

Copenhagen Business School  
Institut for Finansiering  
Cand.merc.(mat.)  
Kandidatafhandling  
Afløvet den 25. august 2009

Forfatter: Martin Bech Rasmussen  
Vejleder: Niels Rom Poulsen

---

# Heston modellen

Udledning, egenskaber og praktisk anvendelse

---

Martin Bech Rasmussen



---

# The Heston model

## Derivation, properties and practical use

Martin Bech Rasmussen

### Executive summary

The main subject of this master thesis is to derive and analyse a closed-form solution for the stochastic volatility model developed by Stephen L. Heston in 1993. The main properties of the model are illustrated and the practical use of the model tested in various situations.

The motivation for developing a stochastic volatility model is that the basic option pricing model developed by Black & Scholes [1973] is not consistent with observed market prices. One of the main characteristics of the Black-Scholes model is that the underlying asset follows a geometric Brownian motion with constant volatility. However empirical studies show that the volatility is not constant over time, so Heston [1993] suggested an extension to the Black-Scholes model, where the volatility follows a stochastic process and thus varies over time.

The technique used by Heston to derive the closed-form solution for option prices under stochastic volatility is based on solving two partial differential equations for the characteristic functions associated with the probabilities. Then the connection to the probabilities in the model is calculated using an inverse Fourier transformation. The solution technique is presented in detail in chapter 3 of this thesis, and it can be used to derive closed-form solutions to many different problems. The derivation of the partial differential equations for the characteristic functions is shown in appendix B. Another version of the Heston model, known as the Displaced Heston model, is also introduced. The main difference between the two models is that the process for the underlying asset is defined differently in the Displaced Heston model, which gives the model the advantage of allowing the correlation between the underlying asset and the variance to be zero without losing one of the important properties of the stochastic volatility model. In some applications, this proves to be an advantage.

The main effect that causes the Heston model to differ from the Black-Scholes model, is its ability to generate skewness and kurtosis in the probability density function. In the Heston model, skewness is generated by the correlation parameter, and kurtosis is generated by the volatility of volatility parameter. In the Displaced Heston model the correlation was set to zero, but this model still has the ability to generate skewness through the displaced parameter. The effects on the probability density function lead to another important property of the model – its ability to generate a volatility smile that is similar to the volatility smiles observed in the market. In the volatility smile, the skew is generated by the correlation parameter, and the smile is generated by the volatility of the volatility parameter. All the other model parameter effects on the volatility smile are analysed in chapter 4 in this thesis.

A practical use is introduced in chapter 5 where the two stochastic volatility models are used to price the interest-rate derivative known as a cap. The model parameters are calibrated to observed market prices by minimising the sum of the squared pricing error for all the maturities and exercise prices. Various tests show that the Displaced Heston

model is the best model to use on the data in this thesis, and that it performs very well in describing the market data.

Another type of practical use is introduced in chapter 6 where the Heston model simulation abilities are tested in a Monte Carlo setup. A simple Euler scheme for simulating the two processes is described, and the pricing ability of the method is compared to the analytical Heston formula. It is shown that when enough simulations are used and the discrete time steps in each simulation are small then the simulated price is very close to the analytical price. Finally, the simulation setup is used in a real-life example where a structured stock obligation is priced using the Euler scheme and a calibration setup similar to the one used in chapter 5.

The two models and the calculations made throughout the thesis are implemented in the mathematical programming language MATLAB, and the source code for the programs is shown in appendix C.

# Indhold

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>11</b>
1.1	Problemformulering . . . . .	12
1.2	Afgrænsning . . . . .	13
1.3	Kandidatafhandlingens struktur . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Prisfastsættelse af optioner</b>	<b>15</b>
2.1	Stokastiske processer . . . . .	15
2.1.1	Sandsynlighedsrum . . . . .	15
2.1.2	Itô's lemma . . . . .	16
2.1.3	Geometrisk Brownsk bevægelse . . . . .	17
2.1.4	CIR-processen . . . . .	18
2.2	Risikoneutral prisfastsættelse af optioner . . . . .	20
2.2.1	Antagelser i modellen . . . . .	20
2.2.2	Den fundamentale partielle differentialligning . . . . .	21
2.2.3	Black-Scholes-Merton differentialligningen . . . . .	22
2.2.4	Det risikoneutral sandsynlighedsmål $\mathbb{Q}$ . . . . .	23
2.3	Prisfastsættelse af europæiske optioner . . . . .	25
2.3.1	Black-Scholes modellen . . . . .	25
2.4	Prisfastsættelse af rentederivater . . . . .	27
2.4.1	Black 76 modellen . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Stokastiske volatilitetsmodeller</b>	<b>31</b>
3.1	Modeller med stokastisk volatilitet . . . . .	31
3.2	Heston modellen . . . . .	32
3.2.1	Definition af modellen . . . . .	32
3.2.2	Udledning af modellen vha. Hestons teknik . . . . .	33
3.3	Displaced Heston modellen . . . . .	38
3.3.1	Definition af modellen . . . . .	38
3.3.2	Udledning af en lukket prisformel . . . . .	39
3.4	Udvidelsesmuligheder . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Numerisk analyse af parametre</b>	<b>43</b>
4.1	Sandsynlighedsfordeling i Heston modellen . . . . .	43
4.1.1	Tæthedsfunktion i Heston modellen . . . . .	44
4.1.2	Effekten af forskellige parametervalg i tæthedsfunktionen . . . . .	45
4.2	Volatilitetssmilet . . . . .	49

<b>5</b>	<b>Prisfastsættelse af rentecaps i stokastiske volatilitetsmodeller</b>	<b>55</b>
5.1	Omformulering af de stokastiske volatilitetsmodeller . . . . .	55
5.1.1	Heston modellen . . . . .	55
5.1.2	Displaced Heston model . . . . .	57
5.2	Kalibrering af modellen til markededata . . . . .	58
5.2.1	Kalibreringsproblemet . . . . .	58
5.2.2	Implementering af kalibreringsmetoden . . . . .	59
5.3	Test af modellernes kalibreringsevne . . . . .	59
5.3.1	Feller betingelsen . . . . .	60
5.3.2	Kalibrering af Heston modellen . . . . .	62
5.3.3	Kalibrering af Displaced Heston modellen . . . . .	65
5.4	Case: Prisfastsættelse af 30-årig rentecap . . . . .	68
5.4.1	Beskrivelse af data . . . . .	68
5.4.2	Kalibrering . . . . .	69
5.4.3	Pris for rentecappen . . . . .	71
5.5	Opsummering og udvidelsesmuligheder . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Simulering af Heston modellen</b>	<b>75</b>
6.1	Monte Carlo simulering . . . . .	75
6.1.1	Generelt om Monte Carlo . . . . .	75
6.1.2	Praktisk implementering . . . . .	76
6.2	Simulering af processerne i Heston modellen . . . . .	76
6.2.1	Heston modellen i diskret form . . . . .	77
6.2.2	Euler skema . . . . .	78
6.2.3	Test af simuleringsmetodens prisningsegenskaber . . . . .	78
6.2.4	Andre simuleringsmetoder . . . . .	79
6.3	Case: Prisfastsættelse af struktureret aktieobligation . . . . .	80
6.3.1	Beskrivelse af payoff-funktionen . . . . .	80
6.3.2	Beskrivelse af markededata . . . . .	81
6.3.3	Kalibrering af modellen . . . . .	81
6.3.4	Simulering af aktieobligationen . . . . .	82
6.4	Opsummering og udvidelsesmuligheder . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Konklusion</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Notationsoversigt</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Udledning af de karakterstiske funktioners PDE'er</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Kildekode til MATLAB</b>	<b>97</b>
C.1	Tæthedsfunktioner . . . . .	97
C.2	Heston modellen . . . . .	98
C.3	Displaced Heston modellen . . . . .	99
C.4	Kalibreringsproblemet . . . . .	100
C.5	Simulering . . . . .	101

---

<b>D Tabeller</b>	<b>105</b>
D.1 Kalibrering af Heston modellen i kapitel 5 . . . . .	105
D.2 Kalibrering af Displaced Heston modellen i kapitel 5 . . . . .	106
D.3 Aktie-casen fra kapitel 6 . . . . .	107
<b>Litteratur</b>	<b>109</b>

# Figurer

2.1	Eksempel på simulering af en geometrisk Brownsk bevægelse . . . . .	19
2.2	Eksempel på simulering af CIR-processen . . . . .	19
3.1	Fourier integralets konvergeringsegenskaber . . . . .	37
4.1	Tæthedsfunktion, når $\rho$ varieres . . . . .	46
4.2	Forskel imellem Heston prisen og Black-Scholes prisen, når $\rho$ varieres . . .	47
4.3	Tæthedsfunktionen, når $\sigma$ varieres . . . . .	48
4.4	Forskel imellem Heston prisen og Black-Scholes prisen, når $\sigma$ varieres . . .	48
4.5	Forskel imellem Displaced Heston prisen og Black-Scholes prisen når $m$ varieres . . . . .	49
4.6	Eksempel på et volatilitetssmil og skew . . . . .	50
4.7	Volatilitetssmil, når $\rho$ varieres . . . . .	51
4.8	Volatilitetssmil, når $\sigma$ varieres . . . . .	51
4.9	Volatilitetssmil, når $\theta$ og $v_t$ varieres . . . . .	51
4.10	Volatilitetssmil, når $\kappa$ varieres . . . . .	51
4.11	Volatilitetssmil, når $m$ varieres . . . . .	52
4.12	Volatilitetssmil, når $\tau$ varieres . . . . .	52
4.13	Eksempel på en volatilitetsflade . . . . .	53
5.1	Volatilitetssmil, der undersøger muligheden for opfyldelse af Feller betingelsen	61
5.2	Volatilitetssmil, der illustrerer Heston modellens kalibreringsevner . . . . .	64
5.3	Volatilitetssmil, der illustrerer Displaced Heston modellens kalibreringsevner	67
5.4	Volatilitetsflade dannet ud fra markedsdata . . . . .	69
5.5	Volatilitetsflade kalibreret vha. Displaced Heston modellen . . . . .	70
5.6	Forskellen mellem markedsvolatiliteten og modelvolatiliteten . . . . .	71
6.1	Volatilitetssmil for seks aktier . . . . .	83



# Tabeller

4.1	Standard parameterverdier for de to modeller til den numeriske analyse . . .	43
5.1	Implicit volatilitet for fire udvalgte capletter . . . . .	60
5.2	Resterende variable for fire udvalgte capletter . . . . .	60
5.3	Heston modelparametre med og uden krav til opfyldelse af Feller betingelsen	61
5.4	Intervaller til kalibrering af Heston modellen . . . . .	63
5.5	Intervaller til kalibrering af Displaced Heston modellen . . . . .	65
5.6	Markeds- og modelpriser for en 30-årig rentecap . . . . .	72
6.1	Prisfejl og tidsforbrug, når $N$ og $\Delta$ varieres . . . . .	79
6.2	Aktiernes startværdi og inddelingen af strikeniveauerne . . . . .	81
6.3	Resultatet af kalibreringen for de seks aktier . . . . .	82
D.1	10 startgæt til kalibreringerne af Heston modellen i kapitel 5 . . . . .	105
D.2	Resultatet af kalibreringerne af Heston modellen i kapitel 5 . . . . .	106
D.3	10 startgæt til kalibreringerne af Displaced Heston modellen i kapitel 5 . .	106
D.4	Resultatet af kalibreringerne af Displaced Heston modellen i kapitel 5 . . .	107
D.5	Markedsdata for de seks aktier fra kapitel 6 . . . . .	107



# Kapitel 1

## Indledning

*Suppose we use the standard deviation ... of possible future returns on a stock ... as a measure of its volatility. Is it reasonable to take that volatility as constant over time? I think not.*

Fisher Black (1976)

Prisfastsættelse af optioner har været et centralt emne igennem finansieringsteoriens historie. En option er, kort fortalt, en finansiel kontrakt, hvor værdien af kontrakten afhænger af udviklingen af et andet aktiv (det underliggende aktiv). Det er en meget populær type kontrakt, der bl.a. kan bruges til at afdække risiko eller spekulere i fremtidige gevinster. I moderne finansieringsteori er det vigtigste bidrag til at kunne prisfastsætte europæiske optioner kommet fra Fisher Black og Myron Scholes' banebrydende artikel fra 1973, hvor de udledte en prisformel, der bygger på en antagelse om, at det underliggende aktiv følger en geometrisk Brownsk bevægelse med konstant volatilitet. Denne prisformel, kendt som *Black-Scholes formel*, er stadig en af de mest anvendte, da den ved hjælp af et relativt simpelt lukket udtryk kan udregne prisen for en europæisk plain vanilla option, hvor den eneste uobserverbare variabel er volatiliteten for det underliggende aktiv.

Der er en række restriktive antagelser i Black-Scholes modellen, der er medvirkende til, at den er nem at arbejde med, men flere af disse antagelser viser sig også at være ganske problematiske. Disse antagelser er bl.a. en konstant risikofri rente, konstant volatilitet og at udløbskursen for det underliggende aktiv er log-normalfordelt. Ovenstående citat fra en af grundlæggerne af Black-Scholes modellen viser, at antagelsen omkring konstant volatilitet har været særdeles tvivlsom fra starten, og specielt efter børskrakket i 1987 viste det sig, at markedspriserne for optioner opførte sig markant anderledes, end de skulle ifølge Black-Scholes teorien. Efter børskrakket opstod der et mønster i de såkaldt implicitte volatiliteter<sup>1</sup>, man kunne observere i markedet. Det mønster er kendt som *volatilitets-smilet*, og stemmer ikke overens med Black-Scholes modellen. Volatilitetssmilet viser de implicitte volatiliteter som en funktion af strikeniveauet, og hvis teorien bag Black-Scholes modellen var rigtig, skulle denne sammenhæng give en vandret linje. Det er dog ikke tilfældet på de finansielle markeder, hvor sammenhængen typisk minder mere om et smil med en højere volatilitet for de lave og høje strikeniveauer og en lidt lavere volatilitet for de strikeniveauer, der ligger omkring det aktuelle niveau for det underliggende aktiv. På visse markeder, som f.eks. aktiemarkedet, har volatiliteterne for de høje strikeniveauer en tendens til ikke at stige igen, og så kaldes sammenhængen typisk for et *skew*. En grund til,

---

<sup>1</sup>En implicit volatilitet er den volatilitet, der får optionsprisen fra Black-Scholes modellen til at passe med markedsprisen.

at disse sammenhænge opstod, er, at markederne generelt blev mere volatile efter børskrakket, og det har været medvirkende til, at de empiriske fordelinger for udløbskursen begyndte at opføre sig anderledes end log-normalfordelingen. Som en konsekvens af den øgede volatilitet gav den empiriske fordeling herefter en væsentligt større sandsynlighed for „ekstreme“ udfald, hvilket typisk giver en skæv fordeling og med federe haler end den, der ligger til grund for Black-Scholes modellen.

Problemerne med Black-Scholes modellen har ført til mange forsøg på at opstille modeller, der gør op med specielt de fordelingsmæssige problemer. Et af de største problemer har vist sig at være antagelsen om konstant volatilitet, hvilket har ført til flere forskellige forslag til modeller, hvor volatiliteten gøres stokastisk. Et andet løsningsforslag var at tillade spring i processen for det underliggende aktiv. I en del år led de foreslåede modeller dog under det problem, at det ikke var muligt at udlede lukkede løsningsformler for optionsprisen, og derfor var man nødt til at anvende nogle beregningstunge numeriske løsningsmetoder for at udregne optionsprisen. De meget tunge beregninger gjorde modellerne uegnede til praktiske formål. Et egentligt gennembrud kom i 1993, med publiceringen af Stephen L. Hestons anerkendte artikel, hvor han anvendte en ny løsningsteknik til at udlede et lukket formeludtryk for prisen på en europæisk call-option i en model med stokastisk volatilitet. Modellen blev i 1996 udvidet af David S. Bates til også at kunne inkorporere spring i processen for det underliggende aktiv. Sidenhen er der kommet endnu flere modeller til. Bl.a. behandler Duffie, Pan & Singleton [2000] en hel klasse af modeller, kendt som affine spring og diffusionsprocesser, hvor de anvender Hestons løsningsteknik til at udlede lukkede prisformler.

Til trods for de mange modeller findes der ikke en generel konsensus for, hvilken model der er den bedste at bruge. Det er bl.a. en konsekvens af, at jo mere avanceret og realistisk en model bliver, jo flere parametre indgår der typisk også i modellen. Flere parametre vil typisk være forbundet med et større tidsforbrug, så man er altid nødt til at lave en afvejning af, om den ekstra fleksibilitet, man får i modellen, giver et stort nok udbytte i forhold til den ekstra kompleksitet, man samtidig får, når antallet af parametre øges. En essentiel del i enhver model er, at man har nogle gode metoder til at estimere modelparametrene, da selv den mest realistiske model bliver værdiløs, hvis man ikke på en forholdsvis simpel måde kan estimere parametrene.

Motiveret af ovenstående problemer med Black-Scholes modellen og de forskellige løsningsforslag, der har været igennem tiden, er fokusområdet for denne kandidatafhandling at udlede en lukket optionsprisformel i den stokastiske volatilitetsmodel fra Heston [1993] (herefter omtalt som Heston modellen) og teste nogle forskellige praktiske anvendelsesmuligheder for modellen.

## 1.1 Problemformulering

Hovedformålene med denne kandidatafhandling er at:

- udlede en lukket prisformel for prisen på en europæisk call-option i en model med stokastisk volatilitet ved at anvende Hestons teknik,
- præsentere et alternativ til Heston modellen, kendt som Displaced Heston modellen, og udlede en prisformel for denne model,
- teste betydningen af de forskellige parametre, der indgår i de to ovenstående modeller, og de fordelingsmæssige forskelle, der er i forhold til Black-Scholes modellen,

- implementere de to modeller i matematikprogrammet MATLAB og diskutere en kalibreringsmetode til estimation af modelparametrene,
- anvende de to modeller til at prisfastsætte rentederivater og foretage en kalibrering af modellerne til markedsdata med henblik på at teste, hvilken en af de to modeller der er bedst til at prisfastsætte denne optionstype,
- illustrere en simuleringsmetode for Heston modellen, som f.eks. kan anvendes til at prisfastsætte strukturerede produkter.

For at sikre den teoretiske baggrund for at ovenstående hovedformål kan opfyldes, indledes afhandlingen med et kapitel, hvor nogle af de centrale principper omkring stokastiske processer og den grundlæggende optionsteori præsenteres.

## 1.2 Afgrænsning

For at holde fokus på hovedformålene er det valgt at lave følgende afgrænsning:

- Der tages udgangspunkt i risikoneutral prisfastsættelse, og der ses bort fra estimation af risikopræmier.
- Det antages, at markederne er perfekte, hvilket bl.a. betyder, at der ses bort fra transaktionsomkostninger, skat, handelsrestriktioner og lignende. Betydningen af de perfekte markeder vil ikke blive berørt.
- De lukkede prisformler udledes kun for call-optioner. En lukket prisformel for en put-option kan dog forholdsvis nemt udledes ved at benytte den samme teknik, som anvendes til call-optioner. Ellers kan prisen blot udregnes vha. put-call pariteten.
- Teorien bag de karakteristiske funktioner og Fourier transformationen, der anvendes i Hestons løsningsteknik, vil ikke blive behandlet.
- Fokus vil udelukkende være på betydningen af den stokastiske volatilitet. De andre restriktive antagelser, der er i Black-Scholes modellen, og forslag til løsningsmetoder på de fordelingsmæssige problemer – herunder inkludering af spring-risiko i det underliggende aktiv – vil ikke blive diskuteret nærmere.
- I simuleringsdelen vil fokus være på simulering vha. et Euler skema. De mange andre simuleringsmetoder, der findes, vil ikke blive gennemgået i detaljer.
- Der ses helt bort fra nøgletalsberegninger i de anvendte modeller.

## 1.3 Kandidatafhandlingens struktur

Denne afhandling er struktureret på følgende måde:

I *kapitel 2* præsenteres den grundlæggende finansieringsteori, der skal være på plads, før man kan begynde at se på de mere avancerede stokastiske volatilitetsmodeller. Kapitlet indledes med en introduktion til nogle af de generelle principper omkring stokastiske processer, som anvendes igennem hele afhandlingen. Herefter introduceres teorien omkring risikoneutral prisfastsættelse, og Black-Scholes formel præsenteres. Til sidst i kapitlet

præsenteres en modificeret udgave af Black-Scholes formel, kendt som *Black 76 formel*, der kan anvendes til at prisfastsætte rentederivater.

Principperne bag den generelle prisfastsættelse fører videre til hovedtemaet i denne afhandling – nemlig udledningen af den lukkede formel i Heston modellen. Denne udledning foretages i *kapitel 3*, hvor de partielle differentiaalligninger udledes, og en prisformel, der bygger på en invers Fourier transformation, præsenteres. Der præsenteres desuden en alternativ version af modellen, kendt som Displaced Heston modellen, der blev introduceret af Andersen & Andreasen [2002], hvor de anvendte den til at prisfastsætte rentederivater. I bilag B foretages en uddybende matematisk udledning af løsningerne til de partielle differentiaalligninger.

Efter at de to modeller er præsenteret og udledt, diskuteres i *kapitel 4* fordelingsantagelserne og modellernes evne til at generere volatilitetssmil. Kapitellet indeholder en grundig analyse af de vigtigste parametres påvirkning af fordelingerne og de prisforskelle, som en anderledes fordeling vil medføre i forhold til Black-Scholes modellen for forskellige strikeniveauer. Derudover gennemgås de forskellige modelparametres påvirkning på volatilitetssmilene, der genereres i modellerne.

En praktisk anvendelse af modellerne illustreres i *kapitel 5*, hvor deres evne til at prisfastsætte en rente-cap testes. Kapitellet indledes med en omformulering af Heston modellen, så den kan håndtere at have en rente som det underliggende aktiv. Herefter diskuteres kalibreringsproblemet, og de to modellers kalibreringsevner testes på et udsnit af et større datasæt. Den bedste model anvendes herefter til at prisfastsætte det fulde datasæt, og modellens praktiske anvendelsesevner diskuteres.

En helt anden anvendelsesmulighed præsenteres i *kapitel 6*, hvor et Euler skema til simulering af Heston modellen diskuteres. Hvis man på en fornuftig måde kan simulere Heston modellen, kan man anvende den i et Monte Carlo setup til at prisfastsætte andre former for optioner som f.eks. amerikanske eller asiatiske. Man kan også benytte modellen til at prisfastsætte endnu mere eksotiske og avancerede strukturer, og netop sådan en anvendelsesmetode illustreres sidst i kapitlet, hvor Heston modellen anvendes til at prisfastsætte en struktureret aktieobligation.

Afhandlingen rundes af med en konklusion i *kapitel 7*.

# Kapitel 2

## Prisfastsættelse af optioner

Før man kan tage fat på denne afhandlings egentlige formål, skal man have styr på den grundlæggende teori omkring kontinuert prisfastsættelse af optioner. Formålet med dette kapitel er at give en indføring i nogle af de helt centrale begreber, der er gældende i kontinuert finansieringsteori. Kapitlet indledes med en gennemgang af nogle vigtige begreber omkring stokastiske processer samt en beskrivelse af to processer, der er centrale i forbindelse med prisfastsættelsesmodellerne, der introduceres i denne afhandling. Herefter gives en introduktion til risikoneutral prisfastsættelse af optioner, hvor den partielle differentiaalligning udledes, og Black-Scholes formel præsenteres. Kapitlet afrundes med en beskrivelse af, hvordan man kan benytte disse metoder til at prisfastsætte rentederivater, hvor fokus er på rentecaps.

### 2.1 Stokastiske processer

I dette afsnit gives en kort introduktion til nogle vigtige principper omkring stokastiske processer, som skal bruges i den videre prisfastsættelse og modellering igennem afhandlingen. Afsnittet indledes med en gennemgang af sandsynlighedsrum og informationsmængder, hvor både Markov egenskaben og begrebet martingales defineres. Efterfølgende kommer der en generel gennemgang af Itô processer og Itô's lemma, og til sidst i afsnittet er der eksempler på to vigtige Itô processer, den geometriske Brownske bevægelse og CIR-processen, som skal benyttes senere i denne afhandling.

#### 2.1.1 Sandsynlighedsrum

En stokastisk proces er en proces, der udvikler sig tilfældigt over tid i henhold til et udfaldsrum  $\Omega$ , en informationsmængde  $\mathcal{F}$  og en sandsynlighed  $P$ . Tilsammen danner de *sandsynlighedsrummet*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , hvor der til ethvert muligt udfald  $A \in \Omega$  hører en betinget sandsynlighed  $P(A|\mathcal{F}) \geq 0$ .

Informationsmængden  $\mathcal{F}_t$  indeholder information om alle udfald i processen op til tid  $t$ . Det vil altså sige, at man i en stokastisk proces har kendskab til hele fortiden, og informationsmængden udvider sig løbende, som tiden går. En mængde af disse informationsmængder kaldes for *filtreringen* af information i processen, og for filtreringen gælder der, at  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2} \subset \mathcal{F}_{t_3}$  for  $t_1 < t_2 < t_3$ .

En særlig egenskab, der er gældende for de stokastiske processer, der benyttes igennem denne afhandling, er den såkaldte *Markov egenskab*.

**Definition 1** *Markov egenskaben siger, at forventningen til en fremtidig tilstand i processen kun afhænger af den nuværende tilstand og ikke af hele processens historie. Dvs. at der for  $t > s$  gælder, at*

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t | X_s)$$

En anden egenskab, der er kendetegnet ved mange af de stokastiske processer, man benytter i moderne finansieringsteori, og som viser sig at være en meget vigtig egenskab i forbindelse med arbitragefri prisfastsættelse, er den såkaldte martingale egenskab, der løst sagt betyder, at en proces ikke har nogen drift.

**Definition 2** *En stokastisk proces  $X_s$ , hvor der gælder, at  $\mathbb{E}(|X_s| < \infty) \forall s$ , siges at være en martingal med hensyn til  $\mathcal{F}_s$ , hvis  $X_s$  er målelig med hensyn til  $\mathcal{F}_s$ , og hvis der for  $t > s$  gælder, at*

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$$

eller ækvivalent

$$\mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_t) = 0$$

Betingelsen  $\mathbb{E}(|X_s| < \infty) \forall s$  sikrer at de betingede forventede værdier er veldefinerede. Begrebet martingal vil blive anvendt senere i kapitlet, når det risikoneutrale sandsynlighedsmål, der også kendes som det ækvivalente martingalmål, bliver introduceret.

### 2.1.2 Itô's lemma

En vigtig type af stokastiske processer er kendt som de såkaldte *Itô processer*. En Itô proces er en proces, der kun kan afhænge af det underliggende aktiv og tiden. Hvis man har en tilstandsvariabel  $X_t$ , er Itô processen for den tilstandsvariabel givet som

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \quad (2.1)$$

hvor  $a(X_t, t)$  og  $b(X_t, t)$  er funktioner, der kun afhænger af tilstandsvariablen  $X_t$  og tiden  $t$ . Processen består af to led; et deterministisk led  $a(X_t, t)dt$  og et stokastisk led  $b(X_t, t)dW_t$ . I det deterministiske led kan  $a(X_t, t)$  ses som driften for processen, der siger noget om, hvor meget værdien af det underliggende aktiv ventes at stige/falde. I det stokastiske led er  $b(X_t, t)$  et udtryk for volatiliteten, der fortæller noget om, hvor store udsving man kan forvente i processen. Ledet  $dW_t$  er en såkaldt Wienerproces, og det er den, der tilføjer stokastikken til processen. Wienerprocessen kan betragtes som et tilfældigt normalfordelt tal med middelværdi 0 og varians  $t$ , og det gælder således, at forskellen imellem to Wienerprocesser  $W_t - W_s$  for  $s < t$  er normalfordelt  $N(0, t - s)$ .

Når man har en Itô proces, kan man benytte *Itô's lemma* til at finde processen for en anden funktion, der kun afhænger af tilstandsvariablen i Itô processen og tiden.

**Sætning 1** (*Itô's Lemma*) *Lad  $X_t$  være en Itô proces, der opfylder (2.1), og lad  $f(X_t, t)$  være en to gange differentiabel funktion, der afhænger af  $X_t$  og  $t$ , da følger  $f(X_t, t)$  processen (funktionsargumenterne er udeladt af hensyn til overskueligheden)*

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} b dW_t \quad (2.2)$$



Det er værd at bemærke, at processen, som man finder vha. Itô's lemma, også er en Itô proces med drift  $\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}b^2\right)$  og volatilitet  $\left(\frac{\partial f}{\partial X_t}b\right)$ . Risikokilden  $dW_t$  i de to Itô processer er den samme.

Man kan også benytte Itô's lemma hvis man har en flerdimensional Itô proces. Hvis man har  $n$  tilstandsvariable  $X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})^\top$ , kan processen for den  $i$ 'te tilstandsvariable skrives som

$$dX_t^{(i)} = a^{(i)}(X_t, t)dt + b^{(i)}(X_t, t)dW_t^{(i)} \quad (2.3)$$

hvor det er værd at bemærke, at driften  $a^{(i)}(X_t, t)$  og volatiliteten  $b^{(i)}(X_t, t)$  for processen kan afhænge af alle  $n$  tilstandsvariable. Derudover er de forskellige tilstandsvariables risikokilder korrelerede, og korrelationen imellem to Wienerprocesser for tilstand  $i$  og tilstand  $j$  er givet som  $\rho^{(ij)}$ . Det betyder altså, at en given tilstandsvariable kan blive påvirket af samtlige risikokilder.

Nu er den flerdimensionale Itô proces defineret, og det leder så frem til det flerdimensionale Itô's lemma, der bl.a. skal benyttes senere i afhandlingen, når der introduceres en stokastisk volatilitetsmodel, hvor man både har en proces for det underliggende aktiv og en proces for variansen for det underliggende aktiv.

**Sætning 2 (Itô's Lemma)** *Lad  $X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})^\top$  være en flerdimensional Itô proces, der opfylder (2.3), og lad  $f(X_t, t)$  være en to gange differentiabel funktion, der afhænger af  $X_t$  og  $t$ , da følger  $f(X_t, t)$  processen (funktionsargumenterne er udeladt af hensyn til overskueligheden)*

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_t^{(i)}} a^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^{(i)} \partial X_t^{(j)}} b^{(i)} b^{(j)} \rho^{(ij)} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_t^{(i)}} b^{(i)} dW_t^{(i)} \quad (2.4)$$

Igen er det værd at bemærke, at processen for  $f(X_t, t)$ , som man får ved at benytte Itô's flerdimensionale lemma, er en Itô proces.

### 2.1.3 Geometrisk Brownsk bevægelse

En *geometrisk Brownsk bevægelse* (GBM) er en stokastisk proces, der opfylder Markov egenskaben, og som udvikler sig tilfældigt over tiden. Det er den mest anvendte proces til prissættelse af afledte aktiver, og den der ligger til grund for Black-Scholes modellen. I en GBM modelleres processen for det underliggende aktiv  $S$  vha. følgende stokastiske dynamik, der svarer til en Itô proces fra (2.1) med  $a(S_t, t) = \mu S_t$  og  $b(S_t, t) = \sigma S_t$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.5)$$

hvor  $\mu$  og  $\sigma$  er konstanter. Ud over konstanterne afhænger GBM'en altså kun af sin egen tilstandsvariable. Processen skrives ofte som forholdsmæssige tilvækster i stedet for i absolutte termer

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.6)$$

Da tilvæksterne i (2.6) er forholdsmæssige, vil  $S_t$  udvikle sig eksponentielt, og det kan derfor være interessant at se på, hvordan  $\ln S_t$  udvikler sig. Hvis man definerer  $Y_t = \ln S_t$ , kan man benytte Itô's lemma til at finde processen for  $Y_t$ . Hvis man først finder de relevante afledte

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

og sætter dem ind i Itô's lemma, får man følgende proces for  $Y_t$ .

$$\begin{aligned} dY_t &= \left( \frac{1}{S} \mu S_t + 0 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t \\ dY_t &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ændringen i  $\ln S$  mellem tid 0 og et fremtidigt tidspunkt  $t$  er normalfordelt med middelværdi  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$  og varians  $\sigma^2 t$ . Det betyder altså, at

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim N \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right] \quad (2.8)$$

eller

$$\ln S_t \sim N \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right] \quad (2.9)$$

Logaritmen til det underliggende aktiv  $S_t$  er altså normalfordelt, hvilket medfører, at  $S_t$  er log-normalfordelt. Da  $S_t = e^{Y_t}$ , gælder der, at

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (2.10)$$

Det er altså løsningen til den stokastiske differentiaalligning (2.5), som man i dette tilfælde kan udlede forholdsvis nemt. Ved at udnytte at  $\mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$  kan den forventede værdi af det underliggende aktiv nu findes som

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{\mu t} \quad (2.11)$$

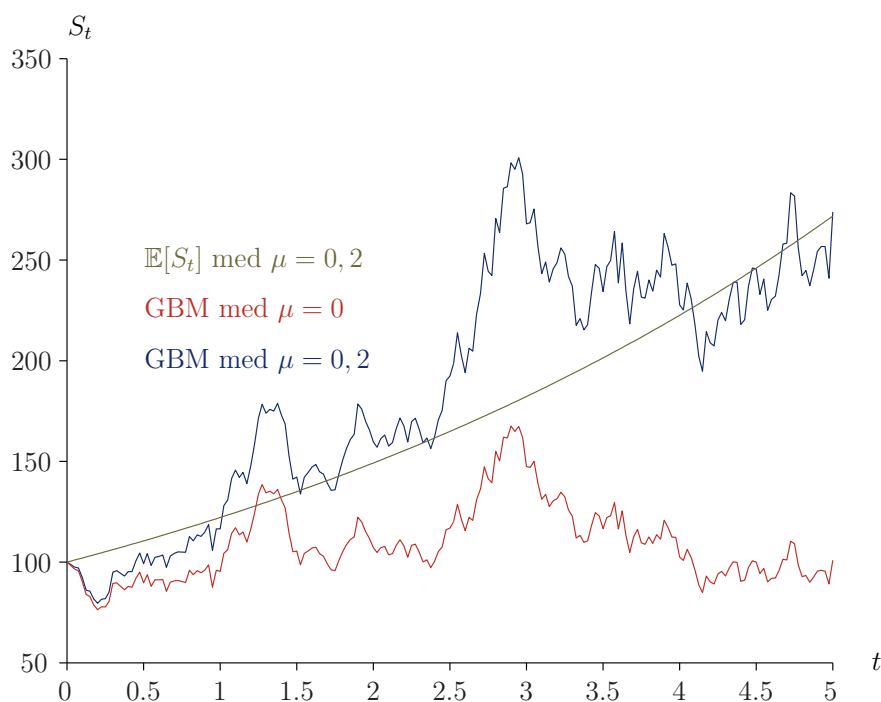
Værdien af det underliggende aktiv forventes altså at stige eksponentielt i henhold til driften  $\mu$ .

I figur 2.1 på modstående side er der simuleret to GBM'er ud fra den samme Wiener-proces. I den ene er driften  $\mu$  sat til 0, mens driften i den anden er sat til 0,2. Derudover vises den forventede værdi til GBM'en, der er beregnet ud fra (2.11) med  $\mu = 0,2$ . I figuren ser man helt tydeligt, hvordan den stokastiske proces varierer tilfældigt op og ned omkring den forventede værdi, hvilket medfører, at den blå proces forventeligt vil stige i henhold til den grønne kurve, mens den røde proces forventes at ligge omkring dens startniveau, der her er  $S_0 = 100$ .

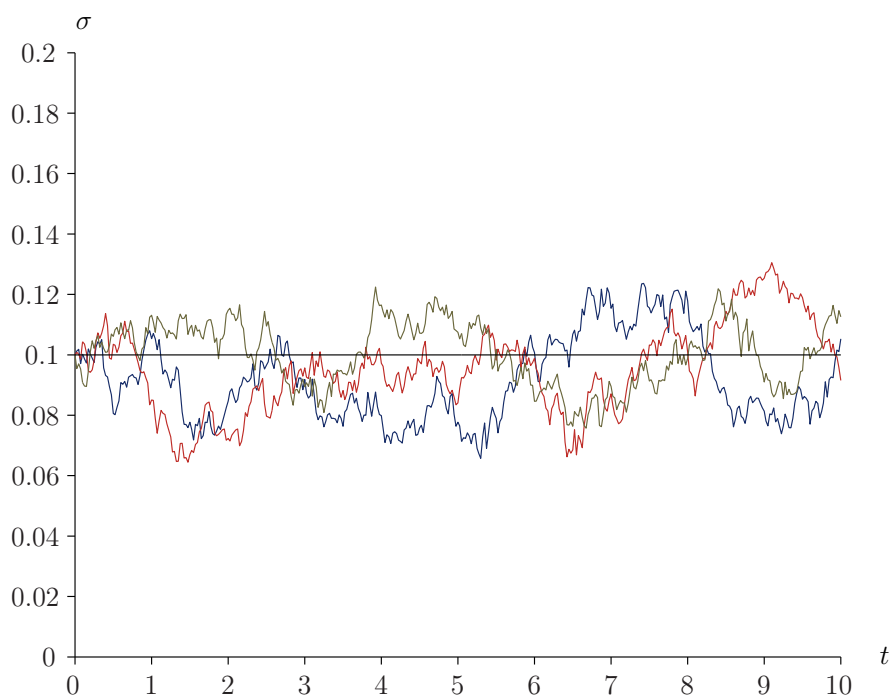
### 2.1.4 CIR-processen

En anden type Itô proces, der viser sig utroligt vigtig i forbindelse med den stokastiske volatilitetsmodel fra Heston, som vil blive gennemgået i kapitel 3, er *CIR-processen*, der blev introduceret af Cox, Ingersoll & Ross [1985] som en model til beskrivelse af udviklingen i den korte rente. Processen er dog også god til at beskrive udviklingen i variansen for et aktiv, og det er det, processen vil blive brugt til senere i denne afhandling. Processen for variansen er givet som

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t \quad (2.12)$$



**Figur 2.1:** Eksempel på simulering af en geometrisk Brownsk bevægelse. Parametrene, der indgår i processen, er sat til:  $\sigma = 0.3$ ,  $S(0) = 100$ ,  $T = 5$  og  $dt = 0.025$ .



**Figur 2.2:** Eksempel på simulering af CIR-processen. Bemærk, at det er volatiliteten og ikke variansen, der er vist i figuren. Parametrene, der indgår i processen, er sat til:  $\kappa = 0.7$ ,  $\theta = 0.01$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $v_0 = 0.01$ ,  $T = 10$  og  $dt = 0.025$ .

hvor  $\kappa$ ,  $\theta$  og  $\sigma$  er konstanter, og hvor Wienerprocessen  $dW_t$  er en anden i forhold til den, der blev brugt i GBM'en.

CIR-processen har to egenskaber, der gør, at den er god til at beskrive udviklingen af den korte rente, som processen oprindeligt er konstrueret til, men også til at beskrive udviklingen i variansen for et aktiv.

Den første egenskab kaldes for mean-reversion, hvilket betyder, at processen har et niveau, som den vil søge tilbage mod, når den kommer for langt væk. Mean-reversion niveauet i (2.12) er  $\theta$ , som også kaldes for det langsigtede niveau for variansen. Hvis variansen bliver for lille, vil driften vokse, og processen vil have en positiv trend op mod det langsigtede niveau. Modsat vil driften blive negativ, hvis variansen bliver for høj, så trenden vil være, at variansen falder mod langsigtsniveauet. Hastigheden, hvormed dette sker, er givet ved  $\kappa$ , der er et mål for, hvor meget trækraft processen har imod det langsigtede niveau. Jo højere  $\kappa$  er, jo hurtigere vil processen vende tilbage mod  $\theta$ .

Den anden vigtige egenskab ved processen er kvadratrodsegenskaben. Når man ganger kvadratroden af processens værdi med Wienerprocessen, sikrer man, at processens værdi aldrig kan blive negativ. Parameteren  $\sigma$ , der også ganges med Wienerprocessen, er volatiliteten for variansen, og den kaldes typisk for vol-af-vol parameteren. Hvis man endvidere tilføjer restriktionen  $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ , sikrer man, at processen for variansen aldrig kan ramme 0. Denne restriktion/betingelse er også kendt som *Feller betingelsen*. Hvis man derimod har  $2\kappa\theta < \sigma^2$ , kan processen ramme origo, der er en stærkt reflekterende tilstand.

## 2.2 Risikoneutral prisfastsættelse af optioner

I dette afsnit gives en introduktion til risikoneutral prisfastsættelse af optioner i Black-Scholes verdenen. Afsnittet indledes med en oplistning af nogle af de vigtigste antagelser, der er gældende i Black-Scholes setupet. Herefter introduceres teknikken omkring numeraire-skift, som benyttes til at definere det risikoneutrale sandsynlighedsmål (også kendt som det ækvivalente martingalmål).

### 2.2.1 Antagelser i modellen

I Black-Scholes verdenen, der blev grundlagt med artiklen Black & Scholes [1973], gøres der en række antagelser, der er gældende for markedet:

- Det underliggende aktiv følger en GBM (se afsnit 2.1.3).
- Al handel sker kontinuert.
- Der eksisterer en konstant risikofri rente  $r$  (en risikofri obligation).
- Markedet er arbitragefrit.
- Der er ingen transaktionsomkostninger.
- Det er muligt at gå kort i markedet.

Disse antagelser er ikke alle opfyldt i virkeligheden, men de viser sig vigtige i forbindelse med udledningen af Black-Scholes formelen til prisfastsættelse af europæiske optioner. Betydningen af de forskellige antagelser vil ikke blive diskuteret nærmere i denne afhandling.

## 2.2.2 Den fundamentale partielle differentiaalligning

Udledningen af den fundamentale *partielle differentiaalligning* (PDE) følger i store træk Astrup [2007] og tager afsæt i en Itô proces, der jf. (2.1) er givet som

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

Her kan  $X_t$  være alt lige fra prisen på en aktie eller en rente til noget mere eksotisk som en temperaturmåling. Det underliggende aktiv, der ligger bagved finansielle kontrakter, behøver altså ikke selv at være et finansielt aktiv. Hvis man har to prisfunktioner  $f_i(X_t, t)$  for  $i = 1, 2$ , der alene afhænger af tilstandsvariablen  $X_t$ , tiden  $t$  og den samme risikokilde  $dW_t$ , og hvor den dynamiske udvikling kan skrives som

$$df_i = \mu_i(f_i, t)dt + \sigma_i(f_i, t)dW_t, \quad i = 1, 2 \quad (2.13)$$

kan man danne en infinitesimalt risikofri portefølje ved at vælge porteføljevægte  $w_i$ , således at  $w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 = 0$  (funktionsargumenterne  $(f_i, t)$  for  $\mu_i$  og  $\sigma_i$  er i det følgende udeladt af hensyn til overskueligheden). Det er f.eks. opfyldt, hvis man vælger vægtene som  $w_1 = -\sigma_2$  og  $w_2 = \sigma_1$ . Da markedet skal være arbitragefrit, må afkastet af den risikofri portefølje være lig med afkastet på den risikofrie rente. Hvis afkastet på porteføljen var højere, ville man kunne låne penge til at købe porteføljen og opnå en risikofri profit, og hvis afkastet var mindre, ville man kunne gå kort i porteføljen og sætte pengene i det risikofrie aktiv. Afkastet må altså være præcis lig den risikofrie rente for at forhindre arbitragemuligheder. Man får således

$$\begin{aligned} w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = r(w_1f_1 + w_2f_2) &\Leftrightarrow \sigma_1(\mu_2 - rf_2) = \sigma_2(\mu_1 - rf_1) \Leftrightarrow \\ \frac{\mu_1 - rf_1}{\sigma_1} &= \frac{\mu_2 - rf_2}{\sigma_2} \equiv \lambda \end{aligned} \quad (2.14)$$

Størrelsen  $\lambda$  er kendt som *risikopræmien*, der måler det forventede merafkast i forhold til den risikofrie rente ( $\mu_i - rf_i$ ), målt op imod den risiko man påtager sig ( $\sigma_i$ )<sup>1</sup>. Risikopræmien er i (2.14) målt i absolutte termer, men hvis man i stedet måler den i relative termer, svarer det til den størrelse, der kendes som *Sharpe ratio*.

Hvis man benytter Itô's lemma, kan driften  $\mu_i(f_i, t)$  og volatiliteten  $\sigma_i(f_i, t)$  for prisprocesserne  $f_i$  og for alle andre prisprocesser  $f$ , der alene afhænger af den underliggende proces  $X_t$  og tiden, findes som

$$\mu(f, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}b^2 \quad (2.15)$$

$$\sigma(f, t) = \frac{\partial f}{\partial X_t}b \quad (2.16)$$

Hvis de indsættes i (2.14), kommer man frem til den fundamentale PDE, der skal være opfyldt for alle prisfunktioner, som kun afhænger af  $X_t$  og  $t$ , givet en randbetingelse  $f(X_T, T)$  der specificerer, hvad kontraktens værdi er ved udløb.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t}(a - \lambda b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}b^2 = rf \quad (2.17)$$

<sup>1</sup>Da risikokilden er den samme i de to prisprocesser, må risikopræmien være den samme efter skalering med mængden af risiko.

For at løse den fundamentale PDE skal man have identificeret leddet  $(a - \lambda b)$ . Det er ikke altid lige til at finde, men hvis det underliggende aktiv er et handlet aktiv, kan man nemt vise, at  $(a - \lambda b) = rX_t$ . Da skal der nemlig gælde, at funktionen  $f(X_t, t) = X_t$  er en af de prisfunktioner, der skal opfylde (2.17), og for denne specifikke prisfunktion gælder det, at  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} = 0$  og  $\frac{\partial f}{\partial X_t} = 1$ , så ligning (2.17) reduceres til

$$(a - \lambda b) = rX_t \quad (2.18)$$

og det ukendte led i PDE'en er hermed identificeret.

### 2.2.3 Black-Scholes-Merton differentiallyigningen

I forrige afsnit blev PDE'en udledt i det generelle tilfælde. Hvis man ser på det specielle tilfælde fra Black-Scholes modellen, hvor antagelserne fra afsnit 2.2.1 skal være opfyldt, kan man udlede den partielle differentiallyigning ved at benytte en lidt anderledes fremgangsmåde. Udledningen i dette afsnit følger afsnit 13.6 fra Hull [2006]. Ifølge antagelserne i modellen følger det underliggende aktiv en GBM (der var angivet i (2.5)), som i diskret form kan skrives som

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W \quad (2.19)$$

hvor  $\Delta S$  er ændringen af  $S$  i et lille tidsinterval  $\Delta t$ .

Hvis man har et derivat, hvis pris  $f$  er en funktion af det underliggende aktiv  $S$  og tiden  $t$ , kan man ved at benytte Itô's lemma finde ændringen  $\Delta f$  af  $f$  i et lille tidsinterval  $\Delta t$  som

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W \quad (2.20)$$

Risikoelementet i begge processer udgøres af den samme Wienerproces  $\Delta W$ . Det viser sig dog, at man kan eliminere risikoen ved at sammensætte en portefølje af det underliggende aktiv og derivatet. Den porteføljestrategi, der benyttes til at fjerne risikoen, kaldes en selvfinansierende porteføljestrategi, og den består af en lang position på  $\frac{\partial f}{\partial S}$  i det underliggende aktiv og en kort position på 1 i derivatet. Hvis man definerer  $\Pi$  som værdien af den selvfinansierende portefølje, kan man skrive det som

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (2.21)$$

og ændringen i værdien af porteføljen  $\Delta \Pi$  i et lille tidsinterval  $\Delta t$  kan derefter findes som

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (2.22)$$

Så kan man substituere ændringen i det underliggende aktiv fra (2.19) og ændringen i prisfunktionen fra (2.20) ind i ligning (2.22), og ændringen i porteføljen kan herefter skrives som

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta W) \\ \Delta \Pi &= \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Da ligningen ikke indeholder  $\Delta W$ , må den være risikofri i tidsintervallet  $\Delta t$ , og da markedet skal være arbitragefrit, må afkastet af porteføljen være lig med afkastet på den risikofrie rente. Man får altså

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad (2.24)$$

hvor  $r$  er den risikofrie rente. Hvis man substituerer værdien af porteføljen fra (2.21) og ændringen i porteføljen fra (2.23) ind i ligning (2.24), får man

$$\left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

som, hvis man dividerer  $\Delta t$  ud og flytter rundt på nogle af leddene, også kan skrives som

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} r S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r f \quad (2.25)$$

Ligning (2.25) er et specialtilfælde af den fundamentale PDE fra (2.17) og er kendt som *Black-Scholes-Merton (BSM) differentiaalligningen*. Eneste forskel er, at leddet  $(a - \lambda b) = rS$ , hvilket ikke er overraskende, da det underliggende aktiv i Black-Scholes verdenen netop er et handlet aktiv. Det bemærkes desuden, at  $\mu$  ikke indgår i BSM differentiaalligningen, hvilket i praksis betyder, at prisen på et afledt aktiv ikke afhænger af det forventede afkast på det underliggende aktiv. Prisen afhænger således kun af volatiliteten på det underliggende aktiv.

Andelen  $\frac{\partial f}{\partial S}$ , som man i den selvfinansierende porteføljestrategi skulle købe af det underliggende aktiv, genkendes i optionsteorien som det mest benyttede nøgletal  $\Delta$  (delta). Dette nøgletal benyttes til at afdække risiko vha. *delta hedging*. Det foregår ved, at man udregner  $\Delta$  og sikrer sig, at man har netop den andel af det underliggende aktiv, så man opnår en risikofri portefølje i et kort tidsinterval. Ved at genberegne  $\Delta$  kontinuert og hele tiden tilpasse beholdningen af det underliggende aktiv kan man replikere optionens værdi og dermed afdække sin risiko. Denne perfekte afdækning vil dog kræve, at man kan handle kontinuert, og at der ikke er nogen transaktionsomkostninger, hvilket naturligvis ikke gør sig gældende i praksis. Man kan dog stadig opnå en god afdækning ved at udføre delta hedgingen i diskrete tidsintervaller.

### 2.2.4 Det risikoneutrale sandsynlighedsmål $\mathbb{Q}$

En vigtig teknik i forbindelse med prisfastsættelse af afledte aktiver er *skift af numeraire* teknikken. Ved numeraire forstås den enhed, som man måler værdien af sine aktiver i forhold til. Når man benytter en positiv numeraire, gælder ifølge Rom [2009a] følgende vigtige sætning

**Sætning 3** *En proces, der har en strengt positiv numeraire, skal være en martingal for at forhindre arbitragemuligheder.*

Hvis man bliver i Black-Scholes setupet, skal det underliggende aktiv, som tidligere nævnt, følge en GBM. Husk fra (2.5), at processen for en GBM er defineret som

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Jf. antagelserne eksisterer der desuden en risikofri obligation (bond), der giver en konstant risikofri rente  $r$ . Processen for den risikofrie obligation er givet som

$$dB_t = r B_t dt \quad (2.26)$$

Hvis man benytter den risikofrie obligation som numeraire, kan man finde udviklingen i den nye proces ved at benytte Itô's lemma. Hvis man sætter  $x = S_t/B_t$ , kan man finde de relevante afledte for  $x$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial S_t} = \frac{1}{B} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial S_t^2} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial B_t} = -\frac{S}{B^2}$$

hvor den andenafledte for  $B$  og den blandede andenafledte er udeladt, da der ikke eksisterer et stokastisk led i (2.26), og de derfor skal multipliceres med 0 i Itô's lemma.

Så kan processen for det underliggende aktiv med den risikofrie obligation som numeraire skrives som

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = (\mu - r)\frac{S_t}{B_t}dt + \sigma\frac{S_t}{B_t}dW_t \quad (2.27)$$

som er en martingal, hvis og kun hvis  $\mu = r$ . Det svarer altså til, at processen for det underliggende aktiv vokser i henhold til den risikofrie rente.

Når man benytter den risikofrie obligation som numeraire, svarer det til, at man skifter sandsynlighedsmål fra den virkelige verdens sandsynligheder  $\mathbb{P}$  til den risikoneutrale verdens sandsynligheder  $\mathbb{Q}$ . Dette målskifte viser sig at være utroligt vigtigt i forbindelse med prisfastsættelse af afledte aktiver, da man netop prisfastsætter, „som om“ agenterne i modellen er risikoneutrale. Det betyder dog ikke, at agenterne rent faktisk skal være risikoneutrale. Det er kun rent regneteknisk, at man laver den antagelse. Det risikoneutrale sandsynlighedsmål kaldes, som tidligere nævnt, også for det ækvivalente martingalmål. Når man siger, at to sandsynlighedsmål  $\mathbb{P}$  og  $\mathbb{Q}$  er ækvivalente, betyder det, at sandsynligheden 0 tillægges den samme mængde af hændelser i de to sandsynlighedsmål. Dvs. at hvis  $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$ . Skiftet imellem de to sandsynlighedsmål svarer faktisk blot til en parallelforskydning af Wienerprocessen  $dW_t$ , så man får, at Wienerprocessen under  $\mathbb{Q}$ -målet er givet som

$$\begin{aligned} dW_t^{\mathbb{Q}} &= dW_t^{\mathbb{P}} + \lambda dt \Leftrightarrow \\ dW_t^{\mathbb{P}} &= dW_t^{\mathbb{Q}} - \lambda dt \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ved at indsætte (2.28) i GBM'en kan man omskrive processen for det underliggende aktiv til

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}} \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t (dW_t^{\mathbb{Q}} - \lambda dt) \\ &= (\mu - \sigma\lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Her er det tidligere vist, jf. (2.18), at  $(\mu - \sigma\lambda) = r$ , så man kommer som tidligere nævnt frem til en risikoneutral proces for det underliggende aktiv, hvor  $\mu$  i (2.5) blot skal udskiftes med renten. Hvis man benytter Itô's lemma på en funktion  $f$ , der afhænger af det underliggende aktiv og tiden, og udnytter det faktum, at driften for en sådan funktion i den risikoneutrale verden skal svare til afkastet af en risikofri investering, kommer man igen frem til specialtilfældet af den fundamentale PDE kendt som BSM differentiaalligningen fra (2.25)<sup>2</sup>. Der er altså flere måder, man kan nå frem til det helt centrale resultat omkring

<sup>2</sup>Venstresiden af (2.25) svarer netop til driften af  $df$ , fundet vha. Itô's lemma, og højresiden svarer netop til, at  $f$  udvikler sig i henhold til den risikofrie rente. Hvis  $S_t$  ikke havde været et handlet aktiv, havde man brugt (2.29) som underliggende aktiv, og man var, ved at benytte samme argument, kommet frem til den fundamentale PDE fra (2.17).



den fundamentale PDE, som skal være opfyldt for alle funktioner, der afhænger af tiden og det underliggende aktiv.

Indtil videre er der udledt en ligning, som alle prisfunktioner skal opfylde. For at finde en løsning til de forskellige prisfunktioner kan man vise, at værdien af en prisfunktion under  $\mathbb{Q}$ -målet er den tilbagediskonterede værdi af forventningen til prisfunktionens værdi ved udløb. Hvis man har en prisfunktion  $f(X_t, t)$  og man benytter den risikofrie obligation givet ved (2.26) som numeraire, får man

$$\begin{aligned} \frac{f(X_t, t)}{B_t} &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{f(X_T, T)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\Updownarrow \\ f(X_t, t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_t}{B_T} f(X_T, T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [f(X_T, T) | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dette resultat viser sig at være utroligt vigtigt og er en af de helt store styrker ved risikoneutral prisfastsættelse under  $\mathbb{Q}$ -målet.

## 2.3 Prisfastsættelse af europæiske optioner

Prisfastsættelsesmetoden i forrige afsnit kan benyttes til at prisfastsætte alle mulige afledte aktiver. Et af hovedformålene i denne afhandling er at prisfastsætte et bestemt afledt aktiv kendt som en europæisk option, så i dette afsnit vil den generelle model til dette formål fra Black & Scholes [1973] blive præsenteret.

### 2.3.1 Black-Scholes modellen

Black-Scholes formel kan benyttes til at prisfastsætte europæiske call- og put-optioner. En europæisk option giver indehaveren retten, men ikke pligten, til at købe(call) eller sælge(put) det underliggende aktiv ( $S_T$ ) til en på forhånd fastsat aftalekurs ( $K$ ) på et på forhånd fastsat tidspunkt ( $T$ ). Optionen kan altså kun udnyttes på dette ene fastsatte tidspunkt, og call-optionen vil blive udnyttet, hvis  $S_T > K$ , mens put-optionen vil blive udnyttet, hvis  $S_T < K$ . Det giver følgende payoff-funktioner for henholdsvis call- og put-optionerne.

$$C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (2.31)$$

$$P(S_T, T) = \max(K - S_T, 0) \quad (2.32)$$

Værdien i dag (tidspunkt 0) af den fremtidige betaling på tidspunkt  $T$  kan under det risikoneutral sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$  findes ud fra (2.30) og er for call-optionen givet som

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)] \quad (2.33)$$

så det er altså den forventede fremtidige betaling  $\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$ , der skal findes, for at prisen for call-optionen kan bestemmes.

Det underliggende aktiv i Black-Scholes formel følger som tidligere nævnt en GBM, og for en GBM gælder, at det underliggende aktiv er log-normalfordelt, hvilket betyder, at logaritmen til det underliggende aktiv er normalfordelt. Fordelingen for det underliggende

aktiv blev udledt i ligning (2.9) og er under  $\mathbb{Q}$ -målet på tidspunkt  $T$  givet som  $\ln S_T \sim N[\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T]$ . Når det underliggende aktiv er log-normalfordelt, gælder der ifølge Rom [2009b] følgende vigtige sætning.

**Sætning 4** Hvis  $X = \ln Y \sim N(m, s^2)$  og  $K > 0$ , kan den forventede værdi til den fremtidige betaling  $\max(Y - K, 0)$  findes som

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\max(Y - K, 0)] &= e^{m + \frac{1}{2}s^2} N\left(\frac{m - \ln K + s^2}{s}\right) - KN\left(\frac{m - \ln K}{s}\right) \\ &= \mathbb{E}[Y]N\left(\frac{\ln\left(\frac{\mathbb{E}[Y]}{K}\right) + \frac{1}{2}s^2}{s}\right) - KN\left(\frac{\ln\left(\frac{\mathbb{E}[Y]}{K}\right) - \frac{1}{2}s^2}{s}\right)\end{aligned}$$

hvor  $N(\cdot)$  er den kumulative normalfordelingsfunktion.

Ved at benytte sætning 4 med  $m = \ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ ,  $s^2 = \sigma^2 T$  og  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[S_T] = S_0 e^{rT}$  kan man nu finde den forventede betaling som

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0)] &= S_0 e^{rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - KN\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= S_0 e^{rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - KN\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\end{aligned}$$

Hvis det sættes ind i (2.33), får man Black-Scholes formel til prisfastsættelse af europæiske call-optioner.

$$C(S_0, 0) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2.34)$$

hvor

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.35)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.36)$$

Ved at benytte et vigtigt resultat inden for optionsteori kendt som *put-call pariteten* kan man finde værdien af den tilsvarende put-option med det samme underliggende aktiv og det samme udløbstidspunkt. Put-call pariteten kan udledes rimeligt simpelt ved at se på to porteføljer, der består af

- Portefølje 1 (P1): Én europæisk call-option og en mængde penge svarende til  $K e^{-rT}$
- Portefølje 2 (P2): Én europæisk put-option og én af det underliggende aktiv  $S_t$

Hvis  $S_T > K$ , vil P1 udløse sin call-option og købe  $S_T$  for pengemængden, der netop er blevet fremdiskonteret til  $K$ , som er den aftalte strikekurs. P2 vil ikke udløse put-optionen, og begge porteføljer har derfor en værdi på  $S_T$ . Hvis derimod  $S_T < K$ , vil P1 ikke udløse sin call-option. P2 vil til gengæld udløse sin put-option og sælge det underliggende aktiv. Begge porteføljer får i dette tilfælde værdien  $K$ .

**Sætning 5** (*Put-Call paritet*) Da begge porteføljer har værdien  $\max(S_T, K)$  ved udløb, og da man ikke kan udløse optionerne før udløb, må de også have samme værdi i dag, hvilket leder frem til put-call pariteten, der siger at

$$C(S_0, 0) + Ke^{-rT} = P(S_0, 0) + S_0 \quad (2.37)$$

Prisen for en europæisk put-option kan altså findes ved at benytte put-call pariteten, men man kan også finde den direkte ved at benytte følgende formel

$$P(S_0, 0) = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (2.38)$$

hvor  $d_1$  og  $d_2$  er defineret i (2.35) og (2.36).

I Black-Scholes formel for call-optionen er  $N(d_1)$  sandsynligheden for, at optionen ender *in-the-money* (ITM) under det ækvivalente martingalmål med det underliggende aktiv som numeraire, mens  $N(d_2)$  er sandsynligheden for, at optionen ender ITM under det ækvivalente martingalmål med den risikofrie obligation som numeraire. Tilsvarende for put-optionen gælder det, at  $N(-d_1)$  og  $N(-d_2)$  er de tilsvarende sandsynligheder for, at optionen ender *out-of-the-money* (OTM). Det er disse sandsynligheder, der ændrer sig i de forskellige modeller, og det er igennem disse sandsynligheder, at modellerne med stokastisk volatilitet, der udledes i kapitel 3, adskiller sig fra Black-Scholes modellen.

## 2.4 Prisfastsættelse af rentederivater

Et meget populært og benyttet rentederivat er *rentecaps*, der sikrer, at et lån med en variabel (også kaldet flydende) rente maksimalt kan ramme et aftalt niveau. Det maksimale niveau, som renten kan komme op på, kaldes for *cap-renten*. Ved indgåelse af en sådan kontrakt tilpasses den flydende rente et på forhånd aftalt antal gange om året, og den tid, der går imellem hver rentefastsættelse, kaldes for *tenor*. Renten kan f.eks. fastsættes én, to eller fire gange om året, og tenoren vil i de tre tilfælde være henholdsvis et år (1Y), seks måneder (6M) og tre måneder (3M). Hvis man har en rentecap med en tenor på 3M, kan den flydende rente, der ligger til grund for kontrakten, f.eks. være en 3-måneders LIBOR- eller CIBOR-rente, alt efter hvilket lånemarked man befinder sig på. Hvis den flydende rente er over cap-renten på en tilpasningsdato, så man i den kommende periode skal betale en højere rente end den maksimalt aftalte, sikrer cap'en en betaling på den næste tilpasningsdato (f.eks. 3 måneder efter) svarende til den ekstra udgift man har haft ved, at den flydende rente har været over cap-renten. Det sikrer, at ens udgift præcis svarer til cap-renten, når den flydende rente er højere.

Hvis man f.eks. har en kontrakt, der løber i 5 år med en tenor på 3M og 3-måneders LIBOR-renten som flydende rente, vil renten blive fastsat på 20 forskellige tidspunkter<sup>3</sup> (på tidspunkt 0,00, 0,25, 0,50, ..., 4,75 år)<sup>4</sup>, og der er ligeledes 20 potentielle betalinger fra cap'en (på tidspunkt 0,25, 0,50, 0,75, ..., 5,00 år).

Hver tilpasningsdato ( $T_{k-1}$ ) og hver potentiel betalingsdato ( $T_k$ ) optræder i par, og hvert par prisfastsættes for sig selv. Et sådant renteloft på en enkelt tilpasningsdato kaldes

<sup>3</sup>Kontrakten kan også defineres, så renten ikke tilpasses på kontraktens aftaletidspunkt (tidspunkt 0), selvom LIBOR-renten er højere end cap-renten. I givet fald vil renten kun blive tilpasset 19 gange, og der vil kun være 19 potentielle betalinger.

<sup>4</sup>Her er der ikke taget højde for daycount-problemer.

for en *caplet*, og en cap består af summen af alle de tilhørende capletter. Standardmodellen, der benyttes til at prisfastsætte capletter, bygger på antagelserne fra Black-Scholes modellen og kaldes typisk for *Black 76 modellen* eller blot *Black's formel*, da den første gang blev præsenteret i en artikel af Black [1976].

### 2.4.1 Black 76 modellen

Formålet med dette afsnit er at udlede og præsentere Black's formel til prisfastsættelse af capletter. En stor del af inspirationen til dette afsnit, bl.a. den benyttede notation, stammer fra Rom [2009c].

Det underliggende aktiv i en caplet er forward-renten, som er deterministisk. En forward-rente, der fastsættes på tidspunkt  $t$  og løber fra tid  $T_{k-1}$  til  $T_k$ , er defineret som

$$F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\Delta_{T_{k-1}, T_k}} \left( \frac{P(t, T_{k-1}) - P(t, T_k)}{P(t, T_k)} \right) \quad (2.39)$$

hvor  $\Delta_{T_{k-1}, T_k} \equiv T_k - T_{k-1}$ , og  $P(t, T_{k-1})$ , og  $P(t, T_k)$  er prisen på de 0-kupon-obligationer, der udbetaler 1 på tidspunkt  $T_{k-1}$  og  $T_k$ . Hvis man har en konstant rente  $r$  som i Black-Scholes verdenen, er prisen på en 0-kupon-obligation givet som  $P(t, s) = e^{-r(s-t)}$ , hvor  $s > t$ . Denne størrelse genkendes også som diskonteringsfaktoren.

En forward-rente  $F_k(t)$  er i sig selv ikke et handlet aktiv, men hvis man udnytter, at 0-kupon-obligationen  $P(t, T_k)$  er et handlet aktiv, kan man lave en forward-renteaftale<sup>5</sup> (FRA) bestående af  $F_k(t)P(t, T_k)$ , der er et handlet aktiv. Hvis man benytter 0-kupon-obligationen som numeraire til FRA'en, kommer man frem til følgende vigtige udtryk for forward-renten.

$$F_k(t) = \frac{F_k(t)P(t, T_k)}{P(t, T_k)} \quad (2.40)$$

Da den benyttede numeraire er strengt positiv, ved man, at forward-renten skal være en martingal under dette mål. Den verden, hvor  $P(t, T_k)$  er brugt som numeraire, kaldes også for den forward risikoneutrale verden, og sandsynlighedsmålet, der benyttes i denne verden, angives som  $\mathbb{T}_k$ -målet.

Da forward-renten er en martingal, gælder der for  $t < s < T_{k-1}$ , at  $F(t, T_{k-1}, T_k) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}_k}[F(s, T_{k-1}, T_k)]$ , hvilket leder frem til følgende

$$F(0, T_{k-1}, T_k) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{T}_k}[F(T_{k-1}, T_{k-1}, T_k)]$$

Sagt med ord betyder det, at den forventede værdi af forward-renten på et fremtidigt tidspunkt (her  $T_{k-1}$ ), hvor renten fastsættes på tidspunkt  $T_{k-1}$ , og udbetalingen falder på tidspunkt  $T_k$ , er lig med forward-renten i dag for den samme periode. Den forventede værdi under  $\mathbb{T}_k$ -målet er altså kendt, og den kan beregnes ud fra ligning (2.39).

Da  $F_k(t)$  er en martingal under  $\mathbb{T}_k$ -målet, er dynamikken i processen givet som

$$dF_k(t) = \sigma_k F_k(t) dW^k(t) \quad (2.41)$$

der genkendes som en GBM med drift 0. Da processen er en GBM, ved man fra afsnit 2.1.3, at forward-renten på et fremtidigt tidspunkt er log-normalfordelt og har fordelingen  $\ln F_k(t) \sim N[\ln F_k(0) - \frac{1}{2}\sigma_k t, \sigma_k^2 t]$ . Da det underliggende aktiv er log-normalfordelt, er det muligt at opstille en analytisk formel, der minder om Black-Scholes formel. I Black-Scholes

<sup>5</sup>Forward-rate-agreement

formel var betalingen for en call-option på udløbstidspunktet givet som  $\max(S_T - K, 0)$ . Betalingen for en caplet, hvor hovedstolen på lånet er angivet som  $N$  og cap-renten (strike-renten) som  $K$ , der gælder fra  $T_{k-1}$  til  $T_k$ , er givet som

$$N\Delta_{T_{k-1}, T_k} \max(F_k(T_{k-1}) - K, 0) \quad (2.42)$$

og værdien af capletten i dag (tidspunkt 0) er så givet som

$$C(0, T_{k-1}, T_k) = N\Delta_{T_{k-1}, T_k} P(0, T_k) E_0^{\mathbb{T}^k}[\max(F_k(T_{k-1}) - K, 0)] \quad (2.43)$$

hvilket blot er det forventede tilbagediskonterede payoff.

Det er altså leddet  $E_0^{\mathbb{T}^k}[\max(F_k(T_{k-1}) - K, 0)]$ , der skal identificeres, og ligesom i Black-Scholes modellen kan man også her benytte sig af sætning 4. Hvis sætningen benyttes med  $m = \ln F_k(0) - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ ,  $s^2 = \sigma^2 T$  og  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}_0^{\mathbb{F}^k}[F_k(T_{k-1})] = F_k(0)$ , får man

$$\mathbb{E}_0^{\mathbb{F}^k}[\max(F_k(T_{k-1}) - K, 0)] = F_k(0)N \left( \frac{\ln\left(\frac{F_k(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - KN \left( \frac{\ln\left(\frac{F_k(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Hvis man indsætter dette i (2.43), kommer man frem til Black's formel til prisfastsættelse af capletter.

$$C(0, T_{k-1}, T_k) = N\Delta_{T_{k-1}, T_k} P(0, T_k) (F_k(0)N(d_1) - KN(d_2)) \quad (2.44)$$

hvor

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_k(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_k^2 T_{k-1}}{\sigma_k\sqrt{T_{k-1}}} \quad (2.45)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_k(0)}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_k^2 T_{k-1}}{\sigma_k\sqrt{T_{k-1}}} \quad (2.46)$$

Med de almindelige optioner havde man både købs-(call) og salgsoptioner(put). For rentederivaterne har man også en direkte modsætning til caps. En rentecap sørgede som sagt for, at renten maksimalt kunne nå et vist niveau, og den giver altså en beskyttelse mod rentestigninger, hvis man har et lån med variabel rente. Tilsvarende kunne man forestille sig, at man kunne ønske en lignende beskyttelse, hvis man f.eks. har sat penge i banken til en variabel rente, men vil sikre sig en vis forrentning af sine penge, selvom renten skulle falde. Det produkt, der yder sådan en beskyttelse, kaldes et *rentefloor*, og det udløser en betaling, når den variable rente kommer under et fastsat niveau. Produktet består, ligesom en cap, af en række underliggende optioner, der sikrer en betaling på de forskellige rentetilpasningsdatoer, hvis renten er kommet under aftaleniveauet. En underliggende option for et floor, der svarer til en caplet for en cap, kaldes for *floorlet*. Prisudtrykket for en floorlet er udeladt i denne afhandling<sup>6</sup>, men kan forholdsvis nemt udledes ud fra nogle beregninger der minder om ovenstående.

Man kan også forestille sig en kombination af caps og floors, hvor det sikres, at den flydende rente kun kan ligge imellem to niveauer. Det produkt, der sikrer det, kaldes en *collar* og består af en lang position i en cap og en kort position i et floor. En collar bliver som regel konstrueret, så den initielle værdi af ens cap svarer til den initielle værdi af ens floor. Hvis det er tilfældet, vil der altså ikke være nogen omkostninger ved at indgå en collar-kontrakt.

I denne afhandling er det rentederivatet caps, der bliver benyttet til at teste, om en stokastisk volatilitetsmodel er brugbar, når man skal prisfastsætte rentederivater.

<sup>6</sup>Der henvises til Hull [2006 p. 622] for et lukket formeludtryk.



# Kapitel 3

## Stokastiske volatilitetsmodeller

Formålet med dette kapitel er at præsentere og udlede en model til prisfastsættelse af europæiske optioner, hvor man tillader stokastik i volatiliteten i processen for det underliggende aktiv. Igennem tiden er der blevet foreslået en række forskellige modeller, der bygger på numeriske løsningsmetoder, men et egentligt gennembrud kom først, da Heston [1993] vha. en ny teknik udledte en lukket formel til bestemmelse af prisen på en europæisk option. Det er teknikken udviklet af Heston, som beskrives og benyttes i dette kapitel til at udlede en lukket formel for optionsprisen. Før udledningen af Heston modellen indledes, er der en kort opsummering af, hvilke andre volatilitetsmodeller der gjorde sig gældende, da Heston foreslog sin model. Sidst i kapitlet introduceres en lidt anderledes version af Heston modellen, hvor man har valgt en anderledes definition af processen for det underliggende aktiv. Denne model kendes som Displaced Heston modellen og er udviklet til det formål at prisfastsætte rentederivater.

### 3.1 Modeller med stokastisk volatilitet

Siden Black & Scholes [1973] introducerede deres populære model til prisfastsættelse af europæiske optioner, er der blevet foreslået en række forskellige udvidelser og generaliseringer. En af de antagelser i Black-Scholes modellen, som man kan sætte spørgsmålstegn ved, er antagelsen omkring konstant volatilitet.

Empiriske studier har vist, at volatiliteten ikke er konstant over tid, og det har ført til flere forsøg på at udlede modeller, der inkluderer stokastisk volatilitet. I 1987 foreslog Hull & White en model, hvor variansprocessen var på formen<sup>1</sup>

$$dv(t) = v(t)\omega dt + v(t)\xi dW(t)$$

og hvor korrelationen imellem processen for det underliggende aktiv og variansprocessen var sat til  $\rho = 0$ . Senere samme år så Wiggins på en lignende model i et mere generelt tilfælde med  $\rho \neq 0$ . I 1987 foreslog Scott desuden en model, hvor volatiliteten blev modeleret efter en Ornstein-Uhlenbeck proces. Den model arbejdede Stein & Stein videre med i 1991, hvor de udledte et lukket prisudtryk. Ornstein-Uhlenbeck processen, som Stein & Stein anvendte, kan opskrives som

$$d\sigma(t) = (\omega - \zeta\sigma(t)) dt + \xi dW(t)$$

hvor korrelationen i modellen er sat til  $\rho = 0$ .

---

<sup>1</sup>Notationen til processerne i dette afsnit er taget fra Abe [2008].

Et generelt problem ved disse modeller har været manglen på analytiske udtryk i de tilfælde, hvor den vigtige korrelationsparameter<sup>2</sup> er forskellig fra 0. Man har derfor været nødt til enten at se bort fra korrelationen ( $\rho = 0$ ) eller benytte sig af numeriske løsningsmetoder, som gør implementeringen af modellen besværlig og beregningsarbejdet meget tungt.

## 3.2 Heston modellen

Der har altså været mange forskellige forslag til stokastiske volatilitetsmodeller igennem tiden, men det største gennembrud kom først i 1993 med Hestons banebrydende artikel. Det er også den model, der er hovedtemaet i denne afhandling, og formålet med dette afsnit er at udlede den analytiske formel i modellen. Afsnittet indledes med en definition af modellen, hvorefter løsningsteknikken gennemgås. Den lukkede formel præsenteres sidst i afsnittet.

### 3.2.1 Definition af modellen

I Heston modellen antages det, at værdien af det underliggende aktiv  $S(t)$  under sandsynlighedsmålet  $\mathbb{P}$  følger processen

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1^{\mathbb{P}}(t)$$

hvor  $\mu$  er driften, og  $\sqrt{v(t)}$  er volatiliteten af det underliggende aktiv. Leddet  $dW_1^{\mathbb{P}}(t)$  er en Wienerproces.

Variansen af processen for det underliggende aktiv, der jo i denne model antages at være stokastisk, følger processen

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2^{\mathbb{P}}(t)$$

der genkendes som en version af kvadratrodsprocessen fra Cox, Ingersoll og Ross [1985]. Det er en såkaldt mean-reverting proces, hvor  $\theta$  er langtidsniveauet for variansen, og  $\kappa$  er et udtryk for variansens trækraft imod langtidsniveauet. Dvs. at jo højere  $\kappa$  er, jo hurtigere nærmer processen sig langtidsniveauet for variansen (og dermed også langtidsniveauet for volatiliteten, der blot er givet som  $\sqrt{\theta}$ ). Leddet  $\sigma$  viser variansens volatilitet, og  $\sqrt{v(t)}$  sikrer, at volatiliteten ikke kan blive negativ, da betydningen af det stokastiske led bliver uendelig lille, når variansen nærmer sig 0, og driften samtidig er positiv, så længe langtidsniveauet for variansen  $\theta$  er positiv. Det sidste led,  $dW_2^{\mathbb{P}}(t)$ , er en Wienerproces.

Korrelationen i mellem de to Wienerprocesser er givet som

$$\langle dW_1^{\mathbb{P}}(t), dW_2^{\mathbb{P}}(t) \rangle = \rho dt$$

Ligesom i de fleste andre prisfastsættelsesmodeller ønsker man også her at beskrive processerne under det risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$ , der også er kendt som det ækvivalente martingalmål. Det er derfor de risikoneutrale processer, der skal benyttes i den videre prisfastsættelse. Det risikoneutrale sandsynlighedsmål blev introduceret i afsnit 2.2.4, hvor der blev gjort rede for, at skiftet af sandsynlighedsmål fra  $\mathbb{P}$  til  $\mathbb{Q}$  for det underliggende aktiv (gælder generelt for en GBM) blot skete ved, at driften blev ændret fra  $\mu$  til  $r$ .

<sup>2</sup>Se kapitel 4 for en uddybning af korrelationsparameterens betydning.



Ud over risikokilden for det underliggende aktiv er der i denne model desuden en risikokilde, der stammer fra den stokastiske volatilitet. For at påtage sig den ekstra risiko vil en risikoavers investor forvente at opnå en risikopræmie. Det svarer til, at risikopræmien  $\lambda$  bliver trukket fra driften i processen for variansen. Da formålet med denne afhandling ikke er at bestemme risikopræmier, men blot at beregne den korrekte pris, kan man imidlertid ifølge Gatheral [2006] antage, at processen, hvor modellen er kalibreret til optionspriser, netop giver den risikoneutrale proces, så prisen  $\lambda$  for at påtage sig ekstra risiko som følge af volatilitetsrisikoen sættes til 0.

Modellen under  $\mathbb{Q}$ -målet kan nu opsummeres til

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1^{\mathbb{Q}}(t) \\ dv(t) &= \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2^{\mathbb{Q}}(t) \\ \langle dW_1^{\mathbb{Q}}(t), dW_2^{\mathbb{Q}}(t) \rangle &= \rho dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hvis man har et aktiv  $U(S, v, t)$ , der netop afhænger af de to processer  $dS(t)$  og  $dv(t)$  samt tiden, kan man ved at benytte det flerdimensionale Itô's lemma finde processen, som  $U(S, v, t)$  udvikler sig efter. Processen for  $U(S, v, t)$  bliver følgende, hvor funktionsargumenterne til de forskellige led er udeladt for overskuelighedens skyld:

$$\begin{aligned} dU &= \left( \frac{\partial U}{\partial t} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + [\kappa(\theta - v)] \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} \right) dt \\ &\quad + \sqrt{v}S \frac{\partial U}{\partial S} dW_1^{\mathbb{Q}} + \sigma\sqrt{v} \frac{\partial U}{\partial v} dW_2^{\mathbb{Q}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

I den risikoneutrale verden skal afkastet på et aktiv være lig med afkastet på en risikofri investering, så for aktivet  $U(S, v, t)$  må det gælde, at

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(dU) = rU dt \quad (3.3)$$

Forventningen til udviklingen i en stokastisk proces er driftsleddet, så hvis driften i (3.2) sættes lig  $rU$  fås følgende 2. ordens partielle differentialligning (PDE)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + [\kappa(\theta - v)] \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} = rU \quad (3.4)$$

som alle aktiver, der afhænger af  $S(t)$  og  $v(t)$ , skal opfylde.

For at løse en sådan 2. ordens PDE har man tidligere måttet anvende forskellige numeriske løsningsmetoder, som f.eks. Monte Carlo simulation eller endelig differens-metoden. Først efter at Heston [1993] anvendte sin teknik til bestemmelse af optionsprisen i en model svarende til modellen fra (3.1), kunne man løse PDE'en analytisk. I det næste afsnit præsenteres Hestons anvendte løsnings teknik.

### 3.2.2 Udledning af modellen vha. Hestons teknik

En europæisk call-option med exercisepris  $K$ , som udløber til tid  $T$ , skal opfylde PDE'en i (3.4) med den sædvanlige slutbetingelse for call-optioner

$$C(S, v, T) = \max(S(T) - K, 0)$$

Der gættes på en løsningsform analog til den, der kendes fra Black-Scholes formel

$$C(S, v, t) = SP_1(S, v, t) - Ke^{-r(T-t)}P_2(S, v, t) \quad (3.5)$$

hvor  $P_1$  og  $P_2$  er sandsynligheden for, at optionen udløber in-the-money (ITM). Hvis man har kendskab til de to sandsynligheder, kender man værdien af optionen, så det er de to sandsynligheder, man skal forsøge at finde frem til. I Black-Scholes modellen er det forholdsvis simpelt at finde sandsynlighederne, da man kender fordelingen af  $S(T)$ . Den fordeling er imidlertid ikke kendt her, hvilket gør, at man ikke lige så let kan udlede et udtryk for sandsynlighederne. Det kan dog stadig godt lade sig gøre, hvis man benytter Hestons teknik.

Værdien af optionen kan splittes op i to dele, der kan betragtes som to individuelle derivater. Det første derivat er  $SP_1$ , som er prisen på et aktiv, der udbetaler  $S(T)$  ved udløb, hvis  $S(T) > K$ , og 0 ellers. Det andet derivat er  $Ke^{-r(T-t)}P_2$ , som svarer til en binær option, der udbetaler nutidsværdien af exerciseprisen, hvis  $S(T) > K$ , og 0 ellers. Prisen på den europæiske call-option er så givet som forskellen mellem de to derivater. De to derivater afhænger begge af tilstandsvariablene  $S(t)$  og  $v(t)$ , så de skal begge opfylde PDE'en i (3.4).

For at finde sandsynlighederne kan det være praktisk at lave transformationen  $x = \ln S$ . Det har ingen betydning for sandsynlighederne, da  $\ln(S)$  er en strengt voksende funktion, hvor det derfor altid gælder, at  $S > K \Leftrightarrow \ln(S) > \ln(K)$ . Transformationen er altså udelukkende foretaget af tekniske årsager.

Ved at benytte Itô's lemma på en tilsvarende måde som (2.7) kan man finde processen for  $x$  under  $\mathbb{Q}$ -målet som

$$dx(t) = \left(r - \frac{1}{2}v(t)\right) dt + \sqrt{v(t)}dW_1 \quad (3.6)$$

Det bemærkes, at hverken  $S(t)$  eller  $x(t)$  selv indgår i processen for  $x(t)$ . Prisen for call-optionen som funktion af  $x$  kan skrives som

$$C(x, v, t) = e^x P_1 - Ke^{-r(T-t)} P_2 = U_1 - U_2$$

hvor

$$\begin{aligned} U_1 &= e^x P_1 \\ U_2 &= Ke^{-r(T-t)} P_2 \end{aligned}$$

er de to tidligere omtalte derivater, som call-optionen består af.

Det er den fremtidige værdi af optionen, der er relevant, så hvis man definerer  $\tau \equiv T - t$ , kan man omskrive PDE'en fra (3.4), så den afhænger af fremtiden, og så det underliggende aktiv  $U$  afhænger af processen for  $x$  i stedet for processen for  $S$ . Den omskrevne PDE kan skrives som

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial U}{\partial x} + [\kappa(\theta - v)] \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial v} = rU \quad (3.7)$$

Som tidligere nævnt kan man se  $U_1$  og  $U_2$  som to afledte derivater, der afhænger af tilstandsvariablene  $x$  og  $v$ . De skal altså begge opfylde (3.7), og det kan derfor være relevant at prøve at indsætte de to derivater i PDE'en. For at de kan indsættes, skal man finde de relevante afledte. Hvis man starter med  $U_1$ , kan de afledte findes som

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= e^x \left( P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} &= e^x \left( P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial U_1}{\partial v} &= e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 U_1}{\partial v^2} &= e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial \tau} &= e^x \frac{\partial P_1}{\partial \tau} & \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial v} &= e^x \left( \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) \end{aligned}$$

De afledte sættes ind i (3.7), og  $e^x$  divideres ud i alle led. Det giver nedenstående partielle differentiaalligning, som sandsynligheden  $P_1$  skal opfylde.

$$-\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + (r - \frac{1}{2}v) \left( P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}v \left( P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) + (\kappa(\theta - v)) \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \rho\sigma v \left( \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) = rP_1$$

⇕

$$-\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + (r + \frac{1}{2}v) \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + (\kappa\theta - (\kappa - \rho\sigma)v) \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} = 0 \quad (3.8)$$

På samme måde kan man udlede en partiel differentiaalligning, som den anden sandsynlighed  $P_2$  skal opfylde. Igen starter man med at finde de relevante afledte for  $U_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial x} &= Ke^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} &= Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial U_2}{\partial v} &= Ke^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial v^2} &= Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \\ \frac{\partial U_2}{\partial \tau} &= Ke^{-r\tau} \left( \frac{\partial P_2}{\partial \tau} - rP_2 \right) & \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial v} &= Ke^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} \end{aligned}$$

De afledte sættes ind i (3.7), hvor  $Ke^{-r\tau}$  er divideret ud i alle led. Det giver nedenstående partielle differentiaalligning, som sandsynligheden  $P_2$  skal opfylde.

$$-\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + rP_2 + (r - \frac{1}{2}v) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + (\kappa(\theta - v)) \frac{\partial P_2}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} = rP_2$$

⇕

$$-\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + (r - \frac{1}{2}v) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + (\kappa\theta - \kappa v) \frac{\partial P_2}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} = 0 \quad (3.9)$$

De to PDE'er (3.8) og (3.9) for sandsynlighederne  $P_1$  og  $P_2$  minder meget om hinanden og kan samles til én partiel differentiaalligning, som  $P_j$  skal opfylde.

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} = 0 \quad (3.10)$$

for  $j = 1, 2$ , hvor

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = -\frac{1}{2} \quad a = \kappa\theta \quad b_1 = \kappa - \rho\sigma \quad b_2 = \kappa$$

$P_j$  er som tidligere nævnt et udtryk for den betingede sandsynlighed for, at optionen har en værdi ved udløb, givet værdien af  $x$  og  $v$  i dag.

$$P_j(x, v, T; \ln(K)) = \Pr(x(T) \geq \ln(K) | x(t) = x, v(t) = v)$$

Det er ikke muligt direkte at finde en lukket formel for sandsynlighederne, men det kan lade sig gøre vha. deres karakteristiske funktioner  $f_1(x, v, \tau; \phi)$  og  $f_2(x, v, \tau; \phi)$ . Det

ligger uden for rammerne af denne afhandling at komme med en udførlig beskrivelse af egenskaberne ved karakteristiske funktioner<sup>3</sup>. Der er dog en meget vigtig egenskab ved de karakteristiske funktioner, der er værd at nævne. Det er, at kendskab til den karakteristiske funktion for en stokastisk variabel er ækvivalent med kendskab til den stokastiske variabels fordelingsfunktion. Da de to karakteristiske funktioner er afledte aktiver, der afhænger af de samme tilstandsvariable som  $P_j$ , skal de opfylde følgende partielle differentiaalligning (den samme som PDE'en for sandsynlighederne fra (3.10), men hvor  $P_j$  er udskiftet med  $f_j$ )

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = 0 \quad (3.11)$$

med slutbetingelsen

$$f_j(x, v, T; \phi) = e^{i\phi x}$$

hvor  $i$  er det imaginære tal ( $i = \sqrt{-1}$ ), og  $\phi$  er et reelt tal. Da slutbetingelsen er kontinuert, er det meget nemmere at løse den partielle differentiaalligning for de karakteristiske funktioner frem for at løse den for sandsynlighederne.

Der gættes på følgende løsningsform for de karakteristiske funktioner

$$f_j(x, v, \tau; \phi) = e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)v + i\phi x} \quad (3.12)$$

hvor der må gælde

$$C(0; \phi) = 0 \quad \text{og} \quad D(0; \phi) = 0$$

for at slutbetingelsen for de karakteristiske funktioner er opfyldt.

Det er altså  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$ , man skal finde for at kunne løse de karakteristiske funktioner. Løsningerne til  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$  udledes i detaljer i bilag B, hvor man kommer frem til, at løsningerne bliver

$$C(\tau; \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left( (b_j - \rho\sigma i\phi - d)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \quad (3.13)$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{(b_j - \rho\sigma\phi i - d)(1 - e^{-d\tau})}{\sigma^2(1 - ge^{-d\tau})} \quad (3.14)$$

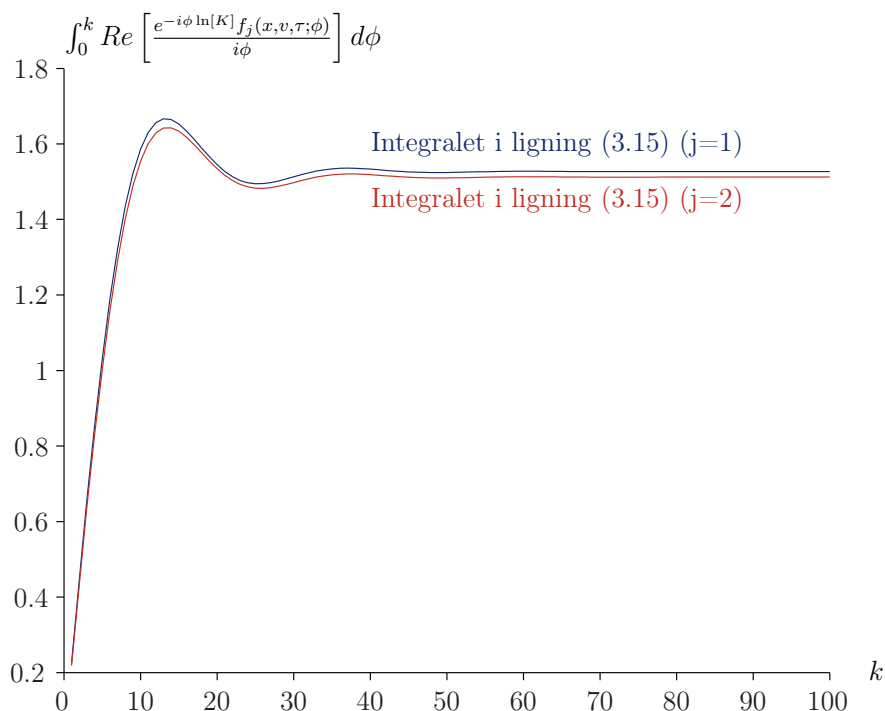
hvor

$$d \equiv \sqrt{(b_j - \rho\sigma i\phi)^2 - \sigma^2(2\phi u_j i - \phi^2)}$$

$$g \equiv \frac{b_j - \rho\sigma\phi i - d}{b_j - \rho\sigma\phi i + d}$$

Det bemærkes, at udtrykkene for  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$  ikke stemmer overens med formelen i Hestons originale artikel. Forskellen består i, at fortegnet foran  $d$  er modsat alle steder. Man kunne godt tro, at der så måtte være en fejl i udtrykkene ovenfor, men det viser sig, at de rent faktisk giver samme løsning, som dem Heston benytter. Udtrykket ovenfor kan bl.a. findes i Gatheral [2006]. Forskellen i de to måder at opskrive løsningerne til  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$  på skyldes ifølge Albrecher, Mayer, Schoutens & Tistaert [2007], at

<sup>3</sup>Der henvises til Feller [1966] for en fyldig beskrivelse af de karakteristiske funktioners egenskaber.



**Figur 3.1:** Fourier integralets konvergeringsegenskaber. Illustreret ved at øge den øvre grænse i integralet (vises ud ad x-aksen). Parametrene der indgår i modellen er sat til:  $\kappa = 2$ ,  $\theta = 0.02$ ,  $\rho = -0.5$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $r = 0$ ,  $v_0 = 0.01$ ,  $S = 100$  og  $K = 80$ .

den komplekse rod  $d$  kan antage to mulige værdier, hvor forskellen på de to værdier netop er fortegnet. De kommer desuden med et bevis for, at formlen fra Hestons artikel viser sig at være ustabil for visse parameterværdier, mens formlen, der er udregnet i denne afhandling, viser sig at være stabil i hele parameterrummet.

Sammenhængen mellem de karakteristiske funktioner og de risikoneutrale sandsynligheder kan nu findes vha. en invers Fourier transformation, der er givet som

$$P_j(x, v, \tau; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, \tau; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (3.15)$$

hvor  $\operatorname{Re}$  betegner den reale værdi.

I formlen skal man integrere til uendelig, hvilket i praksis ikke er muligt. Kendall & Stuart [1977] viser dog, at integralet konvergerer, og som man kan se i figur 3.1, konvergerer integralet ganske hurtigt. Ifølge Heston [1993] kan man ikke slippe for integralet, ikke engang i Black-Scholes modellen, men som der lige er argumenteret for, skaber det faktisk ikke de store problemer, og det kan beregnes på en computer på en brøkdel af et sekund.

Black-Scholes modellen er faktisk et specialtilfælde af Heston modellen, hvor parametrene  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  og  $\rho$  sættes til 0. Det bemærkes, at  $\sigma = 0$  vil skabe problemer, da den indgår som nævner flere steder i løsningsformlen, men det problem kan dog løses vha. l'Hospitals regel, hvor man sætter  $\sigma$  vilkårligt tæt på 0 og derved finder grænseværdien. Når  $\sigma = 0$  omtales igennem resten af afhandlingen, er det derfor grænseværdien, der menes.

Prisen på call-optionen kan så findes ved at sætte løsningen fra (3.15) ind i (3.5). Hvis man derimod ønsker at finde prisen for en put-option, skal man enten foretage en tilsvarende udledning, men ellers kan man blot finde prisen vha. put-call pariteten, der blev defineret i sætning 5 på side 27.

Ved at benytte denne løsningsteknik er det kun den partielle differentialligning for den karakteristiske funktion i (3.11), der er løst direkte. Herefter benyttes den matematiske sammenhæng imellem funktioner og deres karakteristiske funktioner givet ved Fourier transformationen fra (3.15) til at finde en løsning for PDE'en i (3.10).

Løsningsteknikken kan også anvendes til at udlede lukkede formler for andre modeller. En alternativ model, hvor løsningsteknikken er særdeles anvendelig, introduceres i næste afsnit.

### 3.3 Displaced Heston modellen

Optionsprisindeformlen, der er udledt i forrige afsnit, kan bestemme prisen for en option, hvor man lader volatiliteten være stokastisk. En vigtig komponent i denne formel er korrelationen  $\rho$  imellem processerne for det underliggende aktiv og den tilhørende varians. Det er den parameter, der giver skew'et i volatilitetssmilet<sup>4</sup>, som man ofte kan observere i de implicitte volatiliteter, der er generet ud fra optionspriserne i markedet. Der findes dog også en anden version af Heston modellen, der går under navnet *Displaced Heston modellen*, hvor man kan sætte korrelationen til 0 og stadig generere et skew i volatilitetssmilet, som man kunne med Heston modellen.

Modellen er foreslået af Andersen & Andreasen [2002], hvor de anvender den til at prisfastsætte swaptioner og capletter. Modellen har nogle lidt andre egenskaber end Heston modellen, og dens praktiske egenskaber til at prisfastsætte capletter vil blive undersøgt nærmere i kapitel 5, hvor de to modellers evne til at beskrive markedets data undersøges og sammenlignes.

#### 3.3.1 Definition af modellen

Ligesom Heston modellen består Displaced Heston modellen af en proces for det underliggende aktiv og en proces for variansen. De to processer er angivet nedenfor

$$\begin{aligned} dS(t) &= (mS(t) + (1-m)L)\lambda\sqrt{v(t)}dW_1(t) \\ dv(t) &= \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2(t) \\ \langle dW_1(t), dW_2(t) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

hvor  $0 < m \leq 1$ , og hvor det bemærkes, at processen for variansen er defineret på samme måde som i (3.1). Forskellen fra Heston modellen ligger altså udelukkende i definitionen af processen for det underliggende aktiv og i det faktum, at det er valgt at sætte korrelationen imellem de to processer til 0<sup>5</sup>.

Det ses, at processen er defineret som en martingal med en displaced faktor  $m$ , der gør, at processen ikke længere er log-normalfordelt, men i stedet består af en blanding af en normalfordeling og en log-normalfordeling. Det betyder bl.a., at processen for det underliggende aktiv kan antage negative værdier, hvilket kan være problematisk i et simuleringssetup af f.eks. en aktie- eller valutakurs.

<sup>4</sup>Se afsnit 4.2 for en introduktion til begrebet volatilitetssmil og korrelationens betydning for dette.

<sup>5</sup>I princippet kan man sagtens have en korrelation forskellig fra 0. Så skal den parameter blot indregnes i PDE'en for sandsynlighederne, som det var tilfældet i (3.10).

### 3.3.2 Udledning af en lukket prisformel

Til udledning af en lukket prisformel viser det sig at være praktisk at foretage en omskrivning af processen for det underliggende aktiv. Hvis man følger Andersen & Andreasen [2002] og sætter  $Y(t) = mS(t) + (1 - m)L$ , kan man vha. Itô's lemma finde processen for  $Y(t)$  som

$$dY(t) = mY(t)\lambda\sqrt{v(t)}dW_1(t)$$

Betalingen for en call-option på udløbstidspunktet  $T$  er defineret på sædvanlig vis, og man kan lave følgende smarte omskrivning

$$C(S, v, T) = \max(S(T) - K, 0) = \frac{1}{m} \max(Y(T) - K', 0)$$

hvor  $K' = mK + (1 - m)L$ .

Så kan prisen for call-optionen på tidspunkt 0 findes som<sup>6</sup>

$$C(S, v, \tau) = \frac{1}{m} e^{-r\tau} (Y(0)P_1 - K'P_2) \quad (3.17)$$

hvor  $\tau$  er defineret som tiden til udløb.

Som det var tilfældet i Heston modellen, er det igen praktisk at lave transformationen  $x(t) = \ln Y(t)$ , og processen for  $x(t)$  findes som

$$dx(t) = -\frac{1}{2}m^2\lambda^2v(t)dt + m\lambda\sqrt{v(t)}dW_1(t)$$

Herefter følger udregningerne samme princip som i afsnit 3.2.2, og PDE'en for sandsynligheder, der var angivet i (3.10), kan nu findes som

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + u_j m^2 \lambda^2 v \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{1}{2} m^2 \lambda^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} = 0 \quad (3.18)$$

for  $j = 1, 2$ , hvor

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = -\frac{1}{2} \quad a = \kappa\theta \quad b_1 = b_2 = b = \kappa$$

Sandsynlighederne skal igen findes ud fra deres karakteristiske funktioner, der er givet som

$$f_j(x, v, \tau; \phi) = e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)v + i\phi x} \quad (3.19)$$

og  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$  kan findes ved at følge udregningerne i bilag B, men med en anden PDE for de karakteristiske funktioner. De findes som

$$C(\tau; \phi) = \frac{a}{\sigma^2} \left( (b - d)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \quad (3.20)$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{(b - d)(1 - e^{-d\tau})}{\sigma^2(1 - ge^{-d\tau})} \quad (3.21)$$

<sup>6</sup>Da processen for det underliggende aktiv er en martingal, skal hele værdien tilbagediskonteres, og ikke kun det sidste led som i (3.5). Det skyldes, at forventningen til det underliggende aktiv på udløbstidspunktet er givet som  $\mathbb{E}[S(T)] = S(0)$ , hvor den i Heston modellen (og i en almindelig Black-Scholes model) er givet som  $\mathbb{E}[S(T)] = e^{rT}S(0)$ . Det medfører at eksponentialfunktionerne ikke går ud med hinanden, som det var tilfældet i Heston modellen, og derfor ganges diskonteringsfaktoren på hele parentesens.

hvor

$$d \equiv \sqrt{b^2 - \sigma^2 m^2 \lambda^2 (2\phi u_j i - \phi^2)}$$

$$g \equiv \frac{b - d}{b + d}$$

Sandsynlighederne, der skal benyttes i (3.17), findes igen ved at benytte en invers Fourier transformation

$$P_j(x, v, \tau; \ln[K']) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln[K']} f_j(x, v, \tau; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (3.22)$$

Udregningerne følger altså den samme teknik, som Heston benyttede i sin artikel. Der er blot ændret lidt i specifikationerne til modellen – nogle ændringer, der som tidligere nævnt kan vise sig ganske nyttige i flere praktiske sammenhænge. Det viser samtidig styrkerne ved Hestons teknik. Den kan ikke kun benyttes i setupet fra hans originalartikel, men i alle mulige forskellige setups, der kan benyttes til at løse forskellige problemstillinger.

### 3.4 Udvidelsesmuligheder

Ved at benytte Hestons teknik kan man, som vist i de to forrige afsnit, udlede en lukket formel for prisen på en europæisk call-option med stokastisk volatilitet. Man kan dog forestille sig en lang række af udvidelsesmuligheder til Hestons model. Bates [1996] udvider modellen til også at inkludere diskontinuerte spring i processen for det underliggende aktiv, hvor springintensiteten modelleres vha. poissonprocessen. Bakshi, Cao & Chen [1997] generaliserer modellen yderligere til ud over at indeholde spring i processen for det underliggende aktiv også at tillade, at renten er stokastisk. Den stokastiske rente modelleres vha. en version af kvadratrodsprocessen kendt fra Cox, Ingersoll & Ross [1985]. Derudover foretager de en stor empirisk test af betydningen af de forskellige komponenter i modellen.

Disse generaliseringer er begge løst vha. Hestons teknik, og teknikken åbner desuden op for en lang række af yderligere udvidelsesmuligheder. Fælles for modellerne er, at de har en affin struktur i tilstandsvariablene, og så længe man bibeholder den affine struktur, er det muligt at udlede lukkede formler for europæiske optioner. Hele denne klasse af modeller kaldes for *affine spring og diffusionprocesser (AJD)* og er behandlet af Duffie, Pan & Singleton [2000], hvor de udvider litteraturen omkring brugbare transformationer, der gør det muligt at udlede lukkede formeludtryk for en lang række anderledes prisfastsættelsesproblemer.

For at den affine struktur kan bibeholdes, er der nogle krav, der skal være opfyldt. Hvis man har en avanceret model, hvor der indgår flere forskellige processer, kan man opstille hele modellen på matrixform, hvor man har en vektor for driften, en kovariansmatrix for Wienerprocesserne og en vektor for springintensiteterne (hvis man bruger en model, hvor man tillader spring i det underliggende aktiv). Så skal der gælde, at både driften, kovariansen og springene alle skal være lineære i vektoren af tilstandsvariable. For indbyrdes korrelerede tilstandsvariable skal der desuden gælde, at volatiliteten af tilstandsvariablene er en lineær funktion af  $\sqrt{v}$ , hvilket betyder, at der skal være tale om en kvadratrodsproces.

Modellen behandlet i dette kapitel er et eksempel på en springfri AJD proces, hvor vektoren af tilstandsvariable er  $[x, v]$  med  $x = \ln(S)$ . I processen for  $S$  er volatiliteten ikke



---

en lineær funktion af  $\sqrt{v}$ , men det problem løses ved skiftet i tilstandsvariabel fra  $S$  til  $x$ , hvilket kan ses i (3.6).



# Kapitel 4

## Numerisk analyse af parametre

De to stokastiske volatilitetsmodeller fra forrige kapitel har nogle egenskaber, der gør, at de kan beskrive nogle andre sammenhænge i optionspriserne, end man har mulighed for med Black-Scholes modellen. Formålet med dette kapitel er netop at belyse, hvilken effekt indførelsen af stokastisk volatilitet har for optionsprisen. Det vil blive undersøgt ved at se på de vigtigste parametres betydning for den risikoneutrale tæthed og for selve optionsprisen. Begrebet volatilitetssmil vil desuden blive introduceret, og alle parametrenes effekt på disse vil blive analyseret.

I kapitlet vil en justering af parameterværdierne blive undersøgt i forskellige scenarier. Parametrene er som standard sat til de samme værdier som hos Heston [1993, p. 336]. Værdierne kan ses i tabel 4.1.

Parameter	Kontrakt- og markedsparametre			Modelparametre							
	$\tau$	$r$	$S_t$	Heston $\rho$	Displaced Heston $m$	$L$	$\lambda$	Fælles i de to modeller $\kappa$	$\theta$	$v_t$	$\sigma$
Værdi	0,5	0	100	0	1	100	1	2	0,01	0,01	0,1

**Tabel 4.1:** Standard parameterværdier for de to modeller til den numeriske analyse. Disse parameter-værdier er brugt i figurerne, medmindre andet er nævnt. For alle figurerne i kapitlet gælder, at den blå kurve i hver figur er genereret ud fra værdierne i tabellen.

Kapitlet indledes med en beskrivelse af de højere momenter i fordelingen, som kan beskrives med Heston modellen, og som ikke kan beskrives med Black-Scholes modellen. Når man har kendskab til dem, kan man analysere effekten på tætheden, når man justerer på parameterværdierne. Det vil blive gjort med udgangspunkt i værdierne i tabellen ovenfor, hvor der så justeres på en enkelt parameter ad gangen, og effekten analyseres. For at effekten af ændringerne i fordelingerne kan belyses bedre, vil optionspriserne ligeledes blive beregnet og sammenlignet med de tilsvarende optionspriser fra Black-Scholes modellen.

Kapitlet afrundes med en beskrivelse af volatilitetssmilet, der viser, at den implicitte Black-Scholes volatilitet er forskellig for forskellige strikeniveauer. Her vil de enkelte parametres effekt på volatilitetssmilet ligeledes blive analyseret.

### 4.1 Sandsynlighedsfordeling i Heston modellen

En af ulemperne ved Black-Scholes modellen er, at afkastet følger en log-normalfordeling, hvor det kun er muligt at påvirke tæthedens to første statistiske momenter (middelværdi

og varians). To andre statistiske momenter, der er med til at beskrive tætheden i en fordeling, kaldes *skævhed* (3. ordens moment) og *kurtosis* (4. ordens moment). Det er ikke muligt at justere på disse momenter i Black-Scholes modellen, men det kan til gengæld lade sig gøre i Heston modellen ved at justere på modelparametrene.

Skævheden måler, om der er asymmetri i tæthedsfunktionen, hvor en positiv skævhed betyder, at højre hale af fordelingen er tykkest (fordelingen er højreskæv), mens en negativ skævhed betyder, at venstre hale af fordelingen er tykkest (fordelingen er venstreskæv). En normalfordeling er symmetrisk, og den har derfor en skævhed på 0. Kurtosis er et mål for, hvor topstejl fordelingen er. I en normalfordeling er kurtosis 3. Hvis kurtosis er større end 3, betyder det, at fordelingen er stejlere end en normalfordeling, og at fordelingen har tykkere haler. Når kurtosis er større end 3, siges fordelingen at have overkurtosis. En kurtosis mindre end 3 betyder derimod, at fordelingen er fladere end en normalfordeling.

### 4.1.1 Tæthedsfunktion i Heston modellen

En måde at illustrere egenskaberne ved de forskellige parametre i Heston modellen er at se på modellens tæthedsfunktion og prøve at justere på forskellige parametre og sammenligne resultaterne med tæthedsfunktionen i Black-Scholes modellen. Sådanne grafer, der minder om dem, man kan se i Heston [1993], bliver i det følgende vist og analyseret. For at kunne vise disse figurer er der behov for et udtryk for tæthedsfunktionen i både Black-Scholes modellen og i Heston modellen.

I Black-Scholes modellen følger det underliggende aktiv en GBM, og logaritmen til udløbskursen  $\ln S_T$  er jf. afsnit 2.1.3 normalfordelt. Hvis man definerer  $z \equiv \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ , kan tæthedsfunktionen under det risikoneutrale sandsynlighedsmål findes som

$$\mathbb{Q}(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} \quad (4.1)$$

hvor  $\sigma$  er Black-Scholes volatiliteten. Den vil i resten af kapitlet blive skrevet som  $\sigma_{BS}$ .

For at kunne sammenligne Heston modellens tæthed med Black-Scholes modellens tæthed skal man finde en måde at få udtrykt  $\sigma_{BS}$  ud fra parametrene i Heston modellen.

I Heston modellen følger variansen en CIR-proces, hvor tæthedsfunktionen er givet ved en ikke-central  $\chi^2$ -fordeling. Den forventede gennemsnitlige varians i optionens restløbetid ( $\tau = T - t$ ) er jf. Bates [1996, p. 78] givet som

$$\bar{v} = \frac{1}{\tau} \mathbb{E} \int_t^T v_s ds = \theta + (v_t - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} \quad (4.2)$$

hvor det bemærkes, at hvis langtidsniveauet for variansen  $\theta$  er lig med den initiale varians  $v_t$ , bliver den gennemsnitlige varians lig med disse størrelser. I dette specifikke tilfælde får man altså  $\bar{v} = v_t = \theta$ .

Ifølge Bates [1996, p. 87] er den implicite Black-Scholes varians sammenlignelig med den gennemsnitlige varians, og da den er nem at benytte beregningsmæssigt, er det i denne afhandling valgt at sætte

$$\sigma_{BS} = \sqrt{\bar{v}} \quad (4.3)$$

og hvis man desuden har  $\theta = v_t$ , bliver Black-Scholes volatiliteten blot  $\sigma_{BS} = \sqrt{v_t}$ .

Tæthedsfunktionen i Heston modellen kan findes, hvis man kender den karakteristiske funktion  $f_2(x, v, \tau; \phi)$  givet ved (3.12). Ifølge Bates [1996, p. 77] er tæthedsfunktionen for

$z = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$  givet som<sup>1</sup>

$$\mathbb{Q}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} [e^{-i\phi(z+\ln S_t)} f_2(x, v, \tau; \phi)] d\phi \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Effekten af forskellige parametervalg i tæthedsfunktionen

Vha. ovenstående funktionsudtryk er det muligt at tegne tæthederne for forskellige parameterverdier. Hvis man tager afsæt i parameterverdierne fra tabel 4.1 på side 43, kan man prøve at justere på en enkelt parameter og se, hvilken effekt det har på tæthedsfunktionen. For lettere at kunne sammenligne figurerne af tæthedsfunktionerne med figurerne af prisseffekterne og volatilitetssmilene senere i kapitlet er det valgt at vise  $S_T$  ud ad x-aksen. Tæthedsfunktionerne er dog stadig dem, der knytter sig til  $z = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ , og man vil derfor ikke få 1, hvis man integrerer over x-aksen i figurerne.

For at kunne tegne tæthederne skal man benytte et program, der kan evaluere det uendelige integrale fra (4.4). I denne afhandling er det valgt at implementere modellen i matematikprogrammet MATLAB. MATLAB kan udregne integraler på en brøkdel af et sekund vha. funktionen *quadl*, der benytter en *adaptive Gauss Lobatto quadrature rule*<sup>2</sup> til evaluering af integralet. Programmet kan desuden regne med komplekse tal uden problemer. I figur 3.1 på side 37 blev det vist, at integralet i Heston-modellen konvergerer utroligt hurtigt, og i implementeringen af modellen er det valgt at integrere op til 200. MATLAB kildekoden, der er benyttet til at beregne tæthedsfunktionerne, kan ses i bilag C.1, mens koden til at beregne optionsprisen i Heston modellen kan ses i bilag C.2, og koden til at beregne optionsprisen i Displaced Heston modellen kan ses i bilag C.3.

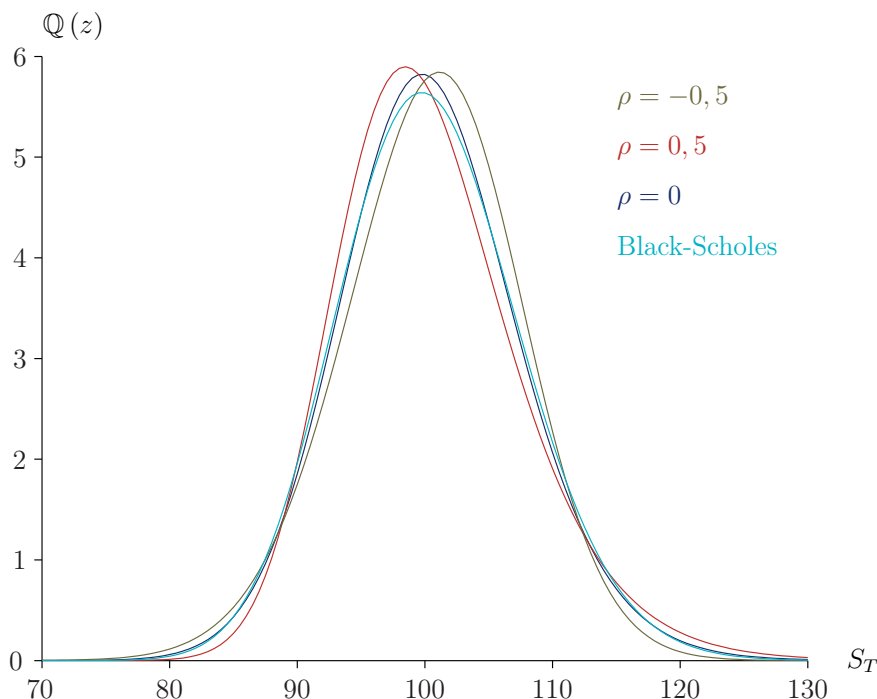
Korrelationsparameteren  $\rho$  fra Heston modellen, og vol-af-vol parameteren  $\sigma$ , der indgår i begge modeller, har betydning for de højere momenter i tætheden, og de to parametre vil blive analyseret nærmere i dette afsnit og sammenlignet med tætheden i Black-Scholes modellen. Til sidst i afsnittet vil det blive illustreret, at parameteren  $m$  fra Displaced Heston modellen har den samme effekt på optionspriser, som  $\rho$  har i Heston modellen. Det bemærkes, at langtidsniveauet for variansen  $\theta$  og den initiale varians  $v_t$  er lig med hinanden i de benyttede modelparametre, så Black-Scholes volatiliteten bliver jf. (4.3)  $\sigma_{BS} = \sqrt{0,01} = 0,1$ . Konklusionerne i dette afsnit er dog ikke afhængige af, at  $\theta = v_t$ , så de er udelukkende sat lig med hinanden for at gøre det så enkelt som muligt.

Hvis man først ser på korrelationsparameteren  $\rho$ , må der for  $\rho > 0$  gælde, at en stigning i kursen medfører en stigning i volatiliteten. Når volatiliteten stiger, stiger sandsynligheden for meget store stigninger i kursen på det underliggende aktiv, og tætheden får en tyk højre hale og en tynd venstre hale. Tætheden bliver altså højreskæv (positiv skævhed), hvilket er illustreret i figur 4.1 på den følgende side. Det modsatte gør sig gældende, når  $\rho < 0$ , hvor tætheden bliver venstreskæv (negativ skævhed). Når  $\rho = 0$ , er der ingen skævhed, men man kan tydeligt se, at der også er en effekt af kurtosis, der ses at være lidt højere end i Black-Scholes tætheden. Denne effekt stammer dog ikke fra  $\rho$ , men derimod fra  $\sigma = 0,1$  og vil blive analyseret senere i afsnittet.

Hvis man ser på prisforskellen imellem de optionspriser, man finder ved at benytte henholdsvis Heston modellen og Black-Scholes modellen, når man justerer på korrelationen i

<sup>1</sup>Der er en lille forskel imellem ligning (4.4) og Bates' [1996, p. 77] ligning (14). Det skyldes, at Bates' karakteristiske funktion er defineret uden leddet  $e^{i\phi x} = e^{i\phi \ln S_t}$ . Derfor trækkes  $i\phi \ln S_t$  fra i eksponentialfunktionen i (4.4), så man kommer frem til den rigtige tæthedsfunktion.

<sup>2</sup>Se Moodley [2005, p. 16] for en teoretisk gennemgang af metoden.



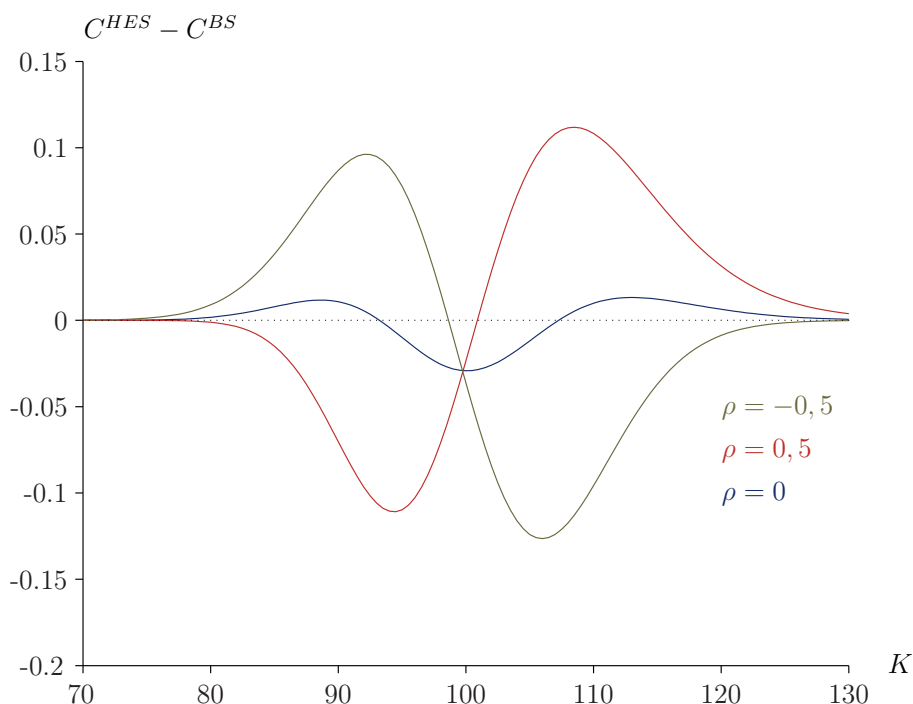
**Figur 4.1:** Effekten på tæthedsfunktionen for udløbskursen ved en ændring i korrelationen  $\rho$  imellem volatiliteten og kursen.

Heston modellen, kan man i figur 4.2 på næste side se, at Heston modellen giver højere optionspriser for OTM-optioner og lavere optionspriser for ITM-optioner, når  $\rho > 0$ . De højere optionspriser for OTM-optioner skyldes, at fordelingen er højreskæv, så sandsynligheden for at ende ud med en meget høj slutkurs ( $S_T$ ) øges. Grunden til, at optionsprisen er mindre for ITM-optioner, til trods for at de jo også har en højere sandsynlighed for de meget høje slutkurser, er at Black-Scholes modellen har en større sandsynlighed for at ende i intervallet  $S_T \in [102 : 115]$ , hvilket har en større effekt på optionsprisen for ITM-optioner end sandsynligheden for de høje slutkurser.

Den modsatte effekt gør sig gældende for  $\rho < 0$ , hvor optionsprisen er højere i Heston modellen for ITM-optioner og lavere for OTM-optioner. Disse effekter skyldes, at sandsynligheden for, at optionen ender i de lave ITM-niveauer, er højere i Heston modellen end i Black-Scholes modellen, så alt i alt er der en større sandsynlighed for, at optionen har en værdi i Heston modellen. For de høje strikeniveauer har Black-Scholes modellen den største sandsynlighed for at give et payoff, så derfor koster disse optioner også mere.

For  $\rho = 0$  får man en helt anderledes effekt, der rent faktisk stammer fra  $\sigma$ , og som analyseres i det følgende. For alle tre kurver bemærkes det, at prisforskellen imellem de to modeller nærmer sig 0, når strikeniveauet bliver enten meget lavt eller meget højt. Det skyldes, at sandsynligheden for, at slutkursen ender i disse intervaller, nærmer sig 0 for begge modeller, og man kan derfor ikke umiddelbart registrere en prisforskel.

Parameteren  $\sigma$  styrer som tidligere nævnt volatiliteten af volatiliteten, og bliver derfor kaldt for vol-af-vol parameteren. Hvis  $\sigma = 0$ , er volatiliteten deterministisk, da der bliver ganget 0 på det stokastiske led i CIR-processen (processen for variansen). Når  $\sigma$  er positiv, er volatiliteten stokastisk omkring den langsigtede vol-parameter  $\sqrt{\theta}$ . Når volatiliteten er stokastisk, øges sandsynligheden for store ændringer i kursen for det undeliggende aktiv, og det medfører, at tætheden får federe haler. Når en tæthed får federe haler, betyder det, at kurtosis stiger. Jo større  $\sigma$  er, jo større bliver sandsynligheden for en høj volatilitet, og

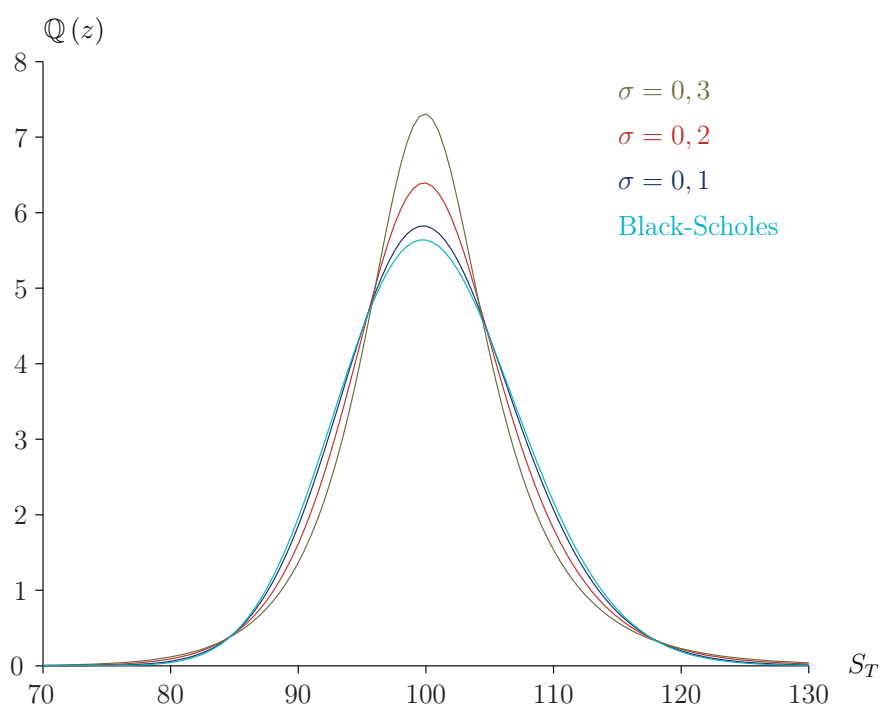


**Figur 4.2:** Forskel imellem optionsprisen i Heston modellen og Black-Scholes modellen ved forskellige strikeniveauer ( $K$ ), når man varierer korrelationen  $\rho$  imellem volatiliteten og kursen.

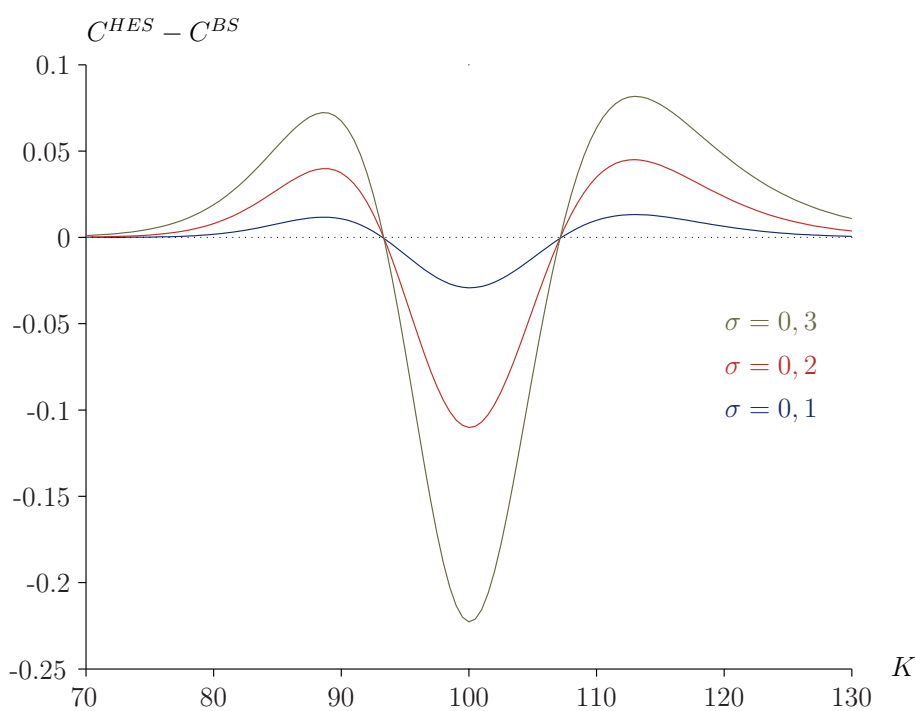
dermed stiger sandsynligheden for store ændringer i værdien af det underliggende aktiv, og tæthedens haler bliver federe. Denne effekt kan ses i figur 4.3 på den følgende side, hvor det tydeligt ses, at tætheden for Black-Scholes modellen har den laveste kurtosis (her var kurtosis 3), og at kurtosis stiger, når vol-af-vol parameteren stiger. En stigende kurtosis medfører en højere sandsynlighed for, at slutkursen ender omkring ATM, og en højere sandsynlighed for de ekstreme udfald, mens man får en lavere sandsynlighed for de mellemliggende udfald.

Vol-af-vol parameterens effekt på optionsprisen er vist i figur 4.4 på næste side. I figuren ses det, at det for ITM- og OTM-optioner gælder, at optionsprisen i Heston modellen er højest, og at den stiger, når  $\sigma$  øges. De federe haler og den stejlere fordeling tillægger altså både ITM- og OTM-optioner en højere sandsynlighed for at have en værdi ved udløb. For optioner omkring ATM-niveauet gør det modsatte sig til gengæld gældende. Her er optionsprisen lavere i Heston modellen, og forskellen imellem de to modeller øges også i dette tilfælde, når  $\sigma$  øges. Størrelsen på det forventede payoff er altså mindre for disse optioner, hvilket bl.a. skyldes, at Heston modellen tillægger en mindre sandsynlighed for udfald i intervallet  $S_T \in [105 : 118]$ , og det har altså en større effekt på optioner omkring ATM-niveauet end den øgede sandsynlighed for at få meget høje værdier af  $S_T$ .

I figur 4.5 på side 49 er effekten af displaced-parameteren  $m$  fra Displaced Heston modellen vist. Hvis man sammenligner figuren med figur 4.2, ses det tydeligt, at  $m$  har samme effekt på optionspriserne, som  $\rho$  har i den almindelige Heston model. Et  $m < 1$  har samme effekt på prisforskellen i forhold til Black-Scholes modellen, som  $\rho < 0$  har, og jo lavere  $m$  bliver, jo større bliver denne effekt. Hvis man vil opnå den effekt, man får ved  $\rho > 0$ , skal man tilsvarende vælge et  $m > 1$ . I afsnit 3.3, hvor modellen er beskrevet, er  $m$  defineret i intervallet mellem 0 og 1. Der er dog ikke noget teknisk i vejen for at lade  $m$  komme uden for dette interval, hvilket jo tydeligt ses i figur 4.5, hvor  $m = 1,4$  danner



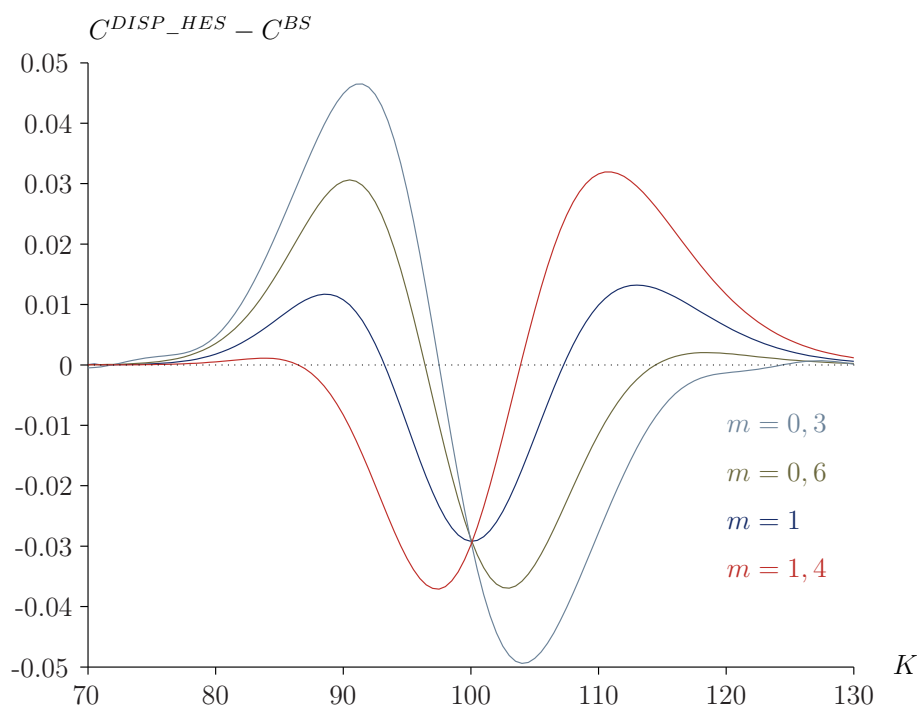
**Figur 4.3:** Effekten på tæthedsfunktionen for udløbskursen ved en ændring i volatilitetens volatilitet  $\sigma$ .



**Figur 4.4:** Forskel imellem optionsprisen i Heston modellen og Black-Scholes modellen ved forskellige strikeniveauer ( $K$ ), når man varierer volatilitetens volatilitet  $\sigma$ .



samme mønster, som man så ved  $\rho > 0$ . Denne begrænsning i modellen er udelukkende sat sådan, da den effekt, man næsten altid ser i markederne, svarer til  $\rho \leq 0$ , hvilket som sagt svarer til  $m \leq 1$ .

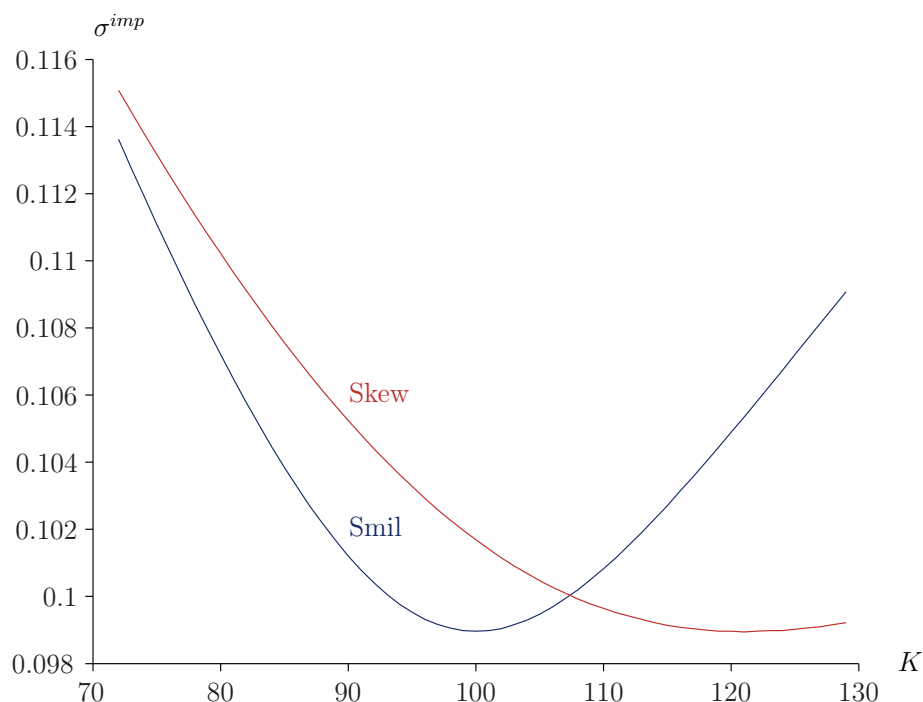


**Figur 4.5:** Forskel imellem optionsprisen i Displaced Heston modellen og Black-Scholes modellen ved forskellige strikeniveauer ( $K$ ) når man varierer parameteren  $m$ .

Det er i dette afsnit vist, at Heston modellen både kan påvirke skævheden (3. moment) og kurtosis (4. moment) i fordelingen. Skævheden påvirkes ved at justere på korrelationsparameteren, mens kurtosis påvirkes ved at justere på vol-af-vol parameteren. Det er vist, at de ændringer, det giver i fordelingerne, også har nogle markante effekter på optionspriserne, og at effekten, der stammer fra korrelationen  $\rho$ , kan afspejles ved at definere processen for det underliggende aktiv som en Displaced Heston model. Disse effekter kan være med til at beskrive et vigtigt begreb i finansieringsteori kendt som *volatilitetssmilet*. Dette begreb bliver introduceret, beskrevet og analyseret nærmere i næste afsnit.

## 4.2 Volatilitetssmilet

For at forstå, hvad et volatilitetssmil er, skal man først kende til et andet vigtigt begreb, den *implicitte volatilitet* ( $\sigma^{imp}$ ). Det er den værdi af  $\sigma$ , der får Black-Scholes optionsprisen til at stemme overens med en markedspris eller en pris fra en anden model – f.eks. Heston modellen. Optionspriser, som man kan observere i markedet, bliver ofte kvoteret i volatiliteter i stedet for priser, og det er med til at understrege, hvorfor det er så vigtigt et begreb. Volatilitetssmilet er forholdet imellem  $\sigma^{imp}$  og strikeniveauet  $K$ . Dette forhold kan illustreres i en figur med  $K$  ud ad x-aksen og  $\sigma^{imp}$  op ad y-aksen. Hvis dette forhold ikke ligner et smil, men blot flader ud, eller kun stiger en lille smule igen, kaldes det typisk for et volatilitets-*skew* eller *smirk*. Et eksempel på et smil og et skew kan ses i figur 4.6 på den følgende side.



**Figur 4.6:** Eksempel på et volatilitetssmil og skew. Smilet er genereret ud fra værdierne i tabel 4.1. Følgende parameterværdier er ændret for at generere skew'et:  $\kappa = 4$ ,  $\rho = -0,25$ ,  $v_t = 0,011$  og  $\sigma = 0,08$ .

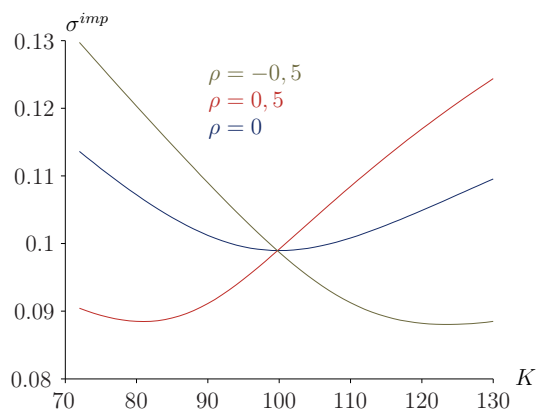
Formålet med dette afsnit er at analysere og illustrere, hvilken effekt de forskellige parametre i de to volatilitetsmodeller har på deres evne til at generere volatilitetssmil.

Den første parameter, der analyseres, er korrelationsparameteren  $\rho$ . Denne parameters effekt på volatilitetssmilet kan ses i figur 4.7 på næste side, hvor det tydeligt ses, at det er den parameter, der danner skew'et. Af samme grund betegnes  $\rho$  ofte som skew-parameteren. For  $\rho = 0$  er der ingen påvirkning fra skew-parameteren, og der dannes derfor et almindeligt smil, hvor volatilitetsniveauet for ITM- og OTM-optioner er næsten ens, og hvor ATM-optioner har en væsentligt lavere implicit volatilitet. Hvis man til gengæld har et  $\rho < 0$ , ses det, at ITM-optioner har den klart højeste volatilitet, og at den falder, når strikeniveauet stiger, så OTM-optioner har den laveste volatilitet. Det modsatte gør sig gældende for  $\rho > 0$ , hvor volatiliteten er lavest for ITM-optioner og stiger med strikeniveauet, så den er højest for OTM-optioner. Det er typisk effekten fra  $\rho < 0$ , som man ser for markedsdata. I begge tilfælde kan man fornemme, at der sker en lille stigning i volatiliteten for de højeste eller laveste strikeniveauer, og den stigning bliver større, når  $\rho$  nærmer sig 0, så skew'et mere kommer til at minde om et smil.

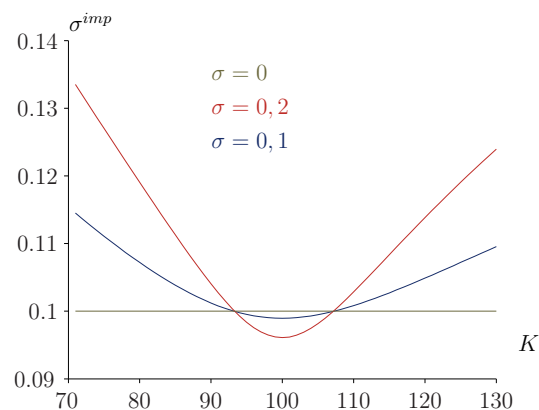
Smilet, der dannes i modellen, stammer fra vol-af-vol parameteren  $\sigma$ , som derfor ofte omtales som smil-parameteren. I figur 4.8 på modstående side fremgår det helt tydeligt, at det er den parameter der danner smilet i modellen. I figuren ses det, at når  $\sigma = 0$ , er volatiliteten den samme for alle strikeniveauer, mens der genereres et smil, når  $\sigma$  øges, og at smilet bliver spidsere (får højere værdier for ITM- og OTM-optioner og lavere værdier for ATM-optioner), jo højere  $\sigma$  bliver.

Korrelationsparameteren og vol-af-vol parameteren er de vigtigste parametre i forhold til Heston modellens evne til at generere smil og skews, men de andre parametre, der indgår i modellen, har naturligvis også betydning for, hvordan smilet kommer til at se ud.

De volatilitetssmil, der dannes, når man justerer på langtidsniveauet for volatiliteten



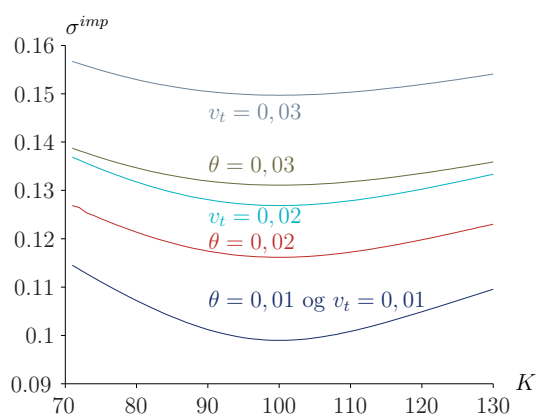
Figur 4.7: Volatilitetssmil, når  $\rho$  varieres.



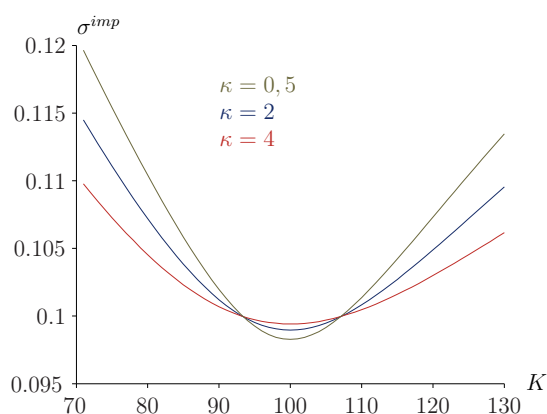
Figur 4.8: Volatilitetssmil, når  $\sigma$  varieres.

$\theta$  og niveauet for den nuværende volatilitet  $v_t$ , kan ses i figur 4.9. Det ses tydeligt, at effekten fra de to parametre minder meget om hinanden. De styrer begge to det niveau, som smilet ligger på. I dette eksempel har den initiale volatilitet størst effekt på smilets niveau, men det hænger nøje samme med, at tid til udløb kun er  $\tau = 0,5$ . Hvis man i stedet fordoblede tiden til udløb, så man satte  $\tau = 1$ , ville man få det modsatte billede, hvor et højere  $\theta$  får volatiliteten til at stige mere end et højere  $v_t$ , givet at alle de andre parametre fastholdes.

Den sidste parameter, der indgår i Heston modellen, er trækraften imod volatilitetens langtidsniveau  $\kappa$ . Effekten ved en justering i  $\kappa$  kan ses i figur 4.10, hvor det ses, at effekten minder lidt om den effekt, der kom fra  $\sigma$ . Det er ikke  $\kappa$ , der i sig selv generere smilet, men når smilet først er genereret, er  $\kappa$  med til at bestemme, hvor spidst det bliver. Det ses i figuren, at når  $\kappa$  sænkes, får man et spidsere smil, mens det tilsvarende bliver fladere, når  $\kappa$  øges.



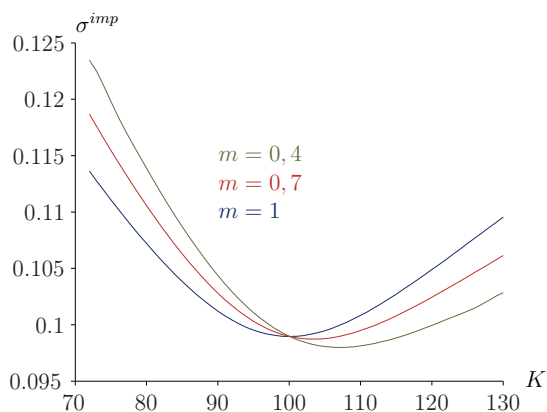
Figur 4.9: Volatilitetssmil, når  $\theta$  og  $v_t$  varieres.



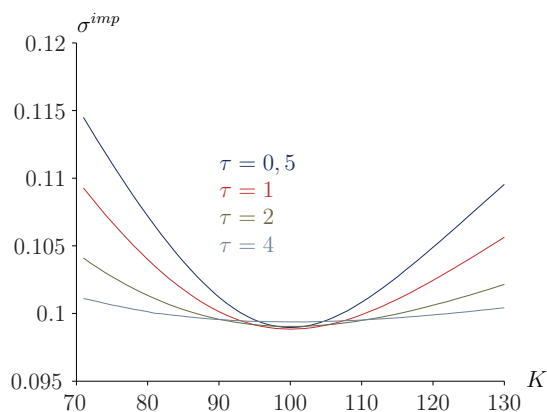
Figur 4.10: Volatilitetssmil, når  $\kappa$  varieres.

I en Displaced Heston model indgår der tre parametre ekstra, som ikke indgår i den almindelige Heston model. Parameteren  $m$  giver, som tidligere nævnt, nogenlunde samme effekt som  $\rho$ , så det er altså den parameter, der danner skew'et. Denne effekt kan ses i figur 4.11 på næste side for  $m < 1$ , hvor det tydeligt ses, at ITM-volatiliteten bliver højere, mens OTM-volatiliteten bliver lavere, når  $m$  falder. Hvis man vil ramme et skew, der minder om det, man fik, når  $\rho > 0$ , skal man blot lade  $m > 1$ , og man vil få et skew, hvor ITM-volatiliteten er lavere end OTM-volatiliteten. De to sidste parametre, der indgår

i en Displaced Heston model, er  $L$  og  $\lambda$ . De to parametres effekt på volatilitetssmilet vil ikke blive illustreret i figurer, da de minder om de effekter, man også har kunnet se ved  $\theta$  og  $v_t$ , så de vil i stedet blot blive forklaret kort. For  $L$  gælder, at den ingen effekt har, hvis  $m = 1$ , men hvis  $m < 1$ , bliver niveauet for volatiliteten højere, når  $L$  stiger, og mindre, når  $L$  falder. Det modsatte gør sig gældende, når  $m > 1$ . Den sidste parameter  $\lambda$ , der indgår i modellen, har indvirkning på volatiliteten for det underliggende aktiv, og effekten af denne parameter påvirker derfor direkte niveauet, som volatiliteten ligger i. En højere værdi af  $\lambda$  medfører et højere niveau for volatiliteten, og en lavere  $\lambda$  medfører et lavere niveau for volatiliteten.

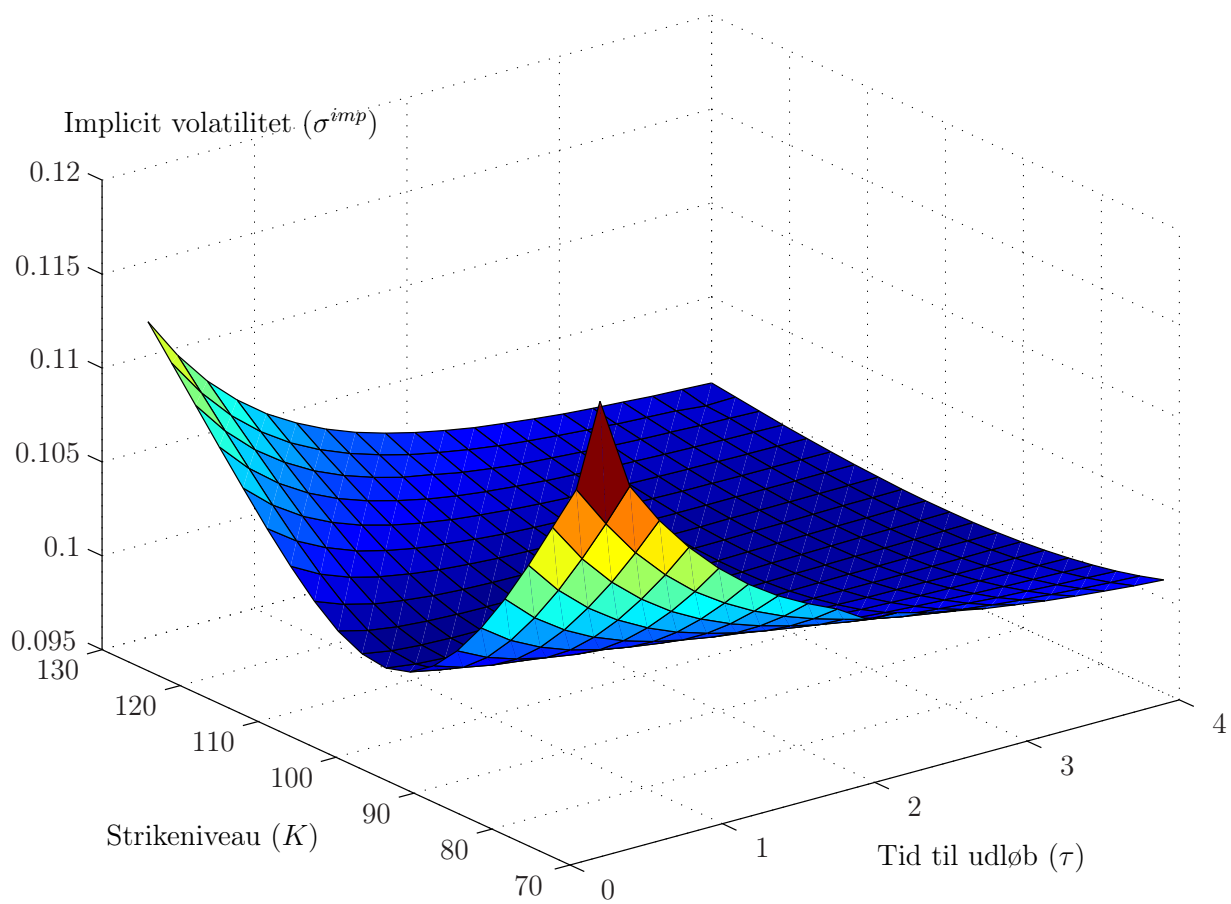


Figur 4.11: Volatilitetssmil, når  $m$  varieres.



Figur 4.12: Volatilitetssmil, når  $\tau$  varieres.

De sidste tre parametre, der indgår i tabel 4.1, kan der ikke justeres på i modellen. Renten  $r$  og startkursen  $S_t$  bliver bestemt i markedet, og man kan ikke selv påvirke disse to parametre. Derfor er deres betydning for smilet ikke så interessant. Det kan dog kort nævnes, at den påvirkning, de har på smilet, er, hvor det ligger i forhold til strikekursen  $K$ . Den sidste parameter er tiden til udløb  $\tau$ . Den bestemmes ud fra kontraktspecifikationen, og effekten af denne parameter er ganske interessant at undersøge. Denne effekt kan ses i figur 4.12, hvor det tydeligt ses, at volatilitetsstrukturen flader ud, når tiden til udløb øges. En endnu bedre metode til at illustrere denne udfladning er ved hjælp af et 3D-plot, hvor der ud over en strikeniveauakse og en volatilitetsakse også indføres en tidsakse. Når man lader den implicite volatilitet være en funktion af både strikeniveauet og tid til udløb, får man en *volatilitetsflade*. Et eksempel på en sådan volatilitetsflade kan ses i figur 4.13 på næste side, hvor det helt tydeligt ses, at volatiliteten flader ud, når tiden til udløb øges.



**Figur 4.13:** Eksempel på en volatilitetsflade. Det ses tydeligt, hvordan volatilitetssmilet udfledes, når  $\tau$  øges.



# Kapitel 5

## Prisfastsættelse af rentecaps i stokastiske volatilitetsmodeller

I kapitel 3 blev Heston modellen og Displaced Heston modellen udledt i det generelle tilfælde, hvor det underliggende aktiv er et handlet aktiv som f.eks. en aktie. Sådanne typer af aktiver kan også prisfastsættes vha. den simple Black-Scholes model, og i kapitel 2 blev det vist, at man kan omskrive Black-Scholes modellen, så det underliggende aktiv er en forward-rente, hvorved man kommer frem til Black 76 modellen. Tilsvarende kan man omskrive Heston modellen og Displaced Heston modellen, så det underliggende aktiv er en forward-rente. Det svarer til en udvidelse af Black 76 modellen, hvor stokastisk volatilitet inkluderes. Denne udvidelse vil blive præsenteret i det første afsnit af dette kapitel. En praktisk anvendelse af modellerne på rentemarkedet vil herefter blive introduceret, og deres kalibreringsevner i forhold til markededata vil blive testet. Kapitlet afsluttes med en case, hvor formålet er at prisfastsætte en 30-årig rentecap.

### 5.1 Omformulering af de stokastiske volatilitetsmodeller

I afsnit 2.4 blev standardmodellen til prisfastsættelse af rentecaps præsenteret. En cap består som tidligere nævnt af en række capletter, der hver dækker en rentetilpasningsperiode, og som giver en potential betaling, hvis den variable rente når over et aftalt niveau. For at finde prisen for en cap skulle man altså finde prisen for hver enkelt caplet og summere dem. Capletterne blev prisfastsat vha. Black 76 modellen, og det er den, som udvides i dette afsnit, så man tillader, at volatiliteten af det underliggende aktiv er stokastisk. Udvidelsen af modellen vil ske i henhold til de resultater, der blev præsenteret i kapitel 3, og der vil blive udledt et lukket formeludtryk for både Heston modellen og Displaced Heston modellen.

#### 5.1.1 Heston modellen

Det underliggende aktiv i en caplet er forward-renten, der jf. (2.40) er en martingal, og den forward-risikoneutrale dynamik (dynamikken under  $\mathbb{T}_k$ -målet) for forward-renten er angivet i (2.41). Variansen følger en CIR-proces, der blev defineret i (2.12), og Heston

modellen til prisfastsættelse af rentederivater kan opsummeres som

$$\begin{aligned} dF_k(t) &= \sqrt{v_k(t)}F_k(t)dW_1^{\mathbb{T}_k}(t) \\ dv_k(t) &= \kappa(\theta - v_k(t))dt + \sigma\sqrt{v_k(t)}dW_2^{\mathbb{T}_k}(t) \\ \langle dW_1^{\mathbb{T}_k}(t), dW_2^{\mathbb{T}_k}(t) \rangle &= \rho \end{aligned} \quad (5.1)$$

Processerne er her defineret under  $\mathbb{T}_k$ -målet, og de parametre, man estimerer, er ikke den virkelige verdens parametre, men de forward-risikoneutrale parametre.

Modellen i dette setup er nu præsenteret, og i det følgende udledes en lukket prisformel vha. Hestons teknik. Udregningerne følger en blanding af udregningerne i afsnit 3.2.2 og afsnit 3.3.2, der omhandlede udledningen af en lukket prisformel i henholdsvis Heston modellen og Displaced Heston modellen. Det faktum, at processen er en martingal, giver visse ligheder i udregningerne i forhold til afsnittet med Displaced Heston modellen, mens betydningen af den indbyrdes korrelation imellem Wienerprocesserne også var en del af den originale Heston model. Desuden blev den gennemgået i flere detaljer, som der henvises til flere steder i dette afsnit.

Der gættes på en løsningsform svarende til den fra Black 76 modellen, der er givet i (2.44) som

$$C(t, T_{k-1}, T_k) = N\Delta_{k-1,k}P(t, T_k)(F_k(t)P_1 - KP_2) \quad (5.2)$$

hvor den eneste forskel i forhold til Black 76 modellen ligger i de to sandsynligheder  $P_1$  og  $P_2$ , og det er derfor dem, der skal udledes.

Af tekniske årsager laver man igen transformationen  $x_k = \ln F_k$ , og man kan vha. Itô's lemma finde processen for  $x_k$  som

$$dx_k = -\frac{1}{2}v_k dt + \sqrt{v_k}dW_1^{\mathbb{T}_k}$$

Hvis man desuden definerer tiden, der går, før renten fastsættes, som  $\tau \equiv T_{k-1} - t$ , og udnytter, at prisen på 0-kupon obligationen er givet som

$$P(t, T_k) = e^{-r(T_k-t)} = e^{-r(T_k-T_{k-1})-r(T_{k-1}-t)} = e^{-r(T_k-T_{k-1})}e^{-r\tau}$$

kan (5.2) omskrives til

$$C(t, T_{k-1}, T_k) = N\Delta_{k-1,k}e^{-r(T_k-T_{k-1})}e^{-r\tau}(e^{x_k}P_1 - KP_2) = U_1 - U_2$$

hvor

$$U_1 = N\Delta_{k-1,k}e^{-r(T_k-T_{k-1})}e^{-r\tau}e^{x_k}P_1$$

$$U_2 = N\Delta_{k-1,k}e^{-r(T_k-T_{k-1})}e^{-r\tau}KP_2$$

Man vil nu kunne omskrive PDE'en fra ligning (3.7) til

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau} + -\frac{1}{2}v\frac{\partial U}{\partial x_k} + [\kappa(\theta - v)]\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial v} = rU \quad (5.3)$$

som både  $U_1$  og  $U_2$  skal opfylde.

Hvis man finder de relevante afledte for  $U_1$  og  $U_2$  og sætter dem ind i (5.3), får man følgende PDE som de to sandsynligheder skal opfylde<sup>1</sup>.

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + u_jv\frac{\partial P_j}{\partial x_k} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x_k^2} + (a - b_jv)\frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x_k\partial v} = 0 \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>Det bemærkes, at ingen af de afledte afhænger af  $N\Delta_{k-1,k}e^{-r(T_k-T_{k-1})}$ , så det led kan blot opfattes som en konstant, der kan divideres ud i alle leddene.



for  $j = 1, 2$ , hvor

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = -\frac{1}{2} \quad a = \kappa\theta \quad b_1 = \kappa - \rho\sigma \quad b_2 = \kappa$$

Løsningsmetoden bygger som tidligere nævnt på Hestons teknik omkring anvendelsen af karakteristiske funktioner, hvor løsningsformen for de karakteristiske funktioner er givet som

$$f_j(x_k, v_k, \tau; \phi) = e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)v_k + i\phi x_k} \quad (5.5)$$

og hvor det er løsningen til  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$ , der skal udledes. Disse er, i det originale setup fra Heston modellen, udledt i bilag B, og ved kendskab til (5.4) kan man regne sig frem til, at ligning (B.2) nu kan omskrives til

$$\left(-\frac{\partial C}{\partial \tau} + aD\right) + \left(-\frac{\partial D}{\partial \tau} + u_j i \phi - \frac{1}{2}\phi^2 - b_j D + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + \rho\sigma i \phi D\right) v_k = 0 \quad (5.6)$$

Den eneste forskel imellem ligning (B.2) og (5.6) er, at leddet  $ri\phi$  mangler i (5.6), så det ses helt trivielt, at løsningen for  $D(\tau; \phi)$  bliver den samme, mens leddet  $ri\phi\tau$  udgår i løsningen for  $C(\tau; \phi)$ . Det giver altså følgende løsning for sandsynlighederne  $P_1$  og  $P_2$

$$P_j(x_k, v_k, \tau; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re \left[ \frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x_k, v_k, \tau; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (5.7)$$

hvor  $f_j(x_k, v_k, \tau; \phi)$  er givet i (5.5). I (5.5) er  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$  givet som

$$C(\tau; \phi) = \frac{a}{\sigma^2} \left( (b_j - \rho\sigma i \phi - d) \tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \quad (5.8)$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{(b_j - \rho\sigma i \phi - d)(1 - e^{-d\tau})}{\sigma^2(1 - g e^{-d\tau})} \quad (5.9)$$

hvor

$$d \equiv \sqrt{(b_j - \rho\sigma i \phi)^2 - \sigma^2(2\phi u_j i - \phi^2)}$$

$$g \equiv \frac{b_j - \rho\sigma i \phi - d}{b_j - \rho\sigma i \phi + d}$$

Der er nu udledt en lukket løsningsformel for prisfastsættelse af capletter i et setup svarende til setupet i Heston modellen, og en tilsvarende løsningsformel for Displaced Heston modellen vil blive udledt i næste afsnit.

### 5.1.2 Displaced Heston model

I Displaced Heston modellen er det underliggende aktiv defineret som en martingal, så der sker ikke de store ændringer, når man skal tilpasse modellen til at prisfastsætte capletter. Det underliggende aktiv for en caplet er forward-renten  $F_k(t)$ , så den sættes ind i ligning (3.16) i stedet for  $S(t)$ , og modellen kan nu skrives på formen

$$dF_k(t) = (mF_k(t) + (1 - m)L)\lambda\sqrt{v(t)}dW_1(t)$$

$$dv_k(t) = \kappa(\theta - v_k(t))dt + \sigma\sqrt{v_k(t)}dW_2(t) \quad (5.10)$$

$$\langle dW_1(t), dW_2(t) \rangle = 0$$

Prisudtrykket er igen det samme som Black 76 modellen, og det er igen et udtryk for sandsynlighederne i (5.2), der skal findes. Da der ikke er ændret noget grundlæggende imellem ligning (3.16) og (5.10), kan sandsynlighederne udledes på samme måde som i afsnit 3.3.2, og sandsynlighederne kan derfor blot findes vha. ligning (3.22).

For at benytte de to modeller skal man have estimeret modelparametrene, og det gøres ved at kalibrere modellerne til markedsdata. I det næste afsnit vil implementeringen og kalibreringen af modellen blive diskuteret.

## 5.2 Kalibrering af modellen til markedsdata

Dette afsnit indledes med en gennemgang af kalibreringsproblemet i de stokastiske volatilitetsmodeller og en kort diskussion af den praktiske implementering og kalibrering af modellerne. Herefter testes den praktiske kalibrering på et mindre datasæt bestående af fire capletter med forskellig løbetid med henblik på at finde en metode for kalibrering af det fulde datasæt, bestående af alle de capletter, der tilsammen danner en rentecap.

### 5.2.1 Kalibreringsproblemet

Når man skal implementere Heston modellen, eller for den sags skyld Displaced Heston modellen, kan det vises (se bl.a. Bakshi, Cao & Chen [1997]), at de parametre, der rammer de korrekte markedspriser, er forskellige fra de parametre, man kan estimere vha. processernes tidsserier. Det er bl.a. grunden til, at processen for variansen er defineret uden en risikopræmie, da man ikke vinder noget ved at prøve at estimere en. I stedet kan man løse problemet ved at se på en struktur af handlede optioner og estimere de parametre, der bedst rammer denne struktur. Dette gøres typisk ved at minimere den kvadrerede fejl imellem priser beregnet i modellen for et sæt af parametre og handlede optionspriser. Et sådant minimeringssetup kan se ud, som følger:

$$\min_{\Omega} S(\Omega) = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_{ij} [C_{ij}^{\Omega}(K_i, \tau_j) - C_{ij}^M(K_i, \tau_j)]^2 \quad (5.11)$$

hvor  $\Omega$  er en vektor bestående af de parametre, der skal estimeres (i Heston modellen indgår der fem parametre, så man får  $\Omega = (\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_t)$ ), og hvor  $C_{ij}^{\Omega}(K_i, \tau_j)$  og  $C_{ij}^M(K_i, \tau_j)$  er henholdsvis den modelbestemte pris og markedsprisen for den  $ij$ 'te option med strikekurs  $K_i$  og tid til udløb  $\tau_j$ .  $N$  er antallet af strikekurser, og  $M$  er antallet af udløbstidspunkter, så det benyttede antal optioner til kalibreringen af parametrene er altså givet som  $N \times M$ . Det kan til tider vise sig hensigtsmæssigt at tillægge optionerne, der indgår i kalibreringen af modellen, en forskellig betydning, og til det formål kan vægtene  $w_{ij}$  anvendes.

Til enhver optionspris hører som regel en udbudspris (bid) og en efterspørgselspris (ask), og den pris man så benytter som markedsprisen, er gennemsnittet af de to priser (mid). Moodley [2005] foreslår, at man benytter bid/ask spreadet som vægte, således at  $w_{ij} = \frac{1}{|C_{ij}^{bid} - C_{ij}^{ask}|}$ . Med dette valg tillader man et større antal priser, hvis bid/ask spreadet er stort (vægten bliver mindre), og omvendt tillader man et mindre antal priser, hvis bid/ask spreadet er småt. Et andet forslag går på at benytte de implicite volatiliteter som vægte, så man tillægger ITM- og OTM-optioner en større vægt, hvis man har et normalt smil, og ITM-optioner en større vægt hvis den implicite volatilitet danner et skew. I denne afhandling er det dog valgt ikke at gå yderligere ind i problemet med at

finde de bedste vægte, men blot at vægte alle optionerne ligeligt. Derfor er vægten  $w_{ij} = 1$  benyttet igennem resten af afhandlingen.

## 5.2.2 Implementering af kalibreringsmetoden

Minimeringsproblemet ovenfor er bestemt ikke et simpelt problem. Som regel er funktionen  $S(\Omega)$  hverken konveks eller har en speciel struktur. Derfor kan det være svært at finde en global løsning til problemet. Det er medvirkende til, at de fleste optimeringsmetoder kun vil finde et lokalt minimum som løsning på (5.11). I implementeringen af modellen er det valgt at benytte minimeringsfunktionen  $fminsearchbnd^2$ , der indfører en øvre og nedre grænse i den i MATLAB indbyggede optimeringsfunktion  $fminsearch$ . Denne optimeringsmetode benytter en såkaldt Nelder-Mead simplex algoritme til at finde et lokalt minimum. Det ligger uden for rammerne af denne afhandling at give en dybere indføring i denne algoritme, og der henvises i stedet til funktionsbeskrivelsen i MATLAB for yderligere information. I bilag C.4 kan man se koden, der igennem kapitlet er benyttet til at minimere ligning (5.11).

Da minimeringsfunktionen kun finder et lokalt minimum, er den yderst afhængig af det startgæt, man giver til funktionen. Derfor kan det være hensigtsmæssigt at lave en søgning i hele parameterrummet den første gang, man skal kalibrere modellen til et marked. Det kan man i praksis gøre ved f.eks. at inddele hver af parametrene i et antal værdier der spænder over parameterrummet (f.eks. giver  $\rho = \{-1, -0.8, \dots, 0.8, 1\}$  11 parametre for  $\rho$ ) og herefter udregne  $S(\Omega)$  for hvert parametersæt. Så kan man prøve at kalibrere modellen vha. de f.eks. 10 bedste sæt af parameterværdier og herefter vælge parametrene i den bedste kalibrering som sine modelparametre. Hvis man inddeler alle 5 parametre i Heston modellen i 11 værdier, giver det  $5^{11} = 161.051$  beregninger af den samlede kvadrerede afvigelse i modellen. Hvis man samtidig har en del strikeniveauer og løbetider, kan det hurtigt blive til mange millioner udregninger af modelprisen, så selvom f.eks. MATLAB kan udregne en enkelt optionspris lynhurtigt<sup>3</sup>, bliver det tungt regnemæssigt at gennemregne hele parameterrummet<sup>4</sup>. Derfor er det en øvelse, man kun bør foretage, første gang man skal kalibrere modellen, eller hvis der er sket nogle grundlæggende ændringer i markederne. Ellers bør det være tilstrækkeligt, hvis man benytter parametrene fra den forrige dag som startgæt til at kalibrere modellen.

## 5.3 Test af modellernes kalibreringsevne

Til test af modellernes kalibreringsegenskaber er der udvalgt fire capletter med forskellig løbetid fra et større datasæt bestående af 56 capletter med betalingstidspunkter hvert halve år fra 3 til 30 år. Det fulde datasæt vil blive præsenteret nærmere i afsnit 5.4.1. Grunden til, at der kun er udvalgt fire capletter til dette afsnit, er, at kalibreringen af det fulde datasæt er meget beregningstungt. Så for at kunne teste nogle forskellige metoder og sammenligne resultaterne på en overskuelig måde er der udvalgt fire af de mest likvide capletter i markedet, som har vidt forskellige løbetider, så man får testet modellerne ordentligt igennem. Specifikationer for de fire capletter kan ses i tabel 5.1 og 5.2.

<sup>2</sup>Funktionen kan downloades på <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17804>.

<sup>3</sup>På en computer med en Intel Core 2 Duo processor med 2,26 Ghz og 4 GB ram tager det ca. 0,009 sekund at udregne en enkelt optionspris.

<sup>4</sup>Hvis man inddeler hver parameter i 11 værdier og har 10 strikeniveauer og 10 løbetider, vil en gennemregning af den kvadrerede afvigelse i parameterrummet tage ca. 40 timer.

													Strikeniveau (%)			
1,0	1,5	2,0	2,3	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	10,0				
0,48	0,41	0,36	0,34	0,32	0,29	0,28	0,28	0,28	0,29	0,30	0,31	0,35				
0,40	0,33	0,28	0,25	0,23	0,21	0,18	0,17	0,17	0,17	0,19	0,20	0,24				
0,35	0,29	0,25	0,24	0,23	0,20	0,17	0,16	0,15	0,14	0,15	0,15	0,16				
0,35	0,29	0,25	0,23	0,22	0,20	0,17	0,16	0,15	0,15	0,15	0,16	0,19				

**Tabel 5.1:** Implicit volatilitet for de fire capletter, der benyttes til at teste modellernes kalibreringsevner i dette afsnit.

$T_k$	$\Delta_{k-1,k}$	$P(t, T_k)$	$F_k(t, T_k)$	ATM-vol	ATM-strike(%)	$N$
3	0,5	0,939	0,028	0,297	2,93	100
5	0,5	0,878	0,037	0,178	3,72	100
10	0,5	0,712	0,045	0,154	4,43	100
20	0,5	0,455	0,037	0,156	4,29	100

**Tabel 5.2:** Resterende variable for de fire capletter, der benyttes til at teste modellernes kalibreringsevner i dette afsnit.

### 5.3.1 Feller betingelsen

Når man udfører kalibreringen i praksis, er der en række ting, man skal være opmærksom på. Parameterværdierne skal alle være  $\geq 0$ , bortset fra korrelationen, hvor der gælder  $1 \geq \rho \geq -1$ . For at sikre at processen for variansen forbliver strengt større end 0, skal Feller betingelsen  $2\kappa\theta \geq \sigma^2$  jf. afsnit 2.1.4 være opfyldt. Ifølge Andersen [2007, p. 4] og Haastrecht & Pelsser [2008, p. 4] er denne betingelse dog sjældent opfyldt, når man kalibrerer modellen til markedsdata. Om det også er tilfældet for dette datasæt, vil blive testet ved at kalibrere Heston modellen til hver af de fire capletter for sig selv og sammenligne de smil, der genereres, når Feller betingelsen er opfyldt, med de smil, der genereres, når den ignoreres. Til hver kalibrering er følgende vektor anvendt som startgæt:  $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_t) = (0.9, 0.04, 0.7, -0.3, 0.04)$ . Da formålet i dette afsnit blot er at undersøge betydningen af Feller betingelsen, accepteres det, at det måske kun er lokale minima, der er fundet i kalibreringen.

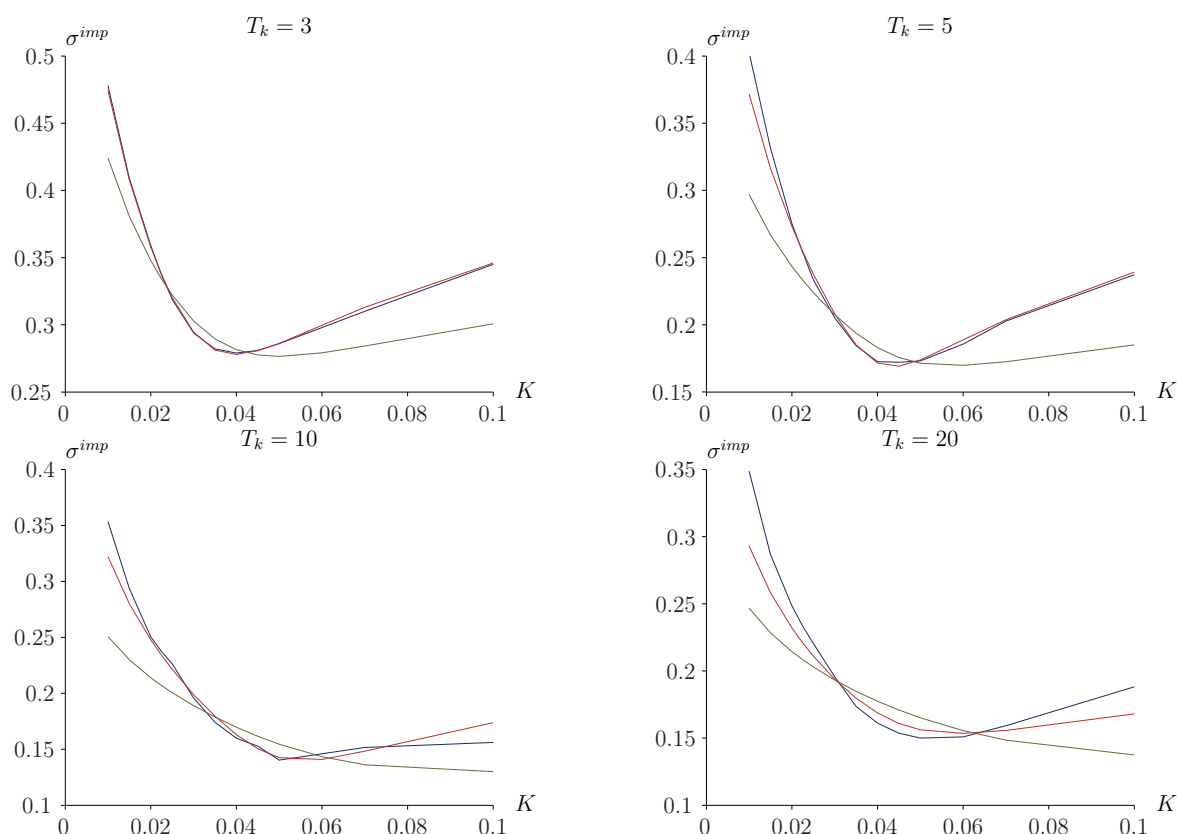
De kalibrerede modelparametre og den samlede kvadrerede afvigelse kan ses i tabel 5.3 på modstående side, hvor man kan se, at der for alle fire capletter gælder, at den kvadrerede afvigelse er mindst, når modellen kalibreres uden krav om opfyldelse af Feller betingelsen. Hvis man ser på de kalibrerede modelparametre, er der ganske markante forskelle i de to tilfælde. Det tyder altså på, at det har stor betydning for kalibreringen, om man stiller krav om opfyldelse af Feller betingelsen eller ej. Det er desuden værd at bemærke, at der for capletterne med krav om opfyldelse af Feller betingelsen gælder, at  $2\kappa\theta$  er præcis lig med  $\sigma^2$  (der er lidt afrundingsfejl, hvis man prøver med tallene i tabellen), så Feller betingelsen er kun lige akkurat opfyldt.

Denne betydning illustreres dog væsentligt bedre grafisk, hvis man ser på de volatilitetssmil, som markedsvolatiliteterne i tabel 5.1 danner, og sammenligner dem med volatilitetssmilene dannet ud fra modelparametrene i de to tilfælde. Et grafisk billede af kalibreringen kan ses i figur 5.1 på næste side. For alle fire løbetider kan man tydeligt se, at modellen uden krav til opfyldelse af Feller betingelsen (den røde kurve) ligger markant tættere på markedsvolatiliteten (den blå kurve) end, hvis man tilføjer kravet om

Feller betingelsen opfyldt						Feller betingelsen udeladt					
$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_t$	$S(\Omega)$	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_t$	$S(\Omega)$
0,179	0,52	0,43	-0,52	0,024	4E-04	1,898	0,006	1,79	-0,44	0,71	4E-06
0,003	6,80	0,20	-0,54	0,001	2E-03	2,714	9E-04	3,68	-0,41	0,88	1E-04
0,047	0,12	0,11	-0,68	0,013	5E-03	0,484	0,060	1,62	-0,46	0,15	6E-04
0,001	4,99	0,10	-0,76	5E-04	8E-03	2E-11	0,037	1,27	-0,59	0,58	2E-03

**Tabel 5.3:** Kalibrerede parameterverdier og den kvadrerede prisafvigelse for Heston modellen med og uden krav til opfyldelse af Feller betingelsen.

opfyldelse af Feller betingelsen (den grønne kurve).



**Figur 5.1:** Volatilitetssmil for de fire capletter kalibreret hver for sig vha. Heston modellen. For alle figurerne gælder følgende: Den blå kurve er markedsdata, den røde kurve er Heston modellen *uden* krav til opfyldelse af Feller betingelsen, og den grønne kurve er Heston modellen *med* krav til opfyldelse af Feller betingelsen.

For de kalibreringer, hvor der er stillet krav om opfyldelse af Feller betingelsen, er der et tydeligt mønster i de fire grafer. For ITM- og OTM-capletter ligger modellsmitet markant under markedssmitet, mens det ligger lidt over for ATM-capletter. Faktisk flader alle kurverne ud, og det er helt tydeligt, at modellen har svært ved at generere et smil. Det kan skyldes, at den restriktion, der er sat, er på størrelsen på den parameter, der danner smilet  $\sigma$ . Man kan også se i tabellen, at værdierne for  $\sigma$  bliver markant højere, når man fjerner denne restriktion.

For kalibreringerne uden krav til opfyldelse af Feller betingelsen er der meget lille forskel for de tre første løbetider. For  $T_k = 3$  ligger de to kurver næsten lige oven i hinanden for alle strikeniveauerne, så her rammer modellen næsten helt perfekt. For  $T_k = 5$  er der

kun en lille afvigelse for ITM-capletter, hvor modellen rammer en implicit volatilitet, der ligger lidt under markedsvolatiliteten. Ellers ligger de to kurver igen meget tæt op ad hinanden. For  $T_k = 10$  får modellen lidt problemer for både ITM- og OTM-capletter. For ITM-capletter ligger modelvolatiliteten lidt under markedsvolatiliteten, mens det modsatte gør sig gældende for OTM-capletter. Det er dog igen kun for de yderste strikeniveauer, der er lidt problemer. Inde i midten omkring ATM-niveauet rammer modellen også her ganske fint. For den sidste løbetid  $T_k = 20$  har modellen lidt større problemer. Her ligger modelvolatiliteten et godt stykke under markedsvolatiliteten for både ITM- og OTM-capletter, mens den ligger lidt over for ATM-capletter. Det minder faktisk lidt om den effekt, der er, når man stiller krav til opfyldelse af Feller betingelsen (dog ikke helt så slemt). Grunden til, at modellen har svært ved at ramme den lange løbetid, kan være, at Heston modellen har en tendens til at flade smilet ud, når løbetiden øges. Det blev vist i afsnit 4.2, hvor man i figur 4.13 på side 53 tydeligt så denne effekt. Det ses dog i graferne, at denne udfladning ikke i samme stil gør sig gældende for markedsdato for denne rentecap, og det kan altså være medvirkende til, at modellen har lidt problemer, når løbetiden øges.

Samlet set kan man konkludere, at man kan kalibrere modellen markant bedre til markedsdato ved at se bort fra Feller betingelsen. For at sikre den bedst mulige anvendelse af modellen og de bedste resultater vil der derfor blive set bort fra denne betingelse igennem resten af afhandlingen.

### 5.3.2 Kalibrering af Heston modellen

Til test af opfyldelsen af Feller betingelsen blev modellen kalibreret for hver enkelt løbetid, men generelt vil man, som det også er beskrevet i ligning (5.11), kalibrere modellen til alle løbetiderne på en gang, så man kun får ét sæt parametre til at beskrive hele datasættet.

Som tidligere nævnt er optimeringsrutinen, der benyttes, ikke en global optimeringsrutine, så man risikerer at ende ud med et lokalt minimum, når man kalibrerer modellen. Det kan man prøve at rode bod på ved at foretage en parametersøgning, hvor man søger parameterområdet igennem for et godt startgæt, så man på den måde har større sandsynlighed for at ramme tæt på det globale maksimum. En sådan parametersøgning bliver dog hurtigt meget beregningstung. Typisk ligger parameterverdierne imellem 0 og 1 (imellem -1 og 0 for  $\rho$ ), men reelt set er der ikke nogen øvre værdi for, hvor store parameterverdierne kan blive (bortset fra  $\rho$  der skal ligge mellem -1 og 1), og det er slet ikke unormalt, at man f.eks. ser  $\kappa$  eller  $\sigma$  antage værdier oppe omkring 4-5<sup>5</sup>. Hvis man skal foretage en god parametersøgning, er det desuden nødvendigt, at afstanden imellem parameterverdierne ikke er alt for stor, da det ellers vil føre til dårlige startgæt og dermed være ligegyldigt. Hvis man inddeler parameterområdet i værdier mellem 0 og 1 (-1 og 0 for  $\rho$ ) og lader afstanden imellem hver parameter være 0,1, giver det 11 værdier for hver parameter. Da der i dette eksempel er 4 løbetider og 13 strikeniveauer, vil det, jf. computerspecifikationerne i fodnote 3 på side 59, tage omkring 21 timer at regne parameterområdet igennem. Og man risikerer stadig, at et par af parametrenes optimale værdi er større end 1, så det kan være, at man stadig er langt fra det globale maksimum efter sådan en gennemregning.

Da det er så beregningstungt at foretage en parametersøgning, er det i stedet valgt blot at prøve at kalibrere modellen med 10 vidt forskellige startgæt og så se nærmere på resultatet af de 10 kalibreringer. Et detaljeret overblik over de 10 startgæt og de tilhørende

<sup>5</sup>Husk, at det er de risikoneutrale parametre, der kalibreres, så det betyder ikke, at den virkelige verdens parametre er så høje.

kalibrerede værdier kan ses i bilag D i tabel D.1 og D.2 på side 106, mens et hurtigt overblik over intervallerne, som startgættene og resultaterne fra kalibreringerne spænder over, kan ses i tabel 5.4. I tabellen ses det, at alle de kalibrerede parameterverdier ligger i markant mindre intervaller end startgættene – specielt  $\theta$  og  $\rho$ , der kun varierer med henholdsvis 0,024 og 0,019, til trods for at startgættene i flere tilfælde har ligget ganske langt fra de to intervaller.

Interval- ler for	Parameterverdier					$S(\Omega)$	Itera- tioner	Tid (sek.)
	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_t$			
start- gæt	0,050 2,000	0,010 1,200	0,050 4,000	-0,900 0,000	0,020 1,500			
resul- tater	0,403 1,084	0,060 0,084	2,218 4,266	-0,477 -0,458	0,289 0,582	0,03038 0,03073	140 961	101 737

**Tabel 5.4:** Intervaller for de 10 startgæt til kalibreringen af Heston modellen og intervaller for de tilhørende resultater.

I stedet for at se på de absolutte forskelle i intervallerne kan man prøve at se på de relative forskelle imellem den største og den mindste værdi, da det kan give et mere retvisende billede, fordi der alt andet lige vil være større absolutte forskelle, hvis parameterværdien ligger omkring 2, end hvis den ligger omkring 0,08. De relative forskelle er udregnet som stigningen fra den mindste værdi til den største og giver for de 5 parametre følgende værdier:  $\kappa = 169\%$ ,  $\theta = 40\%$ ,  $\sigma = 92\%$ ,  $\rho = -4\%$  og  $v_t = 101\%$ . Den mindste forskel er altså helt tydelig ved korrelationsparameteren, mens de fire andre parametre varierer temmelig meget relativt set.

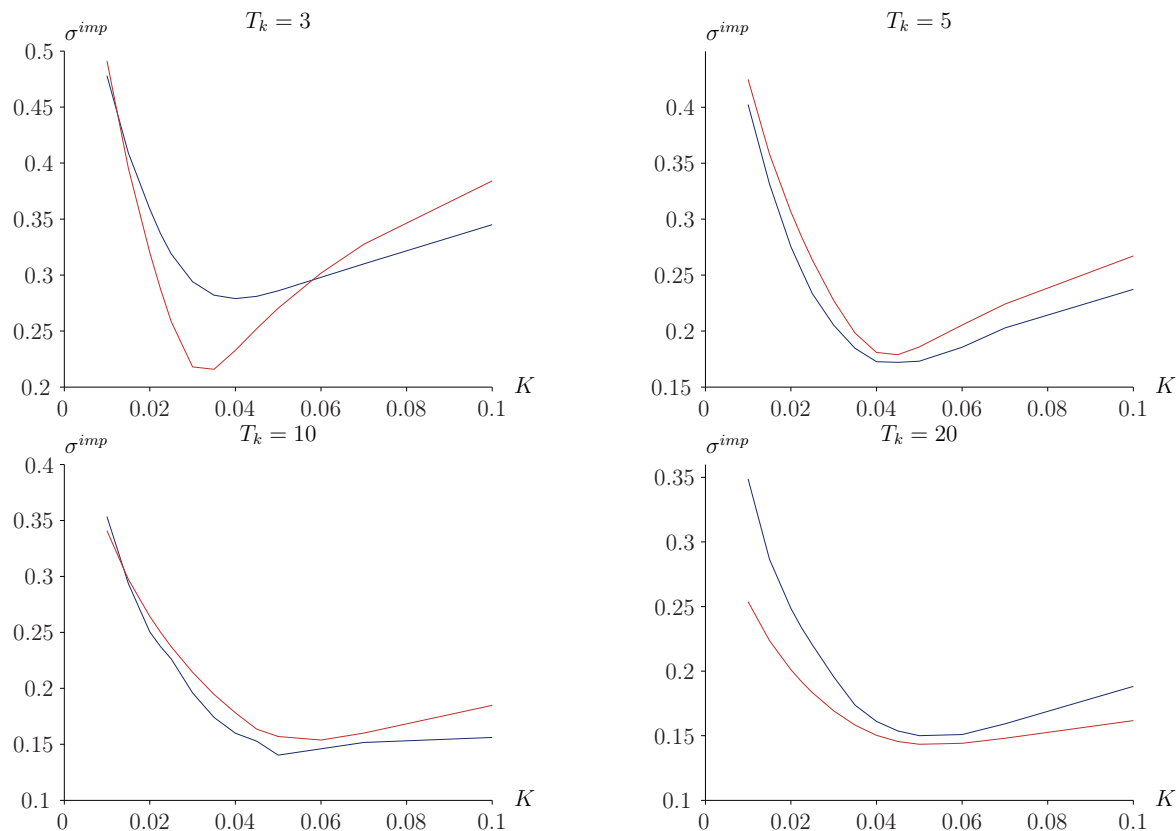
Hvis man kigger på den samlede kvadrerede afvigelse  $S(\Omega)$ , varierer den imellem 0,03038 og 0,03073. Der er altså kun meget små variationer i den. Det er et klart tegn på kalibreringsproblemet kompleksitet, da det med al tydelighed viser, at der er mange næsten lige gode løsninger, som ligger langt fra hinanden, hvilket gør det meget svært – hvis ikke umuligt – at finde et globalt minimum. Omvendt kan man se, at på trods af nogle til tider meget dårlige startgæt (se f.eks. række to i tabel D.2) finder minimeringsalgoritmen alligevel frem til et godt parametersæt, hvilket er en klar indikation af, at de mange lokale minima for denne model og dette datasæt har nogenlunde samme funktionsværdi. Den mindste kvadrerede afvigelse er på 0,03038, og det er de tilhørende parameterverdier, som vil blive benyttet til graferne i resten af afsnittet. Den bedste parametervektor er  $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_t) = (1.03, 0.06, 4.16, -0.46, 0.56)$ .

Der hvor startgættet for alvor kommer til udtryk, er i forhold til det benyttede antal iterationer og dermed også beregningstiden. Det ses i tabel 5.4, at det langsomste startgæt har taget over 7 gange længere tid end det hurtigste startgæt og brugt næsten 7 gange så mange iterationer<sup>6</sup>. Hvis man har et lidt større datasæt end det, der er anvendt i dette afsnit, kan det betyde en markant længere kalibreringstid, og det kan faktisk vise sig at være ganske kritisk, da man typisk er interesseret i at få stillet en pris så hurtigt som muligt i „den virkelige verden“.

Som i forrige afsnit får man dog først et rigtigt indblik i, hvor god/dårlig kalibreringen er, ved at se på det grafiske billede af de modelgenererede volatilitetssmil og sammenligne

<sup>6</sup>Grunden til, at der ikke er et 1-1 forhold imellem hastigheden og antallet af iterationer, er, at hastigheden, hvormed det uendelige integrale i ligning (5.7) kan udregnes, afhænger af parameterværdierne.

dem med markedssmilene. Denne sammenligning kan ses i figur 5.2. For alle fire løbetider er volatilitetssmilet blevet markant dårligere ved at foretage en samlet kalibrering i forhold til de smil, der blev genereret ud fra en kalibrering af hver enkelt løbetid, og som kan ses i figur 5.1 på side 61.



**Figur 5.2:** Volatilitetssmil for de fire capletter kalibreret vha. Heston modellen. For alle figurerne gælder følgende: Den blå kurve er markedssmilet, og den røde kurve er modelsmilet.

For den korteste løbetid  $T_k = 3$  går smilet ned i en alt for voldsom spids, så den implicitte volatilitet kommer til at ligge langt under markedsvolatiliteten for lave strike-niveauer og langt over for høje strikeniveauer. Det meget spidse smil kan altså tyde på, at  $\sigma$  er alt for høj til denne løbetid, samtidig med at  $\kappa$  er for lav.

For de to mellemliggende løbetider  $T_k = 5$  og  $T_k = 10$  har modelsmilet en struktur, der minder en del om strukturen i markedssmilet, men modelsmilet ligger en smule for højt i begge tilfælde. Det tyder altså på for høje værdier for  $\theta$  og  $v_t$ . For  $T_k = 5$  er  $\theta$  steget, mens  $v_t$  er faldet, så her er der to modsatrettede effekter. Det ses dog tydeligt på grafen, at effekten af stigningen i  $\theta$  har haft en større effekt end faldet i  $v_t$ , så smilet nu ligger lidt højere end markedssmilet. For  $T_k = 10$  er begge variablene steget en smule, men stigningen i  $\theta$  er til gengæld ikke så voldsom, som den var for  $T_k = 5$ , så her ligger smilet også kun en smule over markedssmilet.

For den sidste løbetid  $T_k = 20$  gør det modsatte sig gældende. Her er volatilitetssmilet faldet lidt, så det nu ligger under markedssmilet. Man kan se, at  $\rho$  er blevet en del større, hvilket betyder, at skew'et ikke bliver lige så stejlt, og at ITM-capletter derfor får en mindre volatilitet. Det er så medvirkende til, at hele smilet kommer til at ligge under markedssmilet.

Alle parametre spiller naturligvis ind på, hvordan hvert enkelt volatilitetssmil dannes, så ovenstående effekter er blot eksempler på nogle af de vigtigste ting, der spiller en



rolle i forhold til ændringen af volatilitetssmilene for de fire løbetider. Samlet set kan man konkludere, at resultatet er blevet markant dårligere, når modellen kalibreres til alle løbetiderne på en gang, men at strukturen i smilene trods alt stadig minder meget om markedssmilene for specielt de to midterste løbetider, mens den lange løbetid heller ikke er blevet specielt meget dårligere. Værst ser det ud for den korte løbetid på 3 år, hvor modelsmilet er gået fra at ligge lige oven i markedssmilet til at have fået en anderledes struktur, hvor et meget spidsere smil gør, at det ligger under markedssmilet for ITM-capletter og over for OTM-capletter.

Heston modellens kalibreringsevne er nu blevet testet, og modellen har vist visse mangler med hensyn til at ramme markedssmilet for specielt de korte og de lange løbetider. Der findes dog som tidligere nævnt også en Displaced Heston model, som måske kan vise sig bedre egnet til at ramme rentedata end Heston modellen. Om det er tilfældet for dette datasæt, vil blive testet nærmere i næste afsnit.

### 5.3.3 Kalibrering af Displaced Heston modellen

En Displaced Heston model adskiller sig fra Heston modellen i processen for det underliggende aktiv, og denne forskel giver modellen nogle andre egenskaber, der kan vise sig at være bedre egnede til at modellere dette datasæt. I en Displaced Heston model indgår der to parametre flere end i Heston modellen, og derfor bliver kalibreringsproblemet en smule mere komplekst.

Ligesom i det forrige afsnit er det valgt at kalibrere modellen med 10 forskellige startgæt for at øge chancen for, at man finder frem til en god kalibrering. Et detaljeret overblik over de 10 startgæt kan ses i tabel D.3, og resultatet af de 10 kalibreringer kan ses i tabel D.4 på side 107. Et overblik over intervallerne, som startgættene og kalibreringsresultaterne spænder over, kan ses i tabel 5.5, hvor det bemærkes, at det for flere af parametrene gælder, at intervallerne for de kalibrerede parameterverdier er markant større end startgættenes intervaller, hvilket er det præcis modsatte billede end i forrige afsnit. Generelt kunne det altså tyde på, at der er en noget større usikkerhed forbundet med kalibreringen af denne model.

Interval- ler for	Parameterværdier								Itera- tioner	Tid (sek.)
	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$m$	$v_t$	$L$	$\lambda$	$S(\Omega)$		
start- gæt	0,010 2,000	0,005 1,400	0,020 2,000	0,100 0,950	0,010 1,200	0,010 0,300	0,020 2,100			
resul- tater	0,065 4,375	0,001 0,369	0,247 0,878	0,252 0,885	0,006 2,756	0,112 0,667	0,089 2,272	0,0071 0,0149	408 2061	146 701

**Tabel 5.5:** Intervaller for de 10 startgæt til kalibreringen af Displaced Heston modellen og intervaller for de tilhørende resultater.

En anden faktor, det kan være interessant at se på i forbindelse med sammenligning af de to modeller, er antallet af iterationer og tiden brugt i sekunder. Hvis man ser på antallet af iterationer, tegner der sig det billede, at Displaced Heston modellen generelt set bruger flere iterationer på at finde et minimum end Heston modellen. Den hurtigste kalibrering har brugt 408 iterationer, mens den langsomste har skullet bruge hele 2061. I gennemsnit er der brugt 1133 iterationer, hvilket er næsten tre gange så mange som gennemsnittet for Heston modellen, der kun lå på 390. En logisk forklaring på, at modellen skal bruge

nogle flere iterationer i kalibreringen, kan være det faktum, at der nu er 7 parametre, der skal estimeres, i modsætning til Heston modellen, hvor der kun var 5. Derudover kan det skyldes noget så simpelt som, at startgættene simpelthen har været bedre for Heston modellen, eller at der ganske enkelt findes flere lokale minima for kalibreringsproblemet, når man benytter sig af Heston modellen. Det er dog umuligt at konkludere noget endeligt på baggrund af antallet af udførte kalibreringsforsøg i dette kapitel. Hvis man derimod ser på den tid, der er brugt på hver enkelt kalibrering, tegner der sig et lidt andet billede. Den hurtigste kalibrering af Displaced Heston modellen har taget 146 sekunder, mens den langsomste har taget 701 sekunder. Det er lidt større tal end for Heston modellen, men der er slet ikke så stor en forskel som forskellen i antallet af iterationer. Det gennemsnitlige antal sekunder, som kalibreringen har taget, er på 384 mod 288 for Heston modellen, og forholdet imellem antal sekunder og kalibrering er på 0,34 mod 0,74 for Heston modellen. Beregningen af hver iteration, og dermed beregningen af hver enkelt caplet-pris, går altså væsentligt hurtigere for Displaced Heston modellen end for Heston modellen.

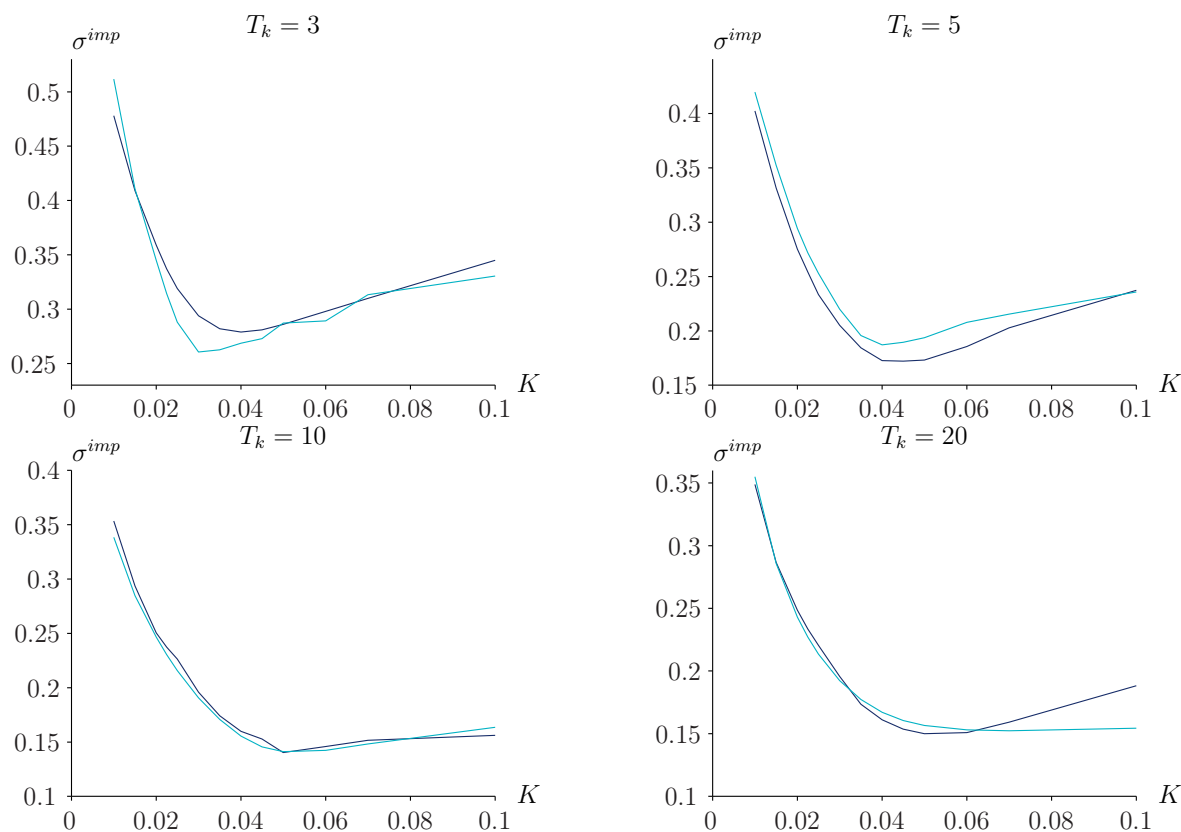
Hvis man ser nærmere på  $S(\Omega)$ , varierer den imellem 0,0149 for den dårligste kalibrering og 0,0071 for den bedste. Den dårligste kalibrering er altså bedre end den bedste kalibrering i forrige afsnit, mens den bedste kalibrering er væsentligt bedre end den dårligste. Den relativt store forskel, der er på den dårligste og den bedste kalibrering, er igen et tegn på, at der er en noget større usikkerhed omkring kalibreringen af denne model, og derfor betyder startgættet også væsentligt mere. Hvis man ser lidt nærmere på de forskelle, der er i den kvadrerede afvigelse, kan man se, at de fire første kalibreringer ligger forholdsvis tæt på hinanden – for den fjerde kalibrering er  $S(\Omega) = 0,0077$ . Den femte kalibrering ligger lidt alene med  $S(\Omega) = 0,0088$ , mens de sidste 5 kalibreringer er markant dårligere – kalibrering 6-10 har  $S(\Omega) \in [0,0138 : 0,0149]$ . Der er ikke en entydig ting, der går igen i startgættene for de sidste fem kalibreringer, men dette eksempel viser med al tydelighed, hvor vigtigt det er med et godt startgæt. Den bedste kalibrering havde som sagt  $S(\Omega) = 0,0071$ , og den tilhørende parametervektor er  $(\kappa, \theta, \sigma, m, v_t, L, \lambda) = (0.3393, 0.0087, 0.3009, 0.3066, 0.0209, 0.1986, 0.4950)$ . Det er de parametre, der benyttes til at generere graferne i resten af afsnittet.

Ud fra den samlede kvadrerede afvigelse er der ingen tvivl om, at Displaced Heston modellen er bedre end Heston modellen til at beskrive dette datasæt. Hvor meget bedre modellen er, kommer dog først rigtigt til udtryk, når man kigger på det grafiske billede af volatilitetssmilene. En sammenligning af markedssmilene og modelsmilene kan ses i figur 5.3 på modstående side. Hvis man ser overordnet på de fire smil, fremgår det helt tydeligt, at modelsmilene ligger markant tættere på markedssmilene, end de gjorde i forrige afsnit.

Hvis man sammenligner de enkelte løbetider, kan man for  $T_k = 3$  se, at smilet langt fra går ned i så voldsom en spids, som det gjorde for Heston modellen. Der er stadig en lille tendens til, at modelvolatiliteten ligger lidt under markedsvolatiliteten omkring ATM-niveauet, men forskellen er blevet meget mindre. For OTM-capletter er modellen også blevet markant bedre. For Heston modellen lå modelvolatiliteten langt over markedsvolatiliteten, men nu er den kommet ned i næsten samme niveau og ligger kun en lille smule under for  $K = 0, 1$ .

For  $T_k = 5$  minder modelsmilene meget om hinanden i de to modeller. De ligger i begge tilfælde lidt over markedssmilet, og den eneste forskel er, at Heston modellen ser ud til at være lidt tættere på omkring ATM-niveauet, mens Displaced Heston modellen kommer lidt tættere på for høje strikeniveauer (OTM).

En større forskel er der til gengæld, når man ser på  $T_k = 10$ . Her lå modelsmilet igen



**Figur 5.3:** Volatilitetssmil for de fire capletter kalibreret vha. Displaced Heston modellen. For alle figurerne gælder følgende: Den blå kurve er markedssmilet, og den turkis kurve er modelsmilet.

lidt over markedssmilet for Heston modellen, men for Displaced Heston modellen ligger det stort set lige oven i markedssmilet for alle strikeniveauerne. Det er altså en meget markant forbedring og noget, der minder om en noget nær perfekt kalibrering. Den er faktisk bedre end den kalibrering, der blev foretaget i afsnittet om opfyldelse af Feller betingelsen, hvor Heston modellen blev kalibreret én gang for hver enkelt løbetid (se figur 5.1).

Endnu en markant forbedring er sket for den sidste løbetid,  $T_k = 20$ , hvor modelsmilet i Heston modellen lå et godt stykke under markedssmilet for alle strikeniveauerne. Nu ligger modelsmilet stort set oven i markedssmilet for ITM-capletter, mens det falder en smule under for de højeste strikeniveauer – endda lidt lavere end Heston modellen. Der er dog stadig sket en stor forbedring i kalibreringen af modellen i forhold til i forrige afsnit.

Hvis man sammenfatter det kort, gælder der, at kalibreringen for tre af løbetiderne ( $T_k = 3, 10$  og  $20$ ) er blevet markant bedre end i forrige afsnit, mens kalibreringen af den sidste løbetid ( $T_k = 5$ ) er på nogenlunde samme niveau. Det giver altså samlet set en stor forbedring i resultatet. Den gennemsnitlige tid, det har taget at udføre kalibreringerne, har dog været en smule højere i Displaced Heston modellen, og der har desuden været en lidt større usikkerhed forbundet med kalibreringen grundet det højere antal parametre. Hvis man vejer de små ulemper op imod de markant bedre resultater, man får ved at benytte denne model, kan man for dette datasæt konkludere, at en Displaced Heston model er den bedste model at bruge til at beskrive markedsdata, og det er derfor den, der benyttes til at prisfastsætte hele rentecappen i næste afsnit.

## 5.4 Case: Prisfastsættelse af 30-årig rentecap

Indtil videre er de forskellige kalibreringsmetoder blevet testet på et mindre datasæt, og det har ført frem til den konklusion, at Feller betingelsen var en for „streng“ begrænsning i forhold til modellens kalibreringsevne, og at en Displaced Heston model er markant bedre til at beskrive dette rentedatasæt end Heston modellen. I dette afsnit vil det fulde datasæt først blive præsenteret, og Displaced Heston modellen vil herefter blive forsøgt anvendt til kalibrering af hele rentecappen.

### 5.4.1 Beskrivelse af data

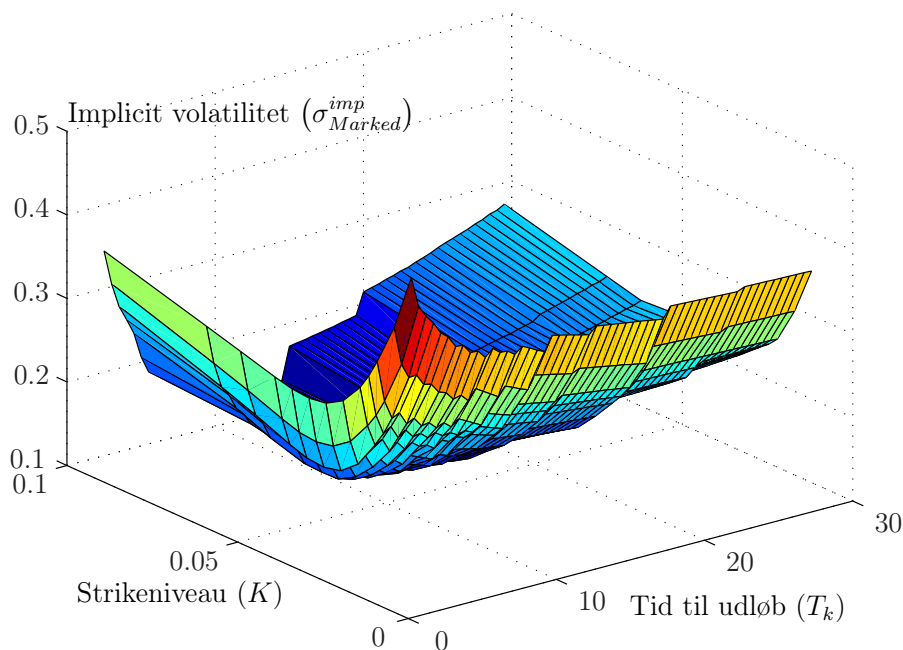
Det datasæt, der benyttes igennem dette kapitel, stammer fra d. 31/3-2009 og er venligst udlånt af Nykredit Markets. Data består af en 30-årig rentecap, hvor renten tilpasses hvert halve år (tenor = 6M), og hvor den underliggende rente er den europæiske swap-rente.

Til kalibrering af modellen skal man bruge caplet-volatiliteter, men i markedet er der typisk kun kvoteret cap-volatiliteter, så for at finde caplet-volatiliteterne skal man benytte sig af en caplet-vol-stripping algoritme. Det kan f.eks. være Bootstrap-metoden, der kort fortalt går ud på, at man starter i den korte ende og arbejder sig fremad, så man løbende finder de caplet-volatiliteter, der tilsammen giver de cap-priser, som matcher cap-volatiliteterne i markedet. Det ligger uden for rammerne af denne afhandling at gå ind i en nærmere diskussion af, hvordan de forskellige caplet-vol-stripping metoder virker i detaljer.

Med en tenor på 6M findes der ikke cap-volatiliteter med en kortere løbetid end 3 år, og det er derfor ikke muligt at udlede caplet-volatiliteter for kortere løbetider. Derfor bliver modellen kun kalibreret til caplet-volatiliteter med løbetider fra 3 til 30 år. Man kan stadig benytte de kalibrerede modelparametre til at prisfastsætte capletterne med løbetider fra 6 måneder til 2,5 år, men for de løbetider er der ikke noget markedsdata at sammenligne med. Da der er 6 måneder imellem hver caplet-løbetid, giver det i alt 56 forskellige løbetider, og da strikeniveauerne er de samme som i tabel 5.1, hvilket vil sige, at der er 13 forskellige strikeniveauer, giver det 728 priser, der skal gennemregnes for hver iteration i kalibreringsalgoritmen.

Markedsvolatiliteterne varierer fra  $\sigma^{imp} = 0,125$  for den laveste til  $\sigma^{imp} = 0,478$  for den højeste. Der er altså en ganske stor variation i de implicitte volatiliteter. Den laveste volatilitet findes ud for  $K = 6\%$  og  $T_k = 15$ , hvilket er nogenlunde midt i datasættet, mens den højeste volatilitet findes ud for  $K = 1\%$  og  $T_k = 3$ , altså ud for det laveste strikeniveau og den korteste løbetid. Et samlet billede af hele volatilitetsfladen kan ses i figur 5.4 på næste side.

Af figuren fremgår det helt tydeligt, at den højeste volatilitet ses ved det laveste strikeniveau og den korteste løbetid. Generelt set kan man se, at volatiliteten for alle løbetider er klart højest for det laveste strikeniveau, og at forskellen imellem volatiliteten for de høje og lave strikeniveauer ser ud til at være størst for capletterne med mellemlange udløbstider (10-20 år). Man kan desuden se, at volatiliteten – specielt for de høje strikeniveauer – starter med at falde meget voldsomt, når  $T_k$  øges, for så at stige igen. Det er denne effekt, der er medvirkende til, at det laveste volatilitetsniveau findes for en udløbstid på 15 år. Den modsatte effekt gør sig til gengæld gældende for forward-renten  $F_k$ , der til at starte med er stigende, når løbetiden øges, og så begynder at falde igen ved  $T_k = 15$ . Det er altså to modsatrettede effekter, der gør sig gældende, når man skal udregne Black



Figur 5.4: Volatilitetsflade dannet ud fra markedsdata.

76 prisen<sup>7</sup>. Til sidst er det værd at bemærke, at volatilitetsfladen ikke har samme markante tendens til at flade ud, når tid til udløb øges, som det var tilfældet i figur 4.13 på side 53. Man kan dog fornemme, at forskellen imellem volatiliteten for de høje og de lave strikeniveauer bliver lidt lavere for de helt høje udløbstider, så der er dog stadig en lille tendens til udfladning i markedsdata. Som det også blev bemærket i afsnit 5.3.1, er det bl.a. betydningen af den manglende udfladning, der gør, at Heston modellen har det svært over for denne type af data, hvilket man også tydeligt så i figur 5.2, hvor der sker en klar udfladning af modelsmilet igennem de fire figurer, mens denne udfladning er meget mindre (nærmest ikke-eksisterende) for markedsdata.

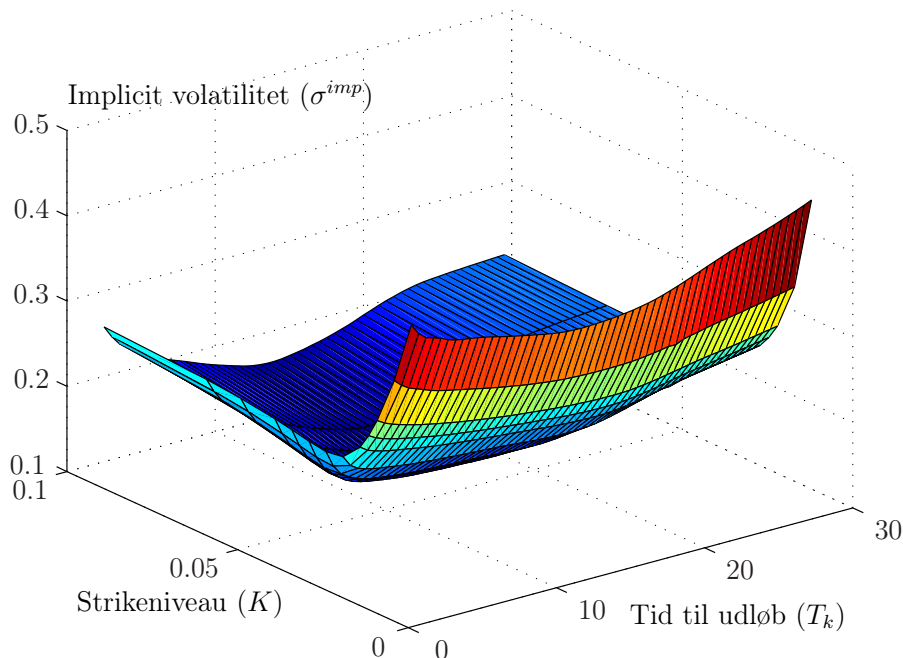
## 5.4.2 Kalibrering

Data er nu præsenteret, og modellen er klar til at blive kalibreret. Som tidligere nævnt er det Displaced Heston modellen, der vil blive anvendt til kalibreringen af det fulde datasæt. Da kalibreringen af så stort et datasæt som tidligere nævnt er en meget kompliceret og beregningstung opgave, er det valgt at tage udgangspunkt i resultaterne fra afsnit 5.3.3. Den bedste kalibrering gav parametervektoren  $(\kappa, \theta, \sigma, m, v_t, L, \lambda) = (0.3393, 0.0087, 0.3009, 0.3066, 0.0209, 0.1986, 0.4950)$ , og det er derfor valgt at benytte disse parametre som startgæt for kalibreringen.

Kalibreringen har taget ca. 61 minutter og har brugt 766 iterationer på at finde et minimum. Den samlede kvadrerede afvigelse er på  $S(\Omega) = 0,116586$ , hvilket er omkring 16 gange højere end kalibreringen for de fire udvalgte capletter, og da modellen er kalibreret på baggrund af 14 gange så mange løbetider, virker det som om, resultatet er nogenlunde som man kunne forvente (man kan naturligvis ikke sige noget eksakt om, hvorvidt det er et bedre eller dårligere resultat, da caplet-priserne bl.a. pga. forward-renten og den implicitte volatilitet er vidt forskellige for de forskellige udløbstider). Den kalibrerede parametervektor for hele datasættet er  $(\kappa, \theta, \sigma, m, v_t, L, \lambda) = (0.0233, 0.1875, 0.3510,$

<sup>7</sup>En højere  $F_k$  giver en højere pris, mens en lavere  $\sigma^{imp}$  giver en lavere pris.

0.3532, 0.0916, 0.0583, 0.5172). Den største forskel i forhold til startgættet ses for  $\kappa$  og  $L$ , der begge er blevet markant lavere, mens  $\theta$  og  $v_t$  begge er blevet lidt højere. Der er ikke sket en helt så stor forskydning af  $\sigma$ ,  $m$  og  $\lambda$ , som alle tre kun ligger en lille smule over startgættet.

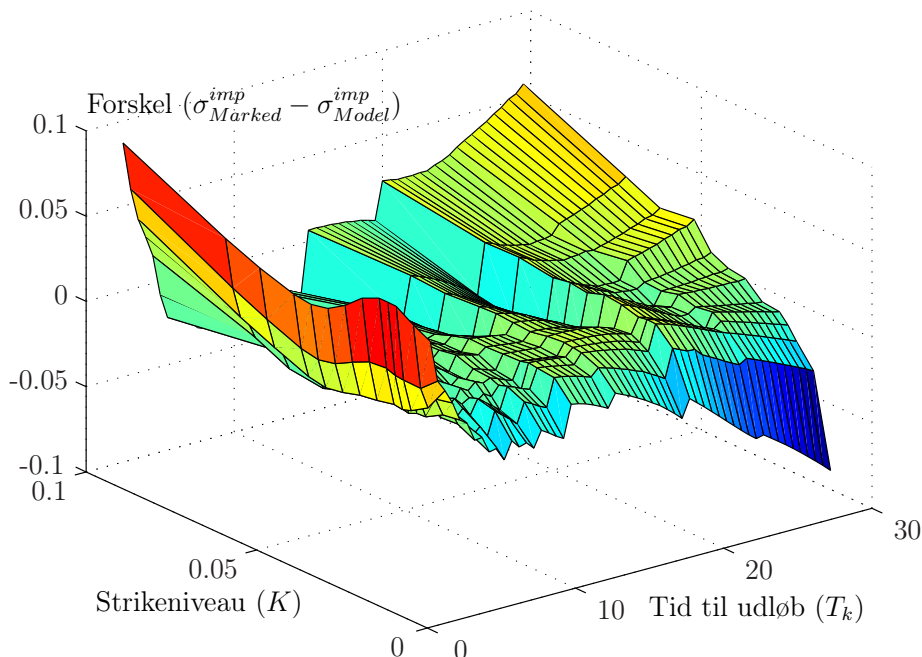


Figur 5.5: Volatilitetsflade kalibreret vha. Displaced Heston modellen.

Et grafisk billede af kalibreringen kan ses i figur 5.5. Hvis man ser på forskellen i forhold til markedsvolatilitetsfladen, er det første, der springer i øjnene, at volatiliteten for de lange løbetider og helt små strikeniveauer er markant højere i modellen, og at den er stigende, når løbetiden øges, i stedet for faldende, som det var tilfældet for markedsdato. Det ser desuden ud til, at volatiliteten i modellen ikke falder helt så meget for de mellem-lange løbetider og mellemhøje til høje strikeniveauer, og at den derudover ikke stiger helt så markant for de lange løbetider. Den første påstand bliver underbygget af det faktum, at den laveste volatilitet, som modellen antager, er  $\sigma^{imp} = 0,139$ , hvilket er noget højere end for markedsdato, hvor den var på  $\sigma^{imp} = 0,125$ . Den findes ved samme strikeniveau på 6% som for markedsdato, men med en udløbstid på 14 år mod 15 år for markedsdato. Generelt set ser det dog ud til, at modellen rammer rimeligt tæt på markedsdato for de fleste løbetider og strikeniveauer.

Det er dog svært at se den præcise forskel ved blot at kigge på de to figurer, så for at få et endnu bedre indblik i Displaced Heston modellens kalibreringsevne kan man i stedet se på en figur over forskellene i de implicite volatiliteter for de forskellige løbetider og strikeniveauer. Fladen for volatilitetsforskellene kan ses i figur 5.6 på modstående side. Her ser man helt tydeligt, hvordan modelvolatiliteten er alt for lav for de helt korte løbetider, hvilket giver de store positive forskelle, der er illustreret med de orange/røde farver. Man kan dog se, at volatilitetsforskellene ret hurtigt kommer ned på et acceptabelt niveau, hvor forskellen imellem markedsvolatiliteterne og modelvolatiliteterne er meget tæt på 0. Det ses illustreret i figuren ved de lysegrønne nuancer. Først for de lange løbetider bliver det lidt skidt igen, hvor man for høje strikeniveauer kan se, at modelvolatiliteten igen er lidt for lav illustreret ved den gule farve (forskellen er dog ikke helt så stor som for de korte

løbetider), mens modelvolatiliteten helt tydeligt er alt for høj for de lave strikeniveauer, hvilket tydeligt ses ud fra de blå nuancer.



**Figur 5.6:** Forskellen mellem markedsvolatiliteten og modelvolatiliteten for alle løbetider og strikeniveauer.

Ud fra figuren kan man altså konkludere, at Displaced Heston modellen overordnet set rammer meget tæt på markededata, men at den har lidt problemer for de helt korte løbetider samt for de lange løbetider sammenholdt med enten meget høje eller meget lave strikeniveauer.

### 5.4.3 Pris for rentecappen

Modellens kalibreringsevne er indtil videre kun illustreret ved en sammenligning af de implicite volatiliteter i markedet med dem, der findes ud fra modellen, men man kan også vælge at anskue problemstillingen ved hjælp af et eksempel af mere praktisk karakter.

I eksemplet står man d. 31/3-2009 og vil låne 1.000.000 kr. i et lån, hvor rentesatsen er variabel og fastsættes hvert halve år, og hvor størrelsen på renten fastsættes på baggrund af den europæiske swap-rente. Lånet er et 30-årigt stående lån, så igennem de 30 år betales der kun renter på lånet, og til sidst betales hele lånet tilbage. Det vil altså sige, at hovedstolen er på 1 mio. kr. igennem hele løbetiden. Man ønsker desuden at sikre sig, at renten maksimalt kan blive på 3,5% igennem hele lånets løbetid. Det kan man sikre ved at købe en rentecap, der netop udbetaler det beløb, man skal betale ud over de 3,5% i rente, hvis renten er steget til et højere niveau. Rentecappen består af en caplet for hver løbetid, og prisen for rentecappen findes som summen af priserne for alle capletterne.

Som tidligere nævnt findes der ikke markededata for capletter med en løbetid på mindre end 3 år, så til prisfastsættelse af capletterne med løbetider på 0,5, 1, 1,5, 2 og 2,5 år er det valgt at benytte de samme implicite volatiliteter, som findes for en løbetid på 3 år. Hvis man udregner alle caplet-priserne for markedsvolatiliteterne og summerer dem, får man en samlet pris på 240.166 kr., for at sikre sig mod rentestigninger på over 3,5% i løbet af 30 år. Hvis man laver en tilsvarende udregning med modelvolatiliteterne,

får man en samlet pris for rentecappen på 237.482 kr., hvilket er 2.684 kr. lavere end markedsprisen. I forhold til hvor store beløb der er tale om, er prisafvigelsen altså relativt lille. Faktisk er modelprisen blot 1,12% lavere end markedsprisen for en rentecap på 3,5%.

En oversigt over markedsprisen og modelprisen for samtlige 13 strikeniveauer i et setup magen til eksemplet kan ses i tabel 5.6, hvor man helt som forventet kan se, at de største prisforskelle er ved strikeniveauerne på 1% og 10%. Her er prisforskellene på henholdsvis -5.185 kr. og 2.879 kr. svarende til en procentmæssig afvigelse på -1,02% og 9,51%. Grunden til, at den procentmæssige prisforskel er så voldsom for  $K = 10\%$ , er, at en rentecap med en cap-rente på 10% er meget billig, hvilket naturligtvis hænger sammen med, at sandsynligheden for, at renten stiger til så høje niveauer, er tilsvarende lille. Det strikeniveau, som modellen har ramt suverænt bedst, er på 7%, hvor der er en afvigelse på blot -96 kr., hvilket svarer til -0,19% af markedsprisen. At det lige præcis er for dette strikeniveau, at det bedste resultat opnås, bygger dog på tilfældigheder, og det er derfor det generelle billede igennem tabellen, som man skal bygge sine konklusioner på.

Strikeniveau (%)	Markedspris	Modelpris	Forskel (kr.)	Forskel (%)
1,00	506.537	511.722	-5.185	-1,02
1,50	432.757	434.224	-1.467	-0,34
2,00	362.701	361.728	973	0,27
2,25	329.715	327.866	1.849	0,56
2,50	298.220	295.799	2.421	0,81
3,00	240.166	237.482	2.684	1,12
3,50	190.532	187.734	2.798	1,47
4,00	148.678	147.215	1.463	0,98
4,50	116.801	116.179	622	0,53
5,00	93.169	93.516	-347	-0,37
6,00	63.866	65.501	-1.635	-2,56
7,00	49.578	49.674	-96	-0,19
10,00	30.256	27.378	2.879	9,51

**Tabel 5.6:** Priser for en 30-årig rentecap for forskellige strikeniveauer udregnet vha. markedsvolatiliteter og modelvolatiliteter.

Generelt set får man igen et billedet af, at modellen har en smule problemer i yder-niveauerne for strike-renten, men alt i alt kan man konkludere, at det i det store hele er nogle rigtigt pæne resultater, og at Displaced Heston modellen helt bestemt kan anvendes til prisfastsættelse af denne rentecap.

## 5.5 Opsummering og udvidelsesmuligheder

Kapitlet startede med at skabe det teoretiske fundament til at kunne prisfastsætte rente-derivater i en model med stokastisk volatilitet, hvor Heston modellen blev omformuleret, så processen for det underliggende aktiv blev en martingal, og hvor Displaced Heston modellen kort blev genopfrisket.

Herefter blev det generelle kalibreringssetup kort introduceret, og der blev bl.a. argumenteret for, at man ikke kan estimere parametrene i de to modeller på baggrund af tidsserier, men at man i stedet skal prøve at estimere dem til markededata. Den prak-



tisk anvendte kalibreringsmetode blev herefter diskuteret, og det kan kort nævnes, at modellerne er implementeret i MATLAB.

Da det teoretiske fundament var helt på plads, blev de to modellers kalibreringsevner testet på fire udvalgte capletter. Først blev opfyldelsen, af Feller betingelsen, der sikrede, at variansen altid er strengt større end 0, testet. Her var konklusionen helt klart, at den betingelse er alt for streng i forhold til den praktiske kalibrering. Det er dog heldigvis ikke det store problem, da tilstanden 0 for variansen ikke er en absorberende tilstand, men derimod en stærkt reflekterende tilstand. Efterfølgende blev først Heston modellens og derefter Displaced Heston modellens kalibreringsevne testet og sammenlignet, og igen var konklusionen helt klar. Displaced Heston modellen var markant bedre til at beskrive det i kapitlet anvendte datasæt.

Da det var Displaced Heston modellen, der bedst beskrev markededata, blev den anvendt til casen sidst i kapitlet, hvor en 30-årig rentecap blev prisfastsat. Denne prisfastsættelse viste, at modellen har lidt problemer ved de korte og lange løbetider for capletterne, men at den overordnet set formår at give en god beskrivelse af markededata. Problemet med for lave priser for de korte løbetider kan skyldes, at sandsynligheden for, at der på kort sigt sker store forskydninger i processen for det underliggende aktiv, er meget lille. Dette problem kan afhjælpes ved at tillade spring (jumps) i processen for det underliggende aktiv, så der pludselig kan ske store ændringer. Spring i Heston modellen indføres af Bates [1996] og kan på tilsvarende vis inkluderes i Displaced Heston modellen.

Det største problem er nok kompleksiteten i kalibreringsproblemet, hvor man kan risikere at ende med en dårlig kalibrering, hvis man har et dårligt startgæt. Derfor er det helt sikkert et område, som kræver både tid og kræfter – specielt første gang modellen skal kalibreres. Endnu et kritikpunkt, som også knytter sig til kalibreringen, er kalibreringstiden, der var på lidt over en time for det fulde datasæt. Det betyder altså, at den pris, man i en virksomhed vil kunne stille over for en kunde, er udregnet på baggrund af data og informationer, der måske allerede er forældede. I en virksomhed vil man dog typisk have nogle servere med væsentligt større regnekapacitet end den computer, der er anvendt til udregningerne i dette kapitel, og det kan være med til at afhjælpe problemet. Derudover findes der forskellige approksimationsformler og teknikker, som kan speede kalibreringen meget op. Kilin [2007] anvender bl.a. en direkte integrationsmetode, hvor kalibreringstiden for Heston modellen reduceres fra 466 sekunder til blot 15 sekunder. Det er altså omkring 31 gange hurtigere, så hvis en tilsvarende teknik anvendes på kalibreringen af det fulde datasæt i dette kapitel, ville man kunne få kalibreringstiden ned på under 2 minutter.

Alt i alt kan man konkludere, at Displaced Heston modellen generelt set er god til at beskrive datasættet i kapitlet, men at den har lidt problemer med de helt korte løbetider samt i yderpunkterne af strikeniveauerne for de lange løbetider. Her vil inkludering af spring i processen for det underliggende aktiv måske kunne afhjælpe nogle af problemerne. Hvis man skal anvende modellen i praksis, bliver man dog nødt til at gøre noget mere ud af kalibreringsmetoden, da det ellers tager alt for lang tid at kalibrere modellen til markededata.



# Kapitel 6

## Simulering af Heston modellen

Den lukkede formel, der blev udledt i kapitel 3, er rigtig god til at prisfastsætte europæiske plain vanilla optioner, men til tider kunne man ønske at prisfastsætte nogle mere avancerede strukturer, som det ikke er muligt at udlede lukkede formelløsninger til. Til at prisfastsætte sådanne strukturer benytter man sig typisk af Monte Carlo simulering, og formålet med dette kapitel er at give en introduktion til, hvordan man benytter Heston modellen i et sådant setup.

Kapitlet indledes med en kort beskrivelse af, hvordan Monte Carlo simulering virker helt generelt, og herefter diskuteres det, hvordan man i Heston modellen kan simulere processerne for det underliggende aktiv og for variansen. Til sidst illustreres simuleringsteknikkernes anvendelse i en case, hvor formålet er at prisfastsætte en struktureret aktieobligation.

### 6.1 Monte Carlo simulering

I dette afsnit introduceres nogle af de generelle principper, der er gældende for Monte Carlo simulering. De generelle principper skal danne grundlaget for, at et Monte Carlo setup til prisfastsættelse i Heston modellen kan introduceres senere i kapitlet.

#### 6.1.1 Generelt om Monte Carlo

I hovedtræk går Monte Carlo simulering ud på, at man simulerer slutværdien af en proces tilpas mange gange og udregner prisen for optionen som det tilbagediskonterede gennemsnit af payoff'et på udløbstidspunktet. Hvis man vil prisfastsætte en europæisk call-option ved hjælp af Monte Carlo simulering, og man definerer slutværdien af processen som  $S_T$  og  $N$  som antallet af simuleringer, kan prisen for call-optionen findes som

$$C = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \max(S_T^j - K, 0) \quad (6.1)$$

hvor  $K$  er strikekursen,  $r$  er den risikofrie rente, og  $\tau$  er tid til udløb. Den simulerede værdi af  $S_T$  kan i et Black-Scholes setup, hvor det underliggende aktiv følger en geometrisk Brownsk bevægelse, udregnes direkte ved at benytte ligning 2.10.

Der er ikke nogen umiddelbar grund til at benytte Monte Carlo simulering til at prisfastsætte europæiske optioner, da man har en lukket formel, både i et almindeligt Black-Scholes setup og i det mere avancerede setup fra Heston modellen. Det faktum,

at man har en lukket formel, gør dog, at man kan benytte de europæiske optioner til at teste sine simuleringmetoder ved at sammenligne den simulerede optionspris med den analytiske optionspris.

Der findes mange andre typer optioner, hvor det ikke er muligt at udlede en lukket formel, og hvor Monte Carlo metoden derfor bestemt kommer til sin ret. Det kan f.eks. være asiatiske optioner, hvor payoff'et afhænger af kursens gennemsnit. Payoff'et for hver simulering i en asiatisk option, der er inddelt i  $M$  diskrete tidsskridt, kan f.eks. være defineret som  $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i - K$ . Her er det altså ikke muligt blot at udregne slutværdien direkte, da payoff'et afhænger af kursens værdi på alle tidspunkter. Derfor er man i hver simulering nødt til at simulere prisen for en række diskrete tidspunkter over hele løbetiden (man simulerer hele stien). Når det er tilfældet, siges problemet at være stiafhængigt.

Hvis problemet er stiafhængigt, skal man altså både tage stilling til, hvor mange simuleringer man vil foretage ( $N$ ), og hvor mange diskrete inddelinger man vil benytte for hver sti ( $M$ ). Det valgte antal stier og antallet af diskrete inddelinger har stor betydning for metodens evne til at ramme tæt på den korrekte pris (den analytiske pris for europæiske optioner). Senere i kapitlet vil denne betydning blive undersøgt nærmere i setupet fra Heston modellen.

### 6.1.2 Praktisk implementering

Den vigtigste del i forbindelse med at simulere processerne er en metode til at tilføje stokastikken vha. Wienerprocesserne. Husk fra afsnit 2.1.2, at tilvæksten i Wienerprocessen over en tidsperiode  $\Delta$  (f.eks.  $\Delta = t - s$  for  $s < t$ ) er normalfordelt med middelværdi 0 og varians  $\Delta$ . Det kan også skrives som  $\Delta W \sim N(0, \Delta) = \sqrt{\Delta}N(0, 1) = \sqrt{\Delta}Z$ , hvor  $Z \sim N(0, 1)$ .

For at foretage simuleringen i praksis skal man altså have en metode til at udtrække et tilfældigt standardnormalfordelt tal. Sådant en metode er standard i stort set alle matematiske programmeringssprog inkl. MATLAB. I MATLAB kan man trække tilfældige standardnormalfordelte tal ved at kalde funktionen *randn*.

Når man udfører en Monte Carlo simulering, vil problemet have en varians, der afhænger af antallet af tilfældige stier ( $N$ ). Denne varians kan man reducere vha. forskellige variansreducerende teknikker. Den variansreducerende teknik, der er lettest at implementere, er ifølge Sønderby [2003, p. 66] teknikken, hvor man benytter sig af *antitetiske* stier. Man benytter antitetiske stier ved, for hver sti, både at udregne stiens payoff og den „modsatte“ stis payoff. Den „modsatte“ sti er den sti, man får ved at benytte de samme tilfældige tal med modsat fortegn. Ved at benytte antitetiske stier skal man altså kun generere halvt så mange tilfældige tal, og ifølge Sønderby [2003, p. 67] sikrer man samtidig en mindre varians i Monte Carlo simuleringen. Antitetiske stier bliver derfor brugt til alle simuleringerne igennem kapitlet. Der findes også andre variansreducerende teknikker, men de vil ikke blive anvendt eller diskuteret nærmere i denne afhandling.

De helt generelle principper, der skal til for at udføre en Monte Carlo simulering, er nu præsenteret og klar til at blive brugt i forbindelse med simulering af Heston modellen.

## 6.2 Simulering af processerne i Heston modellen

De to processer, der skal simuleres i Heston modellen, er stiafhængige, da processen for det underliggende aktiv afhænger af den stokastiske værdi af variansen på alle tidspunkter. Derfor er man nødt til at simulere hele stien for begge processer i hver eneste simulering

i Monte Carlo setupet. Dette afsnit har til formål at illustrere, hvordan man kan simulere de to processer og teste præcisionen, alt efter hvor mange tidsskridt og simuleringer der anvendes. Afsnittet indledes med en kort genopfriskning af de to processer i Heston modellen, hvor de defineres i deres diskrete form. Herefter introduceres en af de simpleste simuleringemetoder kendt som et Euler skema, hvis simuleringsevner efterfølgende testes med henblik på at finde ud af, hvor små tidsskridtene skal være i hver simulering, og hvor mange simuleringer der skal anvendes i alt til at komme tilpas tæt på den analytiske pris, uden at det bliver for beregningstungt. Til sidst i afsnittet diskuteres kort nogle andre simuleringemetoder, som man kan anvende i forbindelse med Heston modellen.

### 6.2.1 Heston modellen i diskret form

For at forhindre arbitragemuligheder ønsker man at simulere processerne, der skal bruges til Monte Carlo prisfastsættelsen under det risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$ . De to  $\mathbb{Q}$ -processer i Heston modellen er defineret i (3.1), og de kan i deres diskrete form skrives som

$$\begin{aligned}\Delta\hat{S}(t) &= r\hat{S}(t)\Delta t + \sqrt{\hat{v}(t)}\hat{S}(t)\Delta W_S \\ \Delta\hat{v}(t) &= \kappa(\theta - \hat{v}(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\hat{v}(t)}\Delta W_v \\ \langle\Delta W_S, \Delta W_v\rangle &= \rho\end{aligned}\tag{6.2}$$

hvor  $\hat{\cdot}$  angiver, at det er de diskrete approksimationer til de kontinuerte processer.

Da det underliggende aktiv følger en GBM, kan det, ligesom det var tilfældet i udledningen af den lukkede formel, bedst betale sig at arbejde med logaritmen til aktivet. Hvis man sætter  $\hat{x}(t) = \ln\hat{S}(t)$ , kan man ved at benytte Itô's lemma finde en ny proces for  $\hat{x}(t)$ , der i kontinuert form var angivet i (3.6), og som i diskret form kan skrives som

$$\Delta\hat{x}(t) = \left(r - \frac{1}{2}\hat{v}(t)\right)\Delta t + \sqrt{\hat{v}(t)}\Delta W_x\tag{6.3}$$

hvor  $W_x = W_S$ . For de to Wienerprocesser, der indgår i processerne, gælder der, som nævnt i forrige afsnit, at  $\Delta W_x \sim \sqrt{\Delta}Z_x$  og  $\Delta W_v \sim \sqrt{\Delta}Z_v$ , hvor  $Z_x$  og  $Z_v$  er to tilfældige standardnormalfordelte tal.

For at indregne den indbyrdes korrelation imellem de tilfældige standardnormalfordelte tal skal man benytte sig af en Cholesky faktorisering. Når man kun har to processer, der er indbyrdes korrelerede, som det er tilfældet i Heston modellen, beregnes korrelationen vha. Cholesky faktoriseringen som

$$\begin{aligned}Z_v &= Z_1 \\ Z_x &= \rho Z_v + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2\end{aligned}\tag{6.4}$$

hvor  $Z_1$  og  $Z_2$  er to tilfældige uafhængige tal trukket fra en standardnormalfordeling.

Hvis man har flere indbyrdes korrelerede processer, bliver Cholesky faktoriseringen straks et mere kompliceret problem, og det ligger uden for rammerne af denne afhandling at gennemgå metoden i detaljer. For en detaljeret gennemgang henvises der i stedet til Glasserman [2004, p. 72]. Hvis man benytter MATLAB til at foretage sine simuleringer, kan man nemt udregne Cholesky faktoriseringen ved blot at benytte funktionen *chol*.

## 6.2.2 Euler skema

Den simpleste og mest intuitive metode til at simulere de to processer er ved hjælp af et såkaldt Euler skema. I et Euler skema simulerer man processerne direkte, som de er opskrevet i (6.2) og (6.3), så man finder værdien på tidspunkt  $t + \Delta$  som

$$\begin{aligned}\hat{x}(t + \Delta) &= \hat{x}(t) + \left(r - \frac{1}{2}\hat{v}(t)\right) \Delta + \sqrt{\hat{v}(t)}\sqrt{\Delta}Z_x \\ \hat{v}(t + \Delta) &= \hat{v}(t) + \kappa(\theta - \hat{v}(t))\Delta + \sigma\sqrt{\hat{v}(t)}\sqrt{\Delta}Z_v\end{aligned}\quad (6.5)$$

hvor  $Z_x$  og  $Z_v$  kan findes ud fra (6.4).

Der er dog et stort problem ved udtrykkene i (6.5). Pga. diskretiseringen er der en positiv sandsynlighed for, at processen for  $\hat{v}(t)$  bliver negativ, hvilket vil gøre det umuligt at udregne  $\sqrt{\hat{v}(t)}$ , som indgår i begge processer. Ifølge Andersen [2007] findes der flere forslag til metoder, man kan benytte sig af for at løse problemet. Den løsning, der giver de mindste diskretiseringsfejl, er at indføre variabelen  $\hat{v}(t)^+ = \max(\hat{v}(t), 0)$ , så (6.5) kan omskrives som

$$\begin{aligned}\hat{x}(t + \Delta) &= \hat{x}(t) + \left(r - \frac{1}{2}\hat{v}(t)^+\right) \Delta + \sqrt{\hat{v}(t)^+}\sqrt{\Delta}Z_x \\ \hat{v}(t + \Delta) &= \hat{v}(t) + \kappa(\theta - \hat{v}(t)^+)\Delta + \sigma\sqrt{\hat{v}(t)^+}\sqrt{\Delta}Z_v\end{aligned}\quad (6.6)$$

Det kendetegnende ved denne fremstilling er, at  $\hat{v}(t)$  godt kan blive negativ, og at processen herefter bliver deterministisk med en positiv drift på  $\kappa\theta$ , indtil  $\hat{v}(t)$  igen er positiv.

## 6.2.3 Test af simuleringens metodepræcision

Før man kan begynde at benytte simuleringens metode ovenfor til at løse praktiske problemstillinger, bør man teste metodens egenskaber med hensyn til at ramme den rigtige pris. Det vil blive testet ved at variere på antallet af simuleringer og størrelsen af  $\Delta$  (målt i år), hvorved man kan finde ud af, hvor store/små de to størrelser skal være for at ramme så tæt på den analytiske pris som muligt, uden at simuleringen tager alt for lang tid.

Til test af modellens simuleringsevner er det valgt at bruge de samme værdier, som Andersen [2007, p. 24] benytter i sin case III. Den benyttede parametervektor er altså givet som  $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_t) = (1, 0.09, 1, -0.3, 0.09)$ , og de andre variable, der indgår i modellen, er sat til  $\tau = 5$ ,  $r = 0$ ,  $K = 100$  og  $S(0) = 100$ . Hvis man udregner den analytiske pris i Heston modellen, får man 21,795, og det er den pris, der sammenlignes med i resten af afsnittet.

Modellen simuleres for 49 forskellige kombinationer af antal simuleringer og størrelsen på tidsskridtene, hvor antallet af simuleringer er sat til  $N = (2^{10}, 2^{12}, 2^{14}, 2^{16}, 2^{18}, 2^{20}, 2^{22})$ , og størrelsen på tidsskridtene er sat til  $\Delta = (2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7})$ . Antallet af simuleringer varierer altså fra 1.024 til ca. 4,2 mio., mens antallet af inddelinger i hver simulering varierer fra 10 til 640 (antallet af inddelinger er givet som  $M = \frac{\tau}{\Delta}$ ).

Resultaterne af simuleringstesten kan ses i tabel 6.1 på modstående side. I tabellen kan man tydeligt se, hvordan prisafvigelsen mindskes, når man går til højre og nedad i tabellen. Til gengæld fremgår det også helt tydeligt, at beregningstiden samtidig øges med præcisionen, så der er altså to vigtige faktorer, der spiller ind, når man skal vælge antal simuleringer og størrelsen på tidsskridtene.

Det er dog ikke alle steder, hvor prisafvigelsen falder, når man går nedad eller til højre i tabellen. Det kan man f.eks. se ved  $N = 2^{14}$  og  $\Delta = 2^{-3}$ , hvor prisafvigelsen er på 0,179.

$N \backslash \Delta$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$	$2^{-6}$	$2^{-7}$
$2^{10}$	4,092 (0,03)	-2,143 (0,03)	-0,390 (0,03)	-0,610 (0,04)	-0,762 (0,05)	-0,371 (0,08)	-0,081 (0,14)
$2^{12}$	2,588 (0,10)	1,665 (0,10)	0,269 (0,12)	0,722 (0,15)	0,933 (0,21)	-1,533 (0,32)	-0,360 (0,55)
$2^{14}$	2,001 (0,38)	1,052 (0,42)	0,179 (0,46)	0,438 (0,58)	-0,232 (0,85)	0,472 (1,27)	-0,273 (2,21)
$2^{16}$	2,023 (1,51)	1,267 (1,65)	0,730 (1,92)	0,365 (2,31)	0,127 (3,26)	0,219 (5,05)	-0,109 (8,83)
$2^{18}$	2,262 (6,20)	1,274 (6,58)	0,549 (7,53)	0,250 (9,24)	0,067 (13,10)	-0,034 (20,27)	-0,043 (35,36)
$2^{20}$	2,235 (24,18)	1,040 (25,97)	0,427 (29,89)	0,316 (37,01)	0,123 (51,81)	-0,036 (80,89)	0,006 (141,38)
$2^{22}$	2,249 (98,21)	1,139 (103,72)	0,481 (119,41)	0,260 (150,96)	0,105 (207,60)	0,056 (323,01)	0,013 (569,46)

**Tabel 6.1:** Oversigt over prisfejlene, når antallet af simuleringer  $N$  og størrelsen på de diskrete tidsskridt  $\Delta$  varieres. For hvert talpar gælder, at første tal er forskellen fra den analytiske pris, og tallet i parentes er tiden i sekunder.

Her stiger den både, når  $N$  øges, og når  $\Delta$  mindskes. Det er dog ikke et tegn på, at man generelt rammer en mere præcis værdi for lige præcis den kombination af  $N$  og  $\Delta$ , men derimod en konsekvens af den tilfældighed, der også spiller ind i Monte Carlo simulering.

Hvis man studerer tallene i tabellen lidt nærmere, kan man tydeligt se, at det er en kombination af de to faktorer, der skaber en god prisfastsættelse. Det ser dog ud til, at størrelsen af  $\Delta$  har større betydning end størrelsen af  $N$ , da der er en tendens til, at prisafvigelse falder mere, når man går til højre i tabellen, end når man går ned. Helt generelt kan man se, at resultaterne bliver rigtigt gode fra  $N \geq 2^{18}$  og  $\Delta \leq 2^{-6}$ , og da beregningstiden kun er på ca. 20 sekunder, når man sætter lighedstegn ved de to værdier, og da den stiger meget voldsomt, når specielt  $N$  øges, er det valgt at benytte disse værdier til prisfastsættelsen igennem resten af kapitlet.

### 6.2.4 Andre simuleringsmetoder

Euler skemaet, som er blevet gennemgået i dette afsnit, er klart den simpleste simuleringsskema for Heston modellen. Det kan både have sine fordele og ulemper at anvende denne metode. En fordel er, at metoden er så let og intuitiv, at den er nem at implementere og forklare over for andre. Derudover formår den, som det også blev vist i tabel 6.1, rent faktisk at ramme ganske tæt på den analytiske pris, når man anvender tilstrækkeligt mange simuleringer og tilpas små tidsskridt. En ulempe er, at den simple opskrivning medfører visse diskretiseringsfejl, der bl.a. bevirker, at metoden er meget afhængig af størrelsen på tidsskridtene.

Ud over Euler skemaet findes der en del andre mere avancerede simuleringsmetoder for Heston modellen. En af disse metoder er Broadie-Kaya metoden, hvor man udnytter, at

man kender fordelingen af variansprocessen som en ikke-central  $\chi^2$ -fordeling. Det giver en fejlfri simulering af processerne, men det er til gengæld på bekostning af beregningshastigheden, hvilket gør, at metoden har sine klare begrænsninger i forhold til praktisk brug. Andersen [2007] foreslår desuden to nye metoder kendt som TG og QE metoderne, der bl.a. benytter sig af en moment-matching metode af den Gaussiske tæthed. Sammenholdt med en valgfri martingal-korrektion viser han, at disse to metoder generelt set performer bedre end den simple Euler metode specielt for høje værdier af  $\Delta$ . Han viser dog samtidig, ligesom det også er vist tidligere i dette afsnit, at Euler metoden for små værdier af  $\Delta$  giver ganske gode resultater, og da metoden er så simpel og intuitiv, er det valgt at benytte denne metode til simuleringen i dette kapitel. For en uddybning af Broadie-Kaya, TG og QE metoderne henvises til Andersen [2007].

Den valgte simuleringmetode er altså Euler skemaet, og det er i afsnittet vist, at man ved at benytte denne metode kan ramme ganske tæt på den analytiske pris for et højt  $N$  sammenholdt med et lavt  $\Delta$ . I næste afsnit vil en praktisk anvendelse af simuleringmetoden blive illustreret i en case, der har til formål at prisfastsætte en struktureret aktieobligation.

## 6.3 Case: Prisfastsættelse af struktureret aktieobligation

Formålet med denne case er at illustrere, hvordan simulering af Heston modellen kan anvendes i praksis. Afsnittet indledes med en beskrivelse af, hvordan payoff'et for den strukturerede aktieobligation er defineret, efterfulgt af en beskrivelse af de anvendte markedsdata. Afsnittet afsluttes med at Heston modellen kalibreres til markedsdata, og prisen for aktieobligationen simuleres ved hjælp af de kalibrerede parameterverdier.

### 6.3.1 Beskrivelse af payoff-funktionen

Produktet i denne case er som nævnt en aktieobligation. Den kaldes en aktieobligation, da produktets underliggende aktiv er en aktiekurv bestående af 6 aktier, og payoff-funktionen er defineret ud fra udviklingen af kursen for de seks aktier over en fastlagt periode.

Hvis man definerer den  $i$ 'te akties startværdi som  $\text{Aktie}_{\text{Initiel}}^i$  og slutværdien efter den fastsatte periode som  $\text{Aktie}_{\text{Final}}^i$ , giver aktieobligationen følgende afkast

$$\text{Afkast} = \max \left( \sum_{i=1}^6 w_i \min \left( \frac{\text{Aktie}_{\text{Final}}^i - \text{Aktie}_{\text{Initiel}}^i}{\text{Aktie}_{\text{Initiel}}^i}; 30\% \right); 0 \right) \quad (6.7)$$

hvor  $w_i = \frac{1}{6}$  er en vægt.

Sagt med ord er afkastet altså defineret som det gennemsnitlige afkast for de seks aktier, hvor hver enkelt aktie maksimalt kan bidrage til det samlede afkast med 30%, og hvor det samlede afkast ikke kan blive negativt. Payoff'et for aktieobligationen kan herefter skrives som

$$\text{Payoff} = \text{Hovedstol} (1 + \text{Afkast}) \quad (6.8)$$

hvilket betyder, at man er sikker på at få sin investering igen og højst kan miste nogle kurspoint samt muligheden for en alternativ (f.eks. en risikofri) investering.

Ovenstående afkast- og payoff-funktion kan defineres på alle mulige forskellige måder, men den definition, der er valgt her, er et eksempel på et produkt, man sagtens kunne se



i „den virkelige verden“, og det fungerer derfor rigtigt godt til at illustrere en af Heston modellens mange praktiske anvendelsesmuligheder.

### 6.3.2 Beskrivelse af markededata

Aktieobligationen bestod af seks aktier, og for at man skal have mulighed for at estimere parametrene i Heston modellen og derved benytte denne model til at prisfastsætte aktieobligationen, er det nødvendigt, at der findes et optionsmarked for aktierne. For at få mest mulig markedsinformation er det desuden bedst, hvis optionerne for de aktier, man benytter, er så likvide (der foretages mange handler med dem) som muligt. Hvis man skulle vælge nogle danske aktier, kunne man f.eks. benytte seks aktier fra OMXC20-indekset, men i denne case er det i stedet valgt at benytte seks af de største aktier fra det amerikanske teknologi-aktieindeks Nasdaq. De seks aktier, der er udvalgt, er Apple (AAPL), Cisco (CSCO), Intel (INTL), Microsoft (MSFT), Oracle (ORCL) og Qualcomm (QCOM).

Data stammer fra d. 22/5-2009 og er hentet fra Bloomberg. For alle seks aktier er det valgt kun at se på en enkelt call-option<sup>1</sup>, der udløber d. 22/1-2011, hvilket giver en tidshorisont på  $\tau = 1,67$  år. For enkelthedens skyld er det valgt at benytte den samme tidshorisont til den strukturerede aktieobligation, men det er naturligvis ikke noget krav i forhold til løsningsmetoden. For hver call-option er der 11 til 14 strikeniveauer ( $K$ ), og intervallerne for disse strikeniveauer samt aktiernes startværdi kan ses i tabel 6.2.

Aktie	$S(0)$	Nedre $K$	Øvre $K$	Antal $K$
AAPL	122,50	75,0	140,0	14
CSCO	17,90	5,0	40,0	13
INTL	15,05	2,5	45,0	14
MSFT	19,75	5,0	40,0	13
ORCL	18,65	5,0	35,0	11
QCOM	41,31	10,0	47,5	13

**Tabel 6.2:** Aktiernes startværdi og inddelingen af strikeniveauerne.

En fuld oversigt over alle strikeniveauerne og de tilhørende implicitte markedsvolatiliteter kan ses i bilag D i tabel D.5 på side 107. Som risikofri rente er det valgt at benytte US LIBOR 1W<sup>2</sup>, der d. 22/5-2009 var på  $r = 0,28188\%$ .

### 6.3.3 Kalibrering af modellen

De anvendte markededata er nu præsenteret, og Heston modellen er klar til at blive kalibreret. Kalibreringen er foretaget ud fra de samme principper, som blev gennemgået i kapitel 5. Det vil altså sige, at der ses bort fra Feller betingelsen, og at hver enkelt prisafvigelse vægter med 1 i minimeringsproblemet.

<sup>1</sup>Hvis man skal anvende metoden i praksis, er det bedre at kalibrere modellen ud fra nogle flere løbetider, da man derved får en større markedsinformation. For at holde det så simpelt som muligt i dette eksempel er det dog valgt blot at se på en enkelt løbetid for hver aktie.

<sup>2</sup>I praksis bør man nok anvende en rentestrukturmodel til at beregne den risikofri rente, men igen er det valgt at holde det så simpelt som muligt i dette eksempel.

Resultatet af kalibreringen kan ses i tabel 6.3, hvor man for alle seks aktier kan se, at den samlede kvadrerede afvigelse er meget lav. Det er dog ikke muligt direkte at sammenligne de seks tal, da de er et resultat af vidt forskellige optionspriser, og endda også et forskelligt antal strikeniveauer. Noget kunne dog tyde på, at alle resultaterne er gode, men for at få et klarere billede af kalibreringen kan det som altid bedre betale sig at se på det grafiske billede af volatilitetssmilene.

Aktie	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_t$	$S(\Omega)$
AAPL	7,21	0,234	3,50	-0,53	0,16	0,000267
CCSO	2,35	0,007	0,98	-0,68	0,76	0,000012
INTL	7,88	0,128	3,98	-0,50	0,89	0,001070
MSFT	0,12	0,891	0,41	-0,57	0,09	0,000269
ORCL	4,67	0,062	2,02	-0,57	0,99	0,000879
QCOM	1,00	0,002	0,80	-0,56	0,42	0,000403

**Tabel 6.3:** Resultatet af kalibreringen for de seks aktier.

Et grafisk billede af kalibreringen kan ses i figur 6.1 på næste side, hvor påstanden ovenfor tydeligvis bliver bekræftet. Når man ser på de seks grafer, bemærkes det straks, at smilene i de seks figurer ikke ligner smil, men mest af alt minder om såkaldte skews. Det er dog ikke uventet, da det ifølge Hull [2006, p. 380] er den sammenhæng, der normalt er imellem den implicite volatilitet og strikeniveauet for aktieoptioner.

For Apple og Cisco er kalibreringen så tæt på perfekt, som den kan blive. For de to aktier kan man næsten ikke se den blå markedskurve under den røde modelkurve. Det samme gør sig gældende for Qualcomm, der også er næsten helt perfekt – kun med en lille afvigelse for de helt lave strikeniveauer. For både Intel, Microsoft og Oracle har modellen lidt problemer med at ramme de meget høje implicite markedsvolatiliteter for det laveste strikeniveau, og igen lidt problemer for det højeste strikeniveau, hvor modellen for Microsoft og Intel rammer lidt under markedet, mens den rammer lidt over for Oracle.

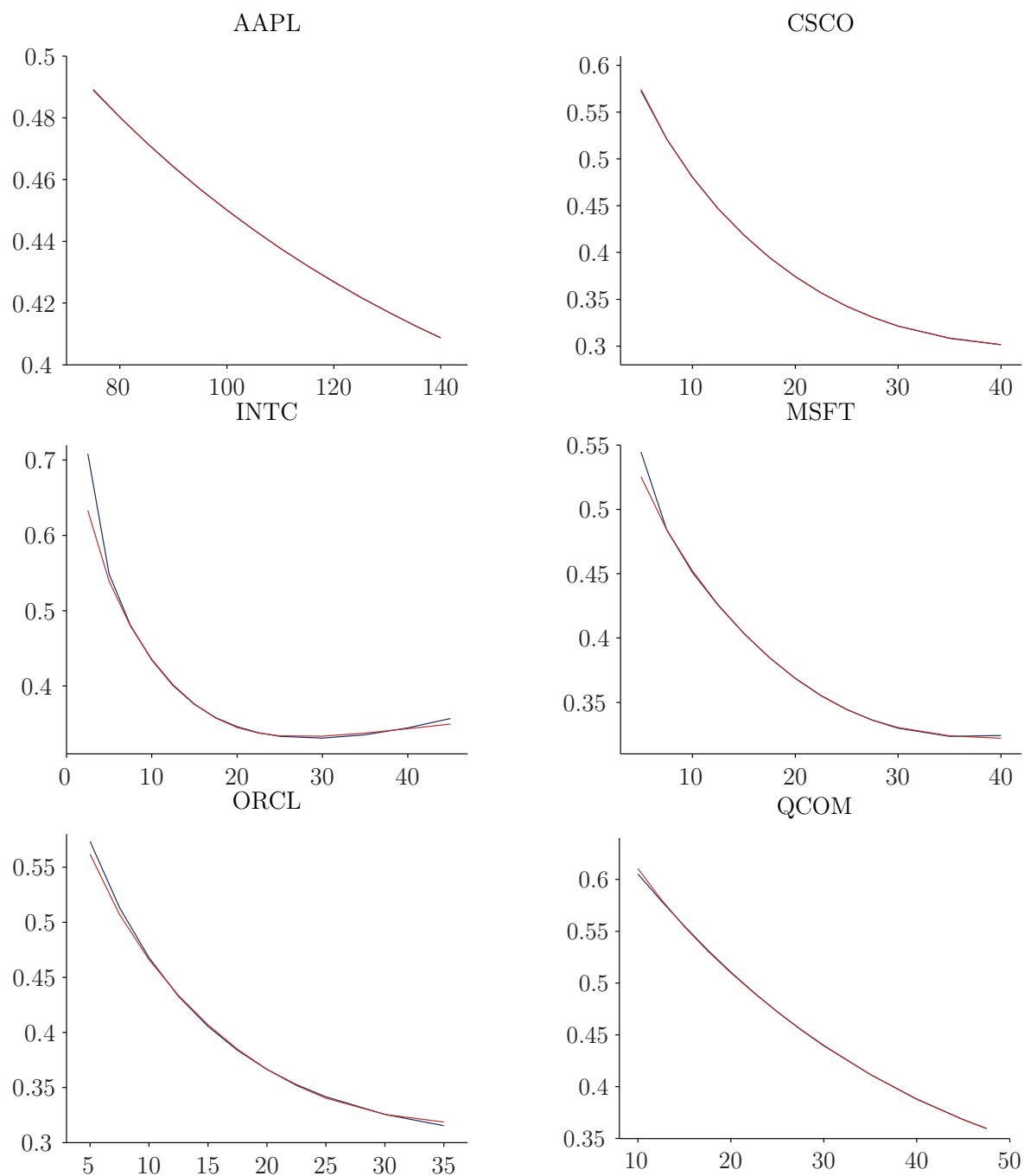
Generelt kan man konkludere, at kalibreringen for alle seks aktier er blevet rigtig god, og at Heston modellen er god til at modellere de effekter, der er i aktiemarkedet for disse seks aktier. Da modellen formår at efterligne markedet så godt, er den derfor også brugbar til simulering af aktieobligationen, som jo er formålet med hele denne case.

### 6.3.4 Simulering af aktieobligationen

Parameterværdierne for de seks aktier er nu fundet, og det eneste, der mangler, før produktet kan prisfastsættes, er at få indregnet den indbyrdes korrelation imellem de seks aktier. Korrelationsmatricen er udregnet ud fra aktiernes tidsserier og bliver

$$\text{Corr} = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,877 & 0,926 & 0,782 & 0,934 & 0,785 \\ 0,877 & 1,000 & 0,961 & 0,942 & 0,890 & 0,688 \\ 0,926 & 0,961 & 1,000 & 0,897 & 0,922 & 0,782 \\ 0,782 & 0,942 & 0,897 & 1,000 & 0,805 & 0,539 \\ 0,934 & 0,890 & 0,922 & 0,805 & 1,000 & 0,813 \\ 0,785 & 0,688 & 0,782 & 0,539 & 0,813 & 1,000 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

hvor rækkefølgen for rækkerne og søjlerne er den samme som i tabel 6.2 og 6.3.



**Figur 6.1:** Volatilitetssmil for de seks aktier. For alle figurerne gælder følgende: Den blå kurve er markedssmilet, og den røde kurve er modelsmilet.

Det ses, at de seks aktier er meget kraftigt indbyrdes korrelerede, med den højeste korrelation imellem Cisco og Intel på 0,961 og den laveste imellem Microsoft og Qualcomm på 0,539. Da alle aktierne stammer fra det samme aktieindeks og er i den samme branche (teknologibranchen), er den høje indbyrdes korrelation helt, som man kunne forvente.

Grundlaget for at prisfastsætte den strukturerede aktieobligation er nu på plads, og udregningerne mangler blot at blive udført. De bliver foretaget ud fra de kriterier, der er udledt tidligere i kapitlet, hvor antallet af simuleringer er på  $N = 262.144$ , og størrelsen på tidsskridtene er  $\Delta = \frac{1}{64}$  år. Den indbyrdes korrelation imellem de seks aktier er indregnet i Wienerprocesserne vha. Cholesky faktorisering, og gennemsnittet af det samlede afkast beregnet ud fra (6.7) er på 4,92%. Kildekoden til beregningerne, der er foretaget i MATLAB, kan ses i bilag C.5. Det forventede afkast for aktieobligationen over de 1,67 år er altså væsentligt større end afkastet ved en risikofri investering, men det er naturligvis også forventeligt, da der er en risiko for slet ikke at få nogen gevinst (rent faktisk risikerer man at realisere et tab i form af nogle kurspoint) ved at investere i aktieobligationen.

Det er dog ikke gratis at få muligheden for at få en forventet gevinst på 4,92% og en maksimal gevinst på op til 30%. Prisen for at købe aktieobligationen kan udregnes ud fra (6.8) som

$$\begin{aligned} \text{Kurs} &= e^{-rT} 100(1 + \text{Afkast}) \\ &= e^{-0,0028 \cdot 1,67} 100(1 + 0,0492) \\ &= 104,4310 \end{aligned}$$

Med den anvendte risikofrie rente og de markedsforventninger, der ligger i call-optionerne, giver det altså en kurs på 104,43 for aktieobligationen i casen.

## 6.4 Opsummering og udvidelsesmuligheder

I kapitlet blev det vist, hvordan man kan anvende Heston modellen i et simuleringssætup, hvor man ud fra parameterværdierne i Heston modellen simulerer variansprocessen og processen for det underliggende aktiv vha. et Euler skema. Det blev vist, at den simulerede optionsværdi ligger tæt på den analytiske pris, når antallet af simuleringer sættes højt nok, og størrelsen af hvert tidsskridt i simuleringerne er tilpas lav.

Simuleringsmetodens anvendelse blev illustreret i et eksempel, hvor en struktureret aktieobligation blev prisfastsat. Man kan dog anvende dette setup til at prisfastsætte alle mulige produkter fra forskellige markeder, hvor de underliggende aktiver f.eks. kan være råvarer, valuta-kryds eller en blanding af flere forskellige ting. Strukturen kan også være defineret helt anderledes end eksemplet i dette kapitel. Det er stort set kun fantasien, der sætter grænser.

Ved hjælp af Euler simuleringsmetoden, der er anvendt i dette kapitel, kan man altså udnytte Heston modellen og dens evne til at beskrive sammenhængene i optionsmarkederne til at prisfastsætte eksotiske produkter med avancerede strukturer.

Man ville også kunne udvide metoden ved f.eks. at benytte en af de mere forfinede simuleringsmetoder, der er nævnt i afsnit 6.2.4, hvor specielt TG og QE metoderne fra Andersen [2007] virker ganske interessante.

En anden udvidelsesmulighed er at udnytte de affine modeller fra Duffie, Pan & Singleton [2000] til at opbygge et mere avanceret setup, som kan prisfastsætte aktieobligationen fra dette kapitel og andre lignende produkter.

# Kapitel 7

## Konklusion

Hovedtemaet i denne kandidatafhandling har været prisfastsættelse af optioner, hvor standardmodellen i finansieringsteorien er Black-Scholes modellen. Modellen er baseret på nogle restriktive antagelser, hvor volatiliteten for det underliggende aktiv er konstant, og fordelingen for udløbskursen er log-normalfordelt. Empirien viser, at disse antagelser er forkerte, hvilket bl.a. ses i de såkaldte volatilitetssmil, som dannes af de implicite volatiliteter for forskellige strikeniveauer. En model, der gør op med den konstante volatilitet og dermed sikrer, at udløbskursen ikke er log-normalfordelt, er Heston modellen, som er udledt og analyseret i denne afhandling.

Før Heston modellen kan udledes, er der dog en del af den generelle kontinuerte finansieringsteori, der skal på plads, og det var det, der var formålet med *kapitel 2*. Kapitlet blev indledt med et afsnit om stokastiske processer, hvor egenskaberne ved de såkaldte Itô processer, som er kendetegnet ved at have et deterministisk driftsled og et stokastisk led, blev gennemgået. For disse processer gælder et vigtigt resultat kendt som Itô's lemma, der kan bruges til at finde processen for en funktion, der kun afhænger af en Itô proces og tiden. To vigtige Itô processer, som benyttes i Heston modellen, er en geometrisk Brownsk bevægelse og CIR-processen. De to processer benyttes til at modellere henholdsvis udviklingen i det underliggende aktiv og variansen, og de har hver nogle egenskaber, der gør dem velegnede til deres formål. GBM'en vokser eksponentielt og er desuden log-normalfordelt, hvilket gør, at den ikke kan blive negativ, mens CIR-processen har en mean-reversion tendens, hvor den søger hen mod et langsigtet niveau for variansen.

Med afsæt i et ingen-arbitrage argument blev den fundamentale partielle differential-ligning, som er et af de vigtigste resultater i kontinuert finansieringsteori, og som skal være opfyldt for alle tænkelige prislefunktioner, herefter udledt. Ud fra den partielle differential-ligning og ved at anvende teknikken omkring skift af numeraire blev det herefter vist, at prisen på et afledt aktiv under det risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$  er den tilbagediskonterede værdi af den forventede fremtidige værdi. Dette resultat blev benyttet til at præsentere Black-Scholes formel til prisfastsættelse af europæiske call-optioner.

En anden optionstype, der har været i fokus igennem denne afhandling, er rentederivater. Igennem afhandlingen har fokus været på rentederivatet rentecaps, der er en finansiel kontrakt, hvor man sætter en grænse for, hvor høj renten maksimalt kan blive for et variabelt forrentet lån med en rente, der fastsættes på nogle på forhånd fastsatte tidspunkter. Standardmodellen til at prisfastsætte denne optionstype er Black 76 modellen, der i store træk minder om Black-Scholes modellen, men hvor en af de grundlæggende forskelle er, at det underliggende aktiv er defineret som en martingal. Denne model blev præsenteret i det sidste afsnit i *kapitel 2*.

Det teoretiske fundament, der kom på plads i kapitel 2, giver grundlaget til at arbejde videre med den model, som denne afhandling egentlig fokuserer på. Heston modellen blev præsenteret i *kapitel 3* efter en kort opsummering af, hvilke andre stokastiske volatilitetsmodeller der har været foreslået, før Heston modellen kom på banen i 1993. Udledningen af Heston modellen tager afsæt i en 2. ordens partiel differentiaalligning, som fremkommer ud fra de to processer, der indgår i modellen, og som findes vha. det flerdimensionale Itô's lemma. Der blev desuden foretaget et skift i tilstandsvariablen for det underliggende aktiv, hvor man satte  $x(t) = \ln S(t)$  for at sikre, at PDE'en er lineær i tilstandsvariablene. Ved at opstille en løsningsformel svarende til den, der kendes fra Black-Scholes formel, hvor den eneste forskel ligger i de to sandsynligheder  $P_1$  og  $P_2$  for at optionen ender ITM, kan man udlede to nye PDE'er, som de to sandsynligheder skal opfylde. Man kan ikke direkte udlede en lukket formel for sandsynlighederne, men man kan i stedet benytte et vigtigt resultat fra sandsynlighedsregning, der siger, at kendskab til en stokastisk variabels karakteristiske funktion er ækvivalent med kendskab til den stokastiske variabels fordelingsfunktion. De to sandsynligheds karakteristiske funktioner  $f_1$  og  $f_2$  skal opfylde den samme PDE som sandsynlighederne, og når man har fundet en løsningsform for de karakteristiske funktioner, kan man finde sandsynlighederne ved at benytte en invers Fourier transformation. Ved at følge den beskrevne løsningsteknik var en lukket formel for optionsprisen i Heston modellen hermed udledt. Udledningen af løsningen til PDE'erne for de karakteristiske funktioner blev gennemgået i detaljer i bilag B, hvilket gør, at man nemt kan anvende løsningsteknikken til at udlede lukkede formler i andre modeller.

En anden model var netop, hvad der blev introduceret efterfølgende, hvor en lignende løsningsformel for Displaced Heston modellen blev udledt. Displaced Heston modellen minder meget om Heston modellen, men med den vigtige forskel at processen for det underliggende aktiv er defineret anderledes. Det gør, at processen for det underliggende aktiv ikke længere er log-normalfordelt, men derimod følger en blanding af en normalfordeling og en log-normalfordeling. Den ændrede fordeling betyder bl.a., at man kan sætte korrelationen imellem de to processer til 0, hvilket giver modellen nogle lidt andre egenskaber, der gør, at den er specielt anvendelig på markedet for rentederivater.

For at illustrere forskellen imellem Heston modellen og Black-Scholes modellen blev tæthedsfunktionerne i de to modeller sammenlignet i *kapitel 4*. Den primære forskel i tæthedsfunktionerne er, at Heston modellen kan generere både skævhed og kurtosis – to effekter som man typisk ser i empiriske fordelinger, og som ikke kan ændres i Black-Scholes modellen. Skævheden genereres, når korrelationsparameteren  $\rho \neq 0$ , og det vises, at en positiv korrelation giver en højreskæv tæthed, mens en negativ korrelation giver en venstreskæv tæthed. Denne effekt har en direkte påvirkning på forskellen imellem priserne i Heston modellen og Black-Scholes modellen. Når korrelationen er positiv, tillægger Heston modellen OTM-optioner en større værdi og ITM-optioner en mindre værdi, mens det modsatte gør sig gældende for en negativ korrelation. I Displaced Heston modellen er korrelationsparameteren sat til 0, men denne model kan alligevel generere skævhed ved at justere på displaced-parameteren  $m$ . Et  $m < 1$  giver samme effekt som  $\rho < 0$ , mens  $m > 1$  svarer til  $\rho > 0$ . Den anden vigtige effekt er kurtosis, som i Heston modellen genereres af volatilitetens volatilitet  $\sigma$ . Jo højere denne værdi er, jo større er kurtosis, hvilket medfører, at tætheden får federe haler. Denne effekt påvirker ligeledes prisforskellene imellem de to modeller. En høj kurtosis giver en højere optionspris for ITM- og OTM-optioner, mens den giver en lavere pris for ATM-optioner.

En anden vigtig effekt, der blev studeret i kapitel 4, var modellernes evne til at generere volatilitetssmil og de forskellige modelparametres påvirkning på smilene. Korrelationspa-

parameteren  $\rho$  danner et skew, hvor en negativ korrelation giver en høj implicit volatilitet for ITM-optioner og en lav for OTM-optioner, mens det modsatte gør sig gældende for en positiv korrelation. Når vol-af-vol parameteren  $\sigma$  øges, giver det en højere implicit volatilitet for ITM- og OTM-optioner og en lavere for ATM-optioner. Det er nogenlunde samme effekt, man får, når trækraften  $\kappa$  mod det langsigtede niveau for variansen mindskes. Startvariansen  $v_t$  og det langsigtede variansniveau  $\theta$  påvirker begge niveauet for volatilitetssmilet, hvor tiden til udløb er en vigtig faktor i forhold til, hvilken en af de to effekter der er mest markant. Når tiden til udløb øges, øges langsigtsniveauets påvirkning på volatilitetssmilet, mens den initiale varians får en mindre effekt. Til slut blev det vist, at der sker en generel udfladning af volatilitetssmilet, når tiden til udløb øges.

Det teoretiske grundlag for at forstå de forskellige dele af de stokastiske volatilitetsmodeller var herefter på plads, og i *kapitel 5* blev en af deres mange anvendelsesmuligheder studeret nærmere. Hovedtemaet i kapitlet var rentecaps, og det indledtes derfor med en omformulering af Heston modellen, så den passer ind i dette setup. Modellen blev derfor omformuleret, så det underliggende aktiv er en martingal, og en lukket prisformel blev udledt ved at benytte Hestons teknik. I Displaced Heston modellen er det underliggende aktiv på forhånd defineret som en martingal, så her var det ikke nødvendigt at lave en omskrivning af modellen.

Da formålet med kapitlet var en praktisk anvendelse, blev kalibreringsmetoden til at estimere modelparametrene efterfølgende diskuteret. Der blev argumenteret for, at man skal estimere parametrene ud fra handlede optionspriser ved at minimere den samlede kvadrerede prisafvigelse imellem markedspriser og modelpriser. Kalibreringsmetoden blev testet i et eksempel med fire udvalgte capletter med forskellig løbetid, hvor den første undersøgelse havde til formål at belyse, om Feller betingelsen, der sikrer, at variansen altid forbliver strengt større end 0, kan opfyldes i praksis. Her fremgik det helt klart, at det er en alt for streng restriktion at pålægge parametrene, da man derved opnår markant dårligere kalibreringsresultater for alle fire løbetider. De fire capletter blev herefter benyttet i endnu en kalibreringstest, hvor de to modeller blev kalibreret til alle fire løbetider, og kalibreringsresultaterne blev sammenlignet. Her kunne man helt tydeligt konkludere, at Displaced Heston modellen er markant bedre end Heston modellen for dette specifikke datasæt. Testen, der er foretaget i denne afhandling, er dog ikke omfattende nok til, at man kan konkludere, at dette altid er gældende for rentecaps.

For at skabe et klarere overblik over Displaced Heston modellens kalibreringsevner blev den til sidst i kapitlet brugt til at prifsætte en 30-årig rentecap, med en variabel rente, der fastsættes hvert halve år. Det anvendte datasæt bestod af markedsvolatiliteter for 13 forskellige strikeniveauer og 56 forskellige løbetider, så det giver i alt 728 capletterpriser, som modellen skal ramme. For langt de fleste strikeniveauer og løbetider ramte modellen meget tæt på markedsvolatiliteterne. Det viste sig dog, at modellen havde lidt problemer for de helt korte løbetider, hvor markedsvolatiliteten var markant højere end modelvolatiliteten for alle strikeniveauerne. Derudover havde modellen også lidt problemer for de laveste og højeste strikeniveauer sammenholdt med meget lange løbetider. For de højeste strikeniveauer var volatiliteten i modellen for lav, mens den var for høj for de laveste strikeniveauer. Alt i alt kan man konkludere, at Displaced Heston modellen er en god model at anvende, hvis man vil beskrive effekterne i markedet for denne type data.

Heston modellen har dog mange andre anvendelsesmuligheder, og en af disse blev introduceret i *kapitel 6*, hvor modellens simuleringsegenskaber i et Monte Carlo setup blev diskuteret. Modellen blev simuleret vha. et simpelt Euler skema, hvor man sikrer sig mod negativ varians fra diskretiseringsfejl i CIR-processen ved blot at indsætte 0 i stedet for

variansen, når denne er negativ. Euler skemaets prisningsegenskaber blev testet på en europæisk call-option, hvor den simulerede pris blev sammenlignet med Heston modellens analytiske pris. Det blev vist, at Euler skemaet formår at ramme tæt på den analytiske pris, når de diskrete tidsskridt bliver små nok, og der foretages et højt antal simuleringer. Man er dog nødt til at lave en afvejning af, hvor præcis en pris man er villig til at acceptere, da en justering i de to parametre har en stor effekt på beregningstiden. Herefter var simuleringssætupet på plads, og det åbner op for et væld af praktiske anvendelsesmuligheder.

En af anvendelsesmulighederne blev illustreret i en case, hvor formålet var at prisfastsætte en struktureret obligation med en aktiekurv bestående af seks aktier som underliggende aktiv vha. Heston modellen. For at prisfastsætte obligationen blev Heston modellen kalibreret til markedsdata for de seks aktier, og det fremgik tydeligt, at Heston modellen har rigtig gode kalibreringsevner for denne datatype. De estimerede parameterverdier blev anvendt til at simulere udviklingen i de seks aktier, og det gennemsnitlige afkast kunne herefter udregnes vha. Monte Carlo simulering og benyttes til at bestemme prisen for obligationen.

Kildekoden til alle de vigtige beregninger, der er udført i MATLAB, kan findes i bilag C, hvilket gør det nemt for andre at implementere de to særdeles anvendelige modeller, som er beskrevet igennem denne afhandling.



# Bilag A

## Notationsoversigt

### Små bogstaver

$a$	$\kappa\theta$
$a(X_t, t)$	drift i Itô proces
$b_1$	$\kappa - \rho\sigma$ ( $\kappa$ i Displaced Heston modellen)
$b_2$	$\kappa$
$b(X_t, t)$	volatilitet i Itô proces
$d$	indgår i løsningen til $C(\tau; \phi)$ og $D(\tau; \phi)$
$dt$	et infinitesimalt tidsskridt
$f$	vilkårlig prisfunktion
$f_j$	karakteristisk funktion
$g$	indgår i løsningen til $C(\tau; \phi)$ og $D(\tau; \phi)$
$i$	det imaginære tal ( $i = \sqrt{-1}$ )
$m$	displaced parameter, der indgår i Displaced Heston modellen
$r$	risikofri rente
$t$	tidspunkt
$u_1$	$\frac{1}{2}$
$u_2$	$-\frac{1}{2}$
$\bar{v}$	den gennemsnitlige varians
$w_i$	vægt
$x$	logaritmen til det underliggende aktiv
$z$	$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$

## Store bogstaver

$A$	muligt udfald i en stokastisk proces
$B_t$	proces for risikofri obligation
$C(S_t, t)$	prisen for en call-option på tidspunkt $t$
$C(t, T_{k-1}, T_k)$	prisen for en caplet på tidspunkt $t$ , der løber fra tid $T_{k-1}$ til $T_k$
$C(\tau; \phi)$	indgår i den karakteristiske funktion
$D(\tau; \phi)$	indgår i den karakteristiske funktion
$\mathbb{E}$	forventet værdi
$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$	forventet værdi under sandsynligheds målet $\mathbb{Q}$
$\mathbb{E}^{\mathbb{T}_k}$	forventet værdi under sandsynligheds målet $\mathbb{T}_k$
$F_k(t)$	forward-renten, der fastsættes på tidspunkt $t$ og løber fra tid $T_{k-1}$ til $T_k$
$\mathcal{F}_t$	filtrering, der indeholder al information om en proces frem til tid $t$
$K$	aftalekurs (strikeniveau) for en option
$K'$	transformation af aftalekursen ( $K' = mK + (1 - m)L$ )
$L$	parameter, der indgår i Displaced Heston modellen
$N(\mu, \sigma^2)$	normalfordeling med middelværdi $\mu$ og varians $\sigma^2$
$N$	hovedstol til prisfastsættelse af capletter
$N$	antal strikekurser i kalibreringsproblemet
$N$	antal simuleringer i et Monte Carlo setup
$M$	antal udløbstidspunkter i kalibreringsproblemet
$M$	antal diskrete tidsskridt i et Monte Carlo setup
$P$	sandsynlighed
$P_1, P_2$	sandsynlighederne, der indgår i de stokastiske volatilitetsmodeller
$P(t, T_k)$	0-kupon obligation, der udbetaler 1 på tidspunkt $T_k$
$P(S_t, t)$	prisen for en put-option på tidspunkt $t$
$\mathbb{P}$	det sande sandsynligheds mål
$\mathbb{Q}$	det risikoneutrale sandsynligheds mål
$\mathbb{Q}(z)$	tæthedsfunktionen i punktet $z$ under sandsynligheds målet $\mathbb{Q}$
$S_t$	kursen for det underliggende aktiv
$S(\Omega)$	den samlede kvadrerede afvigelse i kalibreringsproblemet
$T$	udløbstidspunkt for en option
$T_k$	tidspunkt
$\mathbb{T}_k$	det forward risikoneutrale sandsynligheds mål
$U$	proces, der afhænger af det underliggende aktiv og variansen
$W_t$	Wienerproces
$X_t$	vilkårlig stokastisk proces
$Y$	transformation af det underliggende aktiv ( $Y = mS + (1 - m)L$ )
$Y_t$	logaritmen til det underliggende aktiv
$Z$	tilfældigt standardnormalfordelt tal

## Græske bogstaver

$\alpha$	$u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2$
$\beta$	$b_j - \rho \sigma i \phi$
$\Delta$	størrelsen på et diskret tidsskridt i en proces
$\Delta_{T_{k-1}, T_k}$	tidslængde fra tid $T_{k-1}$ til $T_k$
$\phi$	reelt tal
$\varphi$	variabel, der indgår i løsningsteknikken til de karakteristiske funktioner
$\gamma$	$\frac{1}{2} \sigma^2$
$\kappa$	hastigheden, hvormed variansprocessen rammer det langsigtede variansniveau $\theta$
$\lambda$	risikopræmien
$\lambda$	ekstra volatilitetsparameter, der indgår i Displaced Heston modellen
$\mu$	drift i geometrisk Brownsk bevægelse; middelværdi
$\Pi$	værdi af selvfinansierende portefølje
$\theta$	langsigtsniveauet for variansen
$\rho$	korrelationen mellem processerne for det underliggende aktiv og variansen
$\sigma$	volatilitet i geometrisk Brownsk bevægelse og i Black-Scholes modellen
$\sigma$	volatilitet i processen for variansen
$\sigma_{BS}$	Black-Scholes volatiliteten
$\sigma^{imp}$	den implicitte volatilitet
$\tau$	tiden til udløb
$\Omega$	udfaldsrum
$\Omega$	parametervektor



# Bilag B

## Udledning af de karakterstiske funktioners PDE'er

I dette bilag er udtrykkene for  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$ , der indgår i løsningen til de karakteristiske funktioner, udledt i detaljer. De karakteristiske funktioner for sandsynlighederne  $P_j$  skal jf. (3.11) opfylde følgende partielle differentialligning

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Slutbetingelsen for de karakteristiske funktioner var  $f_j(x, v, \tau; \phi) = e^{i\phi x}$ , og man gætter på følgende løsningsform.

$$f_j(x, v, \tau; \phi) = e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)v + i\phi x}$$

De relevante afledte til de karakteristiske funktioner findes. Argumenterne til  $C(\tau; \phi)$  og  $D(\tau; \phi)$  er udeladt af hensyn til overskueligheden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x} &= i\phi e^{C+Dv+i\phi x} & \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} &= i^2 \phi^2 e^{C+Dv+i\phi x} \\ \frac{\partial f_j}{\partial v} &= D e^{C+Dv+i\phi x} & \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} &= D^2 e^{C+Dv+i\phi x} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \tau} &= \left( \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial D}{\partial \tau} v \right) e^{C+Dv+i\phi x} & \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} &= i\phi D e^{C+Dv+i\phi x} \end{aligned}$$

De afledte indsættes i (B.1), hvor  $e^{C+Dv+i\phi x}$  er divideret ud i alle led, og leddene er sorteret i led med og uden  $v$ .

$$\left( -\frac{\partial C}{\partial \tau} + r i \phi + a D \right) + \left( -\frac{\partial D}{\partial \tau} + u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2 - b_j D + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 + \rho \sigma i \phi D \right) v = 0 \quad (\text{B.2})$$

PDE'en i (B.2) er kun opfyldt, hvis begge parenteser giver 0. Hvis man ser på de to parenteser hver for sig, består de af to ordinære differentialligninger, som kan løses hver for sig. I den første parentes indgår både led med  $C$  og  $D$ , mens der i den sidste parentes kun indgår led med  $D$ , så den ordinære differentialligning i den sidste parentes løses først.

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2 - (b_j - \rho \sigma i \phi) D + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2$$

Differentialligningen kan skrives på formen

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \alpha - \beta D + \gamma D^2 \quad (\text{B.3})$$

hvor

$$\alpha = u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2 \quad \beta = b_j - \rho \sigma i \phi \quad \gamma = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (\text{B.4})$$

Når man har en differentialligning skrevet på formen i (B.3), gælder det, at løsningen kan skrives som

$$D = \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)} \quad (\text{B.5})$$

Når man differentierer (B.5), får man

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{\varphi'(\tau)^2 - \varphi''(\tau)\varphi(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)^2} \quad (\text{B.6})$$

Man kan så sætte (B.5) og (B.6) ind i (B.3), hvilket giver

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(\tau)^2 - \varphi''(\tau)\varphi(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)^2} &= \alpha - \beta \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)} + \gamma \left( \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)} \right)^2 \\ &\Downarrow \\ \frac{\varphi'(\tau)^2 - \varphi''(\tau)\varphi(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)^2} &= \alpha + \beta \frac{\varphi'(\tau)}{\gamma \varphi(\tau)} + \frac{\varphi'(\tau)^2}{\gamma \varphi(\tau)^2} \\ &\Downarrow \\ \varphi'(\tau)^2 - \varphi''(\tau)\varphi(\tau) &= \alpha \gamma \varphi(\tau)^2 + \beta \varphi'(\tau)\varphi(\tau) + \varphi'(\tau)^2 \\ &\Downarrow \\ \varphi''(\tau) + \beta \varphi'(\tau) + \alpha \gamma \varphi(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Ligning (B.7) er en 2. ordens homogen differentialligning, hvor man gætter følgende løsningsform

$$\varphi(\tau) = A e^{\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} + B e^{\left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} \quad (\text{B.8})$$

Hvis man differentierer løsningen, får man

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) &= \left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right) A e^{\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right) B e^{\left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

For at slutbetingelsen for den karakteristiske funktion skal gælde, må slutbetingelsen  $D(0) = 0$  skulle gælde. Med den betingelse må det desuden skulle gælde, at  $\varphi'(0) = 0$  for at (B.5) er opfyldt.

$$\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right) A + \left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right) B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} A$$

$B$  sættes ind i (B.8) og (B.9), som sættes ind i (B.5).

$$D = \frac{- \left( \left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) A e^{\left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} + \left( \frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) A e^{\left( -\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} \right)}{\gamma \left( A e^{\left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} + \frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} A e^{\left( -\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} \right)}$$

Da  $A$  og  $e^{-\frac{1}{2}\beta\tau}$  optræder i alle led, kan de divideres ud i tæller og nævner. Det giver

$$D = \frac{\left( \frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) e^{\left( \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} - \left( \frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) e^{\left( -\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau}}{\gamma \left( e^{\left( \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} + \frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} e^{\left( -\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} \right)}$$

Herefter ganges der igennem med  $2e^{-\left( \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau}$  i tæller og nævner, så man får

$$D = \frac{\left( \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) - \left( \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) e^{\left( -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \tau}}{2\gamma \left( 1 - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} e^{\left( -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \tau} \right)}$$

For at simplificere ligningen kan man nu definere to nye variable  $d$  og  $g$  og sætte værdierne for  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$  fra (B.4) ind.

$$\begin{aligned} d &\equiv \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \\ &= \sqrt{(b_j - \rho\sigma i\phi)^2 - \sigma^2(2\phi u_{ji} - \phi^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} g &\equiv \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \\ &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i - d}{b_j - \rho\sigma\phi i + d} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Den simplificerede løsning for  $D$  kan så skrives som

$$D(\tau; \phi) = \frac{(b_j - \rho\sigma\phi i - d)(1 - e^{-d\tau})}{\sigma^2(1 - g e^{-d\tau})}$$

Nu kan man bruge  $D$  til at finde løsningen for  $C$ . Som nævnt tidligere skal begge parenteser i (B.2) være 0, så der må gælde

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} &= r\phi i + aD \Leftrightarrow C = \int_0^\tau -r\phi i - aD(u) du \\ &= \int_0^\tau -r\phi i du - \int_0^\tau aD(u) du \\ &= -r\phi i\tau - a \int_0^\tau D(u) du \end{aligned}$$

Det er altså  $\int_0^\tau D(u)du$ , der skal findes. Husk fra (B.5), at  $D$  kan skrives som  $D(\tau) = \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)} = \frac{-1}{\gamma} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}$ . Hvis man har en funktion  $F(x) = \ln(f(x))$ , gælder det, at  $F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x))$ , så

$$\begin{aligned} \int_0^\tau D(u)du &= \frac{-1}{\gamma} \int_0^\tau \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du \\ &= \frac{-1}{\gamma} \left[ \ln(\varphi(u)) \right]_{u=0}^{u=\tau} \\ &= \frac{-1}{\gamma} \left( \ln(\varphi(\tau)) - \ln(\varphi(0)) \right) \\ &= \frac{-1}{\gamma} \left( \ln \left( \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(0)} \right) \right) \end{aligned}$$

$\varphi(\tau)$  kendes fra (B.8) som

$$\varphi(\tau) = e^{\left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} - \frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} e^{\left( -\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau}$$

hvor udtrykket for  $B$  er sat ind, og  $A$  er divideret ud, da den indgår i både tæller og nævner. Leddet  $\frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}$  genkendes fra (B.11), hvor det var defineret som  $g$ .

Så får man

$$\begin{aligned} \int_0^t D(u)du &= \frac{-1}{\gamma} \left( \ln \left( \frac{e^{\left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} - g e^{\left( -\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau}}{1 - g} \right) \right) \\ &= \frac{-1}{\gamma} \left( \ln \left( \frac{e^{\left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau} \left( 1 - g e^{\left( -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) t} \right)}{1 - g} \right) \right) \\ &= \frac{-1}{\gamma} \left( \left( -\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau + \ln \left( \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \left( \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( (b_j - \rho\sigma i\phi - d) \tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \end{aligned}$$

Løsningen for  $C$  bliver altså

$$C(\tau; \phi) = r i \phi \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left( (b_j - \rho\sigma i\phi - d) \tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right)$$



# Bilag C

## Kildekode til MATLAB

### C.1 Tæthedsfunktioner

Kildekode, der kan bruges til at beregne tæthedsfunktionerne i kapitel 4. Tætheden i Black-Scholes modellen beregnes ud fra ligning (4.1), og tætheden i Heston modellen beregnes ud fra ligning (4.4).

```
%Tæthedsfunktionen i Black-Scholes modellen
function Taethed = BS-Taethed(z,tau,sigma,r)

Taethed = zeros(1,size(z,2));
for i=1:size(z,2)
    Taethed(1,i) = 1/(sqrt(2*pi)*sigma*sqrt(tau))* ...
        exp(-0.5*((z(1,i)-(r-0.5*sigma^2)*(tau))/(sigma*sqrt(tau)))^2);
end

%Tæthedsfunktionen i Heston modellen
function Taethed = Heston-Taethed(kappa,theta,rho,sigma,tau,v,S,z,r)

Taethed = zeros(1,size(z,2));
for j=1:size(z,2)
    Taethed(1,j) = 1/pi*quadl(@IntegralTaethed,0,200,[],[], ...
        kappa,theta,rho,sigma,tau,v,S,z(1,j),r);
end

%Integralet i tæthedsfunktionen. Funktionen CalcCharFunc der kaldes, kan
%ses under kildekoden til Heston modellen.
function Int = IntegralTaethed(phi,kappa,theta,rho,sigma,tau,v,S,z,r)

i=sqrt(-1);
Int = real(exp(-i*phi*(z+log(S)))*CalcCharFunc(phi,kappa,theta,rho, ...
        sigma,i,tau,v,S,2,r));
```

## C.2 Heston modellen

Kildekode, der kan bruges til at beregne prisen for en europæisk call-option i Heston modellen ud fra ligning (3.5) og resultaterne fra afsnit 3.2.2.

```

%Beregner optionsprisen i Heston modellen for et vilkårligt antal
%strikeniveauer ud fra modellens input-parametre
function Price = HestonOptionPrice(kappa,theta,sigma,rho,v,tau,S,K,r)

Price = zeros(1,size(K,2));
for j=1:size(K,2)
    P1 = CalcP(kappa,theta,sigma,rho,v,tau,S,K(1,j),1,r);
    P2 = CalcP(kappa,theta,sigma,rho,v,tau,S,K(1,j),2,r);

    Price(1,j) = S*P1-exp(-r*tau)*K(1,j)*P2;
end

%Sandsynlighederne i Heston modellen
function P = CalcP(kappa,theta,sigma,rho,v,tau,S,K,type,r)

P = 0.5+1/pi*quadr(@IntegralPrice,0,200,[],[],kappa,theta, ...
    sigma,rho,v,tau,S,K,type,r);

%Integralet i den inverse Fourier transformation
function Int = IntegralPrice(phi,kappa,theta,sigma,rho,v,tau,S,K,type,r)

i=sqrt(-1);
Int = real(exp(-i*phi*log(K)).*CalcCharFunc(phi,kappa,theta,sigma, ...
    rho,v,i,tau,S,type,r)./(i*phi));

%Sandsynlighedernes karakteristiske funktioner
function F = CalcCharFunc(phi,kappa,theta,sigma,rho,v,i,tau,S,type,r)

a = kappa*theta;
if type == 1
    u = 0.5;
    b = kappa-sigma*rho;
else
    u = -0.5;
    b = kappa;
end

x = log(S);

d = sqrt((b-rho*sigma*phi.*i).^2-sigma^2*(2*phi*u*i-phi.^2));
g = (b-rho*sigma*phi*i-d)./(b-rho*sigma*phi.*i+d);

C = r*i*phi*tau + a/sigma^2.*((b-rho*sigma*i*phi-d)*tau- ...
    2*log((1-g.*exp(-d*tau))./(1-g)));
D = ((b-rho*sigma*phi*i-d)./(sigma^2)).*((1-exp(-d*tau))./ ...
    (1-g.*exp(-d*tau)));

F = exp(C + D*v + i*phi*x);

```

## C.3 Displaced Heston modellen

Kildekode, der kan bruges til at beregne prisen for en caplet i Displaced Heston modellen ud fra ligning (5.2) og resultaterne fra afsnit 3.3.2.

```
%Beregner caplet-prisen i Displaced Heston modellen for et vilkårligt antal
%strikeniveauer, ud fra modellens input-parametre
function Price = DisplacedHestonCaplet(kappa,theta,sigma,m,v,lambda, ...
                                       tau,S,K,delta,P0,notional)

Y0 = m*S + (1-m)*L;
K2 = m*K + (1-m)*L;

Price = zeros(1,size(K2,2));
for j=1:size(K2,2)
    P1 = CalcDispP(kappa,theta,sigma,m,v,lambda,tau,Y0,K2(1,j),1);
    P2 = CalcDispP(kappa,theta,sigma,m,v,lambda,tau,Y0,K2(1,j),2);

    Price(1,j) = (1/m)*notional*delta*P0*(Y0*P1-K2(1,j)*P2);
end

%Sandsynlighederne i Displaced Heston modellen
function P = CalcDispP(kappa,theta,sigma,m,v,lambda,tau,Y0,K2,type)

i=sqrt(-1);
int = quadl(@DispIntegral,0,200,[],[],kappa,theta,sigma,m,v,lambda, ...
           tau,Y0,K2,i,type);

P = 0.5+1/pi*int;

%Integralet i den inverse Fourier transformation
function Int = DispIntegral(phi,kappa,theta,sigma,m,v,lambda, ...
                           tau,Y0,K2,i,type)

Int = real(exp(-i*phi*log(K2)).*CalcCharFuncDisp(phi,kappa,theta,sigma, ...
          m,v,lambda,tau,Y0,i,type)./(i*phi));

%Sandsynlighedernes karakteristiske funktioner
function F = CalcCharFuncDisp(phi,kappa,theta,sigma,m,v,lambda, ...
                              tau,Y0,i,type)

a = kappa*theta;
b = kappa;
if type == 1
    u = 0.5;
else
    u = -0.5;
end

x = log(Y0);

d = sqrt((b)^2-sigma^2*m^2*lambda^2*(2*phi*u*i-phi.^2));
g = (b-d)./(b+d);

C = a/sigma^2.*((b-d)*tau- 2*log((1-g.*exp(-d*tau))./(1-g)));
D = ((b-d)./(sigma^2)).*((1-exp(-d*tau))./(1-g.*exp(-d*tau)));

F = exp(C + D*v + i*phi*x);
```

## C.4 Kalibreringsproblemet

Kildekode, der kan bruges til at kalibrere parameterverdierne i Heston modellen ud fra ligning (5.11).

```
%Funktionskaldet der starter kalibreringsalgoritmen:
%LB og UB er de laveste og højeste værdier som parametrene må antage.
%Bortset fra rho er der faktisk ikke nogen øvre grænse for, hvor høje
%parameterverdier modellen kan antage. Her er det dog valgt at sætte 10
%ind som øvre grænse, for at funktionen ikke skal lede et for stort
%parameterrum igennem.
%Det optimale parametersæt gemmes i variabelen Calibration.

startguess = [2 0.01 0.1 0 0.01];
LB = [0 0 0 -1 0];
UB = [10 10 10 1 10];

Calibration = fminsearchbnd3(@(startguess)MinSqrError(startguess, ...
    MktPrice,tau,S,K,NoOfTerms,NoOfStrike,weights), ...
    startguess, LB, UB);

%Objektfunktionen der skal minimeres. Denne funktion kaldes en masse gange
%af minimeringsfunktionen fminsearchbnd3, hvor nye værdier af Omega prøves,
%til den optimale parametervektor er fundet.
function error = MinSqrError(Omega,MktPrice,tau,S,K, ...
    NoOfTerms,NoOfStrike,weights)

kappa = Omega(1);
theta = Omega(2);
sigma = Omega(3);
rho = Omega(4);
v = Omega(5);

PriceError = zeros(NoOfStrike*NoOfTerms,1);
HestonPrice = zeros(NoOfTerms,NoOfStrike);
k=1;

for j=1:NoOfTerms
    for i=1:NoOfStrike
        HestonPrice(j,i)=CalcPriceHeston(kappa,theta,sigma, ...
            rho,v,tau(j,1),S(j,1),K(1,i),r);

        PriceError(k,1) = weights(j,i)*(MktPrice(j,i)-HestonPrice(j,i))^2;
        k=k+1;
    end
end

%Den samlede kvadrerede prisafvigelse.
error = sum(PriceError);
```

## C.5 Simulering

Kildekode, der kan bruges til at simulere Heston modellen og derigennem beregne prisen for aktieobligationen i kapitel 6.

```
%Simuleringsmetoden der er brugt til at udregne prisen på den
%strukturerede aktieobligation.
%De seks aktier er: Apple      (A)
%                      Cisco      (C)
%                      Intel      (I)
%                      Microsoft   (M)
%                      Oracle      (O)
%                      Qualcomm    (Q)

function [Total_return, Price] = SimulateStockReturns

%De optimale parameterverdier fundet ved at kalibrere Heston modellen
%til markedsdata.
PM_A = [7.213677922 0.234339705 3.496138804 -0.525743528 0.157390388];
PM_C = [2.352837872 0.007133396 0.980028503 -0.675307701 0.764177007];
PM_I = [7.87611289 0.127991206 3.983003085 -0.496872808 0.889583692];
PM_M = [0.12219474 0.89075193 0.412411413 -0.571446175 0.085771168];
PM_O = [4.672564641 0.061845811 2.021553334 -0.568639265 0.992747646];
PM_Q = [1.003237515 0.001856634 0.798364038 -0.55607642 0.415208407];

kappa_A=PM_A(1); theta_A=PM_A(2); sigma_A=PM_A(3); rho_A=PM_A(4); v_A=PM_A(5);
kappa_C=PM_C(1); theta_C=PM_C(2); sigma_C=PM_C(3); rho_C=PM_C(4); v_C=PM_C(5);
kappa_I=PM_I(1); theta_I=PM_I(2); sigma_I=PM_I(3); rho_I=PM_I(4); v_I=PM_I(5);
kappa_M=PM_M(1); theta_M=PM_M(2); sigma_M=PM_M(3); rho_M=PM_M(4); v_M=PM_M(5);
kappa_O=PM_O(1); theta_O=PM_O(2); sigma_O=PM_O(3); rho_O=PM_O(4); v_O=PM_O(5);
kappa_Q=PM_Q(1); theta_Q=PM_Q(2); sigma_Q=PM_Q(3); rho_Q=PM_Q(4); v_Q=PM_Q(5);

%Korrelationsmatrix
CorrMatrix = [1.0000 0.8772 0.9258 0.7824 0.9337 0.7850
              0.8772 1.0000 0.9606 0.9417 0.8903 0.6881
              0.9258 0.9606 1.0000 0.8974 0.9223 0.7823
              0.7824 0.9417 0.8974 1.0000 0.8053 0.5390
              0.9337 0.8903 0.9223 0.8053 1.0000 0.8132
              0.7850 0.6881 0.7823 0.5390 0.8132 1.0000];

Cholesky = chol(CorrMatrix, 'lower');

%Input parametre
r = 0.0028188;
tau = 1.671232877;

dt = 2^(-6);
sqrt_dt = sqrt(dt);

nostep = round(tau/dt);
nosimu = 2^18;

S_A = 122.5; S_C = 17.9; S_I = 15.05; S_M = 19.75; S_O = 18.65; S_Q = 41.31;

Returns = zeros(1,6);
Total_return = zeros(nosimu,1);
```

```

anti = false;
for j=1:nosimu

    %Wienerprocesser for de seks aktier
    if anti
        Wx = -Wx;
        Wv = -Wv;
        anti = false;
    else
        Wx = Cholesky*randn(6,nostep);
        Wv = randn(nostep,6);
        anti = true;
    end

    Wx_A = transpose(Wx(1,:)); Wx_C = transpose(Wx(2,:));
    Wx_I = transpose(Wx(3,:)); Wx_M = transpose(Wx(4,:));
    Wx_O = transpose(Wx(5,:)); Wx_Q = transpose(Wx(6,:));

    Wv_A = Wv(:,1); Wv_C = Wv(:,2); Wv_I = Wv(:,3);
    Wv_M = Wv(:,4); Wv_O = Wv(:,5); Wv_Q = Wv(:,6);

    %Afkast for hver af de seks aktier
    Returns(1,1) = EulerProces(kappa_A,theta_A,sigma_A,rho_A,v_A,S_A, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx_A,Wv_A,r);

    Returns(1,2) = EulerProces(kappa_C,theta_C,sigma_C,rho_C,v_C,S_C, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx_C,Wv_C,r);

    Returns(1,3) = EulerProces(kappa_I,theta_I,sigma_I,rho_I,v_I,S_I, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx_I,Wv_I,r);

    Returns(1,4) = EulerProces(kappa_M,theta_M,sigma_M,rho_M,v_M,S_M, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx_M,Wv_M,r);

    Returns(1,5) = EulerProces(kappa_O,theta_O,sigma_O,rho_O,v_O,S_O, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx_O,Wv_O,r);

    Returns(1,6) = EulerProces(kappa_Q,theta_Q,sigma_Q,rho_Q,v_Q,S_Q, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx_Q,Wv_Q,r);

    %Betingelsen om et maksimalt afkast på 30%
    Returns = min>Returns(1,:),0.3);

    %Gennemsnitligt afkast for simuleringen (kan ikke være negativt).
    Total_return(j,1) = max(mean>Returns),0);
end

%Finder det gennemsnitlige afkast af alle simuleringerne, og beregner
%kursen for aktieobligationen.
Total_return = mean>Total_return);
Price = exp(-r*tau)*(100*(1+Total_return));

%Simuleringen af Heston modellen vha. Euler skemaet.
function Return = EulerProces(kappa,theta,sigma,rho,v0,S0, ...
                               dt,sqrt_dt,nostep,Wx,Wv,r)

v = zeros(nostep+1,1);
x = zeros(nostep+1,1);

```

```
v(1,1) = v0;
x(1,1) = log(S0);

Wx = rho*Wv+sqrt(1-rho^2)*Wx;

for i=1:nostep
    %Variansprocessen
    vplus = max(v(i,1),0);
    sqrt_vplus = sqrt(vplus);
    dv = kappa*(theta-vplus)*dt+sigma*sqrt_vplus*Wv(i,1)*sqrt_dt;
    v(i+1,1) = v(i,1) + dv;

    %Aktieprocessen
    dx = (r-0.5*vplus)*dt + sqrt_vplus*Wx(i,1)*sqrt_dt;
    x(i+1,1) = x(i,1) + dx;
end

ST = exp(x(nostep+1,1));
Return = ST/S0-1;
```





# Bilag D

## Tabeller

### D.1 Kalibrering af Heston modellen i kapitel 5

Tabellerne i dette afsnit viser en oversigt over de startgæt, der er brugt til kalibreringen af Heston modellen i kapitel 5 og de tilhørende resultater.

Nr.	Startgæt				
	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_t$
1	2,00	0,40	3,00	-0,60	0,03
2	0,10	1,20	0,10	-0,90	1,50
3	0,20	0,10	0,60	-0,80	0,05
4	1,30	0,01	0,30	-0,40	0,09
5	0,05	0,20	1,30	-0,10	0,30
6	0,60	0,06	2,60	-0,20	0,07
7	1,00	0,07	4,00	-0,45	0,55
8	0,50	0,08	2,00	-0,50	0,02
9	0,30	0,90	0,05	0,00	0,10
10	0,90	0,04	0,70	-0,30	0,04

**Tabel D.1:** 10 startgæt til kalibreringerne af Heston modellen i kapitel 5. Data er sorteret jf. resultaterne i tabel D.2.

Nr.	$\kappa$	Kalibrerede værdier				$S(\Omega)$	Iterationer	Tid (sek.)
		$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_t$			
1	1,031	0,065	4,157	-0,464	0,559	0,030376	243	182
2	0,851	0,069	3,720	-0,464	0,493	0,030450	961	737
3	0,784	0,060	2,878	-0,458	0,395	0,030471	442	312
4	0,787	0,066	3,221	-0,465	0,434	0,030496	228	148
5	0,747	0,066	3,093	-0,465	0,418	0,030497	653	514
6	0,679	0,065	2,768	-0,464	0,377	0,030513	242	172
7	1,084	0,062	4,266	-0,464	0,582	0,030539	140	101
8	0,445	0,079	2,254	-0,475	0,299	0,030584	421	317
9	0,443	0,078	2,237	-0,477	0,301	0,030680	334	225
10	0,403	0,084	2,218	-0,475	0,289	0,030725	231	166

**Tabel D.2:** Resultatet af de 10 kalibreringer af Heston modellen i kapitel 5. Data er sorteret i faldende rækkefølge med den bedste kalibrering øverst.

## D.2 Kalibrering af Displaced Heston modellen i kapitel 5

Tabellerne i dette afsnit viser en oversigt over de startgæt, der er brugt til kalibreringen af Displaced Heston modellen i kapitel 5 og de tilhørende resultater.

Nr.	$\kappa$	Startgæt					
		$\theta$	$\sigma$	$m$	$v_t$	$L$	$\lambda$
1	0,01	0,60	0,06	0,95	0,45	0,30	0,50
2	0,80	0,07	1,10	0,10	0,01	0,03	2,10
3	0,35	0,01	0,20	0,25	0,15	0,12	0,30
4	0,05	0,10	0,50	0,30	0,70	0,10	0,10
5	0,90	0,01	0,30	0,20	1,20	0,07	0,05
6	0,60	0,20	0,40	0,75	0,90	0,08	0,70
7	0,50	0,90	0,02	0,50	0,10	0,15	1,30
8	1,20	0,30	2,00	0,60	0,05	0,01	0,25
9	0,10	1,40	0,10	0,90	0,30	0,20	0,90
10	2,00	0,02	0,90	0,70	0,03	0,05	0,02

**Tabel D.3:** 10 startgæt til kalibreringerne af Displaced Heston modellen i kapitel 5. Data er sorteret jf. resultaterne i tabel D.4.

Nr.	$\kappa$	$\theta$	Kalibrerede værdier					$S(\Omega)$	Iterationer	Tid (sek.)
			$\sigma$	$m$	$v_t$	$L$	$\lambda$			
1	0,339	0,009	0,301	0,307	0,021	0,199	0,495	0,007070	2061	532
2	1,263	0,001	0,267	0,271	0,006	0,112	2,272	0,007145	856	318
3	0,164	0,013	0,247	0,252	0,024	0,175	0,438	0,007268	694	182
4	0,081	0,044	0,346	0,354	0,066	0,277	0,182	0,007728	792	252
5	0,700	0,022	0,531	0,531	0,078	0,137	0,513	0,008788	1536	489
6	0,065	0,369	0,878	0,885	0,640	0,667	0,096	0,013844	678	293
7	2,050	0,059	0,556	0,546	0,434	0,117	0,335	0,014126	408	146
8	4,375	0,023	0,469	0,462	0,286	0,145	0,423	0,014424	573	233
9	3,714	0,176	0,820	0,805	1,960	0,537	0,111	0,014668	1831	701
10	2,156	0,366	0,846	0,829	2,756	0,502	0,089	0,014883	1905	698

**Tabel D.4:** Resultatet af de 10 kalibreringer af Displaced Heston modellen i kapitel 5. Data er sorteret i faldende rækkefølge med den bedste kalibrering øverst.

### D.3 Aktie-casen fra kapitel 6

Tabellen i dette afsnit viser en oversigt over markedsdata for de seks aktier, der er anvendt til den strukturerede aktieobligation i kapitel 6.

AAPL		CSCO		INTC		MSFT		ORCL		QCOM	
$K$	$\sigma$	$K$	$\sigma$	$K$	$\sigma$	$K$	$\sigma$	$K$	$\sigma$	$K$	$\sigma$
75	48,92	5,0	57,26	2,5	70,83	5,0	54,45	5,0	57,35	10,0	60,53
80	48,02	7,5	52,13	5,0	54,87	7,5	48,40	7,5	51,34	12,5	57,95
85	47,19	10,0	48,06	7,5	48,05	10,0	45,10	10,0	46,80	15,0	55,51
90	46,41	12,5	44,70	10,0	43,47	12,5	42,55	12,5	43,29	17,5	53,21
95	45,69	15,0	41,87	12,5	40,05	15,0	40,36	15,0	40,55	20,0	51,06
100	45,01	17,5	39,46	15,0	37,56	17,5	38,47	17,5	38,39	22,5	49,07
105	44,37	20,0	37,42	17,5	35,80	20,0	36,87	20,0	36,66	25,0	47,22
110	43,78	22,5	35,70	20,0	34,59	22,5	35,53	22,5	35,28	27,5	45,52
115	43,22	25,0	34,27	22,5	33,79	25,0	34,45	25,0	34,17	30,0	43,95
120	42,69	27,5	33,09	25,0	33,31	27,5	33,61	30,0	32,57	35,0	41,17
125	42,19	30,0	32,14	30,0	33,08	30,0	32,98	35,0	31,56	40,0	38,82
130	41,72	35,0	30,82	35,0	33,53	35,0	32,35			45,0	36,83
135	41,28	40,0	30,15	40,0	34,45	40,0	32,42			47,5	35,96
140	40,87			45,0	35,68						

**Tabel D.5:** Strikeniveauer og implicitte markedsvolatiliteter for de seks aktier fra kapitel 6. Alle de implicitte volatiliteter i tabellen står angivet i %.



# Litteratur

- [1] Abe, Klaus Schmitz [2008]: “*Implied, Local and Stochastic Volatility*”, Mathematical Institute, University of Oxford, England
- [2] Albrecher, Hansjörg, Philipp Mayer, Wim Schoutens & Jurgen Tistaert [2007]: “*The Little Heston Trap*”, Wilmott Magazine, No. 1, pp. 83-92.
- [3] Andersen, Leif [2007]: “*Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model*”, Working Paper
- [4] Andersen, Leif & Jesper Andreasen [2002]: “*Volatile Volatilities*”, Risk, December pp. 163-168
- [5] Astrup, Bjarne [2007]: “*Note 2: Nogle kommentarer til Hulls kapitel 25, Itô’s lemma og den fundamentale PDE*”, Forelæsningsnoter til Matematisk Finansiering 2, Copenhagen Business School, efteråret 2007
- [6] Bakshi, Gurdip, Charles Cao & Zhiwu Chen [1997]: “*Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models*”, The Journal of Finance Vol. 52 No. 5, pp.2003-2049
- [7] Bates, David S. [1996]: “*Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*”, The Review of Financial Studies Vol. 9 No. 1, pp.69-107
- [8] Black, Fischer [1976]: “*The Pricing of Commodity Contracts*”, Journal of Financial Economics 3, pp.167-179
- [9] Black, Fischer & Myron Scholes [1973]: “*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*”, Journal of Political Economics 81, pp.637-654
- [10] Carr, Peter & Dilip B. Madan [2008]: “*Saddlepoint Methods for Option Pricing*”, Working Paper
- [11] Cizek, Pavel, Wolfgang Härdle & Rafa Weron [2005]: “*Statistical Tools for Finance and Insurance*”, <http://fedc.wiwi.hu-berlin.de/xplore/ebooks/html/stf/>
- [12] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll & Stephen A. Ross [1985]: “*A Theory of The Term Structure of Interest Rates*”, Econometrica, vol 53, n0. 2, pp. 385-407
- [13] Duffie, Darrell, Jun Pan & Kenneth Singleton [2000]: “*Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions*”, Econometrica, vol 68, n0. 6, pp. 1343-1376
- [14] Feller, William [1966]: “*Introduction to probability theory and its applications*”, Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York

- [15] Gatheral, Jim [2006]: “*The Volatility Surface - A Practitioner’s Guide*”, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey
- [16] Glasserman, Paul [2004]: “*Monte Carlo Methods in Financial Engineering*”, Springer Science + Business Media, LLC
- [17] Haastrecht, Alexander van & Antoon Pellser [2008]: “*Efficient, almost exact simulation of the Heston stochastic volatility model*”, Working Paper
- [18] Heston, Stephen L. [1993]: “*A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*”, The Review of Financial Studies, vol 6, nr. 2, pp.327-343
- [19] Hull, John C. [2006]: “*Options, Futures, and Other Derivatives*”, Sixth Edition, Pearson Prentice Hall, New Jersey
- [20] Joshi, Mark S. [2003]: “*The Concepts and Practice of Mathematical Finance*”, University Press, Cambridge, United Kingdom
- [21] Kilin, Fiodar [2007]: “*Acceleration the calibration of stochastic volatility models*”, Frankfurt School of Finance & Management and Quanteam AG
- [22] Lawler, Gregory F. [2006]: “*Introduction to Stochastic Processes*”, Second Edition, Chapman & Hall/CRC
- [23] Lewis, Allan L. [2000]: “*Option Valuation under Stochastic Volatility*”, Finance Press, Newport Beach, Californien, USA
- [24] Mikhailov, Sergei & Ulrich Nögel: “*Heston’s Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions*”, Wilmott Magazine
- [25] Moodley, Nimalin [2005]: “*The Heston Model: A Practical Approach with Matlab code*”, An Honours Project, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa
- [26] Nielsen, Jesper Hyldgaard [1999]: “*Lukkede udtryk for optionspriser, fordelinger og volatilitetssmil i modeller med stokastisk volatilitet og spring*”, cand.merc.(mat.) speciale, Copenhagen Business School, Institut for Finansiering
- [27] Rom, Niels [2009a]: “*Generel Pricing*”, Foredragsslides
- [28] Rom, Niels [2009b]: “*Geometric Brownian Motion - The Black-Scholes set-up*”, Foredragsslides
- [29] Rom, Niels [2009c]: “*Cap Pricing and Black’s Formula*”, Foredragsslides
- [30] Sønderby, Niels Elken [2003]: “*Simulationsbaseret prisfastsættelse af amerikanske optioner i en model med stokastisk volatilitet og spring*”, cand.merc.(mat.) speciale, Copenhagen Business School, Institut for Finansiering
- [31] Thomsen, Jakob Lund [2007]: “*Prisfastsættelse af optioner i en model med stokastisk volatilitet og spring*”, cand.merc.(mat.) speciale, Copenhagen Business School, Institut for Finansiering