4.009	5.838	5.867
10/23/ 9	154.19	4.314	4.036	6.152	5.894
10/16/ 9	154.63	4.993	4.057	6.352	5.902

Historical Closing P (Prices or Yields) 52 Annualization Factor

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2010 Bloomberg Finance L.P.
1 04-Jan-10 5:20:45

GRAB Corp HVT

HISTORICAL PRICE VOLATILITY

SWEDEN GOVT SGB 5 12/01/20 114.0400/114.1400 (3.43/3.42) BGN @ 5:21

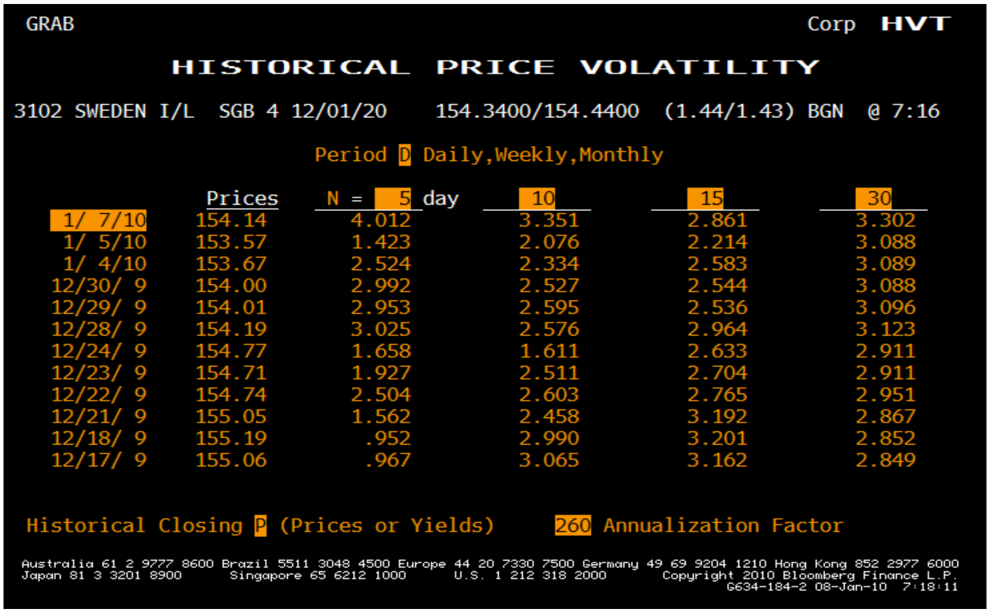
Period W Daily,Weekly,Monthly

	Prices	N = 5 week	30	50	100
1/ 1/10	114.52	6.492	5.513	6.855	8.592
12/25/ 9	115.17	6.798	5.523	7.268	8.589
12/18/ 9	116.21	6.040	5.335	7.283	8.562
12/11/ 9	114.88	4.679	5.344	7.371	8.546
12/ 4/ 9	114.86	4.933	5.760	7.375	8.546
11/27/ 9	115.75	3.855	5.635	7.397	8.558
11/20/ 9	114.95	4.332	6.602	8.135	8.546
11/13/ 9	114.40	5.062	6.570	8.516	8.602
11/ 6/ 9	114.76	5.437	6.609	8.980	8.600
10/30/ 9	115.15	5.645	6.669	9.129	8.602
10/23/ 9	114.15	7.478	6.637	9.630	8.626
10/16/ 9	115.02	6.320	6.572	9.794	8.625

Historical Closing P (Prices or Yields) 52 Annualization Factor

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2010 Bloomberg Finance L.P.
1 04-Jan-10 5:21:45

Til brug for figur 6.2 er der desuden taget følgende tre udtræk fra Bloomberg:



GRAB Corp **HVT**

HISTORICAL PRICE VOLATILITY

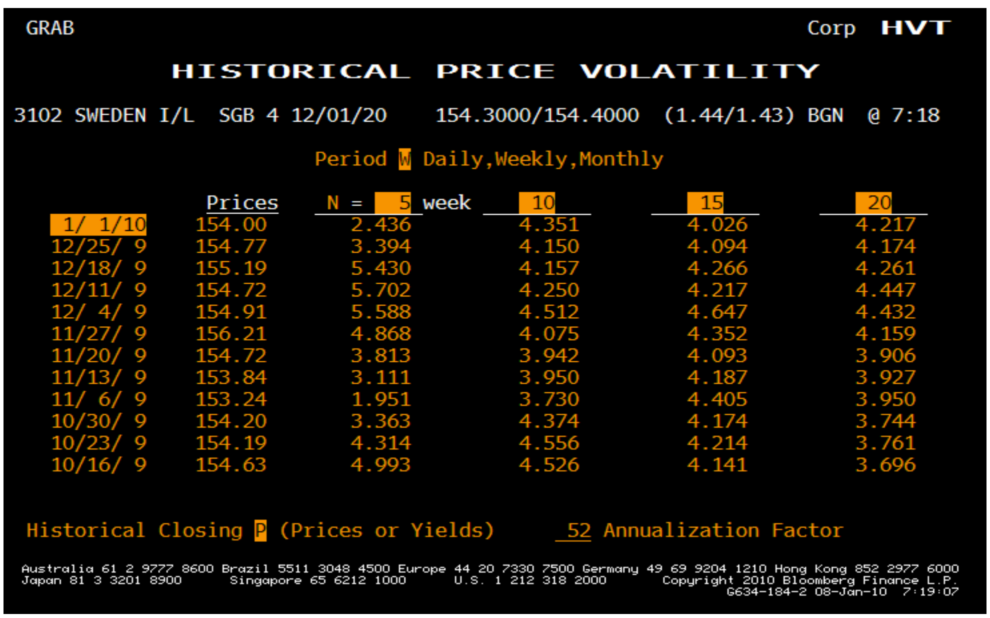
3102 SWEDEN I/L SGB 4 12/01/20 154.3400/154.4400 (1.44/1.43) BGN @ 7:16

Period D Daily,Weekly,Monthly

	Prices	N = 5 day	10	15	30
1/ 7/10	154.14	4.012	3.351	2.861	3.302
1/ 5/10	153.57	1.423	2.076	2.214	3.088
1/ 4/10	153.67	2.524	2.334	2.583	3.089
12/30/ 9	154.00	2.992	2.527	2.544	3.088
12/29/ 9	154.01	2.953	2.595	2.536	3.096
12/28/ 9	154.19	3.025	2.576	2.964	3.123
12/24/ 9	154.77	1.658	1.611	2.633	2.911
12/23/ 9	154.71	1.927	2.511	2.704	2.911
12/22/ 9	154.74	2.504	2.603	2.765	2.951
12/21/ 9	155.05	1.562	2.458	3.192	2.867
12/18/ 9	155.19	.952	2.990	3.201	2.852
12/17/ 9	155.06	.967	3.065	3.162	2.849

Historical Closing P (Prices or Yields) 260 Annualization Factor

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2010 Bloomberg Finance L.P.
G634-184-2 08-Jan-10 7:18:11



GRAB Corp **HVT**

HISTORICAL PRICE VOLATILITY

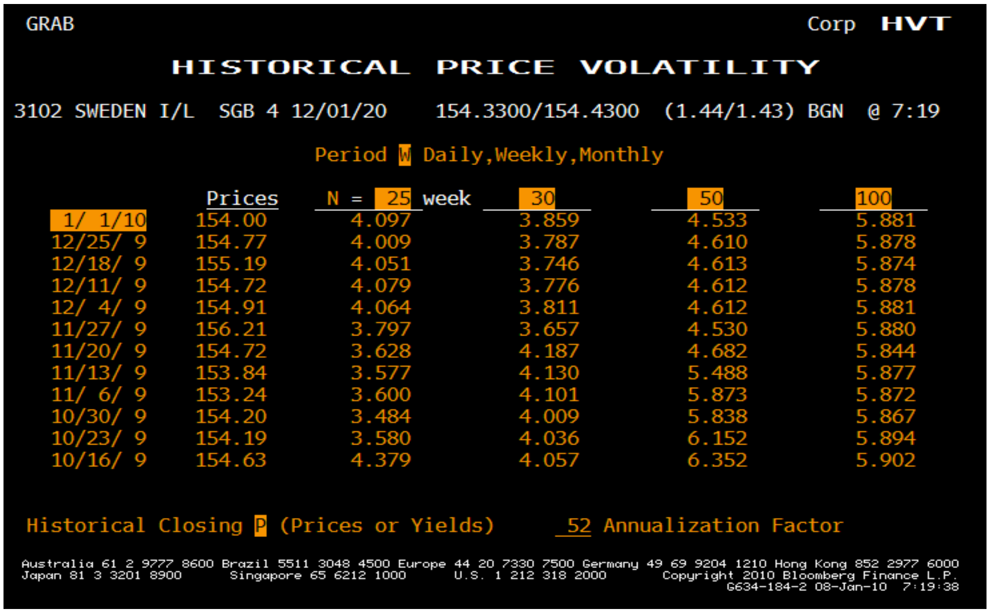
3102 SWEDEN I/L SGB 4 12/01/20 154.3000/154.4000 (1.44/1.43) BGN @ 7:18

Period W Daily,Weekly,Monthly

	Prices	N = 5 week	10	15	20
1/ 1/10	154.00	2.436	4.351	4.026	4.217
12/25/ 9	154.77	3.394	4.150	4.094	4.174
12/18/ 9	155.19	5.430	4.157	4.266	4.261
12/11/ 9	154.72	5.702	4.250	4.217	4.447
12/ 4/ 9	154.91	5.588	4.512	4.647	4.432
11/27/ 9	156.21	4.868	4.075	4.352	4.159
11/20/ 9	154.72	3.813	3.942	4.093	3.906
11/13/ 9	153.84	3.111	3.950	4.187	3.927
11/ 6/ 9	153.24	1.951	3.730	4.405	3.950
10/30/ 9	154.20	3.363	4.374	4.174	3.744
10/23/ 9	154.19	4.314	4.556	4.214	3.761
10/16/ 9	154.63	4.993	4.526	4.141	3.696

Historical Closing P (Prices or Yields) 52 Annualization Factor

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2010 Bloomberg Finance L.P.
G634-184-2 08-Jan-10 7:19:07



GRAB Corp **HVT**

HISTORICAL PRICE VOLATILITY

3102 SWEDEN I/L SGB 4 12/01/20 154.3300/154.4300 (1.44/1.43) BGN @ 7:19

Period W Daily,Weekly,Monthly

	Prices	N = 25 week	30	50	100
1/ 1/10	154.00	4.097	3.859	4.533	5.881
12/25/ 9	154.77	4.009	3.787	4.610	5.878
12/18/ 9	155.19	4.051	3.746	4.613	5.874
12/11/ 9	154.72	4.079	3.776	4.612	5.878
12/ 4/ 9	154.91	4.064	3.811	4.612	5.881
11/27/ 9	156.21	3.797	3.657	4.530	5.880
11/20/ 9	154.72	3.628	4.187	4.682	5.844
11/13/ 9	153.84	3.577	4.130	5.488	5.877
11/ 6/ 9	153.24	3.600	4.101	5.873	5.872
10/30/ 9	154.20	3.484	4.009	5.838	5.867
10/23/ 9	154.19	3.580	4.036	6.152	5.894
10/16/ 9	154.63	4.379	4.057	6.352	5.902

Historical Closing P (Prices or Yields) 52 Annualization Factor

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000
G634-184-2 08-Jan-10 7:19:38