

Copenhagen Business School

Cand.merc.(mat.)

Prisfastsættelse af strukturerede produkter

Lea Brink Gansted

Cpr: xxxxxx-xxxx

Andreas Gerlif

Cpr: xxxxxx-xxxx

Vejleder: Martin Richter

Afleveret d. 16. maj 2011

Antal anslag: 254.000

Pricing of Structured Products

The first structured products were introduced on the Danish market in the late 1990s and since then they have become very popular, especially among private investors. Up until 2007 the market saw a heavy increase in the volume of structured products, but over the last couple of years there has been a drastic decline in the volumes. The structured products have been subject to massive critique in recent years which might offer an explanation for the decline in volumes. The critics tend to agree that the products are too complex and suffer from a great lack of transparency. This makes the products very hard for private investors to fully understand.

This thesis gives an introduction to the Danish market for structured products. It presents the reader with details regarding the structure of the products, the evolution in the market and some incentives for private investors to invest in the structured products. Furthermore it introduces the reader to the theoretical background for the pricing of structured products including bond pricing, asset price dynamics and option pricing theory. The option pricing theory includes an introduction to the Black-Scholes model as well as the Heston model. The models are compared based on their key assumptions and respective return distributions.

In the final part of the thesis we calculate the price of two structured products: *PLUS 7 Index Super 2013* and *KommuneKredit Aktiekurv 2012*. The main purpose of this exercise is to examine the parameters required to price the instruments and to determine whether or not the products were sold at a fair price at the time of issuing. The products are priced using Monte Carlo simulation and the two option pricing models presented in the theory. The reader is presented with the input data for the models, the calibration of parameters in the Heston model and the general pricing mechanism of the two products.

Our results show that by using the two option pricing models, we get different prices for the products. We find that the Heston model tends to give the highest price. When comparing our calculated prices to the prices at which the products were initially sold, it becomes clear that the products were sold at a much too high price. This indicates that the investors are paying some indirect costs when purchasing the products and we therefore discuss where in the issuing process these costs can occur and whether or not they can be justified. Our conclusion is that it is impossible to figure out where these hidden costs strain from because of the complexity and lack of transparency associated with this type of products. Based on our investigations we conclude that the critics are right when they argue that these products are too complex for private investors to understand. We argue that in some cases the complex structure can be rewarding for private investors, but most private investors would be better off by investing in less complex structures. This would enable them to understand the prices of the different parts of the product and thereby enable them to understand the price of the structured product itself.

Indhold

1	Indledning	5
1.1	Problemformulering	6
1.2	Afgrænsning	7
1.3	Opgavens struktur	7
2	Strukturerede obligationer	8
2.1	Hvad er en struktureret obligation?	8
2.2	Payoff og parametre	10
2.3	Parter og omkostninger i udstedelsesprocessen	13
2.4	Udvikling i markedet	14
2.5	Risici forbundet med at investere i strukturerede obligationer	16
2.6	Kritik af de strukturerede obligationer	18
2.7	Motivationsfaktorer for private investorer	19
3	Prisfastsættelse af nulkuponobligationer	20
3.1	Valg af rente	20
3.2	Bootstrapping	23
3.3	Kreditrisiko	25
4	Kontinuert prisfastsættelse af derivater	26
4.1	Stokastiske processer	26
4.2	Replikering	31
4.3	Arbitrage og stokastiske diskonteringsfaktorer	35
4.4	Risikoneutral prisfastsættelse	36
4.5	Dividender	39
4.6	Valutakurser	39
4.7	Numraireskifte	40
4.8	Quantooptioner	43
5	Optionsmodeller	46
5.1	Black-Scholes modellen	46
5.2	Heston modellen	48
5.3	Kalibrering	57
5.4	Diskussion	59

6	Monte Carlo simulation	61
6.1	Monte Carlo metoden	61
6.2	Korrelerede aktiver	62
6.3	Diskretisering	63
6.4	Fejlkilder	64
7	Prisfastsættelse af produkter	68
7.1	Beskrivelse af produkter	68
7.2	Data	71
7.3	Estimation af parametre	79
7.4	Kalibrering	86
7.5	Prisning	89
7.6	Resultater	95
7.7	Diskussion	102
8	Konklusion	105
	Litteratur	107
A	Mellemregninger i udledningen af Heston modellen	111
B	Swap-nulkuponrentekurver	116
C	Deltaværdier	119
D	Aktivkorrelationer	122
E	Quantokorrelationer	127
F	Volatilitetsskews	130
G	MATLAB kode til prisning af produkter	132

Kapitel 1

Indledning

En struktureret obligation er et finansielt produkt, som består af to elementer; en nul kuponobligation med samme løbetid og hovedstol som den strukturerede obligation, og en option skrevet på et eller flere underliggende aktiver. De strukturerede obligationer blev introduceret i Danmark i slutningen af 1990'erne og er siden blevet meget populære - specielt blandt private investorer. Ifølge den nyeste statistik fra nationalbanken¹ er omfanget af strukturerede obligationer i Danmark², vokset fra omkring nul i slutningen af 1990'erne til ca. 68 milliarder kr. i slutningen af 2007, hvor interessen for produkterne var størst. Siden 2007 er den udestående mængde næsten halveret og udgør i dag omkring 33 milliarder kr. jf. figur 1.1. Faldet siden 2007 skyldes både, at der foretages færre udstedelser af strukturerede obligationer, og at udstedelserne er blevet mindre.

Figur 1.1 giver også et billede af, hvilke underliggende aktivtyper de strukturerede obligationer er fordelt på. I begyndelsen havde de strukturerede obligationer typisk aktier som underliggende aktiv, hvorimod der i de senere år har været større variation. Årene fra 2006 til 2008 var gyldne år for de strukturerede obligationer. I denne periode blev renter, råvarer og valuta i et større omfang end tidligere brugt som underliggende aktiver. Denne tendens har dog været aftagende de seneste år, hvor omfanget af strukturerede obligationer med renter og råvarer som underliggende aktiver er faldet drastisk.

Det er dog ikke alle steder, at begejstringen for disse nye finansielle produkter har været lige stor. Produkterne er blevet skarpt kritiseret af blandt andre Nationalbanken³ for at være så komplekse, at private investorer ikke har forudsætninger for at forstå dem. Produkternes manglende gennemsigtighed betyder ifølge kritikerne, at det er umuligt for en privat investor at vurdere, om produkterne sælges til en fair pris, og om man i realiteten får, hvad man har betalt for.

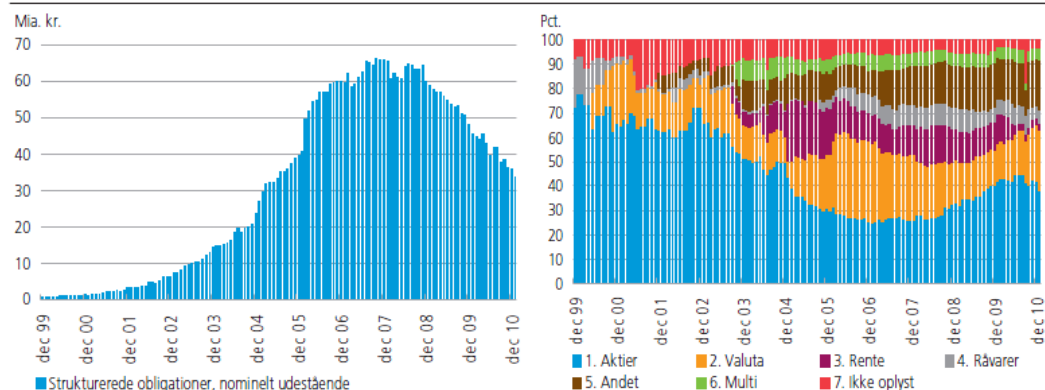
I denne opgave gives en introduktion til strukturerede obligationer og det danske marked for denne type produkter. Den teoretiske baggrund for at prisfastsætte elementerne i en struktureret obligation gennemgås, og forskellige modeller til prisfastsættelse af optioner sammenlignes. Disse værktøjer benyttes til slut i en empirisk

¹1. Kvartalsoversigt 2011

²Her tages ikke hensyn til det OTC marked, der er for *private placement* da disse udstedelser ikke rapporteres til børsen. Når vi skriver om omfanget af strukturerede obligationer i resten af opgaven, ser vi således bort fra private placement udstedelser.

³Se Rasmussen, A [2007] - 2. Kvartalsoversigt 2007

STRUKTUREREDE OBLIGATIONER I DANMARK, ULTIMO 1999 – PRIMO 2011



Figur 1.1: *Strukturerede produkter: Udestående mængde og fordeling på underliggende aktiver.* Kilde: Danmarks Nationalbank.

analyse af to udvalgte produkter med henblik på at undersøge kompleksiteten og gennemsigtheden af disse produkter. Den empiriske analyse anvendes til at vurdere, om kritikken af de strukturerede produkter er berettiget eller ej.

1.1 Problemformulering

Opgavens primære formål er at give en forståelse af strukturerede obligationer og disses priser. Vi vil herunder undersøge de teoretiske såvel som praktiske problemstillinger forbundet med prisfastsættelsen af strukturerede obligationer. Motivationen for dette er den hårde kritik, som produkterne har været udsat for. Denne kritik omhandler især den høje kompleksitet og manglende gennemsigthed i produkterne. For at belyse disse problemstillinger vil vi

- Beskrive hvad begrebet *struktureret obligation* dækker over.
- Forstå hvad der motiverer private investorer til at investere i strukturerede obligationer.
- Forstå hvilke ricisi der er forbundet med at investere i strukturerede obligationer.
- Forstå produkterne og måden de prisfastsættes på.
- Undersøge hvordan to udvalgte produkter prisfastsættes empirisk.
- Undersøge hvilken indvirkning valget af optionsmodel har på produkternes pris.
- Undersøge om de to produkter er blevet solgt til en fair pris.
- Undersøge kompleksiteten og gennemsigtheden i produkterne med henblik på at belyse, hvorvidt kritikken af produkterne er berettiget.

1.2 Afgrænsning

Da det danske marked for strukturerede produkter er domineret af produkttypen aktieindekserede obligationer, fokuserer vi i opgaven på denne type produkter⁴.

Motivationen for at investere i strukturerede obligationer undersøges fra den private investors perspektiv. Dette skyldes, at private investorer er den største investorgruppe i strukturerede obligationer i Danmark, samt at kritikken i høj grad har været rettet mod banker og sparekassers salg af produkterne til privatpersoner.

I opgaven ser vi ikke på den skattemæssige behandling af strukturerede obligationer, da dette i sig selv er et meget omfattende emne.

Ved prisfastsættelsen af de to produkter beskæftiger vi os i opgaven udelukkende med prisen ved udstedelsen. Der vil derfor ikke være fokus på, hvordan prisen efterfølgende opfører sig i det sekundære marked.

Når produkterne prises, benytter vi Blacks-Scholes- og Heston modellen til at beregne priserne på de underliggende optioner. Der findes masser af andre optionsmodeller, men vi har valgt at begrænse os til disse to.

Produkterne prisfastsættes ved brug af Monte Carlo simulation, uden at der i opgaven tages stilling til, om dette er den mest efficiente metode at benytte på de givne modeller. Vi har valgt at anvende Monte Carlo simulation, da metoden er let at implementere og kan benyttes på begge optionsmodeller.

1.3 Opgavens struktur

Ud over indledning og konklusion består opgaven af tre dele; en beskrivende del, en teoretisk del og en empirisk del.

Efter opgavens indledning i dette kapitel følger kapitel 2 med en beskrivelse af strukturerede obligationer - herunder payoff strukturer, udstedelsesprocessen, markedet, risici, kritik og motivation for private investorer. I kapitel 3 gennemgår vi prisfastsættelsen af nulkuponobligationer - herunder valg og modellering af en passende rentestruktur til diskontering. Kapitlet afsluttes med et afsnit om kreditrisiko. Kapitel 4 omhandler prisfastsættelsen af derivater, hvor vi præsenterer en række værktøjer og centrale resultater. I kapitel 5 gennemgår vi Black-Scholes og Heston modellen, som vi benytter til at prisfastsætte produkterne i opgaven. Som afslutning i kapitlet beskriver vi, hvordan parametrene i Heston modellen kalibreres, således at de fitter markedsdata bedst muligt. I kapitel 6 gennemgår vi Monte Carlo simulation, både i tilfældet med ét enkelt underliggende aktiv og ved flere korrelerede underliggende aktiver. I kapitlet præsenterer vi også to diskretiseringsmetoder, og til sidst analyserer vi fejkilderne i Monte Carlo simulation. I kapitel 7 benytter vi den teoretiske baggrund fra de foregående kapitler til at prisfastsætte de to strukturerede obligationer. Datagrundlaget og estimationen af parametrene gennemgås, inden resultaterne af prisfastsættelsen præsenteres og diskuteres. I kapitel 8 konkluderer vi på problemstillingen i opgaven med fokus på kritikken af de strukturerede obligationer.

⁴Dog har det ene produkt, vi prisfastsætter, også en valuta position som underliggende aktiv.

Kapitel 2

Strukturerede obligationer

I dette kapitel giver vi en introduktion til strukturerede obligationer samt en opridsning af den kritik, der har været af de strukturerede obligationer, siden de begyndte at blive handlet i Danmark i slutningen af 1990'erne. Til sidst beskrives markedsudviklingen for de strukturerede obligationer med henblik på at give læseren et indblik i, hvor hurtigt dette marked er vokset.

Kapitlet tager primært udgangspunkt i artiklerne *Jackobsen, S. [2000]*, *Plesner, S. [2007]* og *Rasmussen, A. [2007]*.

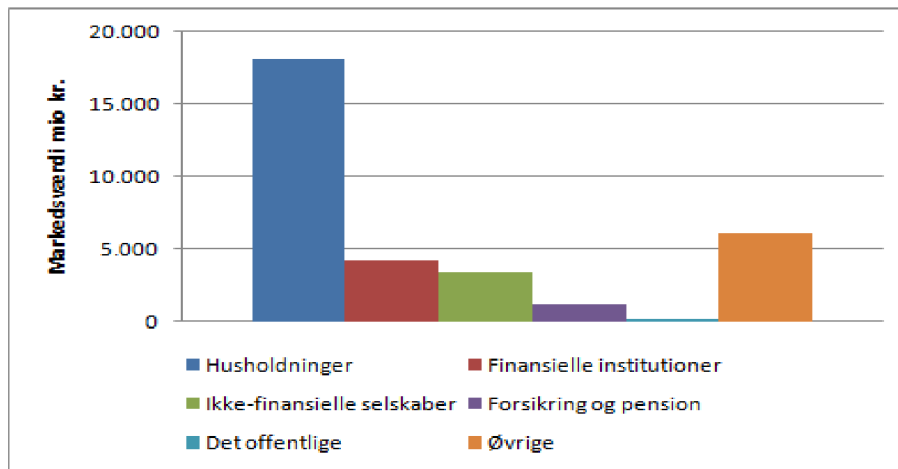
2.1 Hvad er en struktureret obligation?

En struktureret obligation er et finansielt produkt, som består af to elementer; en nulkuponobligation med samme løbetid og hovedstol som den strukturerede obligation, og en option skrevet på et eller flere underliggende aktiver. En nulkuponobligation er en obligation, som ikke udbetaler kuponer i obligationens løbetid, men som blot tilbagebetaler hovedstolen ved udløb. Strukturerede obligationer kan også indeholde stående lån i stedet for nulkuponobligationer, således at der udbetales kuponer i obligationens løbetid. I denne opgave har vi dog valgt at fokusere på produkter indeholdende nulkuponobligationer.

Optionen kan være skrevet på stort set et hvilket som helst underliggende aktiv. Her snakker vi ikke kun om handlede aktiver, for der findes også eksempler på optioner skrevet på naturkatastrofer såsom orkaner og jordskælv, de såkaldte *Act-of-God Bonds*.

Payoff profilen for en struktureret obligation afhænger således af hovedstolen på nulkuponobligationen samt udviklingen i optionens underliggende aktiver. Den strukturerede obligation har altså en garanteret tilbagebetaling samt et muligt afkast fra optionsdelen. Hvis obligationen udstedes til pari, har investor fuld hovedstolsgaranti, så det maksimale tab i dette tilfælde er værdien af den forrentning, man kunne have opnået ved en alternativ investering. I forhold til et stående lån giver investor, ved at investere i den strukturerede obligation, afkald på kupon betalingerne. Hovedstolsgarantien samt muligheden for at investere i bevægelsen i risikofyldte aktiver gør, at obligationen er interessant for mange private investorer. Det ses da også i figur 2.1, at private investorer er den klart største klasse af investorer i strukturerede

obligationer i Danmark.



Figur 2.1: Markedsværdi for strukturerede obligationer i Danmark fordelt på investorer i februar 2011. Kilde: Nationalbankens statistikbank.

Værdien af en nul kuponobligation på tidspunkt 0 med udløb på tidspunkt T er givet ved

$$B(0, T) = H \cdot e^{-rT} \quad (2.1)$$

hvor H er hovedstolen og r er den risikofri rente¹.

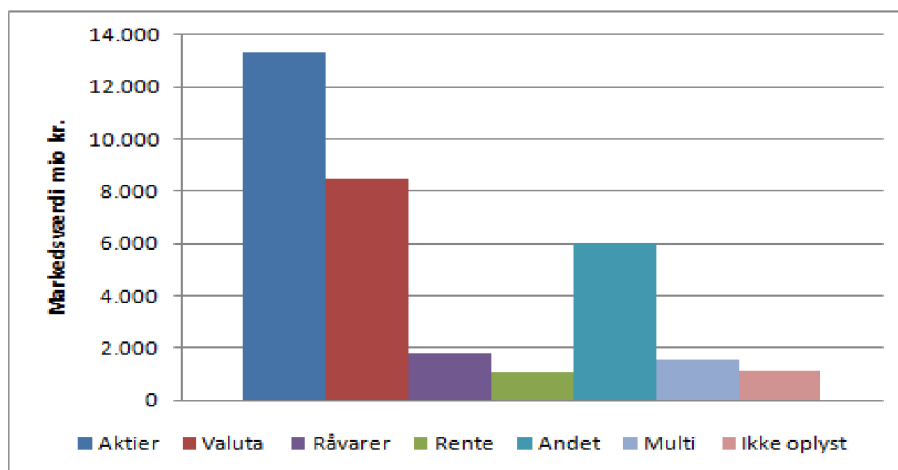
Da prisen på den strukturerede obligation, i stort set alle tilfælde, er større end eller lig hovedstolen, ses det således, at der er en forskel på den pris, investor betaler for den strukturerede obligation, og prisen på den indbyggede nul kuponobligation. Dette resterende beløb benyttes til at købe optioner for.

Der findes to overordnede optionstyper; *call* og *put*. En calloption giver optionsindehaveren retten, men ikke pligten, til at købe det underliggende aktiv til en på forhånd fastsat pris kaldet strikekursen. En putoption giver indehaveren retten, men ikke pligten til, at sælge det underliggende aktiv til en på forhånd fastsat pris. Her er der naturligvis tale om optioner med handlede underliggende aktiver, da det åbenlyst ikke er muligt at sælge eller købe hverken en orkan eller et jorskælv. Som det kan ses i figur 2.2, er aktier, valuta, råvarer og renter de mest benyttede underliggende aktiver i Danmark.

Ud over typerne call og put kan en option være af typen europæisk eller amerikansk. En europæisk option kan kun indløses på optionens udløbstidspunkt, hvorimod en amerikansk option kan indløses på flere fastlagte tidspunkter i løbet af optionens levetid. Nedenfor ses payoff funktionen for en *plain vanilla* europæisk call- henholdsvis putoption.

$$V(T)_{call} = \text{Max}(S_T - K, 0) \quad V(T)_{put} = \text{Max}(K - S_T, 0) \quad (2.2)$$

¹På trods af, at der ikke eksisterer risikofri aktiver i markedet vælger vi, af hensyn til sammenhængen til den anvendte teori, at benævne markedsrenterne som risikofri renter.



Figur 2.2: Markedsværdi for strukturerede obligationer i Danmark fordelt på underliggende aktiver i februar 2011. Kilde: Nationalbankens statistikbank.

hvor S_T er prisen på det underliggende aktiv på tidspunkt T og K er strikekursen. De optioner, der benyttes i de strukturerede produkter, er efterhånden aldrig af typen plain vanilla, men har derimod mange underliggende aktiver (*basketoptioner*), nogle endda på tværs af aktivklasser (*mountain range optioner*).

2.2 Payoff og parametre

Værdien af en struktureret obligation ved udløb kan beskrives ved sammenhængen i (2.3).

$$V(T)_{struktur} = H + \beta \cdot V(T)_{option} \quad (2.3)$$

hvor $V(T)_{struktur}$ angiver værdien af den strukturerede obligation, H angiver hovedstolsgarantien og $V(T)_{option}$ angiver værdien af optionen. Parameteren β kaldes deltagelsesgraden. Deltagelsesgraden beskriver, hvor stor en andel af optionens afkast investor får del i. Er deltagelsesgraden for eksempel fastsat til 85% ved udstedelsen og optionen ender med at udbetale 100 kr., modtager investor 85 kr. fra optionselementet.

Som tidligere nævnt benyttes det beløb, som udgøres af forskellen på prisen på den strukturerede obligation og prisen på nul kuponobligationen, til at købe optioner for. Er dette beløb større end prisen på optionen, bliver deltagelsesgraden større end 100%, mens den bliver mindre end 100%, hvis beløbet er mindre end prisen på optionen.

For at finde det eksakte beløb, der er tilovers til at investere i optioner, skal der dog først fratrækkes de omkostninger, der er forbundet med udstedelsen af den strukturerede obligation. Prisen, på tidspunkt 0, på den strukturerede obligation, som udløber til tidspunkt T , kan nu skrives som

$$P(0)_{struktur} = e^{-rT}H + \beta \cdot V(0)_{option} + \Phi \quad (2.4)$$

Her er r den risikofri rente i markedet, $V(0)_{option}$ er prisen på optionen hos modparten og Φ er de samlede omkostninger forbundet med udstedelsen.

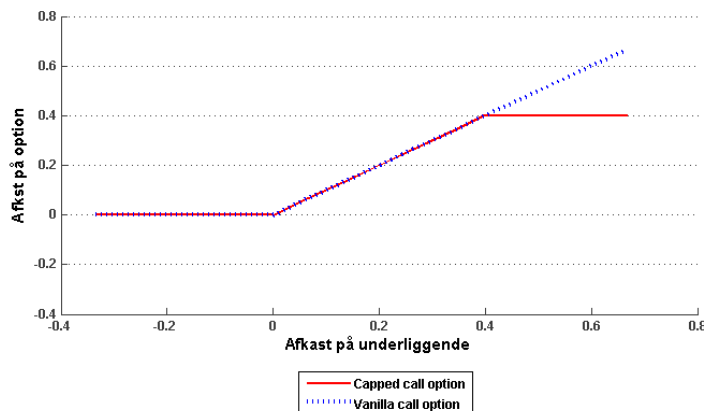
Ved at isolere deltagelsesgraden i det ovenstående kan et udtryk for denne bestemmes.

$$\beta = \frac{P(0)_{struktur} - e^{-rT}H - \Phi}{V(0)_{option}} \quad (2.5)$$

Deltagelsesgraden for den strukturerede obligation afhænger altså af prisen på nul kuponobligationen og optionen, hvorfor deltagelsesgraden først kan fastlægges endeligt på udstedelsesdagen.

Det er naturligvis attraktivt for investor at have så høj en deltagelsesgrad som muligt. Det er ikke muligt at påvirke prisen på nul kuponobligationen, men man kan ved hjælp af forskellige finansielle designs sænke prisen på optionen.

Da man startede med at udstede strukturerede obligationer, var optionerne ofte af typen plain vanilla, men efterhånden er de blevet meget mere komplekse. Dette skyldes antageligt ønsket om en øget deltagelsesgrad, da det gør det lettere at markedsføre produkterne overfor kunderne. Man kan for eksempel sænke prisen på optionen ved at sætte en *cap* på, hvor højt afkastet på optionen kan blive. Eksempelvis kan man sige, at hvis afkastet på et underliggende aktiv overstiger 40%, tæller dette afkast blot som 40%, når værdien af optionen skal findes. Payoff strukturen for en option med en sådan *cap* er illustreret i figur 2.3.



Figur 2.3: Payoff struktur for calloption med cap på 40%.

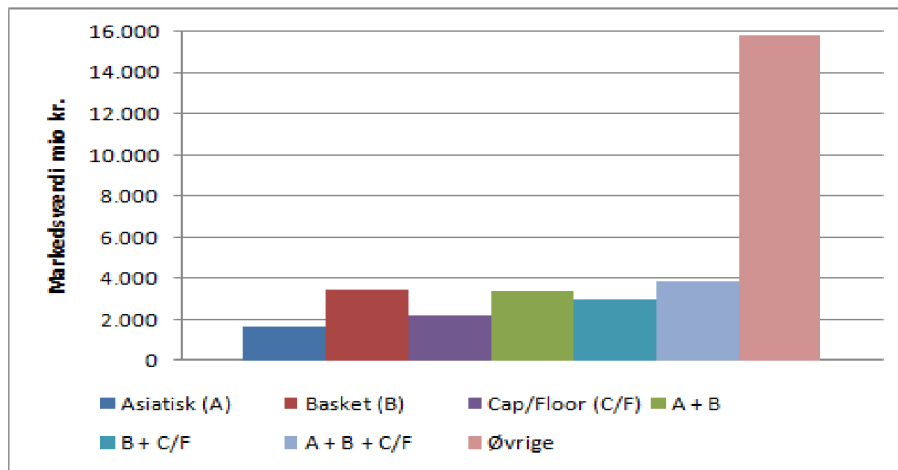
En anden mulighed er at benytte de såkaldte asiatiske haler, hvor man i stedet for at kigge på udviklingen i det underliggende aktiv over hele perioden, tager gennemsnittet af værdien af det underliggende indeks på forskellige datoer. Ofte vil dette gøres årligt eller månedligt over en periode frem til udløb. Den asiatiske hale mindsker påvirkningen fra tilfældige kursudsving og giver dermed en lavere volatilitet, hvilket

gør optionen billigere. Payoff funktionen for en asiatisk basket calloption kunne for eksempel se ud som i (2.6).

$$V_{asian} = \text{Max} \left(\sum_{i=1}^n w^{(n)} \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{S_m^{(n)} - S_0^{(n)}}{S_0^{(n)}} \right) - K \right), 0 \right) \quad (2.6)$$

Her er n antal indeks i kurven, m er antal observationer af indekssværdien, $w^{(n)}$ er vægten for indeks n , $S_m^{(n)}$ er indekssværdien for indeks n ved observation m og K er strikekursen. Den inderste sum finder således den gennemsnitlige værdi af et givent indeks, mens den ydre finder den gennemsnitlige værdi af de vægtede indeks minus strikekurs.

I figur 2.4 ses en oversigt over markedsværdien af strukturerede obligationer i Danmark fordelt på de underliggende optionstyper.



Figur 2.4: Markedsværdi for strukturerede obligationer i Danmark fordelt på underliggende optionstyper i februar 2011. Kilde: Nationalbankens statistikbank.

En helt tredje metode til at opnå en højere deltagelsesgrad er at sælge den strukturerede obligation til en højere pris end den garanterede hovedstolsværdi. Alternativt, og med samme resultat, kan man infri obligationen til en kurs under 100. På den måde er der ikke fuld hovedstolsgaranti, hvilket gør, at deltagelsesgraden vil kunne forhøjes. Konsekvensen af, at arrangøren sætter prisen højere end den garanterede hovedstolsbetaling, må umiddelbart siges at være nemmere at genneskue for investor end konsekvensen af, at arrangøren ændrer strukturen i optionen. Konsekvensen af at lave optionen med asiatisk hale er svær at genneskue, hvilket blandt andet er grunden til, at strukturerede obligationer er blevet kritiseret meget i medierne for deres uigennemsigthed. Ofte sætter arrangøren et floor for deltagelsesgraden, således at hvis der på udstedelsesdagen ikke kan opnås en deltagelsesgrad på eksempelvis minimum 85%, bliver den strukturerede obligation ikke udstedt.

Det følgende er et eksempel på, hvordan den indikative deltagelsesgrad² kan øges ved at ændre på optionstypen og dermed optionsprisen.

²Den indikative deltagelsesgrad er den deltagelsesgrad, arrangøren beregner ud fra de givne markedspriser inden obligationsudstedelsen.

Lad os sige at en arrangør ønsker at strukturere en obligation med en løbetid på 5 år, som udstedes til kurs 100. Han har beregnet de årlige udstedelsesomkostninger til 1.5% af prisen på den strukturerede obligation, som også er 100 kr. Nulkuponobligationen koster 82.5 kr., hvorefter der er $100 - 82.5 - 0.015 \cdot 5 \cdot 100 = 10$ kr. tilbage at købe optioner for. Prisen for den plain vanilla option, han ønsker at have i sin strukturerede obligation, er 12.5 kr. Deltagelsesgraden for den strukturerede obligation bliver i dette tilfælde $\frac{10}{12.5} = 80\%$. Det synes arrangøren er en smule lavt, og han vælger derfor at høre optionsmodparten, hvad en tilsvarende option med asiatisk hale vil koste. Som forventet er prisen på denne option lavere end prisen på plain vanilla optionen, da den i stedet koster 11 kr. Nu bliver deltagelsesgraden altså $\frac{10}{11} = 90.11\%$, hvilket arrangøren er tilfreds med.

2.3 Parter og omkostninger i udstedelsesprocessen

Idéen til at lave en struktureret obligation starter hos arrangøren, som er den part, der designer selve produktet. Det vil sige, at arrangøren beslutter, hvilke underliggende aktiver optionselementet skal indeholde. Det gøres ofte ud fra en relevant investeringscase så som en forventning om stigende/faldende aktie- eller valutakurser. Eksempelvis kunne man i marts 2008 købe en struktureret obligation hos Danske Bank, der gav mulighed for at spekulere i en styrkelse af den amerikanske Dollar over for Euroen³. Motivationen for dette produkt var naturligvis den forudgående meget voldsomme svækkelse af Dollaren.

I mange tilfælde designer arrangøren ikke kun produktet men fungerer også som prisstiller i det sekundære marked. De største arrangører i Danmark er Nordea, GarantInvest, Danske Bank og BankInvest.⁴

Når arrangøren er færdig med at forberede produktet, kontakter han udsteder, som oftest er en stor bank eller kommunal finansieringsinstitution med meget høj kredit rating. Udstederen lægger navn til produktet og minimerer, via sin høje rating, kreditrisikoen. Det kan også forekomme, at arrangøren selv vælger at udstede produktet. I Danmark er KommuneKredit klart den største udsteder⁵, men de danske arrangører benytter sig også ofte af udstedere fra andre nordiske lande⁶. Ved at udstede en struktureret obligation tages en kort position i den underliggende option. Udsteder er dog normalt ikke interesseret i denne eksponering og hedger derfor sin korte position ved at købe en tilsvarende option hos en investeringsbank. Aftalen med investeringsbanken er på forhånd planlagt af arrangøren, som har indhentet indikative priser fra mange forskellige investeringsbanker.

³Kilde:<http://www.danskebank.dk/da-dk/Privat/Opsparing-og-investering/Investering/Produkter/strukturerede-produkter/Pages/KommuninvestEURUSD.aspx>

⁴Kilde: Data fra Nationalbanken kan findes på <http://www.nationalbanken.dk/DNDK/statistik.nsf/side/STROBL!OpenDocument>

⁵Kilde: Data fra Nationalbanken kan findes på <http://www.nationalbanken.dk/DNDK/statistik.nsf/side/STROBL!OpenDocument>

⁶Eksempelvis benytter Danske Bank Kommuneinvest i Sverige mens Nordea benytter Nordea Bank Finland.

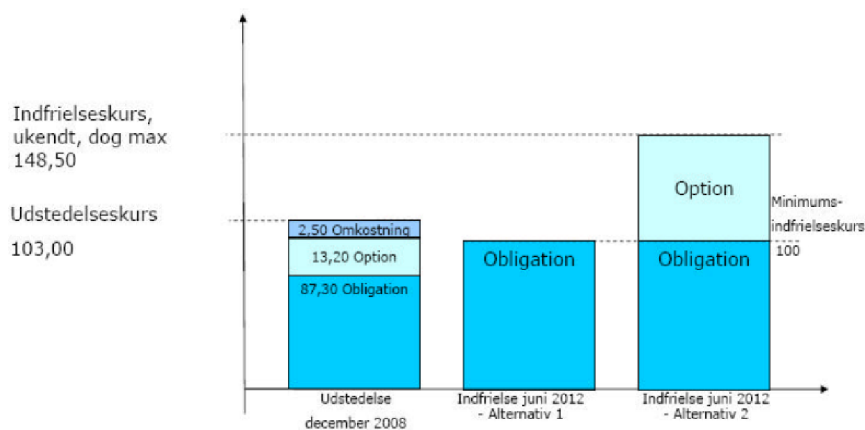
Når selve udstedelsen er på plads, overgår fokus til distributøren, hvis opgave det er at markedsføre og sælge produktet til investorer. Dette gøres i høj grad til private investorer via lokale bankfilialer. Som oftest vil en dansk arrangør selv vælge at varetage distributørfunktionen, mens udenlandske arrangører gerne hyrer en dansk bank som distributør.

Efter at have gennemgået udstedelsesprocessen står det klart, at der er fire parter involveret, som alle har nogle omkostninger: arrangør, udsteder, optionsmodpart og distributør. De omkostninger, som står nævnt i prospektet som en årlig procent af prisen på den strukturerede obligation, dækker oftest kun arrangørens og distributørens omkostninger. Når det beløb, der er sat af til omkostninger i prospektet, er brugt, er der altså stadig to parter, som mangler at blive betalt.

Investeringsbanken, som fungerer som optionsmodpart, tager sig betalt ved at tage overpris for optionen. Udstederen vil kun lægge navn til den strukturerede obligation, såfremt han kan opnå en billigere funding end han ellers kunne have opnået i markedet, hvilket indikerer, at nulkuponobligationen udstedes til overpris.

De to sidstnævnte omkostninger er ikke observerbare for investor, da disse ikke er oplyst i prospektet. Det er da også meget kompliceret at finde ud af præcist, hvor store disse skjulte omkostninger er, da man skal prisfastsætte både nulkuponobligationen og optionen for at kunne gennemskue det. Det gør vi i kapitel 7, netop med henblik på at kortlægge de skjulte omkostninger i to udvalgte produkter.

I figur 2.5 er vist et eksempel på, hvordan en struktureret obligation er opbygget.

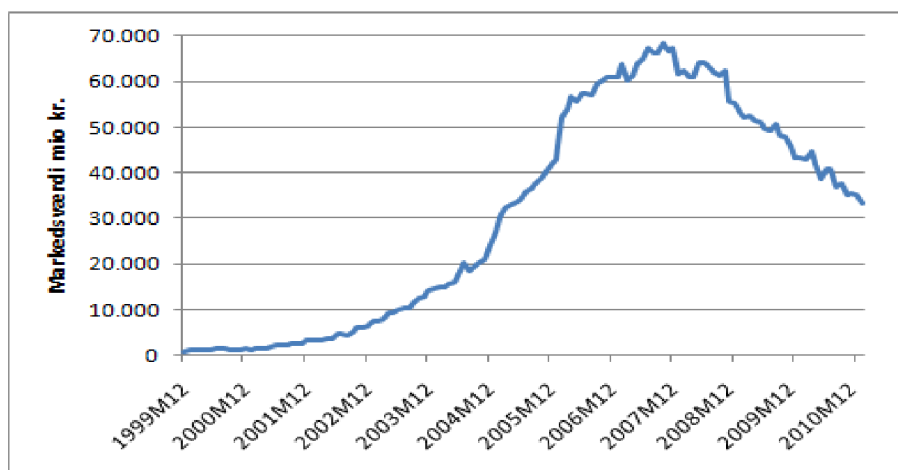


Figur 2.5: *Opbygning for struktureret obligation*. Kilde: Prospekt for KommuneKredit Aktiekurv 2012.

2.4 Udvikling i markedet

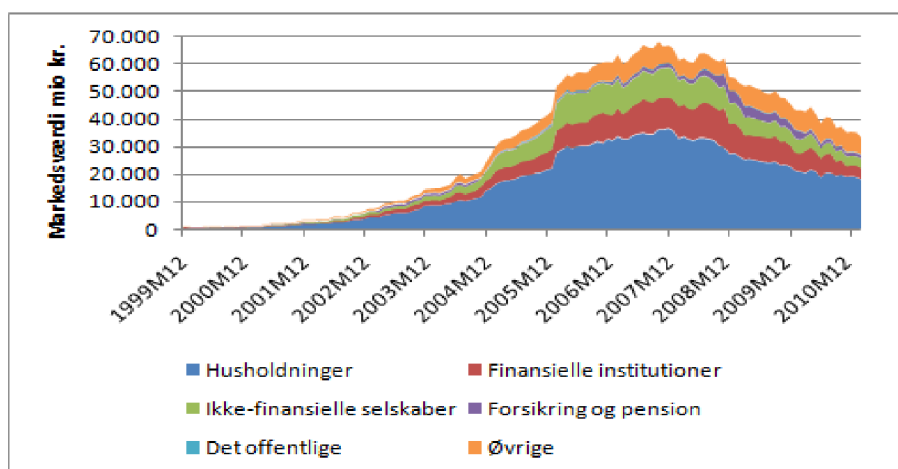
Da de strukturerede obligationer lanceredes i Danmark i slutningen af 1990'erne, var det med en beskeden markedsværdi på 792 millioner kr. Til sammenligning er markedsværdien af de strukturerede obligationer i dag oppe på 33 milliarder kr. Da markedet toppede i oktober 2007, var det med en samlet markedsværdi på 68 milliard-

der kr. I figur 2.6 ses det, hvorledes markedsværdien af de strukturerede obligationer er steget støt fra slutningen af 1999 til slutningen af 2004, hvorefter markedet for alvor voksede fra 2004 til 2007. Siden slutningen af 2007 har der dog været et ret konstant fald i markedsværdien af de strukturerede obligationer. Denne tendens er fortsat helt frem til idag, hvor markedsværdien er halveret siden peaket i 2007.



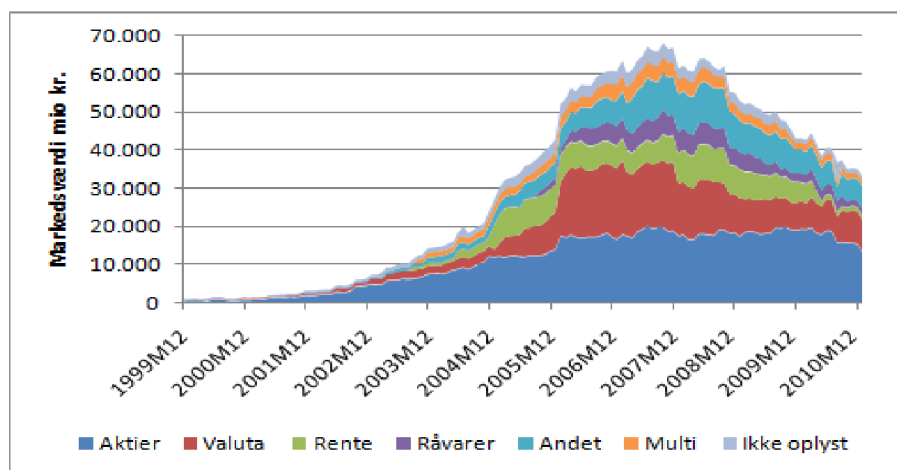
Figur 2.6: *Udvikling i samlet markedsværdi for strukturerede obligationer i Danmark.* Kilde: Nationalbankens statistikbank.

I figur 2.7 ses det, at fordelingen af hvem der investerer i de strukturerede obligationer, har været ret konstant over de sidste 10 år. De private investorer har hele tiden siddet på omkring 50% af markedsværdien. Finansielle og ikke-finansielle virksomheder har også været ret konstant repræsenteret med hver omkring 20% af markedsværdien. En ny tendens, der har vist sig fra slutningen af 2007, er at forsikrings- og pensionssektoren også er begyndt at handle i de strukturerede obligationer. Denne sektor holder dog stadig kun en beskedne procentdel af markedsværdien.



Figur 2.7: *Udvikling i samlet markedsværdi, fordelt på investorer, for strukturerede obligationer i Danmark.* Kilde: Nationalbankens statistikbank.

I figur 2.8 ses det, at der er sket en udvikling i hvilke underliggende aktiver, der benyttes i de strukturerede obligationer. I starten benyttede man mere eller mindre kun aktieindekserede obligationer, men man begyndte relativt hurtigt at anvende forskellige valutakryds som underliggende aktiver. I løbet af 2003 begyndte de underliggende aktiver også at omfatte renter, og i 2005 begyndte råvarerne også for alvor at dukke op. I dag er det, som tidligere nævnt, disse fire aktivklasser, der dominerer de strukturerede obligationer i Danmark.

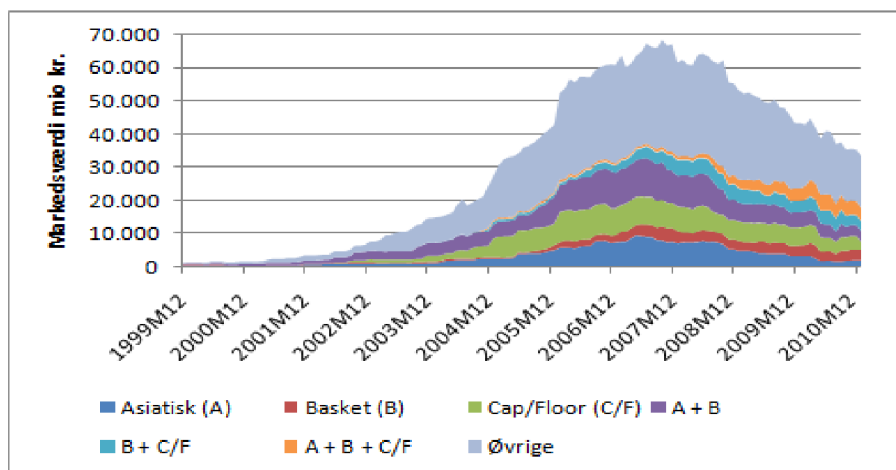


Figur 2.8: Udvikling i samlet markedsværdi, fordelt på underliggende aktivklasser, for strukturerede obligationer i Danmark. Kilde: Nationalbankens statistikbank.

Når man kigger på figur 2.9, er det først og fremmest vigtigt at gøre sig klart, at kategorien *øvrige* blandt andet indeholder plain vanilla optioner. Dette kan formentlig forklare, hvorfor der i starten stort set kun blev benyttet optioner fra denne kategori. Som tidligere nævnt havde de første strukturerede obligationer ofte en plain vanilla option som underliggende aktiv. I takt med at markedet for strukturerede obligationer voksede, blev arrangørerne også mere kreative i deres design af produkter. Som det fremgår af figuren, var det capped/floored produkter og asiatiske basketoptioner, som kom først frem på markedet. I 2007 handlede strukturerede obligationer med disse optionstyper som underliggende i høj grad, men også de selvstændige asiatiske- og basketoptioner blev handlet hyppigt på dette tidspunkt. I dag handles asiatiske, basket, capped/floored, asiatiske basket, capped/floored basket- og asiatiske capped/floored basketoptioner i stort set samme omfang, mens kategorien *øvrige* står for omkring 50% af markedsværdien. Det er dog svært at sige noget mere uddybende om dette, da vi ikke ved noget om, hvordan fordelingen af optionstyper i denne kategori er.

2.5 Risici forbundet med at investere i strukturerede obligationer

Der er flere risici forbundet med at investere i strukturerede obligationer. Først og fremmest er der risikoen for, at udstederen af produktet går fallit og dermed ikke



Figur 2.9: Udvikling i samlet markedsværdi, fordelt på underliggende optionstyper, for strukturerede obligationer i Danmark. Kilde: Nationalbankens statistikbank.

kan leve op til sine forpligtelser. Skulle dette være tilfældet, er der for det meste ingen *recovery* på produkterne og både hovedstolen og en eventuel optionsgevinst vil derfor være tabt. Da udstederen af de strukturerede obligationer altid har en meget høj kreditværdighed, er denne kreditrisiko dog meget lille. Det viste sig dog under finanskrisen, at selv banker med høj kreditværdighed kan gå konkurs, hvorfor det altid er væsentligt at tage denne risiko i betragtning.

Hovedstolsgarantien på en struktureret obligation er kun effektiv, såfremt produkterne holdes til udløb. Produkterne lægger derfor op til en såkaldt *køb og hold strategi*, hvorfor det er vigtigt at tage hensyn til investeringshorisonten, når man vurderer produkterne. Hvis en struktureret obligation købes den dag, den udstedes og holdes til udløb, er der færre risici involveret, end hvis man sælger den inden udløb. Men selv hvis investor holder produktet gennem hele dets levetid og dermed får hovedstolen tilbage ved udløb, vil han reelt lide et tab, hvis optionen ender ude af pengene. I et sådant tilfælde vil tabet være den manglende forrentning af investeringen i den strukturerede obligations løbetid. Mange private investorer har en tendens til kun at fokusere på risikoen for at tabe hovedstolen i en investering, hvorfor de strukturerede obligationer kan fremstå som et alletiders produkt, hvori man kan kombinere hovedstolsbeskyttelse med investering i risikofyldte aktiver. For at give et retvisende billede er det derfor nødvendigt, at potentielle investorer informeres om, at de i værste fald risikerer en forrentning på nul over produktets løbetid.

Som tidligere nævnt lægger produktet op til en køb og hold strategi. På trods af intentioner om at holde produktet til udløb kan der dog opstå situationer, hvor investor er tvunget til at sælge produktet før udløb. Det er derfor relevant at undersøge, hvilke risikokilder der eksisterer i det sekundære marked. Så snart hovedstolsgarantien ikke eksisterer, vil nulkuponobligationen være behæftet med en renterisiko, da en stigning i renteniveauet vil medføre en lavere kurs. Hvis kreditværdigheden for udstederen af den strukturerede obligation bliver dårligere, vil det ligeledes medføre et fald i nulkuponobligationens værdi, da kreditrisikoen på nulkuponobligationen hermed bliver større.

Værdien af optionsdelen i den strukturerede obligation afhænger af optionens mo-

neyness, der afhænger af en masse faktorer. Udviklingen i de underliggende aktiver har selv sagt afgørende betydning for optionens værdi, men det faktum at denne udvikling i høj grad afhænger af både volatiliteten på og korrelationen mellem de underliggende aktiver kræver opmærksomhed. Værdien af optionen er således følsom overfor en lang række faktorer, der har indflydelse på bevægelsen i de underliggende aktiver. Det sekundære marked for strukturerede obligationer er dog meget illikvidt, og man kan derfor ikke forvente, at priserne her vil stemme overens med de tilsvarende teoretisk beregnede priser. I tilfælde af førtidigt salg vil resultatet derfor oftest være, at investor er nødt til at sælge produktet til en pris, der ligger væsentligt under den teoretisk beregnede pris.

2.6 Kritik af de strukturerede obligationer

De strukturerede obligationer har, gennem deres lidt mere end 10 år på det danske marked, været kritiseret flittigt. Ikke mindst er de lokale banker blevet anklaget for at sælge de alt for uigennemskuelige produkter til private investorer, som ikke har de faglige forudsætninger for at gennemskue, hvad det er de køber. Problemet er her, at de lokale banker både fungerer som rådgivere og sælgere.

Især blev Forstædernes Bank stærkt kritiseret, da de solgte de såkaldte *Dannevirke* obligationer i 2004-2005. Kritikerne mente ikke, at Forstædernes Bank havde oplyst kunderne om, hvad produktet i virkeligheden indeholdt. Samtidig var de omkostninger, som var opgivet i prospektet, langt lavere end de faktiske omkostninger indeholdt i produktet.

Dannevirke obligationen er en struktureret obligation med en løbetid på 11 år og en variabel kuponrente. Den variable kuponrente beregnes som 3.19 gange forskellen i den 20-årige og den 2-årige *constant maturity* swaprente. Som en teaser for investorerne er de første to kuponer fastsat til 9.55%. Obligationen blev markedsført som en investering, der generelt ikke var følsom overfor renteændringer. Problemet var bare, at man ikke informerede om, at produktet var yderst følsomt over for en udfladning af rentekurven. Da det netop var, hvad der skete, endte obligationen med at have kuponbetalinger på 3.19 gange 0. Det vil sige, at det reelt endte med at være en nul kuponobligation. Da renterne samtidig steg, faldt nul kuponobligationens pris voldsomt, så det viste sig, at produktet i virkeligheden havde en høj rentefølsomhed. Denne rentefølsomhed var investorerne ikke blevet informeret om. Herud over var investorerne heller ikke blevet oplyst om, at udstederen har mulighed for at indløse obligationerne til kurs 100, såfremt forskellen på de to kurver skulle øges. Når det er tilfældet, er der reelt ikke længere nogen gevinstmulighed i produktet.

Ud over at have solgt produktet under falske forudsætninger viste det sig også at de årlige omkostninger på 2%, som var oplyst i prospektet, slet ikke udgjorde de faktiske omkostninger, som investorerne betalte. I *Jessen, C. [2006]* beskrives det, hvordan en ph.d.-studerende har regnet sig frem til, at de faktiske omkostninger ikke er på 2%, men nærmere 10%. Samtidig hævder artiklen, at folk fra branchen har udtalt, at det er helt normalt, at strukturerede produkter med en løbetid på 2 til 7 år indeholder skjulte omkostninger af denne størrelsesorden.

Kritiken af de strukturerede produkter går altså både på, at produkterne er for komplekse for den almene investor, og at de indeholder enormt høje skjulte omkost-

ninger.

2.7 Motivationsfaktorer for private investorer

Der er flere karakteristika ved de strukturerede obligationer, som kan være interessante for en privat investor. Som vi tidligere har nævnt, er en af de tiltalende ting ved strukturerede obligationer for den private investor kombinationen af hovedstolsbeskyttelse med muligheden for at investere i bevægelsen i risikofyldte aktiver. Ved at investere i en struktureret obligation, begrænses et eventuelt tab til den forrentning, man kunne have opnået ved en alternativ investering. Omvendt har investor stadig fuld upside, såfremt den underliggende option ender i pengene. For at få en tilsvarende upside ved at handle direkte i de underliggende aktiver, skulle investor samtidig påtage sig den fulde downside. Det vil sige, at han reelt kunne risikere at miste 100% af sin investering i de underliggende aktiver.

Handel i *out-of-the-money* (OTM) optioner kan bidrage med store afkastmuligheder i porteføljen, da prisen på OTM optionerne er lav sammenlignet med prisen på de underliggende aktiver. Dette kan investor også drage nytte af i de strukturerede obligationer. For at opnå tilsvarende afkastmuligheder ved at handle i de underliggende aktiver, skulle investor købe op/sælge ud i de underliggende aktiver, hver gang kurserne på disse ændrede sig. Det vil sige, at investor skulle tilpasse den replikerende portefølje⁷ kontinuert, hvilket ikke er muligt. De underliggende optioner i de strukturerede obligationer tillader derfor investor at give sin portefølje nogle afkastmuligheder, som han ellers ikke ville have adgang til.

Via de strukturerede obligationer kan den private investor også få eksponering til produkter, som han ellers ikke ville have mulighed for at investere i, hvilket kan bidrage med diversifikation i hans portefølje. Herudover har optionerne i de strukturerede obligationer ofte længere løbetider end de optioner, private investorer ellers har adgang til, hvilket i mange tilfælde passer godt til privates investeringsprofil. Også kompleksiteten i optionerne i de strukturerede obligationer er unik i forhold til de ellers udbudte optioner.

Samlet set må alle de nævnte faktorer trække i en positiv retning, når en privat investor overvejer at investere i en struktureret obligation.

⁷Den replikerende portefølje svarer til deltahedget på optionen

Kapitel 3

Prisfastsættelse af nulkuponobligationer

Som nævnt i kapitel 2 består en struktureret obligation af to elementer; en nulkuponobligation (NKO), med samme hovedstol og løbetid som den strukturerede obligation, og en option skrevet på ét eller flere underliggende aktiver. Vi ser i dette afsnit nærmere på NKO'en og hvordan denne prisfastsættes.

Vi ved fra kapitel 2, at værdien af en NKO på tidspunkt 0 med udløb på tidspunkt T er givet ved

$$P(0, T) = H \cdot e^{-rT} \quad (3.1)$$

hvor H er hovedstolen, og r er den risikofri rente. Prisfastsættelsen af obligationen virker umiddelbart simpel, men det viser sig, at der er en del arbejde forbundet med at vælge og beregne den rente, der diskonteres med. I det følgende afsnit argumenterer vi for vores valg af rente. Herefter viser vi, hvordan en nulkuponrentestruktur kan konstrueres ud fra swaprentekurven ved brug af *bootstrapping*. Som afslutning diskuterer vi kort den kreditrisiko, der er forbundet med at investere i obligationerne.

3.1 Valg af rente

Til prisfastsættelse af NKO'er og optioner har vi brug for det, der i teorien kaldes den risikofri rente. En sådan rente eksisterer kun i teorien, og det er derfor ikke oplagt, hvad man skal vælge som approksimation for denne.

En mulighed er at benytte en nulkuponrente beregnet ud fra priserne på statsobligationer, da disse har en kreditrisiko, der er tæt på nul. Statsobligationer har dog ofte en markant lavere rente end andre obligationer med meget lav kreditrisiko. Forklaringen på dette findes i den til tider store efterspørgsel på statsobligationer. Efterspørgslen driver prisen i vejret, hvilket resulterer i, at den effektive rente falder. Den store efterspørgsel på statsobligationer skyldes, at de er yderst likvide. De kan derfor have stor indflydelse på solvenskravene til en finansiel institution. For eksempel vil en finansiel institution, der investerer i statsobligationer, have et lavere krav til størrelsen af bufferkapital end en, der investerer i andre former for obligationer med lav risiko. På baggrund af ovenstående vurderer vi, at den risikofri rente, vi

har brug for, skal ligge højere end den, der fremkommer ved at benytte priser på statsobligationer.

Vi har i stedet valgt at bruge en approksimation for den risikofri rente, der er baseret på swaprenter. Swaprenterne påvirkes ikke af de forhold, vi har nævnt ovenfor. I stedet forventes de at indeholde et element af kreditrisiko. En swap består som udgangspunkt af en variabel rente, der swappes (byttes) til en fast rente. Den variable rente i en swap er bestemt udfra en pengemarkedsrente (for eksempel LIBOR), der angiver, hvilken rente en bank med (typisk) AA/A kreditrating skal betale for at låne penge i en tilsvarende bank. Pengemarkedsrenten skal derfor været sat højt nok til, at banken, der udlåner pengene, bliver kompenseret for risikoen for, at banken, der låner pengene, går fallit. Den faste rente (også kaldet swaprenten) er den rente, der får værdien af swapkontrakten til at være nul ved indgåelsen af kontrakten. Derfor vil det element af kreditrisiko, der ligger i pengemarkedsrenten, også have indflydelse på swaprenten og få denne til at stige.

Vi kan altså konkludere, at den risikofri rente må ligge højere end renten på statsobligationer - men ikke helt så højt som swaprenten. *Feldhütter & Lando* undersøger i artiklen *Decomposing Swap Spreads* fra 2008, hvor stor en del af spændet mellem renten på statsobligationer og swaprenten, der kan tilskrives kreditrisiko. De kommer frem til, at kun en lille del af spændet skyldes kreditrisiko, mens langt den største del skyldes det *convenience yield*, der er forbundet med at investere i statsobligationer. På baggrund af de empiriske resultater fra artiklen har vi derfor valgt at udlede nulkuponrentestrukturen fra swaprenterne.

Der er dog et tilfælde, hvor det ikke er muligt at udlede nulkuponrentestrukturen fra swaprenterne. Vi får på et tidspunkt brug for en kinesisk risikofri rente, men da der ikke eksisterer en kinesisk swaprente, kan vi ikke benytte samme medtode som for de andre risikofri renter. Vi beregner i stedet den kinesiske rente udfra *non deliverable forwards* (NDF'er). En NDF er en *outright forward* kontrakt, som indgås mellem to parter, hvor parterne afregner forskellen mellem NDF-kursen og den fremtidige spotkurs på et aftalt tidspunkt T for hovedstolen H . En NDF er altid cashsettled, hvilket vil sige, at der ikke sker en udveksling af kontraktens hovedstol.

Ved indgåelse af kontrakten fastlægges hovedstolen H og NDF-kursen X_0 observeres. På tidspunkt T fikses spotkursen X_T i markedet, hvorefter kontrakten afregnes. Lad os for at illustrere cashflowet i en NDF kontrakt forestille os, at det er muligt at tage en position i CNY. På tidspunkt 0 sælges H USD til kurs X_0 , hvilket giver os HX_0 CNY. På tidspunkt T fikses kursen og vi sælger de HX_0 CNY til kurs X_T . På tidspunkt T har vi således $H\frac{X_0}{X_T}$ USD. Afkastet af disse transaktioner er $H\frac{X_0}{X_T} - H = H\left(\frac{X_0}{X_T} - 1\right)$. Da eksemplet beskriver de implicitte transaktioner i en NDF, er dette netop cashflowet ved udløb i en NDF kontrakt. En NDF afregnes altid i kontraktens base currency, hvilken stort set altid er USD.

Gennem NDF'er har investorer altså mulighed for at komme ind på valutamarkedet i lande, hvor direkte handel med valuta er blevet forbudt af regeringen¹ (hvilket er tilfældet i Kina).

For at komme frem til den kinesiske nulkuponrentestruktur beregner vi rentedifferen-

¹For eksempel for at minimere volatiliteten på landets valuta.

tialet mellem Kina og USA på baggrund af forwardkurserne, hvorefter vi korrigerer de amerikanske swaprenter med de beregnede rentedifferentialer. Fremgangsmåden er som følger:

- På tidspunkt 0 observeres spot kursen $X(0)$ mellem Renminbi og USD².
- På tidspunkt 0 observeres ligeledes hvordan forwardstrukturen for de ønskede løbetider ser ud. Herefter beregnes forskellen mellem spotkursen og forwardkurserne

t	Forward kurser	Difference
1 år	F_1	$X(0) - F_1$
2 år	F_2	$X(0) - F_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30 år	F_{30}	$X(0) - F_{30}$

- Nu kan det annualiserede rentedifferential (RD) beregnes ved følgende formel:

$$RD_t = \left(\frac{1 + Difference_t}{X(0)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

- Når rentedifferentialerne er beregnet, korrigeres den amerikanske swaprente-struktur for at udlede den kinesiske

t	Amerikansk swaprente	Kinesisk swaprente
1 år	r_1^{US}	$r_1^{US} - RD_1$
2 år	r_2^{US}	$r_2^{US} - RD_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30 år	r_{30}^{US}	$r_{30}^{US} - RD_{30}$

Intuitionen bag ovenstående bygger på *den udækkede renteparitet*³, som kan approkimeres med følgende udtryk:

$$r_t^{Kina} = r_t^{US} - \frac{E[X(t + \Delta t)] - X(t)}{X(t)} \quad (3.2)$$

Her ses det netop, at den kinesiske swaprente kan udtrykkes som den amerikanske swaprente korrigeret med den forventede ændring i valutakursen. Rentedifferentialet beskriver derfor den forventede ændring i valutakursen.

² $X(0)$ angiver prisen for 1 Renminbi i USD, hvilket vil sige, at vi vender krydset i forhold til den faktiske konvention.

³Denne vil blive forklaret nærmere i kapitel 4

3.2 Bootstrapping

Fra ligning (3.1) ved vi, hvordan værdien af en NKO på tidspunkt 0 er udtrykt. Hvis vi antager, at hovedstolen på obligationen er 1 samt at renten afhænger af løbetiden, kan prisen på NKO'en på tidspunkt t skrives som

$$P(t, T) = e^{-r(t, T) \cdot (T-t)} \quad (3.3)$$

under forudsætning af, at renten tilskrives kontinuert. Nulkuponrenten $r(0, T)$ kaldes også obligationens effektive rente og er givet ved

$$r(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln(P(t, T)) \quad (3.4)$$

Prisen på en NKO, $P(t, T)$, angiver værdien på tidspunkt t af med sikkerhed at modtage 1 på tidspunkt T . $P(t, T)$ kan derfor ses som markedets diskonteringsfaktor mellem tidspunkt t og T . Hvis vi på tidspunkt $t = 0$ kender diskonteringsfaktoren $P(0, T)$ for ethvert T , kan vi således diskontere sikre betalinger, der måtte falde på ethvert fremtidigt tidspunkt. Såfremt man har kendskab til $P(0, T)$, er det derfor muligt at finde den tilhørende nulkuponrente $r(t, T)$ (og omvendt).

Hvis man har kendskab til nulkuponrentestrukturen, kan man prisfastsætte en fastforrentet obligation ved at tilbagediskontere de kendte kuponbetalinger $K(t)$

$$B(0) = \sum_{t=t_1}^{t_n} K(t) \cdot P(0, t) \quad (3.5)$$

Tilsvarende er det muligt at gå den anden vej og beregne en nulkuponrentestruktur på baggrund af priserne på fastforrentede obligationer. Vi antager, at der findes n fastforrentede obligationer med løbetider på $1, 2, \dots, n$ perioder. Vi antager yderligere, at obligationerne udbetaler én kupon pr. periode og at denne falder på samme tidspunkt for alle obligationerne. Obligationen, der løber over én periode, har kun en enkelt ydelse og diskonteringsfaktoren $P(0, 1)$ kan derfor findes som

$$B(0)_1 = P(0, 1) \cdot K(1)_1 \Leftrightarrow P(0, 1) = \frac{K(1)_1}{B(0)_1} \quad (3.6)$$

Prisen på obligationen, der udløber efter to perioder, kan udtrykkes som

$$B(0)_2 = P(0, 1) \cdot K(1)_2 + P(0, 2) \cdot K(2)_2 \quad (3.7)$$

Ved at indsætte udtrykket for $P(0, 1)$ fra ligning (3.6) er det muligt at bestemme diskonteringsfaktoren $P(0, 2)$. Fortsætter man på denne måde, vil man til sidst have bestemt alle diskonteringsfaktorerne for tidspunkterne $(1, 2, \dots, n)$. Udfra disse er det efterfølgende muligt at bestemme nulkuponrentestrukturen for disse løbetider. Den ovennævnte metode til bestemmelse af nulkuponrentestrukturen kaldes for bootstrapping.

I denne opgave ønsker vi at prisfastsætte NKO'er med løbetider på henholdsvis 3.5 og 7 år. Vi konstruerer dog alligevel rentekurven fra 3 måneder op til 30 år, da dette ikke er forbundet med meget ekstra arbejde. For løbetider op til 12 måneder benytter vi pengemarkedsrenterne for de pågældende lande⁴, hvilke angiver den rente, som en bank kan låne penge til i de pågældende lande for de givne løbetider. For løbetider på 1 til 30 år benytter vi swaprenter⁵, som er den rente en bank kan modtage/betale mod til gengæld at betale/modtage en variabel pengemarkedsrente⁶. Som nævnt sættes swaprenten således, at værdien af swapkontrakten er nul ved indgåelse, hvilket betyder, at den T -årige swaprente er bestemt ved⁷

$$r_T^{swap} = \frac{1 - P(0, T)}{\sum_{t=1}^T P(0, t)} \quad (3.8)$$

og opfylder således

$$1 = r_T^{swap} \sum_{t=1}^T P(0, t) + P(0, T) \quad (3.9)$$

Den T -årige swaprente er altså den kuponrente, der får obligationen med en løbetid på T år til at handle til pari. Da de observerede swaprenter indirekte kan opfattes som information om handlede obligationer, er det derfor muligt at bestemme en nulkuponrentestruktur ved brug af bootstrapping. Udfra ligning (3.9) kan vi opskrive følgende lineære ligningssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_1^{swap} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_2^{swap} & 1 + r_2^{swap} & 0 & \dots & 0 \\ r_3^{swap} & r_3^{swap} & 1 + r_3^{swap} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{30}^{swap} & r_{30}^{swap} & r_{30}^{swap} & \dots & 1 + r_{30}^{swap} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0, 1) \\ P(0, 2) \\ P(0, 3) \\ \vdots \\ P(0, 30) \end{pmatrix}$$

Udfra ligningssystemet kan vi finde diskonteringsfaktorerne, hvorfra vi kan bestemme nulkuponrenterne ved brug af ligning (3.4). Sammen med de korte nulkuponrenter giver dette en nulkuponrentestruktur med løbetider fra 3 måneder op til 30 år. Da vi kun har beregnet de årlige nulkuponrenter for løbetider over et år, har vi benyttet os af *lineær interpolation* til at bestemme den 3.5-årige nulkuponrente således at

$$r(0, 3.5) = \frac{1}{2}r(0, 3) + \frac{1}{2}r(0, 4). \quad (3.10)$$

⁴USA: BBA LIBOR USD, Japan: BBA LIBOR JPY, Euroland: EURIBOR og Danmark: CIBOR.

⁵USD Swap, JPY Swap, EUR Swap og DKK Swap.

⁶Hvor ofte, der betales fixed/float, afhænger af den enkelte swaprente.

⁷Lando & Poulsen [2006] side 121.

3.3 Kreditrisiko

Når man investerer i en obligation, vil der altid være en risiko for, at udstederen ikke kan leve op til sine forpligtelser. Hvis dette er tilfældet, mister man de betalinger, som man ellers var berettiget til i form af hovedstol og eventuelle kuponer. Denne type af risiko kaldes for kreditrisiko. Hvor stor kreditrisikoen på et produkt er, afhænger naturligvis af obligationsudstederen og dennes *kreditværdighed*. Et mål for en udsteders kreditværdighed tildeles af et såkaldt rating-bureau⁸, hvormed man kan sammenligne forskellige udsteders kreditværdighed. Udstedelsen af en obligation svarer til, at udsteder optager et lån. Obligationens effektive rente vil derfor afhænge af udstederens kreditværdighed. Således vil en høj kreditværdighed betyde, at udsteder skal betale en lavere rente end ved en lav kreditværdighed. Dette skyldes, at den, der køber obligationen, skal kompenseres for den øgede risiko for, at udstederen går fallit.

I de produkter, som vi prisfastsætter senere i opgaven, er udstederne PLUS Invest og KommuneKredit. Disse blev begge vurderet til at have kreditværdighed AAA⁹ ved produkternes udstedelse i henholdsvis 2006 og 2008. Det blev altså vurderet, at det var meget usandsynligt, at et af disse selskaber ville gå fallit og dermed ikke være istand til at betale hovedstolen tilbage ved obligationens udløb.

Som tidligere nævnt er swaprenten baseret på pengemarkedsrenten, som er den rente en bank, der typisk er A eller AA rated, kan låne penge til i en anden bank med tilsvarende rating. Swaprenten indeholder derfor et element af en risikopræmie, svarende til, at investor kompenseres for kreditrisikoen på en A/AA rated udsteder. Da udstederne af nulkuponobligationerne i de produkter, som vi priser, er AAA ratede, betyder det, at det ikke er helt korrekt at tilbagediskontere betalingen fra nulkuponobligationerne med swapnulkuponrenten. Grundet forskellen i kreditværdigheden vil den risikopræmie, der ligger i swaprenten, være for høj, hvilket er et argument for at swaprenten bør justeres en smule. En fornuftig justering vil derfor bestå i, at observere kreditspændet mellem AAA og AA eller A ratede udstedere og korrigere swaprenten med dette kreditspænd.

Som udgangspunkt vælger vi at se bort fra denne effekt, når vi priser produkterne i kapitel 7. I den efterfølgende diskussion af priserne analyserer vi dog, hvorledes en sådan justering ville ændre resultatet.

⁸De tre store rating-bureauer er Moody's, Standard & Poor's og Fitch Ratings.

⁹AAA er den højest mulige rating og den samme, som den danske stat har.

Kapitel 4

Kontinuert prisfastsættelse af derivater

I dette kapitel ser vi nærmere på nogle af de principper, der ligger til grund for prisfastsættelsen af derivater. Vi præsenterer nogle generelle begreber fra den teori, som optionsmodellerne bygger på, og vi ser nærmere på nogle værktøjer, som vil blive benyttet senere i opgaven. Afsnittet starter med en gennemgang af *stokastiske processer*, efterfulgt af en beskrivelse af begrebet *replikering* og en introduktion til, hvordan dette kan bruges i prisfastsættelsen af derivater. Herefter følger en definition af begreberne *arbitrage* og risikoneutral prisfastsættelse. Vi beskriver efterfølgende, hvordan modellen ændres, hvis det underliggende aktiv udbetaler dividende eller er et valutakryds. Til slut i kapitlet præsenterer vi teknikken bag *numraire skifte*. Afsnittet tager udgangspunkt i kapitel 1 i *Glasserman, P. [2003]*.

4.1 Stokastiske processer

I dette afsnit giver vi en kort introduktion til nogle af de vigtigste principper omkring stokastiske processer, som bruges til modellering og prisfastsættelse af produkterne i opgaven. Afsnittet indledes med en gennemgang af sandsynlighedsrum og informationsmængder. Herefter introduceres stokastiske variable og processer, hvor *Markov egenskaben* og begrebet *martingale* defineres. Efter dette følger en generel gennemgang af *Itô processer* og *Itô's lemma*. Afsnittet afsluttes med et eksempel på en Itô proces, nemlig den *geometriske Brownske bevægelse*.

Sandsynlighedsrum

En stokastisk proces er en proces, der udvikler sig tilfældigt over tid i henhold til et udfaldsrum Ω , en informationsmængde $\mathcal{F}$ og et sandsynligheds mål P . Tilsammen danner disse sandsynlighedsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, hvor der til ethvert muligt udfald $F \in \Omega$ hører en betinget sandsynlighed $P(F | \mathcal{F})$.

Udfaldsrummet Ω er sættet af mulige værdier eller tilstande, som processen kan antage eller befinde sig i. Et simpelt eksempel er et studie af udfaldet af ét kast med en terning, hvor udfaldsrummet i dette tilfælde vil være $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Informationsmængden (også kaldet filtreringen) $\mathcal{F}$ indeholder alle de hændelser,

hvor til der kan tilskrives en sandsynlighed. Betragter man et andet eksempel med tre kast med en terning, kan eksempler på hændelser være $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ og $\{1, 3, 5\}$. Da en hændelse består af et eller flere udfald, er informationsmængden et sæt af underrum til udfaldsrummet.

Der gælder at:

- Hele udfaldsrummet skal kunne tilskrives en sandsynlighed, dvs. $\Omega \in \mathcal{F}$;
- Hvis et udfald $F \subseteq \Omega$ kan tilskrives en sandsynlighed, kan der ligeledes tilskrives en sandsynlighed til F 's komplementære $F^C \equiv \Omega \setminus F$, dvs. $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$; og
- for enhver følge $F_1, F_2, \dots$ af mængder i $\mathcal{F}$ tilhører foreningensmængden også $\mathcal{F}$, dvs. $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$.

P er sandsynlighedsmålet, der formelt set er en funktion, der sender et udfald fra $\mathcal{F}$ over i intervallet $[0,1]$. Til enhver tilstand $F \in \mathcal{F}$ tildeler sandsynlighedsmålet et tal $P(F)$ i intervallet $[0,1]$. Dette tal kaldes P -sandsynligheden (eller bare sandsynligheden) for F . Et sandsynlighedsmål skal opfylde følgende betingelser:

- $P(\Omega) = 1$ og $P(\emptyset) = 0$, hvor $\emptyset$ repræsenterer den tomme mængde.
- Hvis $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$ er parvis disjunkte mængder så er $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)$

Markov egenskaben og martingales

En stokastisk variabel er en funktion fra Ω ind i R^K . Den stokastiske variabel $x : \Omega \rightarrow R^K$ tildeler ethvert udfald $\omega \in \Omega$ en værdi $x(\omega) \in R^K$. En stokastisk proces X er en række af stokastiske variable, hvor der til hvert relevant tidspunkt findes en stokastisk variabel. Vi lader X_t være værdien af den stokastiske proces til tid t og $\mathcal{F}_t$ være informationen om processens udvikling op til tidspunkt t . Før vi definerer begreberne Markov egenskab og martingale, præsenterer vi en speciel type stokastisk proces kaldet en *Wienerproces*.

En Wienerproces W_t er en stokastisk proces, der udvikler sig tilfældigt over tid. Processen er defineret ved følgende:

- $W_0 = 0$
- For ethvert $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$ er de stokastiske variable $W_{t_1} - W_{s_1}, \dots, W_{t_n} - W_{s_n}$ uafhængige
- For ethvert $s < t$ er den stokastiske variabel $W_t - W_s$ normalfordelt med middelværdi 0 og varians $(t - s)$
- Funktionen der sender $t \rightarrow W_t$, er en kontinuert funktion af t .

Definition 4.1. *Markov egenskaben siger, at forventningen til en fremtidig tilstand i processen kun afhænger af processens nuværende tilstand og ikke af hele processens historik. Dvs. at der for $s < t$ gælder at*

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = E(W_t | W_s) \quad (4.1)$$

For at bevise Markov egenskaben antager vi, at den stokastiske proces X_t følger en Wienerproces. Antag yderligere, at $s < t$ og betragt den betingede forventning $E(W_t | \mathcal{F}_s)$. Denne forventning kan skrives på følgende måde:

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = E(W_s | \mathcal{F}_s) + E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) \quad (4.2)$$

Da W_s er $\mathcal{F}_s$ -målelig¹ er det første led på højresiden lig W_s . Og da der yderligere gælder, at $W_t - W_s$ er uafhængig af $\mathcal{F}_s$ er det andet led $E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s)$ lig nul.

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s = E(W_t | W_s) \quad (4.3)$$

Ligheden mellem venstre og højre side i ligningen ovenfor illustrerer Markov egenskaben. For at forudsige W_t , givet al information op til tid s , er det altså tilstrækkeligt at betragte værdien af processen på tid s .

Definition 4.2. *En stokastisk proces W_s , hvor der gælder, at $E(W_s) < \infty$, siges at være en martingale med hensyn til $\mathcal{F}_s$, hvis W_s er målelig med hensyn til $\mathcal{F}_s$ og hvis der for $s < t$ gælder at*

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s \quad (4.4)$$

eller ækvivalent

$$E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = 0 \quad (4.5)$$

Betingelsen $E(W_s) < \infty$ er nødvendig for at garantere, at de betingede forventninger er veldefinerede. Begrebet martingale anvendes senere i opgaven, når det risikoneutrale sandsynlighedsmål (også kendt som det *ækvivalente martingalemål*) bliver introduceret.

Itô's lemma

En vigtig type af stokastiske processer er de såkaldte Itô processer, som afhænger af et underliggende aktiv og tiden. Hvis vi har en tilstandsvariabel X_t , er processen for denne tilstandsvariabel givet ved

¹Vi kender værdien af W_s på tidspunkt s .

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t \quad (4.6)$$

Hvor μ og σ er funktioner af tilstandsvariablen X_t og tiden t . Processen består altså af to led; et deterministisk led $\mu(X_t, t) dt$ og et stokastisk led $\sigma(X_t, t) dW_t$. Det deterministiske led $\mu(X_t, t) dt$ ses som processens drift og er derfor et udtryk for den forventede udvikling i processen. I det stokastiske led $\sigma(X_t, t) dW_t$ er $\sigma(X_t, t)$ et udtryk for volatiliteten, som angiver, hvor meget processen kan forventes at svinge. Ledet dW_t er en Wienerproces, der tilføjer stokastik til processen. Har man en Itô proces, kan *Itô's lemma* benyttes til at finde dynamikken for en funktion, der afhænger af tilstandsvariablen i Itô processen og tiden. Et eksempel på dette kunne være prisen på en plain vanilla option, der netop afhænger af prisen på det underliggende aktiv (tilstandsvariablen) og tiden.

Sætning 4.1. (*Itô's lemma*)² Lad X_t være en Itô proces, der opfylder (4.6), hvor μ og σ er funktioner af X_t og tiden t og W_t er en endimensionel Wienerproces. Lad $g(X_t, t)$ være en funktion, der antager reelle værdier og er to gange differentiabel i X_t og kontinuert differentiabel i t . Da er processen Y_t defineret som

$$Y_t = g(X_t, t) \quad (4.7)$$

en Itô proces med følgende dynamik

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial g}{\partial X_t}(X_t, t) \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2}(X_t, t) \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial X_t}(X_t, t) \sigma_t dW_t \quad (4.8)$$

Det er værd at bemærke, at dynamikken, som man finder ved brug af Itô's lemma, også er en Itô proces med drift $\left(\frac{\partial g}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial g}{\partial X_t}(X_t, t) \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2}(X_t, t) \sigma_t^2 \right)$ og volatilitet $\left(\frac{\partial g}{\partial X_t}(X_t, t) \sigma_t \right)$, mens risikokilden dW_t i de to Itô processer er den samme.

Sætning 4.2. (*Itô's lemma*)³ Lad $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ være en n -dimensional proces med dynamik som i (4.6), og lad $g(X_t, t)$ være en funktion, der antager reelle værdier og er to gange differentiabel i X_t og kontinuert differentiabel i t . Da er processen Y_t defineret som

$$Y_t = g(X_t, t) \quad (4.9)$$

en Itô proces med følgende dynamik (funktionsargumenter er udeladt af hensyn til overskueligheden)

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_t^i} \mu_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^i \partial X_t^j} \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial g}{\partial X_t^i} dW_t^i \quad (4.10)$$

Som i tilfældet med én enkelt dimension er dynamikken for $Y(t)$ også en Itô-proces i tilfældet med flere dimensioner.

²Se Björk, T. [2009] - Theorem 4.10

³Se Björk, T. [2009] - Theorem 4.18

Geometrisk Brownske bevægelse

En geometrisk Brownske bevægelse (GBM) er en stokastisk proces, der udvikler sig tilfældigt over tid. Processen bruges til at modellere aktiepriser i *Black-Scholes* verden og er den mest benyttede proces til modellering af aktiepriser. Processen opfylder Markov egenskaben (men er ikke altid en martingale) og er beskrevet ved følgende dynamik:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4.11)$$

hvor W_t er en Wienerproces. Processens drift μ og volatiliteten σ antages at være konstante. Processens drift skal forstås som den forventede ændring pr. tidsenhed, mens volatiliteten angiver standardafvigelsen pr. tidsenhed. Betragter man den procentvise ændring i værdien af aktivet (afkastet), kan processen skrives på følgende måde:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \Leftrightarrow \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (4.12)$$

Det ses fra ligning (4.12), at det ikke er prisen på aktivet men derimod de relative ændringer (afkastet), der følger en Wienerproces. Dette medfører, at de relative ændringer i prisen på aktivet er normalfordelte med middelværdi μ og volatilitet σ . Processen i ligning (4.11) er en GBM. Vi vil i resten af opgaven antage, at priser på aktier og andre aktiver følger en sådan proces.

Vi ved altså, at de relative ændringer i aktivets værdi er normalfordelte. Vi ønsker nu at undersøge, hvordan aktivets værdi udvikler sig over tid. Vi antager derfor, at vi har et aktiv S_t , der følger en GBM og definerer efterfølgende $Y_t = \ln(S_t)$. Vi kan nu benytte Itô's lemma til at finde processen for Y_t . Først findes de relevante afledte:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Y_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 Y_t}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Ved indsættelse i Itô's lemma fås følgende proces for Y_t :

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(\frac{1}{S_t} S_t \mu + 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) S_t^2 \sigma^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} S_t \sigma dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \quad (4.13)$$

Y_t følger altså en Wienerproces med driften $\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)$ og volatiliteten σ . Vi betragter nu ændringen i Y_t mellem tidspunkt t_1 og t_2 . Ændringen kan skrives på følgende måde:

$$Y_{t_2} - Y_{t_1} = \ln(S_{t_2}) - \ln(S_{t_1}) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_2 - t_1) + \sigma (W_{t_2} - W_{t_1}) \quad (4.14)$$

Vi ved pr. definition at $(W_{t_2} - W_{t_1}) \sim N[0, t_2 - t_1]$, da W_t følger en Wienerproces, så formel (4.14) kan skrives som i ligning (4.15)

$$Y_{t_2} - Y_{t_1} = \ln(S_{t_2}) - \ln(S_{t_1}) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_2 - t_1) + \sigma\sqrt{t_2 - t_1}Z \quad (4.15)$$

hvor $Z \sim N[0, 1]$. Dette giver

$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1) + \sigma\sqrt{t_2 - t_1}Z} \quad (4.16)$$

Ud fra ligning (4.16) kan vi altså konkludere at

$$\ln(S_{t_2}) - \ln(S_{t_1}) = \ln\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_2 - t_1), \sigma^2(t_2 - t_1)\right] \quad (4.17)$$

Givet at aktivet S_t følger en GBM, gælder der altså, at S_t er lognormalfordelt. Det vil sige, at log-afkastet $\ln\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}\right)$ er normalfordelt. Den forventede værdi af S_t på et givent fremtidigt tidspunkt kan skrives som

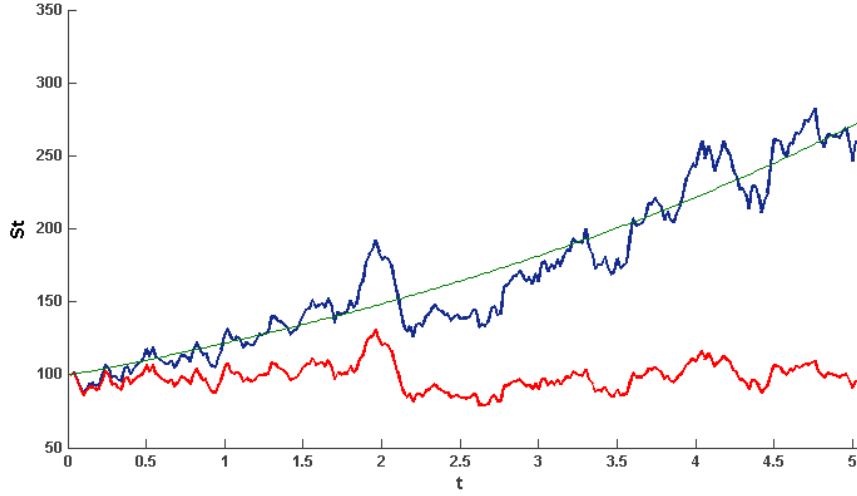
$$\begin{aligned} E[S_{t_2}] &= S_{t_1} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1)} E\left[e^{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}Z}\right] = S_{t_1} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t_2 - t_1)} \\ &= S_{t_1} e^{\mu(t_2 - t_1)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Som det ses i ligning (4.18), kan μ fortolkes som det forventede kontinuerte afkast på aktivet S_t .

I figur (4.1) er vist to GBM'er simuleret ud fra samme Wienerproces W_t . For at illustrere effekten af processens drift er μ sat til 0.2 i den ene og 0 i den anden. For begge processer er standardafvigelsen σ sat til 0.25. I figuren vises samtidig den forventede værdi, som er beskrevet i ligning (4.18) af processen med $\mu = 0.2$. Processen med $\mu = 0$ forventes at svinge omkring sin startværdi, da den ikke har nogen drift. I figuren ses det tydeligt, hvordan processerne svinger omkring den forventede værdi. Det ses yderligere, at værdien af den blå kurve, som forventet, stiger markant i forhold til værdien af den røde kurve. Dette skyldes forskellen i driften.

4.2 Replikering

Vi betragter en økonomi med d aktiver, hvis priser $S_i(t)$, $i = 1, \dots, d$ er beskrevet ved et system af stokastiske differentialligninger



Figur 4.1: *Eksempel på simulering af geometriske Brownske bevægelser med $S_0 = 100$, $\mu = 0.2$ for den blå kurve og $\mu = 0$ for den røde kurve, $\sigma = 0.25$, $T = 5$ og $dt = 0.02$. Den grønne kurve angiver den forventede værdi af processen med $\mu = 0.2$.*

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i(\mathbf{S}(t), t) dt + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top d\mathbf{W}_t, \quad (4.19)$$

hvor $\mathbf{W}_t$ er en k -dimensional Wienerproces. Vi antager, at μ_i og $\boldsymbol{\sigma}_i$ er deterministiske funktioner af priserne på aktiverne $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_d(t))^\top$ og tiden t . Den instantane kovarians mellem afkastet på aktiv i og aktiv j er givet ved

$$\Sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top \boldsymbol{\sigma}_j(\mathbf{S}(t), t), i, j = 1, \dots, d. \quad (4.20)$$

En portefølje er karakteriseret ved en vektor $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$, hvor θ_i angiver antallet af enheder af aktiv i i porteføljen. Da hver enhed af aktiv i har værdien $S_i(t)$ på tidspunkt t , er porteføljens samlede værdi på tidspunkt t givet ved

$$V(t) = \theta_1 S_1(t) + \dots + \theta_d S_d(t), \quad (4.21)$$

hvilket vi fremover vil skrive som $\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{S}(t)$. En handelsstrategi er således en stokastisk proces af porteføljevektorer $\boldsymbol{\theta}(t)$, der til ethvert tidspunkt t angiver porteføljens sammensætning. Vi lægger en restriktion på $\boldsymbol{\theta}(t)$, der siger, at processen skal være forudsigelig. Det vil sige, at handelsstrategien kan afhænge af information op til, men ikke på, tidspunkt t .

Hvis beholdningerne i porteføljen fastlåses i intervallet $[t, t+h]$, kan værdiændringen af beholdningen af det i 'te aktiv skrives som $\theta_i(t) [S_i(t+h) - S_i(t)]$, mens ændringen i porteføljens samlede værdi kan skrives som $\boldsymbol{\theta}(t)^\top [\mathbf{S}(t+h) - \mathbf{S}(t)]$. Porteføljens samlede værdiændring i intervallet $[0, t]$ kan beskrives ved det stokastiske integrale

$$\int_0^t \boldsymbol{\theta}(u)^\top d\mathbf{S}(u) \quad (4.22)$$

En handelsstrategi siges at være *selvfinansierende*, hvis den for alle t opfylder følgende:

$$\boldsymbol{\theta}(t)^\top \mathbf{S}(t) - \boldsymbol{\theta}(0)^\top \mathbf{S}(0) = \int_0^t \boldsymbol{\theta}(u)^\top d\mathbf{S}(u) \quad (4.23)$$

Venstresiden angiver ændringen i porteføljens værdi fra tidspunkt 0 til tidspunkt t , mens højresiden angiver gevinsten ved handel i løbet af perioden. At en portefølje er selvfinansierende betyder altså, at alle køb af aktiver er finansieret ved salg af andre aktiver og, at der hverken er tilført eller trukket penge ud af porteføljen i løbet af perioden. Ved at omskrive ligning (4.23) til

$$\boldsymbol{\theta}(t)^\top \mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\theta}(0)^\top \mathbf{S}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\theta}(u)^\top d\mathbf{S}(u) \quad (4.24)$$

kan udtrykket tolkes som, at en initial investering på $V(0) = \boldsymbol{\theta}(0)^\top \mathbf{S}(0)$ kan udvikle sig til en porteføljeværdi på $V(t) = \boldsymbol{\theta}(t)^\top \mathbf{S}(t)$ ved at følge handelsstrategien $\boldsymbol{\theta}$ over intervallet $[0, t]$.

Vi indfører nu et derivat, der udbetaler $f(\mathbf{S}(T))$ på tidspunkt T . Derivatets værdi afhænger altså af værdien af ét eller flere af de d aktiver. Vi antager, at derivatets værdi på tidspunkt t , $0 \leq t \leq T$ er givet ved funktionen V , som afhænger af $\mathbf{S}(t)$ og t . Da V afhænger af $\mathbf{S}(t)$ og t , kan vi ved brug af Itô's lemma i k dimensioner⁴ finde et udtryk for derivatets værdi

$$\begin{aligned} V(\mathbf{S}(t), t) &= V(\mathbf{S}(0), 0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial V(\mathbf{S}(u), u)}{\partial S_i} dS_i(u) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial V(\mathbf{S}(u), u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d S_i(u) S_j(u) \Sigma_{i,j}(\mathbf{S}(u), u) \frac{\partial^2 V(\mathbf{S}(u), u)}{\partial S_i \partial S_j} \right] du \end{aligned} \quad (4.25)$$

hvor Σ er kovariansen i ligning (4.20). Hvis vi antager, at det er muligt at replikere derivatets værdi $V(\mathbf{S}(t), t)$ ud fra en initial investering $V(\mathbf{S}(0), 0)$ og en selvfinansierende handelsstrategi $\boldsymbol{\theta}$, gælder der ifølge (4.24) at

$$V(\mathbf{S}(t), t) = V(\mathbf{S}(0), 0) + \int_0^t \theta_i(u) dS_i(u) \quad (4.26)$$

Ved sammenligning af (4.25) og (4.26) ses det hurtigt, at begge er opfyldt, hvis følgende gælder

$$\theta_i(u) = \frac{\partial V(\mathbf{S}(u), u)}{\partial S_i}, i = 1, \dots, d \quad (4.27)$$

⁴Glasserman, P. [2003], Appendix B, sætning (B7)

$$\frac{\partial V(\mathbf{S}(u), u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d S_i(u) S_j(u) \Sigma_{i,j}(\mathbf{S}(u), u) \frac{\partial^2 V(\mathbf{S}(u), u)}{\partial S_i \partial S_j} = 0 \quad (4.28)$$

Da $V(\mathbf{S}(t), t) = \boldsymbol{\theta}^\top(t) \mathbf{S}(t)$, må det ligeledes gælde at

$$V(\mathbf{S}(t), t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial V(\mathbf{S}(t), t)}{\partial S(t)_i} S(t)_i \quad (4.29)$$

og ved udløb på tid T har vi som bekendt

$$V(\mathbf{S}(T), T) = f(\mathbf{S}(T)) \quad (4.30)$$

Såfremt det er muligt at replikere et derivat ved at handle i de underliggende aktiver, skal derivatets pris altså være lig med prisen på den replikerende handelsstrategi. Er dette ikke tilfældet, vil der være mulighed for arbitrage i markedet, da det som vist er muligt at sælge derivatet til en pris $V(\mathbf{S}(0), 0)$ på tidspunkt 0, benytte betalingen til at implementere den selvfinansierende handelsstrategi og levere den lovede betaling $f(\mathbf{S}(T), T) = V(\mathbf{S}(T), T)$ på tidspunkt T uden risiko. Forestiller man sig, at nogen var villige til at betale mere for derivatet end $V(\mathbf{S}(0), 0)$, ville man være garanteret en profit udfra en nettoinvestering på 0. Forestiller man sig omvendt, at nogen skulle være villige til at sælge derivatet for mindre end $V(\mathbf{S}(0), 0)$, kunne man følge den omvendte strategi, og også her sikre sig en profit ud fra en nettoinvestering på 0. Derfor må $V(\mathbf{S}(0), 0)$ være den eneste pris, der udelukker arbitrage i markedet. Det ses ud fra (4.29), at den replikerende handelsstrategi er at holde netop $\frac{\partial V(\mathbf{S}, t)}{\partial S_i}$ enheder af aktiv i på tidspunkt t . Denne handelstrategi kaldes *deltahedging* og kan for eksempel bruges til at afdække risiko på en derivatportefølje.

En sidste ting, der er værd at bemærke, er at driftparametren μ fra aktivernes prisdynamikker ikke optræder i de ligninger, der karakteriserer prisen for derivatet. Det vil dog være fejlagtigt at fortolke dette som, at derivatet ikke afhænger af driften på de underliggende aktiver, da derivatet afhænger af prisen på de underliggende aktiver, som i høj grad afhænger af deres drift.

Driften på de underliggende aktiver siges at reflektere investorers holdning til risiko. I en verden med risikoaverse investorer vil vi derfor forvente, at meget risikofyldte aktiver vil give et højere afkast end aktiver med lavere risiko. Det vil sige, at højere volatilitet vil være forbundet med en højere driftsparameter μ . I en risikoneutral verden ser det imidlertid andledes ud, da investorer udelukkende interesserer sig for det forventede afkast og derfor ikke kræver højere afkast på de mere risikofyldte aktiver. Da driften μ som nævnt ikke indgår i ligningerne for prisen på derivatet, må det betyde, at vi givet S_i kan prisfastsætte derivatet uden at vide noget om investors risikoaversion.

4.3 Arbitrage og stokastiske diskonteringsfaktorer

Vi befinder os fortsat i et setup, hvor aktiver har prisdynamik som i (4.19) og lader P være sandsynlighedsmålet, under hvilket disse dynamikker er specificeret. Sandsynlighedsmålet P har til opgave at beskrive de objektive sandsynligheder i den virkelige verden. Dynamikken givet ved (4.19) er derfor aktivernes empiriske prisdynamik.

For at definere begrebet arbitrage tager vi udgangspunkt i definitionen af den selvfinansierende handelsstrategi $\theta(t)$ fra (4.23). En selvfinansierende handelsstrategi siges at være en arbitrage, hvis en af følgende to betingelser er opfyldt på et givet tidspunkt t :

$$(i) \quad \theta(0)^\top \mathbf{S}(0) < 0 \text{ og } P\left(\theta(t)^\top \mathbf{S}(t) \geq 0\right) = 1;$$

$$(ii) \quad \theta(0)^\top \mathbf{S}(0) = 0, P\left(\theta(t)^\top \mathbf{S}(t) \geq 0\right) = 1 \text{ og } P\left(\theta(t)^\top \mathbf{S}(t) > 0\right) > 0$$

I (i) omdanner handelsstrategien θ en negativ initial investering til en ikke-negativ værdi ved udløb med sandsynlighed 1. I (ii) omdanner handelsstrategien θ en nettoinvestering på nul til en ikke-negativ værdi, der med positiv sandsynlighed er strengt større end nul. Hver af de to betingelser ovenfor beskriver en mulighed for at skabe værdi ud af ingenting og er derfor modstridende med økonomisk ligevægt. Udelukkelse af arbitragemuligheder er derfor et krav, når vi beskæftiger os med priser på derivater, der kan replikeres ud fra selvfinansierende handelstrategier i de underliggende aktiver.

En proces $V(t)$ siges at være opnåelig, hvis $V(t) = \theta(t)^\top \mathbf{S}(t)$ for en given handelsstrategi θ . Vi indfører nu en strengt positiv proces Z_t , som siges at være en *stokastisk diskonteringsfaktor*, hvor forholdet $\frac{V(t)}{Z(t)}$ er en martingale for hver opnåelig handelsstrategi.

$$\frac{V(t)}{Z(t)} = E^P \left[\frac{V(T)}{Z(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (4.31)$$

når $t < T$ for alle opnåelige handelsstrategier. E^P udtrykker forventningen under sandsynlighedsmålet P og $\mathcal{F}_t$ indeholder historikken for Wienerprocessen W_t^P op til tid t . Vi kræver yderligere, at $Z(t)$ tilpasses $\mathcal{F}_t$, således at værdien af Z_t er bestemt udfra Wienerprocessen op til tid t . Vi omkriver nu (4.31) til følgende:

$$V(t) = E^P \left[V(T) \frac{Z(t)}{Z(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (4.32)$$

Prisen $V(t)$ er altså den forventede diskonterede værdi af prisen $V(T)$, hvis den diskonteres med $\frac{Z(t)}{Z(T)}$. Normerer vi således at $Z(0) \equiv 1$, kan (4.32) skrives som⁵

⁵Et konstant multiplum af en stokastisk diskonteringsfaktor er ligeledes en stokastisk diskonteringsfaktor - Glasserman, P. [2003] side 26.

$$V(0) = E^P \left[\frac{V(T)}{Z(T)} \right] \quad (4.33)$$

Når man betragter (4.33), ses det, at ligningen afspejler forholdet mellem prisen $V(0)$ og det forventede payoff $E^P[V(T)]$. Hvad der dog er mere interessant i vores tilfælde er, at eksistensen af den stokastiske diskonteringsfaktor udelukker mulighederne for arbitrage. Hvis vi antager, at θ er en selvfinansierende handelsstrategi, så er $\theta(t)^\top \mathbf{S}(t)$ en mulig prisproces og forholdet $\frac{\theta(t)^\top \mathbf{S}(t)}{Z(t)}$ en martingale. Vi kan ud fra (4.33) opskrive følgende sammenhæng:

$$\theta(0)^\top \mathbf{S}(0) = E^P \left[\frac{\theta(T)^\top \mathbf{S}(T)}{Z(T)} \right] \quad (4.34)$$

Når man sammenligner dette med betingelserne for arbitrage (og husker at $Z(t)$ er strengt positiv), er det muligt at udelukke muligheder for arbitrage. Hvis $\theta(T)^\top \mathbf{S}(T)$ med sikkerhed er større end eller lig nul, er det ikke muligt, at $\theta(0)^\top \mathbf{S}(0)$ er negativ. Hvis $\theta(T)^\top \mathbf{S}(T)$ er ikke-negativ, og med positiv sandsynlighed strengt større end nul, er værdien $\theta(0)^\top \mathbf{S}(0) = 0$ ligeledes umulig. Derfor kan det konkluderes, at arbitrage ikke er muligt, såfremt prisprocessen tillader, at der indføres en stokastisk diskonteringsfaktor.

4.4 Risikoneutral prisfastsættelse

Vi antager, at der blandt de d aktiver beskrevet i (4.19) findes et *risikofrit aktiv*. Det risikofri aktiv har volatilitet nul og er derfor ikke styret af den stokastiske proces W_t^P . Processens drift, der i dette tilfælde kan fortolkes som en risikofri rente, er konstant og benævnes r . Aktivet kan altså opfattes som en bankkonto, der tilskrives en risikofri rente og har følgende dynamik:

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t) B(t) dt \\ &\Downarrow \\ B(t) &= B(0) e^{rt} \end{aligned}$$

Sættes $B(0) = 1$ gælder der, at $B(t) = e^{rt}$. Eksisterer der en stokastisk diskonteringsfaktor $Z(t)$, må der altså gælde, at processen $\frac{B(t)}{Z(t)}$ er en martingale. Vi ved yderligere, at denne martingale er positiv, da både $B(t)$ og $Z(t)$ er positive og da den har startværdi $\frac{B(0)}{Z(0)} = 1$. Disse egenskaber⁶ betyder, at processen definerer et skift af sandsynlighedsmål til det nye mål Q gennem den *Radon-Nikodym afledte*

$$\left(\frac{dQ}{dP} \right)_t = \frac{B(t)}{Z(t)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.35)$$

⁶Enhver martingale med initialværdi 1 definerer et skift af sandsynlighedsmål - Glasserman, P. [2003] side 28.

Dette betyder, at forventningen under Q -målet til en ikke-negativ variabel X kan skrives som

$$E_t^Q[X] = E_t^P\left[X \frac{B(T)}{Z(T)}\right] \quad (4.36)$$

Nu kan udtrykket for $V(0)$ i (4.33) omskrives til en forventet værdi under Q -målet

$$V(0) = E_0^Q\left[\frac{V(T)}{B(T)}\right] = e^{-rT} E_0^Q[V(T)] \quad (4.37)$$

Som det ses ud fra ovenstående formel, kan et derivat under Q -målet således prises som den fremtidige forventede værdi af derivatet, tilbagediskonteret med den risikofri rente. Dette er noget anderledes end under P -målet, hvor man tilbagediskonterede med den stokastiske diskonteringsfaktor $Z(t)$. Q -målet kaldes derfor det *risikoneutrale sandsynlighedsmål*, mens P -målet omtales som det *virkelige sandsynlighedsmål*. Forklaringen ligger i, at investorer, der er risikoneutrale, er indifferente mellem en sikker investering og en risikabel investering, såfremt de har samme forventede afkast, hvorfor man blot diskonterer med den risikofri rente r . Det er derfor ikke nødvendigt at have kendskab til det forventede afkast på de underliggende aktiver, hvis man priser ud fra (4.37). Det er derimod nødvendigt at kende dynamikken for de underliggende aktiver.

Vi ønsker nu at finde et udtryk for aktivernes dynamik under Q -målet, hvor usikkerheden indgår i form af en k -dimensionel Wienerproces. Fra *Girsanovs sætning*⁷ har vi, at sammenhængen mellem de to Wienerprocesser under de to sandsynlighedsmål P og Q er givet ved

$$d\mathbf{W}_t^Q = d\mathbf{W}_t^P + \mathbf{v}(t) dt \quad (4.38)$$

hvor $\mathbf{v}(t)$ er en k -dimensional vektorproces. Der foretages altså en parallelforskydning af driften i den styrende Wienerproces for at komme fra det ene sandsynlighedsmål til det andet. Når aktivernes dynamik specificeres under Q -målet, skal det gøres således, at alle $\frac{S_i(t)}{B(t)}$ er martingales. For at dette gælder, må driften for $S_i(t)$, under Q -målet være lig den risikofri rente. Aktivernes prisdynamik fra (4.19) er under Q -målet udtrykt ved følgende:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = rdt + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top d\mathbf{W}_t^Q \quad (4.39)$$

Dynamikken for den tilbagediskonterede aktivpris bliver hermed⁸

$$d\left(\frac{S_i(t)}{B(t)}\right) = \left(\frac{S_i(t)}{B(t)}\right) \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top d\mathbf{W}_t^Q \quad (4.40)$$

⁷Se Theorem B.4.1 i Glasserman, P. [2003]

⁸hvor driftsleddet $(\mu - r) \frac{S_i(t)}{B(t)} dt$ er gået ud, da $\mu = r$, hvilket er et krav for at $\frac{S_i(t)}{B(t)}$ er en martingale.

hvor det ses, at $\frac{S_i(t)}{B(t)}$ netop er en martingale under Q -målet.

Vi undersøger nu, hvordan vi skal vælge parallelforskydningen $\mathbf{v}(t)$ i (4.38) for at nå frem til de ønskede prisdynamikker i (4.39). Først indsættes (4.38) i (4.39)

$$\begin{aligned}\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= rdt + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top (d\mathbf{W}_t^P + \mathbf{v}(t) dt) \\ &= (r + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top \mathbf{v}(t)) dt + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top d\mathbf{W}_t^P\end{aligned}\quad (4.41)$$

For at denne dynamik skal stemme overens med dynamikken i (4.19), må der gælde følgende:

$$\begin{aligned}\mu_i(\mathbf{S}(t), t) &= r + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top \mathbf{v}(t) \\ \Downarrow \\ \mathbf{v}(t) &= \frac{\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - r}{\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top}\end{aligned}\quad (4.42)$$

Af formel (4.42) fremgår det, at $\mathbf{v}(t)$ kan fortolkes som en riskopræmie, der ofte refereres til som markedsprisen på risiko. Vektoren $\mathbf{v}(t)$ indeholder altså markedsprisen på risiko for de k faktorer i økonomien til tid t . Ganges denne med mængden af risiko i volatilitetsvektoren $\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)$, fås det forventede merafkast i forhold til bankkontoen.

Vi er således kommet frem til, at aktiverne under det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q er beskevet ved dynamikken

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = rdt + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top d\mathbf{W}_t^Q(t) \quad (4.43)$$

For at bevæge os fra den virkelige verdens sandsynlighedsmål P over til det risikoneutrale mål Q måtte vi, som beskrevet i afsnittet, parallelforskyde driften med riskopræmien. Dette understreger ideen bag risikoneutral prisfastsættelse, nemlig at investorerne i den risikoneutrale verden blot vil kræve et afkast på r på alle aktiver, og at riskopræmien derfor vil være nul i alle tilfælde.

Tidligere så vi, hvordan prisen på et derivat skulle være den samme som prisen på den selvfinansierende handelsstrategi, der replikerede derivatet under sandsynlighedsmålet P . I dette afsnit har vi set, at man ækvivalent hertil kan finde derivatets pris som den tilbagediskonterede forventning til derivatets værdi under det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q

$$V(0) = e^{-rT} E^Q[V(T)] \quad (4.44)$$

Når vi senere i opgaven benytter *Monte Carlo simulation* til at prisfastsætte derivaterne, simulerer vi netop udviklingen i de underliggende aktiver under Q -målet og finder prisen ved at tilbagediskontere den gennemsnitlige værdi.

4.5 Dividender

Vi har hidtil antaget, at de underliggende aktiver ikke udbetaler nogen former for udbytte. Dette betød, at alle værdiændringer i porteføljen stammede fra ændringer i aktivernes priser, da vi beskæftigede os med selvfinansierende handelsstrategier. Hvis vi i stedet antager, at aktiverne udbetaler udbytte, vil handelsstrategierne fra tidligere ikke længere være selvfinansierende, da værdien af udbytterne trækkes ud af porteføljen. Som kontrast til dette kan man forestille sig en strategi, hvor alle udbytter reinvesteres i aktivet. Denne strategi vil være selvfinansierende i den forstand, at der ikke tilføres eller trækkes penge ud af porteføljen på noget tidspunkt. Vi er derfor nødt til at omdefinere de oprindelige aktiver således, at de nu indeholder de reinvesterede udbytter. På denne måde sikrer vi os, at de nye aktiver ikke udbetaler udbytte, og vi kan derfor bruge vores resultater fra tidligere. De nye prisprocesser for aktiv i skal opfylde følgende:

$$\frac{d\tilde{S}_i(t)}{\tilde{S}_i(t)} = \frac{dS_i(t) + dD_i(t)}{S_i(t)} \quad (4.45)$$

hvor $D_i(t)$ angiver de geninvesterede udbytter for aktiv i . Da vi har antaget, at de underliggende aktiver betaler udbytter, er det derfor $\frac{\tilde{S}_i(t)}{B(t)}$, der er martingales under det risikoneutrale sandsynlighedsmål. Vi antager nu, at et aktiv betaler en kontinuert udbytterate på δ , hvilket betyder, at $dD_i(t) = \delta S_i(t) dt$. Hvis der skal gælde, at $\frac{\tilde{S}_i(t)}{B(t)}$ er martingales under Q -målet, må driften for $\tilde{S}_i(t)$ således være den risikofri rente r . Dynamikken for de oprindelige aktivpriser under Q -målet kan derfor skrives som

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (r - \delta) dt + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{S}(t), t)^\top d\mathbf{W}_t^Q \quad (4.46)$$

Når vi indfører dividender i modellen, betyder det altså, at disse skal modregnes i aktivernes drift. Intuitivt virker dette da også rimeligt nok, da udbetaling af dividende vil reducere aktivernes priser.

4.6 Valutakurser

Vi ser i dette afsnit nærmere på dynamikken for valutakurser, da vi senere i opgaven prisfastsætter et produkt, der blandt andet har en valutaposition som underliggende aktiv.

Vi antager, at der findes et risikofrit indenlandsk aktiv med renten $r_i(t)$, og at der tilsvarende findes et risikofrit udenlandsk aktiv med renten $r_u(t)$. Valutakrydset UDL/INL har kurs $X(t)$, hvilket vil sige, at 1 enhed udenlandsk valuta på tidspunkt t er lig $X(t)$ enheder indenlandsk valuta. Dynamikken for valutakursen $X(t)$ er givet ved følgende:

$$dX(t) = (r_i - r_u) X(t) dt + \sigma_X X(t) dB_t \quad (4.47)$$

Valutakursen følger altså en GBM, hvor driften μ_X er lig $(r_i - r_u)$. Forklaringen på dette tager udgangspunkt i den udækkede renteparitet, som kan approksimeres med følgende udtryk:

$$r_i(t) = r_u(t) + \frac{E[X(t + \Delta t)] - X(t)}{X(t)} \quad (4.48)$$

Den udækkede renteparitet sikrer, at der er ligevægt i markedet og udelukker dermed arbitrage. Som det ses i ovenstående udtryk, vil en stigning i rentedifferentialet følges af en ændring i forventningen til den fremtidige valutakurs. Nedenfor er vist de tre scenarier, der kan forekomme i økonomien

- (i) $r_i(t) > r_u(t) \Leftrightarrow E[X(t + \Delta t)] > X(t)$
- (ii) $r_i(t) < r_u(t) \Leftrightarrow E[X(t + \Delta t)] < X(t)$
- (iii) $r_i(t) = r_u(t) \Leftrightarrow E[X(t + \Delta t)] = X(t)$

Det vil sige, at hvis indlandsrenten er højere end udlandsrenten, vil man forvente, at den indenlandske valuta svækkes i forhold til den udenlandske valuta. Tilsvarende vil man forvente, at den indenlandske valuta styrkes, såfremt indlandsrenten er lavere end udlandsrenten.

Hvis den udækkede renteparitet ikke var opfyldt, og indlandsrenten var lavere end udlandsrenten, kunne man på tidspunkt t låne penge i indlandet, veksle dem om til udenlandsk valuta og få dem forrentet med den udenlandske rente. Herefter ville man, på tidspunkt $t + \Delta t$, kunne veksle det investerede beløb plus renter tilbage til indlandsk valuta, og herefter betale sit lån i indenlandsk valuta tilbage⁹. På denne måde ville man kunne opnå en risikofri profit, hvilket netop er definitionen af arbitrage.

Når vi omskriver ligning (4.48) til

$$\frac{E[X(t + \Delta t)] - X(t)}{X(t)} = r_i(t) - r_u(t) \quad (4.49)$$

ses det, at den forventende ændring i valutakursen i tidsintervallet Δt er givet ved $(r_i(t) - r_u(t))$. Da den forventede procentvise ændring i valutakursen netop er driften i processen for $X(t)$, er dette forklaringen på, at driften for et valutakryds er givet ved $(r_i(t) - r_u(t))$.

4.7 Numraireskifte

Vi så i afsnit 4.4, hvordan vi skifter fra det virkelige sandsynlighedsmål P til det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q . Under Q -målet er alle aktiver og derivater martingales, når man dividerer med $B(t)$. Da alle priser måles relativt til det risikofri aktiv, siges det, at $B(t)$ benyttes som numeraire. I dette afsnit ser vi på, hvordan vi

⁹Her ser vi bort fra transaktionsomkostninger

kan foretage et numraireskifte, således at aktivernes priser måles i forhold til et af de riskofyldte aktiver.

Vi antager igen, at vi befinder os i en økonomi med d aktiver, hvoraf det ene er det risikofri aktiv $B(t)$. Vi vælger at starte under det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q , hvor vi antager, at der findes en konstant risikofri rente r . Vi ønsker nu at benytte aktiv j som numraire, og vi definerer derfor et nyt sandsynlighedsmål P^j . Da vi befinder os under Q -målet, ved vi, at $\frac{S_j(t)}{B(t)}$ er en positiv martingale. Ved at dividere med processens initiale værdi sikrer vi os, at processen har forventet værdi 1. Vi kan derfor definere et målskifte fra Q til det nye mål P^j gennem den Radon-Nikodym afledte

$$\left(\frac{dP^j}{dQ}\right)_t = \frac{S_j(t)/B(t)}{S_j(0)/B(0)} \quad (4.50)$$

Forventningen under P^j til en ikke-negativ variabel X er givet ved

$$E_t^{P^j} [X] = E_t^Q \left[X \frac{S_j(T)B(0)}{B(T)S_j(0)} \right] = E_t^Q \left[X \frac{S_j(T)}{B(T)S_j(0)} \right] \quad (4.51)$$

da $B(0) = 1$. Vi har fra ligning (4.37), at prisen for et derivat på tidspunkt 0 kan skrives som

$$\begin{aligned} V(0) &= E_0^Q \left[\frac{V(T)}{B(T)} \right] = E_0^Q \left[V(T) \frac{S_j(T)}{B(T)S_j(0)} \frac{S_j(0)}{S_j(T)} \right] \\ &= E_0^{P^j} \left[V(T) \frac{S_j(0)}{S_j(T)} \right] = S_j(0) E_0^{P^j} \left[\frac{V(T)}{S_j(T)} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

der også kan skrives som

$$\frac{V(0)}{S_j(0)} = E_0^{P^j} \left[\frac{V(T)}{S_j(T)} \right] \quad (4.53)$$

Når aktiv j benyttes som numraire, ved vi, at alle aktiver og derivater er martingales under sandsynlighedsmålet P^j . Vi undersøger nu, hvordan dynamikken ser ud for et givet aktiv k under sandsynlighedsmålet P^j . Da aktiv k som sagt skal være en martingale under P^j -målet, har vi

$$\frac{S_k(0)}{S_j(0)} = E_0^{P^j} \left[\frac{S_k(T)}{S_j(T)} \right] \quad (4.54)$$

Vi ved at følgende gælder (funktionsudtryk er udeladt af hensyn til overskueligheden):

$$\begin{aligned}
\frac{S_k(T)}{S_j(T)} &= \frac{S_k(0)}{S_j(0)} \exp \left(\left(r - r - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_k\|^2 - \left(-\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_j\|^2 \right) \right) T + (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j)^\top \mathbf{W}_T^Q \right) \\
&= \frac{S_k(0)}{S_j(0)} \exp \left(\left(\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_j\|^2 - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_k\|^2 \right) T + (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j)^\top \mathbf{W}_T^Q \right) \\
&= \frac{S_k(0)}{S_j(0)} \exp \left(\left(-\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_j\|^2 - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_k\|^2 + \boldsymbol{\sigma}_k^\top \boldsymbol{\sigma}_j \right) T + (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j)^\top (\mathbf{W}_T^Q - \boldsymbol{\sigma}_j T) \right) \\
&= \frac{S_k(0)}{S_j(0)} \exp \left(-\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j\|^2 T + (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j)^\top (\mathbf{W}_T^Q - \boldsymbol{\sigma}_j T) \right) \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Vi kan nu ud fra (4.55) opskrive dynamikken for $\frac{S_k(t)}{S_j(t)}$

$$d \left(\frac{S_k(t)}{S_j(t)} \right) = \frac{S_k(t)}{S_j(t)} (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j)^\top (d \mathbf{W}_t^Q - \boldsymbol{\sigma}_j dt) \tag{4.56}$$

Ved brug af Girsanovs sætning¹⁰ ses det, at et skifte fra Q -målet til P^j -målet resulterer i, at Wienerprocessen $\mathbf{W}_t^Q$ parallelforskydes og processen for $\mathbf{W}_t^{P^j}$ kan skrives som

$$d \mathbf{W}_t^{P^j} = -\boldsymbol{\sigma}_j dt + d \mathbf{W}_t^Q \tag{4.57}$$

Aktivernes dynamik bliver derfor

$$d \left(\frac{S_k(t)}{S_j(t)} \right) = \frac{S_k(t)}{S_j(t)} (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_j)^\top d \mathbf{W}_t^{P^j} \tag{4.58}$$

hvor $d \mathbf{W}_t^{P^j}$ er en Wienerproces under P^j . Af ligning (4.58) ses det, at kravet om, at $\frac{S_k(t)}{S_j(t)}$ er en martingale under det nye mål P^j , er opfyldt. Fra ligning (4.43) kender vi aktivernes dynamik under Q -målet. Når vi indsætter ligning (4.57), får vi

$$\begin{aligned}
\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= r dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top d \mathbf{W}_t^Q \\
&= r dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top (d \mathbf{W}_t^{P^j} + \boldsymbol{\sigma}_j dt) \\
&= (r + \boldsymbol{\sigma}_i^\top \boldsymbol{\sigma}_j) dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top d \mathbf{W}_t^{P^j} \\
&= (r + \Sigma_{i,j}) dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top d \mathbf{W}_t^{P^j} \tag{4.59}
\end{aligned}$$

hvor $\Sigma_{i,j} = \boldsymbol{\sigma}_i^\top \boldsymbol{\sigma}_j$. Af ovenstående ses det, at aktivernes drift parallelforskydes med den instantane kovarians mellem aktiv i og aktiv j , når vi skifter mål fra Q til P^j . I det følgende afsnit benytter vi os af numraireskifte, når vi ser nærmere på de såkaldte quantooptioner.

¹⁰Se Glasserman, P. [2003] - Theorem B.4.1

4.8 Quantooptioner

I dette afsnit introduceres begrebet *quantooption* og vi udleder, hvorledes driften på de underliggende aktiver justeres i dette tilfælde.

En quantooption er en option, hvor ét eller flere underliggende aktiver ikke er kvoteret i samme valuta, som produktet prises i. På den måde fremkommer endnu en risikokilde nemlig valutakursen. Man kunne komme omkring dette problem ved løbende at simulere valutakursen, og ved brug af denne udregne værdien af det underliggende aktiv i prisningsvalutaen. Det viser sig dog, at man ved at skifte sandsynlighedsmål for processen kan eliminere den ekstra risikokilde og derved slippe for at simulere valutakurserne også. I det følgende bevises det, hvorledes dynamikken for det underliggende aktiv ændres, når der er tale om en quantoeffekt.

Vi ønsker at finde prisen på en option udtrykt i indenlansk valuta (INL). Den indenlandske valuta har renten r_i tilknyttet. Det antages, at der findes n underliggende aktiver, som alle er denomineret i samme udenlandske valuta (UDL). Denne valuta har tilknyttet renten r_u . Dynamikken for aktiv i er givet ved

$$dS(t)_i = (r_u - \delta_i)S(t)_i dt + \sigma_i S(t)_i dW_t^{(i)} \quad (4.60)$$

Valutakrydset INLUDL har kurs $X(t)$, hvilket vil sige at, 1 enhed indenlandsk valuta på tidspunkt t er lig $X(t)$ enheder udenlandsk valuta. Dynamikken for valutakursen er givet ved

$$dX(t) = (r_u - r_i)X(t)dt + \sigma_X X(t)dB_t \quad (4.61)$$

Til tidspunkt 0 veksles 1 UDL til $\frac{1}{X(0)}$ INL. De $\frac{1}{X(0)}$ INL placeres på en indenlandsk bankkonto, hvor de forrentes med r_i . Til tidspunkt t har vi altså $\frac{1}{X(0)}e^{r_i t}$ INL, som kan veksles til $\frac{X(t)}{X(0)}e^{r_i t}$ UDL. Nutidsværdien af dette skal naturligvis svare til 1 UDL, hvilket giver os

$$E^P \left(e^{-r_u t} \frac{X(t)}{X(0)} e^{r_i t} \right) = E^P (L(t)) = 1 \quad (4.62)$$

hvor $L(t) = e^{-r_u t} \frac{X(t)}{X(0)} e^{r_i t} = e^{-\frac{1}{2}\sigma_X^2 t + \sigma_X B_t}$. Det ses ud fra ovenstående, at $L(t)_{t \geq 0}$ er en streng positiv P -martingale med $L(0) = 1$. Da *Novikov's betingelse*¹¹ er opfyldt, kan vi anvende $L(t)$ som Radon-Nikodym afledt.

Det vides, at enhver fordring $Z(t)$ i UDL prisfastsættes som

$$P_0 = E^P(e^{-r_u t} Z(t)) \quad (4.63)$$

¹¹Se Björk, T. [2009] lemma 11.5.

men i INL som

$$\begin{aligned} P_0 \frac{1}{X(0)} &= \frac{1}{X(0)} E^P(e^{-r_u t} Z(t)) = E^P \left(\frac{X(t)}{X(0)} e^{-r_u t} \frac{Z(t)}{X(t)} \right) \\ &= E^P \left(e^{-r_i t} L(t) \frac{Z(t)}{X(t)} \right) = E^{\tilde{P}} \left(e^{-r_i t} \frac{Z(t)}{X(t)} \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Her er $\tilde{P}$ målet efter virkningen fra den Radon-Nikodym afledte $L(t)$. Det ses, at UDL fordringer $Z(t)$ skal prises under P -målet, mens INL fordringer, $\tilde{Z}(t) = Z(t) \frac{1}{X(t)}$ skal prises under $\tilde{P}$ -målet. Vi ønsker derfor at bestemme dynamikken for de underliggende aktiver under $\tilde{P}$ -målet.

Girsanov's sætning hjælper os med dette, da den fortæller, hvordan driften korrigeres, når man ændrer sandsynlighedsmål fra P til $\tilde{P}$. Normalt er Girsanov's sætning defineret for Wienerprocesser uden korrelation, hvorfor vi har brug for lidt omskrivning, inden vi kan benytte resultatet.

Lad $\mathbf{D}$ være en matrix således at $\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \tilde{\Sigma}$ hvor $\tilde{\Sigma}_{i,j} = \Sigma_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ og $\tilde{\Sigma}_{i,n+1} = \sigma_i \sigma_X \Gamma_i$, hvor Γ_i er korrelationen mellem aktiv i og valutakursen. Elementerne i diagonalen i $\tilde{\Sigma}$ er σ_i^2 for $i \leq n$ og σ_X^2 for $i = n+1$.

Det vil sige, at $\tilde{\Sigma}$ er kovariansmatricen for den $(n+1)$ -dimensionale Wienerproces $\mathbf{W}_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)}, B_t)^T$. Hvis vi definerer matricen $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_X \end{pmatrix}$$

kan vi nu skrive

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_t = (\sigma_1 W_t^{(1)}, \dots, \sigma_n W_t^{(n)}, \sigma_X B_t)^T = \mathbf{D} (\tilde{W}_t^{(1)}, \dots, \tilde{W}_t^{(n)}, \tilde{B}_t)^T \equiv \mathbf{D} \tilde{\mathbf{W}}_t \quad (4.65)$$

hvor $(\tilde{W}_t^{(1)}, \dots, \tilde{W}_t^{(n)}, \tilde{B}_t)^T$ er uafhængige Wienerprocesser under P -målet. Hvis vi lader d_i være den i 'te række i $\mathbf{D}$, gælder der, at $\mathbf{a}_{n+1} \mathbf{W}_t = \sigma_X B_t = \mathbf{d}_{n+1} \tilde{\mathbf{W}}_t$. Vi kan nu skrive

$$L(t) = e^{-\frac{1}{2} \sigma_X^2 t + \sigma_X B_t} = e^{-\frac{1}{2} \sigma_X^2 t + \mathbf{d}_{n+1} \tilde{\mathbf{W}}_t} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{d}_{n+1} d_{n+1}^T ds + \int_0^t \mathbf{d}_{n+1}^T d \tilde{\mathbf{W}}_s} \quad (4.66)$$

Ifølge Girsanov's sætning kan dynamikken for $\tilde{\mathbf{W}}_t$ under P -målet nu udtrykkes ved en vektor af nye uafhængige stokastiske variable $\hat{\mathbf{W}}_t = (\hat{W}_t^{(1)}, \dots, \hat{W}_t^{(n)}, \hat{B}_t)^T$, som alle er Wienerprocesser under $\tilde{P}$ -målet

$$d \tilde{\mathbf{W}}_t = \mathbf{d}_{n+1}^T dt + d \hat{\mathbf{W}}_t \quad (4.67)$$

Der gælder ifølge (4.65) at $\mathbf{A} \mathbf{W}_t = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{W}}_t$. Dynamikken for aktiv i under $\tilde{P}$ -målet kan derfor skrives som

$$\begin{aligned}
dS(t)_i &= (r_i - \delta_i) S(t)_i dt + \sigma_i S(t)_i dW_t^{(i)} \\
&= (r_i - \delta_i) S(t)_i dt + S(t)_i d_i d\tilde{W}_t^{(i)} \\
&= (r_i - \delta_i) S(t)_i dt + S(t)_i d_i \left(d_{n+1}^T dt + d\hat{W}_t^{(i)} \right) \\
&= \left(r_i - \delta_i + d_i d_{n+1}^T \right) S(t)_i dt + S(t)_i \sigma_i d\check{W}_t^{(i)} \\
&= (r_i - \delta_i + \sigma_i \sigma_X \Gamma_i) S(t)_i dt + S(t)_i \sigma_i d\check{W}_t^{(i)}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Her er $\check{W}_t$ en vektor af korrelerede Wienerprocesser under $\tilde{P}$ -målet. Således kræver quantoelementet blot, at vi justerer driften for det underliggende aktiv med kovariansen mellem aktivet selv og valutakursen. Vi har hermed simplificeret beregningerne ved at reducere problemet med én dimension.

Kapitel 5

Optionsmodeller

I dette kapitel gennemgår vi de to optionsmodeller, som benyttes til at prisfastsætte de udvalgte produkter i kapitel 7. Vi starter med at beskrive *Black-Scholes modellen*, hvorefter vi bevæger os videre til *Heston modellen*. I Heston modellen beskæftiger vi os især med forskellen på afkastfordeling i denne model og Black-Scholes modellen. Til sidst gennemgås den metode, som er brugt til at kalibrere parametrene i Heston modellen.

5.1 Black-Scholes modellen

I Black-Scholes modellen antages det om det underliggende aktiv, at aktivprisen er lognormalfordelt, at volatiliteten er kendt og konstant, samt at alle dividender er kendte og konstante. Yderligere antages det om markedet, at der findes en risikofri rente, som er kendt og konstant, at der ingen transaktionsomkostninger eller skatter er, og at det er muligt at *shorte* omkostningsfrit og låne til den risikofri rente.

I Black-Scholes modellen antages det underliggende aktiv at følge *diffusions processen* nedenfor

$$dS(t) = (r - \delta)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t^1 \quad (5.1)$$

I Black-Scholes modellen findes en analytisk løsningsmetode til at bestemme priser på europæiske plain vanilla call- og putoptioner. I det følgende afsnit gennemgås udledningen af den analytiske løsningsmetode i grove træk.

Værdien på tidspunkt t af en europæisk calloption, som udbetaler $\text{Max}[S(T) - K, 0]$ ved udløb, er givet ved

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} E^Q [\text{Max}(S - K, 0)] \quad (5.2)$$

Fra kapitel 4 ved vi, at $S(T)$ under det risikoneutrale mål kan skrives som

$$S(T) = S(t)e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z} \quad (5.3)$$

hvor Z er $N(0, 1)$. Da Z er standard normalfordelt, kan vi finde middelværdien ved at gange med tætheden og integrere

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Max} \left(S(t) e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z} - K, 0 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \quad (5.4)$$

For at slippe af med Max -operatoren undersøger vi, hvornår der gælder $S(T) > K$

$$\begin{aligned} S(T) > K &\Leftrightarrow S(t) e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z} > K \\ &\Updownarrow \\ Z &> -\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -d_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ved at integrere fra $-d_2$ til uendelig sikrer vi os, at udtrykket i Max -parantesen er positivt, hvorfor Max -operatoren nu er overflødig.

$$\begin{aligned} C(S, t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} \left(S(t) e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z} - K \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \\ &\Updownarrow \\ C(S, t) &= \int_{-d_2}^{\infty} \left(S(t) e^{-\delta(T-t)} e^{-\frac{1}{2}(Z-\sigma\sqrt{T-t})^2} - K e^{-r(T-t)} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dZ \end{aligned} \quad (5.6)$$

Integralet splittes nu op i to dele og nedre grænse i første led udskiftes

$$\begin{aligned} C(S, t) &= S(t) e^{-\delta(T-t)} \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Y^2} dY - K e^{-r(T-t)} \\ &\quad \cdot \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vi benytter nu at $\int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = (1 - N(x))$ og at $(1 - N(-x)) = N(x)$

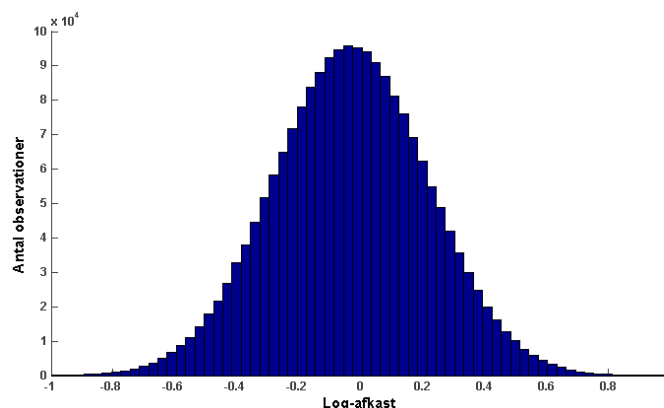
$$\begin{aligned} C(S, t) &= S(t) e^{-\delta(T-t)} \left(1 - N(-(d_2 + \sigma\sqrt{T-t})) \right) - K e^{-r(T-t)} (1 - N(-d_2)) \\ &\Updownarrow \\ C(S, t) &= S(t) e^{-\delta(T-t)} N(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ved at definere $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ fås det lukkede prisudtryk for den europæiske calloption

$$C(S, t) = S(t) e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (5.9)$$

I tilfældet hvor det underliggende aktiv er et valutakryds, kan man, som forklaret i kapitel 4, blot udskifte dividenden med den udenlandske rente.

I Black-Scholes modellen følger log-afkastene en normalfordeling, hvilket er vist i figur 5.1 ved simulation af 2 millioner afkast i Black-Scholes modellen.



Figur 5.1: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Black-Scholes modellen ved 2 millioner daglige simulationer med parameterverdierne $T = 1$, $\sigma = 0.25$, $r = 0$ og $\delta = 0$.

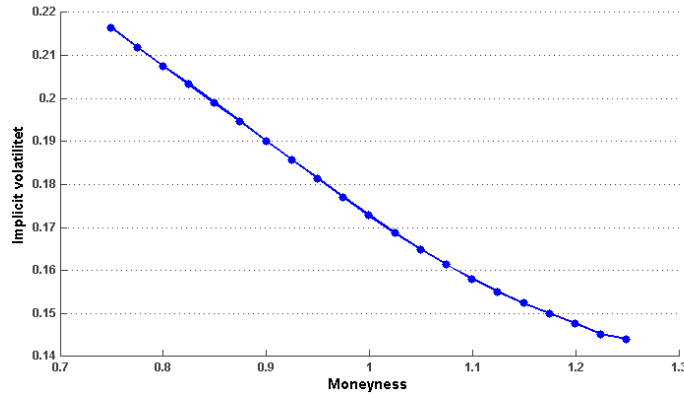
5.2 Heston modellen

Heston modellen er en udvidelse af Black-Scholes modellen, hvor man tillader volatiliteten at være stokastisk. Empiriske undersøgelser viser, at der på ingen måde er grundlag for at antage konstant volatilitet, som det gøres i Black-Scholes modellen. Tværtimod udviser optionspriserne for optioner, skrevet på samme underliggende men med forskellige strikes, ofte det vi kalder et *volatilitetssmil* eller *volatilitetsskew*. Disse begreber dækker over formen på volatilitetskurven, som i langt de fleste tilfælde viser sig at være en aftagende funktion i moneyness¹. Grunden til, at man for aktier taler om et skew frem for et smil er, at volatiliteterne ikke er stigende i moneyness for *in-the-money* optioner. Dette er ofte tilfældet for FX optioner, hvorfor man her taler om et smil. I figur 5.2 er vist et eksempel på et volatilitetsskew.

Det ses tydeligt, hvordan volatiliteten aftager med moneyness, og der er tilmed ret stor forskel på størrelsen af volatiliteten for *in-the-money* og *out-of-the-money* optioner. Dette behøver ikke altid at være tilfældet, men der vil stort set altid være en forskel. Hvis vi som i Black-Scholes modellen vælger at antage, at volatiliteten er konstant, får vi altså ikke volatilitetsskewet udtrykt i de beregnede optionspriser. Denne effekt af varierende volatilitet tager Heston modellen derimod hensyn til.

Da Heston modellen er en udvidelse af Black-Scholes modellen, gælder de samme antagelser om det underliggende aktiv og markedet, på nær antagelsen om konstant og kendt volatilitet.

¹Moneyness er gennem hele opgaven defineret som $\frac{S}{K}$ for calloptioner og $\frac{K}{S}$ for putoptioner.



Figur 5.2: Volatilitetsstruktur den 27. november 2006 for optioner skrevet på Euro-STOXX med parametrene $(T - t) = 2.09$, $S = 4002$, $r = 4.0\%$ og $\delta = 3.9\%$.

Ligesom i Black-Scholes modellen antages prisen på det underliggende aktiv i Heston modellen at følge diffusions processen beskrevet i (5.1).

$$dS(t) = (r - \delta)S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_t^1$$

Variansen antages at følge *kvadratrodsprocessen* nedenfor

$$dv(t) = \kappa (\theta - v(t)) dt + \sigma_{var} \sqrt{v(t)} dW_t^2 \quad (5.10)$$

Her er W_t^2 en Wienerproces, som har korrelation ρ_{var} med W_t^1 . Kvadratrodsprocessen i (5.10) er en proces med *meanreversion*, hvilket vil sige, at volatiliteten svinger omkring et langtidsniveau. Dette niveau kaldes for θ og angiver volatiliteten på den lange bane. Parameteren κ kaldes for tilbageløbstiden og beskriver, hvor hurtigt processen vender tilbage til langtidsniveauet, når den afviger derfra. σ_{var} er volatiliteten på variansen og beskriver dermed, hvor meget variansen afviger fra langtidsniveauet. Hvis σ_{var} er nul, er volatiliteten deterministisk, og vi er dermed tilbage i Black-Scholes modellen.

På samme måde som man i Black-Scholes modellen har en analytisk løsningsmetode for plain vanilla europæiske call- og putoptioner, findes der i Heston modellen en semianalytisk metode til at bestemme prisen på plain vanilla europæiske optioner. Udledningen af den semianalytiske løsningsmetode vil i grove træk blive gennemgået i nedenstående afsnit. Udledningen tager udgangspunkt i Hestons egen artikel fra 1993².

Vi definerer først variabelen $\tau = (T - t)$. Givet processerne for $S(t)$ og $v(t)$ i (5.1) og (5.10) er dynamikken for et derivat f , som afhænger af både $S(t)$ og $v(t)$, ifølge

²Se Heston, S. [1993]

Itô's lemma givet ved³

$$df(S, v, \tau) = \left[-\frac{\partial f}{\partial \tau} + (r - \delta) S \frac{\partial f}{\partial S} + \kappa (\theta - v) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{1}{2} v \sigma_{var}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v \sigma_{var} S \rho_{var} \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial v} \right] dt + \sqrt{v} S \frac{\partial f}{\partial S} dW_t^1 + \sqrt{v} \sigma_{var} \frac{\partial f}{\partial v} dW_t^2 \quad (5.11)$$

Grundet det risikoneutrale arbitrageargument fra kapitel 4 om, at ethvert handlet aktiv skal have et forventet afkast svarende til den risikofri rente r , skal der gælde følgende

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f}{\partial \tau} + (r - \delta) S \frac{\partial f}{\partial S} + \kappa (\theta - v) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{1}{2} v \sigma_{var}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ & + v \sigma_{var} S \rho_{var} \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial v} = r f \end{aligned} \quad (5.12)$$

En europæisk calloption med strike K og udløbstidspunkt T opfylder (5.12) med randbetingelserne

$$\begin{aligned} f(S, v, 0) &= \text{Max}(0, S - K) \\ f(0, v, 0) &= 0 \\ f(S, \infty, \tau) &= S \\ \frac{\partial f(\infty, v, \tau)}{\partial S} &= 1 \\ (r - \delta) S \frac{\partial f(S, 0, \tau)}{\partial S} + \kappa \theta \frac{\partial f(S, 0, \tau)}{\partial v} - \frac{\partial f(S, 0, \tau)}{\partial \tau} &= r f(S, 0, \tau) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Den første betingelse er, at værdien af optionen ved udløb er lig $\text{Max}(0, S - K)$. Den anden betingelse er, at hvis S er lig nul ved udløb, er værdien af optionen også nul. Den tredje betingelse er, at hvis volatiliteten på det underliggende aktiv går mod uendelig, er værdien af optionen lig værdien af det underliggende aktiv. Den fjerde betingelse er, at hvis værdien af det underliggende aktiv går mod uendelig, er optionens førsteafledte med hensyn til S (Δ) lig én. Til sidst er der et kriterie om at summen af de led i (5.12), som ikke er nul, når det underliggende aktivs volatilitet er nul, skal være lig den risikofri rente gange optionens værdi, når aktivets volatilitet er nul.

Vi gætter nu på, at den europæiske calloption har en løsning af formen

$$C(S, v, \tau) = S e^{-\delta(\tau)} P_1 - K e^{-r(\tau)} P_2 \quad (5.14)$$

P_1 og P_2 angiver sandsynligheden for, at optionen ender in-the-money og afhænger derfor begge af S , v og τ .

Man kan dele udtrykket i (5.14) op i to derivater C_1 og C_2 , som vist i (5.15) nedenfor

$$C_1(S, v, \tau) = S e^{-\delta(\tau)} P_1 \quad C_2(S, v, \tau) = K e^{-r(\tau)} P_2 \quad (5.15)$$

³For overbliksskyld er funktionsargumenter udeladt i resten af udledningen.

Her er C_1 prisen på et aktiv, som udbetaler $Se^{(r-\delta)(\tau)}$ ved udløb, hvis $S > K$ og nul ellers. C_2 er prisen på et aktiv, som udbetaler K ved udløb, hvis $S > K$ og nul ellers. Da begge aktiver afhænger af S og τ , skal de opfylde (5.12).

Vi definerer nu en ny proces $x(S, \tau) = \ln(S)$. Ved brug af Itô's lemma kan dynamikken for $x(S, \tau)$ findes⁴, og ingen-arbitrage betingelsen fra (5.12), med $x(S(t), \tau)$ som underliggende, kan opskrives

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau} + \left(r - \delta - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma_{var}^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + v\sigma_{var}\rho_{var} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} = rf \quad (5.16)$$

Da begge derivaterne C_1 og C_2 , med $x(S(t), \tau)$ som underliggende altså skal opfylde (5.16), finder vi nu de partielt afledte for at opskrive de endelige ingen-arbitrage betingelser for de to derivater. De partielt afledte og ingen-arbitrage betingelsen for C_1 og C_2 hver for sig er vist i bilag A. Et samlet udtryk for ingen-arbitrage betingelserne for de to derivater er vist i (5.17) nedenfor

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P_i}{\partial \tau} + (r - \delta + u_i v) \frac{\partial P_i}{\partial x} + (a - b_i v) \frac{\partial P_i}{\partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} + \\ & \frac{1}{2}\sigma_{var}^2 v \frac{\partial^2 P_i}{\partial v^2} + v\sigma_{var}\rho_{var} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial v} = 0 \\ & \text{for} \\ & i = 1, 2; u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = (\kappa\theta), b_1 = (\kappa - \rho_{var}\sigma_{var}), b_2 = \kappa \end{aligned} \quad (5.17)$$

Da P_i er den betingede sandsynlighed for, at optionen ender i pengene, skal terminalbetingelsen nedenfor være opfyldt

$$P_i(x, v, 0, \ln(K)) = Pr[x(0) \geq \ln(K) | x(0) = x, v(0) = v] = 1_{\{x \geq \ln(K)\}} \quad (5.18)$$

Der findes ingen lukket formel til bestemmelse af sandsynlighederne P_1 og P_2 , men det vises i Heston, S. [1993], at sandsynlighedernes karakteristiske funktioner f_1 og f_2 opfylder (5.17) med terminalbetingelsen

$$f_i(x, v, 0, \phi) = e^{i\phi x} \quad (5.19)$$

Det ligger uden for denne opgave at forklare om de karakteristiske funktioner, så for yderligere forklaring henviser vi til appendix i Heston, S. [1993]. Løsningen er angivet i (5.20) og udledningen af $G(\tau, \phi)$ og $D(\tau, \phi)$ er vist i bilag A.

$$f_i(x, v, \tau, \phi) = e^{G(\tau, \phi) + D(\tau, \phi)v + i\phi x} \quad (5.20)$$

⁴Dette er vist i kapitel 4

hvor

$$\begin{aligned}
D(\tau, \phi) &= \frac{(b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d)(1 - e^{-d\tau})}{\sigma_{var}^2(1 - ge^{-d\tau})} \\
G(\tau, \phi) &= (r - \delta)i\phi\tau + \frac{a}{\sigma_{var}^2} \left((b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g}\right) \right) \\
d &= \sqrt{(b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi)^2 - \sigma_{var}^2(2u_i\phi i - \phi^2)} \\
g &= \frac{b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d}{b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi + d}
\end{aligned}$$

Når man sammenligner resultatet ovenfor med resultatet fra Heston's artikel, vil man se, at der er en forskel, som består i, at fortegnet for d er modsat i de to resultater. Dette skyldes ikke en regnefejl fra vores side, da det vises i *Albrecher et al. [2006]*, at de to udtryk faktisk er ens. Ifølge artiklen skyldes forskellen, at den komplekse rod har to mulige værdier, hvor forskellen præcist er fortegnet. I artiklen nævnes det også, at der kan forekomme numeriske problemer ved brug af Heston's løsning, hvorimod erfaring viser, at den løsning, vi er kommet frem til, altid giver stabile resultater.

De karakteristiske funktioner kan herefter inverteres for at få de ønskede sandsynligheder

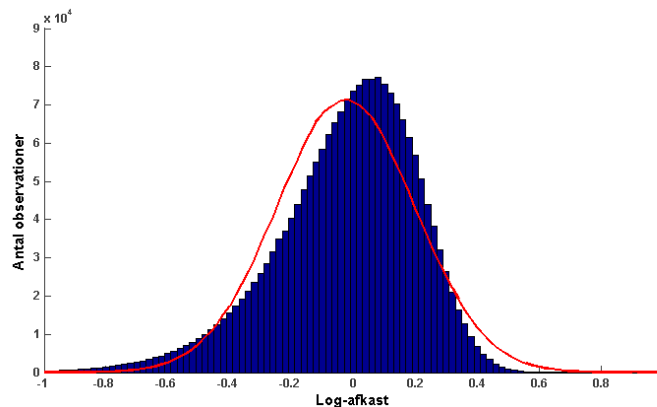
$$P_i(x, v, \tau, \ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_i(x, v, \tau, \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (5.21)$$

Prisen på den europæiske calloption kan nu findes ved at indsætte P_1 og P_2 i ligning (5.14).

Ligesom i Black-Scholes modellen kan løsningen ændres til at omfatte FX produkter ved at udskifte dividenden med den udenlandske rente.

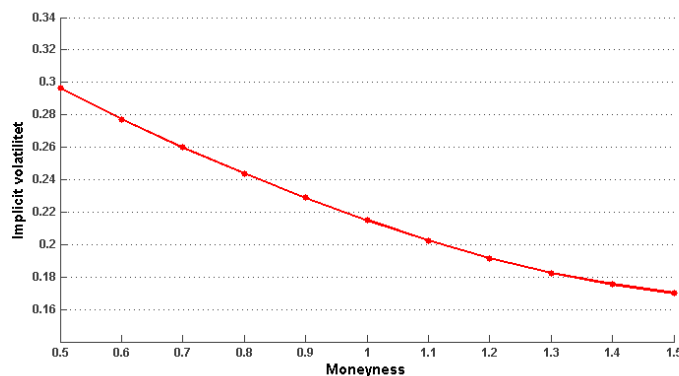
I Heston modellen følger log-afkastene ikke en bestemt fordeling på samme måde som i Black-Scholes modellen, hvor de følger en normalfordeling. For eksempel nævnes det i *Dragulescu et al. [2002]*, at fordelingen af log-afkastene er eksponentiel for store afkast, mens den er *Gaussisk* for små afkast. For at få et bedre indblik i, hvordan afkastfordelingen for Heston modellen ser ud, har vi derfor simuleret 2 millioner daglige afkast i Heston modellen og sammenlignet fordelingen af disse med fordelingen af de tilsvarende afkast i Black-Scholes modellen. Afkastfordelingen i Heston modellen afhænger i høj grad af størrelsen på de parametre, der indgår i modellen. Vi ser derfor nærmere på, hvilken indvirkning parametrene i Heston modellen har på fordelingen af afkast. Parametrene $T = 1$, $r = 0$, $\delta = 0$ og $\operatorname{var}(0) = 0.05$ benyttes i alle figurerne. De resterende parametre ændres fra figur til figur og er derfor angivet i teksten under figuren.

I figur 5.3 ses afkastfordelingen med de parameterværdier, som vi benytter som udgangspunkt for analysen. Værdierne er valgt således, at de kan afspejle de faktiske værdier for et givent aktieindeks.



Figur 5.3: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 2$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = -0.7$. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.22$.

Det ses, at man ved at benytte Heston modellen har mulighed for at variere både *skævhed* og *kurtosis* i afkastfordeling. I dette tilfælde har vi at gøre med en venstreskæv fordeling med kurtosis strengt større end nul. At man kan justere skævhed og kurtosis i afkastfordelingen gør, at vi er istand til at fitte det føromtalte volatilitetsskew. I figur 5.4 er vist det volatilitetsskew, Heston modellen generer for de samme parametre som dem, der er benyttet til at simulere afkastfordelingen.

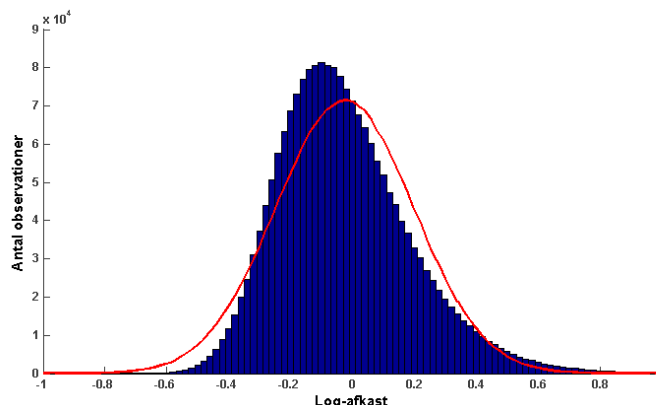


Figur 5.4: Volatilitetsskew genereret af Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 2$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = -0.7$.

Her ses det tydeligt, at volatiliteten ikke længere er konstant, men at den derimod har form som et skew. Men hvilke parametre styrer skævhed henholdsvis kurtosis i fordelingen? Og hvordan ændrer volatilitetsskewet sig, når de underliggende parametre ændres?

I første omgang kigger vi på den underliggende korrelationsparameter ρ_{var} . Denne kan åbenlyst være enten positiv eller negativ afhængigt af, om der er positiv eller negativ korrelation mellem aktier og varians. Da det empirisk har vist sig, at aktier og varians er stærkt negativt korrelerede, har vi valgt at sætte $\rho_{var} = -0.7$. Det kunne dog alligevel være interessant at se, hvordan en positiv korrelationsparameter ville ændre på afkastfordelingen. Vi har derfor igen simuleret afkastet i Heston

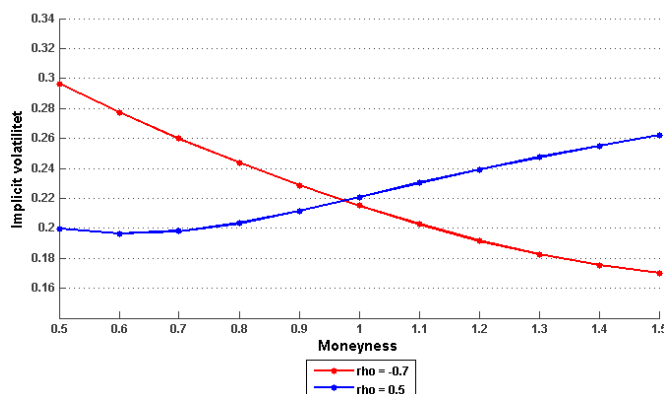
modellen med den forskel, at ρ_{var} nu er sat til 0.5.



Figur 5.5: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 2$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = 0.5$. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.22$.

Ved at sammenligne figur 5.3 og 5.5 ses det tydeligt, at ændringen af korrelationsparameteren fra negativ til positiv, flytter afkastfordelingens fede hale fra venstre mod højre. Hvor fordelingen før var venstreskæv med en fed venstrehale og koncentreret sandsynlighedsmasse lige til højre for nul, er den nu højreskæv med en fed højrehale og megen sandsynlighedsmasse koncentreret lige til venstre for nul. Korrelationsparameteren styrer altså i høj grad skævheden i afkastfordelingen. Dette giver da også god mening, da en positiv korrelation mellem aktier og varians vil resultere i mange store positive afkast, mens en negativ korrelation vil resultere i mange store negative afkast. Det vil altså også sige, at skævheden i afkastfordelingen vil ændre sig, hvis ρ_{var} gøres mere eller mindre negativ.

I figur 5.6 ses volatilitetskurven for $\rho_{var} = 0.5$ (blå kurve) samt volatilitetsskewet for de initiale parameterverdier (rød kurve). I resten af figurerne med volatilitetsskews i dette afsnit er den røde kurve volatilitet skewet for de initiale parameterverdier. Herfra ses det, at hvis korrelationen mellem aktier og varians gøres positiv, kommer

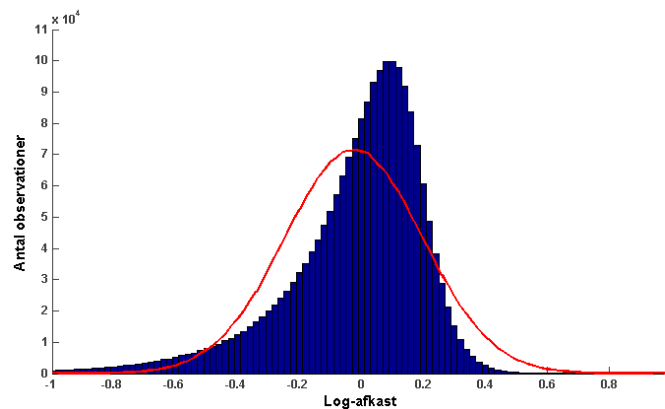


Figur 5.6: Volatilitet skewes genereret af Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 2$ og $\sigma_{var} = 0.3$.

skewet til at vende den modsatte vej af, hvad vi ser i markedet. Derfor støtter denne

graf antagelsen om, at korrelationsparameteren skal være negativ. Samtidig ses det, at en numerisk højere korrelation resulterer i et mere udtalt skew.

Volatiliteten på variansen σ_{var} angiver, hvor meget variansen svinger og beskriver dermed, hvor udtalt volatilitetsskewet er. En høj σ_{var} betyder således, at der er stor forskel på volatiliteten for in-the-money og out-of-the-money optioner. Hvis σ_{var} er lig nul, er volatiliteten deterministisk, og log-afkastet vil her være normalfordelt som i Black-Scholes modellen. I figur 5.7 er vist afkastfordelingen for samme parametre som i udgangspunktet, men med $\sigma_{var} = 0.6$.



Figur 5.7: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 2$, $\sigma_{var} = 0.6$ og $\rho_{var} = -0.7$. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.22$.

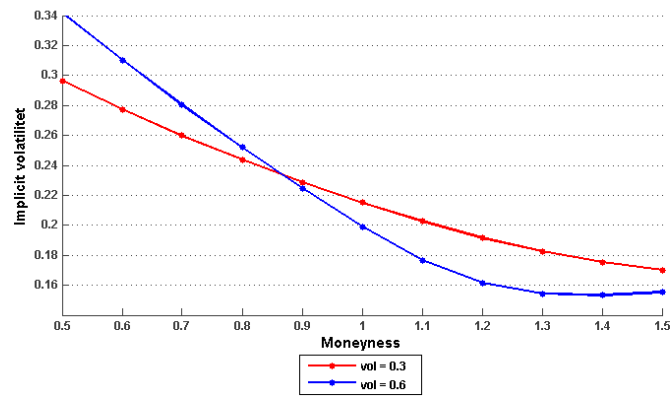
Det ses tydeligt, hvordan en øgelse af σ_{var} resulterer i en langt mere topstejl fordeling. En topstejl fordeling er kendetegnet ved megen sandsynlighedsmasse koncentreret om midten, samtidig med, at man har fede haler i begge ender. Det vil sige, at der er relativ stor sandsynlighed for ekstreme afkast (både i positiv og negativ afskygning), meget stor sandsynlighed for afkast af en størrelsesorden tæt på nul, mens der kun er meget lille sandsynlighed for afkast imellem de ekstreme værdier og dem tæt på nul. Da en høj volatilitet på variansen vil medføre, at der bliver større sandsynlighed for store positive og negative afkast, er denne øgelse af topstejlheden altså helt i overensstemmelse med, hvad vi ville forvente.

I figur 5.8 ses det, hvordan en ændring af σ_{var} ændrer, hvor udtalt volatilitetsskewet er.

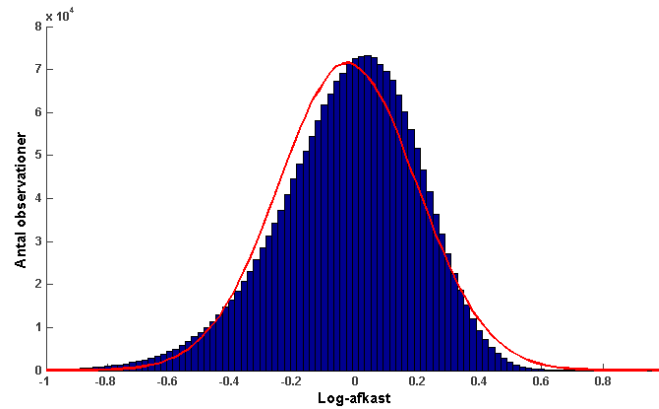
κ angiver tilbageløbstiden for variansen og har derfor indflydelse på, hvor stor betydning volatiliteten på variansen har for fordelingen af afkast. Hvis κ er høj, vil det sige, at variansen hurtigt vender tilbage til langtidsniveauet, når den afviger herfra. I dette tilfælde får volatiliteten på variansen altså ikke lige så stor indflydelse på afkastfordelingen, som hvis κ havde været lille. Når κ stiger, mindskes den positive topstejlhed, som σ_{var} påfører fordelingen. Det gør, at fordelingen flader mere ud, hvilket er vist i figur 5.9, hvor κ er øget fra 2 til 4.

Ligeledes ses det i figur 5.10, hvordan volatilitetsskewet flader ud, når κ øges.

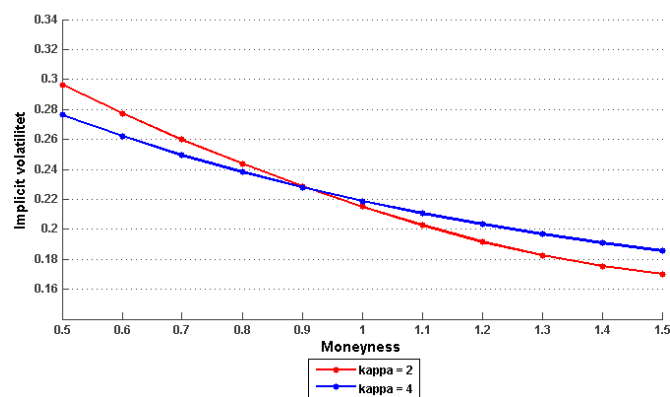
θ angiver det langsigtede niveau for variansen. Da en højere værdi af den langsigtede varians selvsagt vil resultere i flere ekstreme afkast (både positive og negative), kommer det ikke som nogen overraskelse, at vi i figur 5.11 ser, at topstejlheden



Figur 5.8: Volatilitetsskews genereret af Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 2$ og $\rho_{var} = -0.7$.

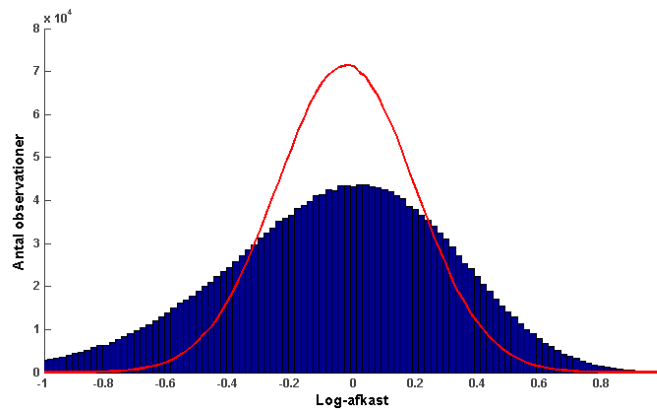


Figur 5.9: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\kappa = 4$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = -0.7$. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.22$.



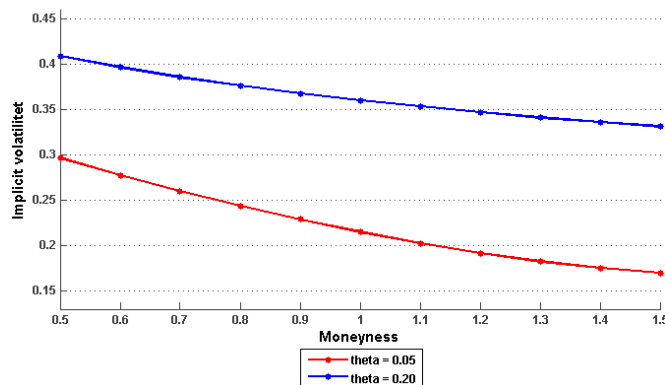
Figur 5.10: Volatilitetsskews genereret af Heston modellen for $\theta = 0.05$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = -0.7$.

mindskes, når θ stiger. Her er θ øget fra 0.05 til 0.2, hvilket resulterer i en utrolig flad fordeling.



Figur 5.11: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen for $\theta = 0.2$, $\kappa = 2$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = -0.7$. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.45$.

Det ses da også fra figur 5.12, at en forøgelse af θ stort set bare svarer til at parallelforskyde volatilitetsskewet opad.



Figur 5.12: Volatilitetsskews genereret af Heston modellen for $\kappa = 4$, $\sigma_{var} = 0.3$ og $\rho_{var} = -0.7$.

Det ses altså, at parametrene i Heston modellen har meget stor indflydelse på, hvordan afkastfordelingen kommer til at se ud. Det er derfor utrolig vigtigt, at disse parametre fitter de faktiske parametre så præcist så muligt. Da ingen af de parametre, som er unikke for Heston modellen, er direkte aflæselige i markedet, er det nødvendigt at kalibrere parametrene til den nuværende volatilitetsflade. Dette gøres ved brug af den semianalytiske løsning for plain vanilla optioner. Fremgangsmåden for kalibreringen gennemgås i det følgende afsnit.

5.3 Kalibrering

Som nævnt i afsnit 5.2 er det utrolig vigtigt for brugbarheden af Heston modellen, at vi finder nogle fornuftige værdier for parametrene i modellen. Den bedste måde at sørge for at værdierne afspejler den aktuelle markedssituation, er ved at kalibrere

modellen til markedsvolatiliteterne. Dette gøres ved at indhente implicitte volatiliteter for plain vanilla optioner for forskellige strikes og løbetider. Herefter minimeres forskellen på de implicitte volatiliteter, som Heston modellen generer og de implicitte volatiliteter, som vi observerer i markedet. Dette gøres i praksis ved at løse minimeringsproblemet

$$\text{Min} \left(\sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n (\sigma_{Heston}(t, K_i) - \sigma_{Actual}(t, K_i))^2 \right) \quad (5.22)$$

Her angiver n antal strikes og m antal løbetider på den observerede volatilitetsflade. Vi benytter *mindste kvadraters metode* for at eliminere effekten af, at positive og negative afvigelse trækker resultatet i hver sin retning.

For at bestemme σ_{Heston} benytter vi den semianalytiske løsningsmetode, som vi gennemgik i afsnit 5.2 til at beregne priser på de plain vanilla optioner, som ligger til grund for volatilitetsfladen. Herefter beregner vi den implicitte volatilitet ud fra de fundne priser.

At løse optimeringsproblemet i (5.22) er dog ikke så lige til. Dette skyldes dels, at vi har $m \cdot n$ volatiliteter, som skal fittes, dels at dette skal gøres ved at justere på fem parametre. For eksempel viste det sig ikke muligt at løse problemet ved brug af *Matlabs* minimeringsfunktion *fmincon*⁵. Når minimeringsfunktionen i Matlab benyttes, skal den bruge en vektor af startgæt for de parametre, der skal optimeres. Da det er utrolig svært at give et kvalificeret startgæt på de fem parametre, skete der i praksis det, at funktionen blev ved med at finde et lokalt minimum i stedet for et globalt. Hver gang funktionen fik et nyt startgæt, kom den således med en ny løsning til problemet. Parameterværdierne for disse løsninger lå så langt fra hinanden, at de ikke kunne bruges som indikator for, hvor det globale minimum befandt sig.

Til at løse problemet har vi derfor benyttet metoden *differential evolution*⁶. Denne metode forsøger iterativt at forbedre en foreslået løsningskandidat givet en på forhånd defineret tolerancegrænse. Metoden optimerer problemet ved at opretholde en mængde løsningskandidater og skabe nye løsningskandidater ved at kombinere de eksisterende. Algoritmen fortsætter, indtil det på forhånd definerede maksimale antal beregninger er nået, eller til en løsningskandidat, hvis objektfunktionsværdi er under tolerancegrænsen, er fundet. Herefter beholdes den kandidat, som giver den bedste løsning til problemet. Fordelen ved denne metode er, at der ikke laves nogle antagelser om optimeringsproblemet, samt at metoden kan søge over et stort antal løsningskandidater.

De parametre, som resulterer i de implicitte volatiliteter, der fitter den aktuelle volatilitetsflade bedst, er så dem, vi benytter når vi beregner priser i Heston modellen.

⁵Vi benyttede funktionens default settings, så det er muligt, at funktionen kan løse problemet med de rette indstillinger.

⁶Information om metoden kan findes på <http://www.icsi.berkeley.edu/~storn/code.html>

5.4 Diskussion

Vi har nu præsenteret de to modeller, som vi benytter til at prise de udvalgte produkter i kapitel 7. Som udgangspunkt må man formode, at Heston modellen vil give de mest pålidelige priser, da denne tager hensyn til volatilitetsskewet. Ifølge *Bakshi et al. [1997]* er dette da også resultatet, når man tester på de optioner, som ligger til grund for kalibreringen. Det er dog alligevel aktuelt at kigge lidt nærmere på modellernes performance, da en mere kompleks model ikke nødvendigvis er ensbetydende med bedre resultater.

I Heston modellen kalibrerer vi parametrene til at fitte volatilitetsfladen og dermed priserne på de underliggende plain vanilla optioner på en given dag. Her vil vi senere i opgaven se, at såfremt volatilitetsfladen har en pæn konveks struktur, så fitter Heston modellen markedspriserne rigtig godt. For at få et indblik i, om Heston modellen i virkeligheden kunne være overfitted, er det relevant at se på, hvor godt modellen fitter *out of sample* priser. Dette gøres i Bakshi et al. ved at kalibrere modellen til data for dagen før. Herefter prises optionerne på den pågældende dag, og de estimerede priser sammenlignes med de faktiske markedspriser. Det viser sig, at Heston modellen, i stort set alle de testede tilfælde, har en *pricing error*, som er langt mindre, end hvis man benytter Black-Scholes modellen. Det er dog vigtigt at huske på, at Heston modellen i praksis mindst vil blive kalibreret dagligt, hvorfor denne test mest viser, at der er parameterstabilitet fra dag til dag. Selv med dette i baghovedet tror vi dog på, at Heston modellen fitter data bedre end Black-Scholes modellen. I artiklen vises det også, at Heston modellen giver det bedste hedging resultat af alle de testede modeller, hvilket også inkluderer modeller, som er mere komplekse end Heston modellen. Dette må siges at være den ultimative modeltest, da bankerne hele tiden skal hedge deres positioner.

Til gengæld vises det i samme artikel, at de kalibrerede værdier for specielt parametrene σ_{var} og ρ_{var} , ikke stemmer overens med de værdier, som man kan observere ved tidsrækkeanalyse. Her kommer de frem til, at de kalibrerede værdier for σ_{var} er for høje i forhold til tidsrækkeværdierne, mens den negative korrelation mellem aktier og varians ikke er helt så markant i tidsrækkerne, som den er i kalibreringen. Dette er dog ikke ensbetydende med, at Heston modellen ikke fitter parametrene godt nok. Det er formentlig blot et udtryk for, at de implicitte volatiliteter, som Heston modellen er kalibreret til, afspejler markedets forventning til de fremtidige volatiliteter. De er ikke nødvendigvis af samme størrelsesorden som de historiske. Under finanskrisen blev alle aktiver pludselig korrelerede i en grad, som man ikke tidligere havde set. Havde man foretaget samme undersøgelse i starten af finanskrisen, ville tidsrækkeanalysen altså afspejle de lave korrelationer, mens kalibreringen ville afspejle markedets forventning - altså numerisk højere korrelationer. Dette er et fremragende eksempel på, hvorfor det ikke er hensigtsmæssigt at benytte historisk data i prisningsmodellerne.

I *Schoutens et al. [2003]* tester de, hvor godt Heston modellen (og andre udvidede optionsmodeller) fitter priserne på forskellige typer eksotiske optioner, blandt andet forskellige barriere optioner. I alle tilfælde kommer de frem til, at Heston model-

lens priser ligger et godt stykke fra de faktiske priser på produkterne⁷. At Heston modellen ikke rammer markedsprisen på en barriere option, fortæller dog blot, at markedet ikke anvender den vanilla Heston model, som vi benytter til at prise denne type produkter.

Alt i alt mener vi, at Heston modellen er meget velegnet til at prise strukturerede obligationer. Dette skyldes ikke mindst, at Heston modellen er stærk på strukturer med lange løbetider.

⁷Det oplyses dog ikke, hvilke priser resultaterne sammenlignes med, hvilket gør det svært at vurdere brugbarheden af deres konklusioner.

Kapitel 6

Monte Carlo simulation

Der findes mange numeriske metoder til løsning af den partielle differentialligning. I undervisningen på studiet har vi stiftet bekendtskab med *Binomialmodellen*, *Finite difference metoden* og *Monte Carlo simulation*. I dette kapitel præsenterer vi Monte Carlo simulation, som er den metode, vi benytter til at prisfastsætte produkterne senere i opgaven. Herefter beskriver vi *Eulers skema*, som er den metode, vi benytter til at diskretisere de kontinuerte processer. Til sidst kigger vi på fejlkilderne for Monte Carlo simulation og diskuterer, hvorledes disse fejlkilder kan håndteres. Kapitlet tager udgangspunkt i *Glasserman, P. [2003]* kapitel 1, 4, og 6 samt appendix A.

6.1 Monte Carlo metoden

I dette afsnit præsenterer vi Monte Carlo metoden, når derivatet kun har ét underliggende aktiv. Senere ser vi på tilfældet med flere korrelerede underliggende aktiver.

Vi ønsker at løse differentialligningen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0 \quad (6.1)$$

hvilket ikke kan gøres analytisk for stiafhængige produkter. Numeriske metoder forsøger derfor at approksimere udtrykket, når en analytisk løsning ikke er mulig. I Monte Carlo metoden benytter vi os især af *store tals lov*, som siger

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \rightarrow E[S] \text{ for } n \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

Det vil sige, at vi, ved at simulere værdien for S et vilkårligt højt antal gange og herefter tage den gennemsnitlige værdi, kan finde et godt estimat for den faktiske værdi af S .

Til at simulere værdien af S benytter vi, at $S(t + \Delta t)$ er lognormalfordelt og derfor kan bestemmes ved

$$S(t + \Delta t) = S(t)e^{(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{t+\Delta t}} \quad (6.3)$$

hvor $Z_1, \dots, Z_m$ er tilfældige uafhængige standardnormalfordelte variable. Prisen på en plain vanilla calloption er givet ved

$$C(t) = E \left[e^{-r(T-t)} \text{Max}(S(T) - K, 0) \right] \quad (6.4)$$

Da værdien kun afhænger af værdien af S på udløbstidspunktet, kan vi bestemme $C(t)$ udfra (6.2) og (6.3). Det giver selvfølgelig ikke mening at benytte Monte Carlo simulation til at bestemme prisen på europæiske optioner, da vi har de lukkede udtryk fra kapitel 5 til dette.

Når vi har med stiafhængige produkter at gøre, findes der derimod ikke en lukket løsning til problemet, så det er her, at Monte Carlo metoden kommer til sin ret. For stiafhængige produkter er det ikke tilstrækkeligt at kende værdien af det underliggende aktiv på udløbstidspunktet. Her er vi nødt til at sætte Δt tilstrækkelig lille til, at vi rammer de ønskede observationstidspunkter. Prisen på en simpel asiatisk calloption bestemmes ved

$$C(t) = E \left[e^{-r(T-t)} \text{Max}(\bar{S} - K, 0) \right] \quad (6.5)$$

hvor $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j)$ for faste datoer $t_1, \dots, t_m$. Her er vi således nødt til at simulere S på alle tidspunkterne $t_1, \dots, t_m$ for at kunne bestemme værdien af $\bar{S}$ og dermed værdien af den asiatiske option. I dette tilfælde skal vi derfor simulere n stier med m værdier for S i hver. Herefter findes prisen på optionen på tidspunkt t ved $e^{-r(T-t)} \text{Max}(\hat{\bar{S}} - K, 0)$.

6.2 Korrelerede aktiver

I forrige afsnit viste vi, hvordan man benytter Monte Carlo simulation på optioner, som kun har ét underliggende aktiv. I dette afsnit viser vi, hvordan metoden fungerer i tilfældet med flere underliggende aktiver, som er indbyrdes korrelerede.

Vi antager, at de k underliggende aktivers dynamikker under det risikoneutrale mål er givet ved

$$dS_i(t) = (r - \delta_i)S_i(t)dt + \sigma S_i(t)dW_t^{(i)} \quad (6.6)$$

Her er $W_t^{(i)}$ en Wienerproces. Korrelationen mellem $W_t^{(i)}$ og $W_t^{(j)}$ er givet ved parameteren $\rho_{i,j}$. Vi definerer nu $k \times k$ kovariansmatricen Σ , hvor $\Sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$. Som i tilfældet med ét underliggende aktiv har vi nu brug for en standardnormalfordelt variabel hørende til hver af de k aktiver. Vi definerer derfor k -vektoren $\mathbf{Z}_t$, som indeholder k tilfældige standardnormalfordelte tal hørende til tidspunkt t . Da aktiverne nu er korrelerede, er det ikke længere tilstrækkeligt med de standardnormalfordelte tal. Vi ønsker derfor at generere multivariate normalfordelte tal fra fordelingen $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Fra *den lineære transformationsegenskab*¹ ved vi, at hvis $\mathbf{Z} \sim (0, \mathbf{I})$ og $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z}$, så er $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\mathbf{A}^T)$. For at generere multivariate normalfordelte

¹Se Glasserman, P. [2003] ligning (2.23).

variable skal vi derfor bestemme matricen $\mathbf{A}$, således at $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{\Sigma}$.

Blandt alle de matricer $\mathbf{A}$, som opfylder ovenstående, er en nedre trekantsmatrix specielt anvendelig, da denne reducerer beregningen $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z}$ til følgende ligningssystem

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + A_{11}Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + A_{21}Z_1 + A_{22}Z_2 \\ &\vdots \\ X_k &= \mu_k + A_{k1}Z_1 + A_{k2}Z_2 + \dots + A_{kk}Z_k \end{aligned}$$

En repræsentation af $\mathbf{\Sigma}$ som $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, hvor $\mathbf{A}$ er en nedre trekantsmatrix, kaldes en *Cholesky dekomposition* af $\mathbf{\Sigma}$. For at der eksisterer en Cholesky dekomposition, skal $\mathbf{\Sigma}$ være positiv definit.

Ud fra Cholesky dekompositionen danner vi nu en vektor af korrelerede normalfordelte variable ved

$$\mathbf{X}_t = \text{Chol}(\mathbf{\Sigma}) \cdot \mathbf{Z}_t \quad (6.7)$$

Værdien af $S_i(t + \Delta t)$ kan nu findes ved

$$S_i(t + \Delta t) = S_i(t) \cdot e^{(r - \delta_i - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sqrt{\Delta t} \cdot X_{t+\Delta t}^{(i)}} \quad (6.8)$$

og værdien af den asiatiske option med k korrelerede underliggende aktiver er

$$C(t) = E \left[e^{-r(T-t)} \text{Max}(\bar{S} - K, 0) \right] \quad (6.9)$$

hvor $\bar{S} = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_i(t_j) \right]$ for faste datoer $t_1, \dots, t_m$.

6.3 Diskretisering

Ikke alle kontinuerte stokastiske processer kan simuleres præcist på et endeligt antal diskrete tidspunkter. For eksempel kan variansprocessen i Heston modellen ikke umiddelbart simuleres præcist på diskrete tidspunkter, hvorfor vi får brug for en metode til at diskretisere processerne. I dette afsnit præsenterer vi derfor de to diskretiseringsskemaer *Euler skemaet* og *Milstein skemaet*.

Lad processen X være givet ved dynamikken nedenfor

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW_t \quad (6.10)$$

da er den diskrete Euler approksimation af X , $\hat{X}$ givet ved

$$\hat{X}(t + \Delta t) = \hat{X}(t) + a(\hat{X}(t))\Delta t + b(\hat{X}(t))\sqrt{\Delta t}Z_{t+\Delta t} \quad (6.11)$$

hvor $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ er tilfældige uafhængige standardnormalfordelte variable.

Euler skemaet er utrolig simpelt at implementere, så længe a og b er lette at bestemme.

En udvidelse af Euler skemaet er Milstein skemaet, som er vist neden for

$$\begin{aligned}\hat{X}(t + \Delta t) = & \hat{X}(t) + a(\hat{X}(t)) \Delta t + b(\hat{X}(t)) \sqrt{\Delta t} Z_{t+\Delta t} \\ & + \frac{1}{2} b'(\hat{X}(t)) b(\hat{X}(t)) \Delta t (Z_{t+\Delta t}^2 - 1)\end{aligned}\quad (6.12)$$

Milstein skemaet er åbenlyst mere omstændigt at implementere end Euler skemaet, hvilket gør det aktuelt at kigge på konvergensordenen af de to skemaer.

Der findes to former for konvergens; stærk og svag konvergens. Man siger at en diskretisering $\hat{X}(t)$ har stærk konvergens af orden $\beta > 0$, hvis der for en tilpas lille størrelse af Δt gælder

$$E \left[\|\hat{X}(n \cdot \Delta t) - X(T)\| \right] \leq c(\Delta t)^\beta \quad (6.13)$$

hvor $n = \frac{T}{\Delta t}$ og c er en konstant. Tilsvarende siges et diskretiseringsskema at have svag konvergens af orden $\beta > 0$, hvis der for en tilpas lille størrelse af Δt gælder

$$\left| E \left[f(\hat{X}(n \cdot \Delta t)) \right] - E[f(X(T))] \right| \leq c(\Delta t)^\beta \quad (6.14)$$

hvor $n = \frac{T}{\Delta t}$ og c er en konstant. I både (6.13) og (6.14) betyder en højere værdi af β , at diskretiseringsfejlen konvergerer hurtigere mod nul. Det samme skema vil ofte have en lavere stærk konvergensorden end svag konvergensorden.

Euler skemaet har normalt stærk konvergens af orden $\frac{1}{2}$ og svag konvergens af orden 1, mens Milstein skemaet både har stærk og svag konvergens af orden 1². Milstein skemaet har altså en højere stærk konvergensorden end Euler skemaet, men da Euler skemaet er væsentlig lettere at implementere, vil vi i resten af kapitlet beskæftige os med dette.

6.4 Fejlkilder

I dette afsnit kigger vi nærmere på de fejlkilder, der er forbundet med Monte Carlo simulation. Herunder ser vi på beregningen af konfidensintervaller med henblik på at kunne estimere de forventede afvigelser i prisen. Tilsvarende benytter vi definitionen af svag konvergens, som blev beskrevet i forrige afsnit. Til sidst præsenteres én enkelt metode til varians reduktion, som vi også benytter i praksis, når vi priser de to produkter i kapitel 7.

Der findes to kilder til fejl i Monte Carlo simulation; antallet af simulationer og størrelsen på tidssteppet i den diskretiserede udgave. Som beskrevet i ligning (6.2), konvergerer den estimerede værdi $\hat{S}$ mod den sande værdi $E[S]$, når $n \rightarrow \infty$. Vi kan af indlysende grunde ikke sætte n lig ∞ , og da beregningstiden er stigende med n , ønsker vi ikke at vælge n højere end nødvendigt. Spørgsmålet er derfor, hvor stor vi skal vælge n for at få tilfredsstillende resultater. For at kunne besvare dette spørgsmål er det nyttigt at kigge på konfidensintervallet for variabelen. Konfidensintervallet

²Se Glasserman, P. [2003] afsnit 6.1.2.

angiver det interval, som man med sandsynlighed $(1 - \epsilon)$ kan forvente, at μ ligger indenfor, når $n \rightarrow \infty$. Konfidensintervallet for $\hat{S}$ er givet ved

$$\hat{S} \pm z_{\epsilon/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.15)$$

hvor $z_{\epsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \epsilon/2)$. Vi kan derfor for et givent n bestemme, hvor præcise vores resultater bliver. Jo mindre konfidensinterval, jo mere præcise bliver resultaterne. I tabel 6.1 har vi beregnet konfidensintervallet for $\epsilon = 0.05$ ved forskellige værdier af n for en plain vanilla calloption med parametrene $T = 1$, $S(0) = 100$, $K = 100$, $r = 5\%$, $\delta = 3\%$ og $\sigma = 40\%$. Værdien af optionen beregnet ved Black-Scholes formel er 16.2107.

	$n=100,000$	$n=1,000,000$	$n=2,000,000$	$n=4,000,000$
$\hat{S}$	16.1327	16.1746	16.1795	16.1965
Konfidensinterval	± 0.1824	± 0.0577	± 0.0408	± 0.0289

Tabel 6.1: *Konfidensinterval ved forskellige værdier af n .*

Det ses, at der sker en stor ændring i konfidensintervallet fra $n = 100,000$ til $n = 1,000,000$. Ændringen er ikke nær så stor fra $n = 1,000,000$ til $n = 2,000,000$ og fra $n = 2,000,000$ til $n = 4,000,000$.

Når vi skal vurdere fejlkilden Δt , må vi vende tilbage til definitionen af svag konvergens i ligning (6.14). Denne beskriver, hvor stor en afvigelse vi kan forvente i optionsprisen som funktion af Δt , c og β . Vi ved fra forrige afsnit, at Euler diskretiseringen har svag konvergens af orden $\beta = 1$. For en konstant værdi af c kan vi derfor bestemme den forventede afvigelse i optionsprisen som funktion af Δt . Dette er vist i tabel 6.2 for samme plain vanilla calloption, som den vi brugte i tabel 6.1. c er bestemt udfra afvigelsen i prisen ved 1 million simulationer for $\Delta t = \frac{1}{6}$.

	$\Delta t=1$	$\Delta t = \frac{1}{6}$	$\Delta t = \frac{1}{12}$	$\Delta t = \frac{1}{24}$
$c(\Delta t)^\beta$	1.2978	0.2163	0.1082	0.0541
Prisinterval	[14.9129; 17.5085]	[15.9944; 16.4270]	[16.1026; 16.3189]	[16.1566; 16.2648]

Tabel 6.2: *Prisinterval for $c = 1.2978$ og $\beta = 1$ ved forskellige værdier af Δt .*

Som vi tidligere har nævnt, er prisen på calloptionen ved brug af Black-Scholes formel 16.2107. Prisintervallet er beregnet som $16.2107 \pm c(\Delta t)^\beta$, og beskriver dermed det interval, hvori vi kan forvente, at vores estimerede pris vil ligge. For $\Delta t \leq \frac{1}{12}$ kan vi altså forvente, at de estimerede priser ligger forholdsvis tæt på den faktiske pris.

For at afgøre hvilken kombination af n og Δt , det virker fornuftigt at benytte, når

vi priser produkterne i kapitel 7, har vi i tabel 6.3 vist den estimerede afvigelse i prisen, givet ved definitionen på svag konvergens, på calloptionen fra tidligere, for forskellige kombinationer af n og Δt .

	$\Delta t=1$	$\Delta t = \frac{1}{6}$	$\Delta t = \frac{1}{12}$	$\Delta t = \frac{1}{24}$
$n=100,000$	1.7148	0.2858	0.1429	0.0715
$n=1,000,000$	1.2978	0.2163	0.1082	0.0541
$n=2,000,000$	0.8322	0.1387	0.0694	0.0347
$n=4,000,000$	0.7026	0.1171	0.0586	0.0293

Tabel 6.3: *Forventet afvigelse i pris ved forskellige kombinationer af n og Δt .*

Det ses, at man ved kombinationer, hvor $n \geq 2,000,000$ og $\Delta t \leq \frac{1}{12}$, får en relativt lille forventet afvigelse i prisen. En tilsvarende lille forventet afvigelse kan opnås blot ved at sætte $\Delta t = \frac{1}{24}$.

Udover at man kan reducere fejlen i simulationen ved at benytte fornuftige størrelser for n og Δt , findes der også forskellige metoder til at reducere variansen på estimatet. Det ligger uden for denne opgaves rammer at gennemgå alle de forskellige variansreducerende metoder, der findes. I det følgende forklares metoden *antitetisk simulering*, da denne er let at implementere. Denne metode anvendes i prisningen af de to produkter i kapitel 7.

Metoden antitetisk simulering forsøger at reducere variansen ved at introducere en negativ afhængighed mellem par af tilfældigt genererede tal. I tilfældet med tilfældige standardnormalfordelte variable $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ kan de antitetiske variable implementeres ved at indføre de standardnormalfordelte tal $-Z_1, -Z_2, \dots, -Z_n$. Hvis Z_i benyttes til at simulere udviklingen i en Wienerproces, så kan $-Z_i$ bruges til at simulere udviklingen i spejlingen af Wienerprocessen i origo.

Hvis vi ønsker at bestemme værdien $E[Y]$ ved brug af antitetiske variable, opnår vi observationsparene $(Y_1, \tilde{Y}_1), (Y_2, \tilde{Y}_2), \dots, (Y_n, \tilde{Y}_n)$. Estimatoren for den antitetiske simulering, $\hat{Y}_{AT}$ er gennemsnittet af alle $2 \cdot n$ observationer

$$\hat{Y}_{AT} = \frac{1}{2 \cdot n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} \right) \quad (6.16)$$

Vi husker, at estimatoren i den ordinære Monte Carlo simulation er givet ved

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (6.17)$$

For at den antitetiske metode er variansreducerende i forhold til den ordinære me-

tode skal der altså gælde at

$$\begin{aligned}
Var [\hat{Y}_{AT}] &< Var [\hat{Y}] \\
&\Downarrow \\
Var \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} \right) \right] &< Var \left[\frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^{2 \cdot n} Y_i \right] \\
&\Downarrow \\
Var [Y_i + \tilde{Y}_i] &< 2Var [Y_i]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Variansen på venstresiden kan skrives som

$$\begin{aligned}
Var [Y_i + \tilde{Y}_i] &= Var [Y_i] + Var [\tilde{Y}_i] + 2Cov [Y_i, \tilde{Y}_i] \\
&= 2Var [Y_i] + 2Cov [Y_i, \tilde{Y}_i]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Her benytter vi at $Var [Y_i] = Var [\tilde{Y}_i]$, da Y_i og $\tilde{Y}_i$ har samme fordeling. Indsættes (6.19) i (6.18), fås betingelsen for, at den antitetiske simulering er variansreducerende til

$$Cov [Y_i, \tilde{Y}_i] < 0 \tag{6.20}$$

Det ses fra (6.20), at de antitetiske variable reducerer variansen, såfremt der er negativ kovarians mellem de værdier af Y , som fremkommer ved brug af de oprindelige tilfældige tal og dem med negativt fortegn.

Hvis vi kigger på prisen på det underliggende aktiv givet i ligning (6.3), vil vi ved brug af antitetiske variable få de to aktivpriser nedenfor

$$\begin{aligned}
S(t + \Delta t) &= S(t) e^{(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{t+\Delta t}} \\
\tilde{S}(t + \Delta t) &= S(t) e^{(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{t+\Delta t}}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Her ud fra ses det klart, at $S(t + \Delta t)$ og $\tilde{S}(t + \Delta t)$ vil være negativt korrelerede og kriteriet for, at den antitetiske simulering er variansreducerende, er dermed opfyldt.

Kapitel 7

Prisfastsættelse af produkter

I dette kapitel beskriver vi, hvorledes vi, ved hjælp af den beskrevne teori, priser to aktieindekserede obligationer.

Først beskriver vi karakteristika ved de to produkter, som vi har valgt at prise. Herefter forklarer vi, hvilket rådata, vi har benyttet til at estimere de parametre, som anvendes i prisningsmodellerne samt metoderne, der er brugt til at estimere disse parametre.

Når estimationen af alle inputparametre er beskrevet, gennemgår vi de simuleringer, som indgår i beregningerne i selve prisningsmekanismen.

Herefter præsenteres resultaterne af prisningerne. Til sidst diskuteres disse i henhold til de brugte modeller og de faktiske markedspriser for produkterne.

7.1 Beskrivelse af produkter

KommuneKredit Aktiekurv 2012

KommuneKredit Aktiekurv 2012 (KK Aktiekurv) er en aktieindekseret garantiobligation med en løbetid på 3.5 år som udstedes af KommuneKredit og arrangeres af Nordea Bank Danmark A/S.

Obligationen udstedes til kurs 103 d. 12. december 2008 og indfries til kurs 100 d. 12. juni 2012. Ud over den garanterede hovedstolsbetaling er der i produktet indbygget en mulig betaling fra en calloption på tre af verdens største aktieindeks; Dow Jones Euro STOXX 50 (STOXX), Standard & Poor's 500 (S&P 500) og Nikkei 225 Index (Nikkei). Disse tre indeks vil fremover blive benævnt som de underliggende aktieindeks. Optionens struktur er karakteriseret ved følgende:

- Det underliggende aktiv er en ligevægtet kurv af de underliggende aktieindeks.
- Afkastet af kurven bestemmes ved at tage den gennemsnitlige lukkekurs over 7 datoer¹ for hvert af de tre indeks. Herefter bestemmes den procentvise ændring i indeksets værdi fra udstedelsesdagen til den beregnede gennemsnitlige lukkekurs. Til sidst beregnes kurvens samlede afkast som et ligevægtet gennemsnit af disse ændringer.

¹28. november 2011, 28. december 2011, 28. januar 2012, 28. februar 2012, 28. marts 2012, 28. april 2012 og 28. maj 2012.

- Der er en cap på optionen, som gør, at det samlede afkast ikke kan overstige 50%.
- De årlige omkostninger er opgivet som 0.70% af udstedelseskursen pr. år.

Værdien af optionen på udløbstidspunktet kan derfor skrives på følgende måde:

$$V(T)_{option} = 100 \cdot \text{Max}(\text{Min}(50\%, \text{Afkast}_{aktiekurv}), 0) \quad (7.1)$$

hvor

$$\text{Afkast}_{aktiekurv} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 (V(t_j)_{indeks_i}) - V(0)_{indeks_i}}{V(0)_{indeks_i}} \quad (7.2)$$

hvor t_j , $j = 1, 2, \dots, 7$ er de dage hvor lukkekurserne for de underliggende aktieindeks observeres og $i = 1, 2, 3$ refererer til de underliggende aktieindeks.

Der er altså tale om en asiatisk basketoption, der giver afkast, såfremt den gennemsnitlige udvikling i de underliggende aktiver er positiv.

Optionen indeholder desuden et quantoelement, idet de tre underliggende aktieindeks er denomineret i hver deres valuta (Euro, USD og Yen), som alle er forskellige fra den valuta, som produktet prises i (DKK).

For at bestemme betalingen fra optionselementet i produktet ganges optionens værdi med deltagelsesgraden. Deltagelsesgraden blev bestemt til 85% på prisfastsættelsesdagen d. 9. december 2008.

Således ser den samlede værdi af KK Aktiekurv ved udløb ud som følger:

$$V(T)_{KK_Aktiekurv} = 100 + 85\% \cdot V(T)_{option} \quad (7.3)$$

Her udgør det første led hovedstolsgarantien, hvilket er betalingen fra nulcouponobligationen, mens det andet led er betalingen fra optionselementet.

PLUS 7 Index Super 2013

PLUS 7 Index Super 2013 (PLUS 7 Index) er en aktieindekseret garantiobligation med en løbetid på ca. 7 år, som arrangeres af BankInvest Gruppen og udstedes af PLUS Invest.

Obligationen udstedes til kurs 110 d. 6. december 2006 og indfries til kurs 100 d. 27. december 2013. Ud over den garanterede hovedstolsbetaling er der i produktet indbygget en mulig betaling fra en *Himalaya* calloption.

En Himalaya option har en kurv af aktiver som underliggende. Betalingen fra optionen bestemmes, ligesom for den asiatiske basketoption, ud fra den gennemsnitlige udvikling i de underliggende aktiver. Forskellen er at man i Himalaya optionen, på hver observationsdag, fastlåser afkastet på det underliggende aktiv, som har klaret sig bedst i den pågældende periode, hvorefter dette aktiv tages ud af kurven. I PLUS 7 Index er der lige så mange observationsdage for Himalaya optionen, som der er aktiver i kurven, hvorfor afkastet på alle aktiver vil have indflydelse på betalingen fra Himalaya optionen.

Himalaya optionen i PLUS 7 Index har de tre europæiske aktieindeks OMXC20,

DAX og Dow Jones Euro STOXX 50 (STOXX) som underliggende aktieindeks. Aktieindeksene indgår alle i aktivkurven to gange. Hertil kommer to valutapositioner; en lang position i kinesiske Renminbi over for en kort position i amerikanske Dollars (lang CNYUSD) samt en lang position i kinesiske Renminbi over for en kort position i Euro (lang CNYEUR). Den lange position i CNYUSD vægtes med 80% i kurven mens den lange position i CNYEUR vægtes med 20% i aktivkurven.

Optionens struktur er karakteriseret ved følgende:

- Det underliggende aktiv er en kurv bestående af tre aktieindeks, som alle indgår i kurven to gange samt to valutapositioner, der samlet set vægtes som ét aktiv i kurven.
- Én gang årligt² fastlåses aktivet med det højeste afkast, hvorefter det fjernes fra kurven. Det betyder, at giver DAX-indekset eksempelvis det højeste afkast det første år, fastlåses afkastet, og det ene af de to DAX-indeks udgår fra kurven. Det andet DAX-indeks tages fortsat i betragtning på næste observationsdag.
- Afkastet af kurven beregnes ved udløb som et ligevægtet gennemsnit af de syv fastlåste afkast på de syv aktiver i kurven.
- De årlige omkostninger er opgivet som 0.31% af udstedelseskursen pr. år.

Værdien af optionen på udløbstidspunktet kan derfor skrives på følgende måde:

$$V(T)_{option} = 100 \cdot \text{Max}(Afkast_{aktivkurv}, 0) \quad (7.4)$$

hvor

$$Afkast_{aktivkurv} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 \frac{V(t_{fastlåst})_{indeks_i} - V(0)_{indeks_i}}{V(0)_{indeks_i}} \quad (7.5)$$

hvor $t_{fastlåst}$ er den dag hvor afkastet for indeks i er blevet fastlåst.

For at bestemme betalingen fra optionselementet i produktet ganges optionens værdi med deltagelsesgraden. Deltagelsesgraden blev bestemt til 218.3% på prisfastsættelsesdagen d. 27. november 2006.

Således ser den samlede værdi af PLUS 7 Index ved udløb ud som følger:

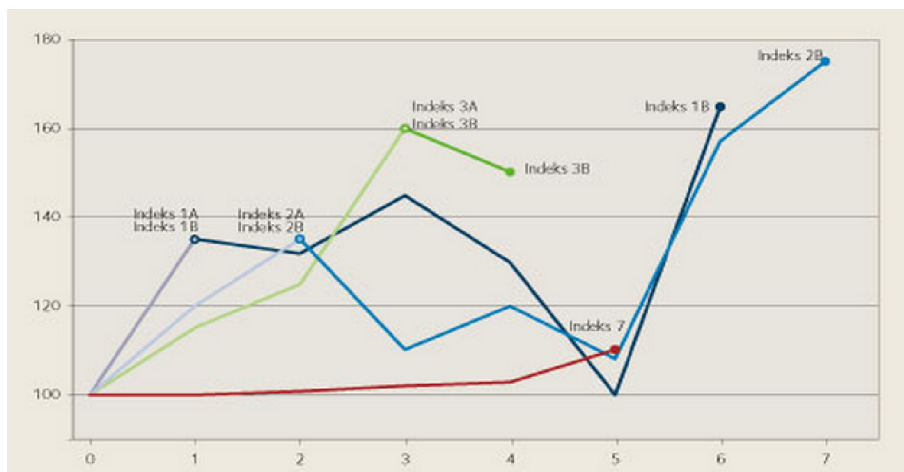
$$V(T)_{PLUS_7Index} = 100 + 218.3\% \cdot V(T)_{option} \quad (7.6)$$

Her udgør det første led hovedstolsgarantien, hvilket er betalingen fra nulkuponobligationen, mens det andet led er betalingen fra optionselementet.

I figur 7.1 ses et eksempel³ på en mulig udvikling i de underliggende aktiver samt fatsu-låselses processen.

²2. december 2007, 2. december 2008, 2. december 2009, 2. december 2010, 2. december 2011, 4. december 2012 og 3. december 2013.

³Eksemplet er fundet under produktinformationen for PLUS 7 Index Super på Plusinvests hjemmeside: <http://www.plusinvest.dk/show.aspx?pageid=1271>



Figur 7.1: *Eksempel på mulig indeks udvikling.*

For at udregne afkastet for optionselementet i produktet ved denne udvikling tages først summen af værdierne for de syv fastlåste indeks: $135 + 135 + 160 + 150 + 110 + 165 + 175 = 1030$.

Herefter findes det gennemsnitlige afkast $\frac{1030/7-100}{100} = 47.14\%$, hvorefter den endelige betaling fra optionsdelen findes ved at gange deltagelsesgraden og hovedstolen på $100 \cdot 218.3\% \cdot 47.14\% = 102.91$. Den totale indfrielseskurs ville i dette tilfælde være 202.91.

Det er vigtigt at pointere, at dette er et fiktivt og meget positivt scenarie, som er opstillet i prospektet. Var værdien af indeks 1B og 2B faldet efter tidspunkt 5 ville betalingen have set helt anderledes ud. Hvis de for eksempel var faldet til henholdsvis 65 og 70 ville betalingen fra optionen blive $100 \cdot 218.3\% \cdot \left(\frac{830/7-100}{100}\right) = 40.54$.

Der er altså tale om en Himalaya option, der giver afkast, såfremt den gennemsnitlige udvikling i de underliggende aktiver er positiv.

Optionen indeholder igen et quantoelement, idet nogle af de underliggende aktiver er denomineret i valutaer (EUR og USD) forskellige fra den valuta, som produktet prises i (DKK).

7.2 Data

For at kunne prise KK Aktiekurv og PLUS 7 Index i Black-Scholes modellen og Heston modellen skal modellerne fodres med en hel del inputparametre. Disse parametre estimeres enten ud fra historiske indeksspriser og renter, eller bestemmes implied via observerede priser på plain vanilla call- og putoptioner.

For at kunne forstå og forholde sig til usikkerheden i de resultater, der fremkommer, er det vigtigt at vide præcist hvilket data, der ligger til grund for modellernes input. Derfor følger nu en beskrivelse af det rådata, der ligger til grund for vores beregninger.

Til prisfastsættelse af nul kuponobligationen i produkterne skal vi bruge en nul kupon-

rente til tilbagediskontering. På de meget korte løbetider kan man benytte LIBOR renter⁴, som er de renter, bankerne kan låne penge til i interbankmarkedet. Under finanskrisen viste disse LIBOR renter sig dog ikke at være retvisende, som den rente, bankerne internt betalte for at låne penge, da det ikke i praksis var muligt at låne til LIBOR i interbankmarkedet. Der vil derfor være nogle uventede tendenser for de korte løbetider i de nulkuponrentekurver, vi estimerer.

Til at prise produkterne har vi brug for nulkuponrenter for løbetider på henholdsvis 7 og 3.5 år. Disse lange nulkuponrenter kan, som beskrevet i kapitel 3, bestemmes som swap-nulkuponrenter via bootstrapping af den til markedet hørende swaprentestruktur.

De swap-nulkuponrenter, som beregnes, skal ikke kun bruges til at tilbagediskontere hovedstolsbetalingen på nulkuponobligationen, men også til at tilbagediskontere betalingen fra optionerne. Desuden skal de estimerede nulkuponrenter fungere som riskikofri renter, når vi modellerer udviklingen i aktieindeks og valutakryds.

Vi har derfor hentet danske, europæiske og amerikanske LIBOR- og swaprenter fra d. 27/11/2006 og danske, amerikanske, europæiske og japanske LIBOR- og swaprenter fra d. 9/12/2008. Renterne er hentet fra Bloomberg og kan ses i henholdsvis tabel 7.1 og 7.2.

	DKK %	USD %	EUR %
3M LIBOR	3.8750	5.3700	3.7220
6M LIBOR	3.9933	5.3613	3.8350
1Y LIBOR	4.2425	5.2894	4.0030
2Y SWAP	4.2650	5.1250	4.1015
3Y SWAP	4.2550	5.0565	4.0965
4Y SWAP	4.2550	5.0395	4.1060
5Y SWAP	4.2525	5.0480	4.1030
6Y SWAP	4.2550	5.0630	4.1095
7Y SWAP	4.2625	5.0775	4.1205
8Y SWAP	4.2725	5.0952	4.1345
9Y SWAP	4.2850	5.1130	4.1520
10Y SWAP	4.2975	5.1339	4.1740
15Y SWAP	4.3825	5.2211	4.2468
20Y SWAP	4.4250	5.2625	4.2815
30Y SWAP	4.4175	5.2749	4.2600

Tabel 7.1: LIBOR- og swaprenter for tre af de markeder, som indgår i PLUS 7 Index d. 27/11/2006. Kilde: Bloomberg.

For at kunne prisfastsætte PLUS 7 Index mangler vi stadig den kinesiske nulkuponrente. Som nævnt i kapitel 3 har Kina ikke et åbent pengemarked, hvorfor det ikke er muligt at bestemme nulkuponrenterne via swaprenter, da disse simpelthen ikke eksisterer. Som beskrevet har vi i stedet bestemt de kinesiske swaprenter ved hjælp af NDF-markedet⁵ og de amerikanske renter. Derefter har vi beregnet swap-nulkuponrenterne ved brug af *bootstrapping*.

⁴LIBOR renter eksisterer kun på op til 1 års løbetid

⁵Non Deliverable Forwards

	DKK %	USD %	EUR %	JPY %
3M LIBOR	5.3933	2.1638	3.4280	0.9500
6M LIBOR	5.4250	2.5250	3.5140	1.0438
1Y LIBOR	4.7885	2.7100	3.6100	1.1425
2Y SWAP	4.2190	2.0065	3.1805	0.9100
3Y SWAP	4.1090	2.2455	3.3085	0.9488
4Y SWAP	3.9760	2.4383	3.4060	1.0075
5Y SWAP	3.9970	2.5810	3.4851	1.0625
6Y SWAP	4.0150	2.6990	3.5681	1.1150
7Y SWAP	4.0470	2.7940	3.6338	1.1650
8Y SWAP	4.0790	2.8635	3.7086	1.2225
9Y SWAP	4.1170	2.9090	3.7723	1.2825
10Y SWAP	4.1650	2.9415	3.8422	1.3375
15Y SWAP	4.2480	2.9245	3.9575	1.5625
20Y SWAP	4.1160	2.8225	3.8582	1.7375
30Y SWAP	3.6920	2.6885	3.4642	1.7905

Tabel 7.2: *LIBOR- og swaprenter for de fire markeder, som indgår i KK Aktiekurv d. 9/12/2008.* Kilde: Bloomberg.

I tabel 7.3 er vist NDF-priserne, som er hentet fra Bloomberg samt de beregnede kinesiske LIBOR- og swaprenter fra d. 27/11/2006.

	NDF-pris	Rentedifferentiale	USD %	CNY %
SPOT	7.8436			
3M LIBOR	7.7669	0.0397	5.3700	1.3982
6M LIBOR	7.6894	0.0397	5.3613	1.3894
1Y LIBOR	7.5369	0.0391	5.2894	1.3785
2Y SWAP	7.3184	0.0329	5.1250	1.8313
3Y SWAP	7.2047	0.0264	5.0565	2.4119
4Y SWAP	7.0460	0.0245	5.0395	2.5889
5Y SWAP	6.9360	0.0221	5.0480	2.8340
6Y SWAP	6.9115	0.0189	5.0630	3.1740
7Y SWAP	6.8171	0.0177	5.0775	3.3050
8Y SWAP	6.7511	0.0164	5.0952	3.4518
9Y SWAP	6.6823	0.0155	5.1130	3.5670
10Y SWAP	6.6106	0.0147	5.1339	3.6632
15Y SWAP	6.2336	0.0125	5.2211	3.9686
20Y SWAP	5.8719	0.0113	5.2625	4.1350
30Y SWAP	5.3061	0.0094	5.2749	4.3362

Tabel 7.3: *NDF-priser, rentedifferentiale, LIBOR- og swaprenter for CNY d. 27/11/2006.* Kilde: Bloomberg.

Både i Black-Scholes og Heston modellen har vi brug for aktivernes volatiliteter. I Black-Scholes modellen er volatiliteten konstant, hvorfor vi kun har brug for en *at-the-money* (ATM) volatilitet for hvert indeks i denne model. I Heston modellen er volatiliteten stokastisk og bliver modelleret over perioden på lige fod med aktivprisen.

For at modellere udviklingen i volatiliteten skal man, som beskrevet i afsnit 5.2 om Heston modellen, bruge fem inputparametre. Disse inputparametre kan ikke umiddelbart aflæses eller estimeres fra historiske værdier, de skal derimod kalibreres til volatilitetskurven for det givne aktiv for at fange strukturen i denne. Til en sådan kalibrering skal man derfor bruge en volatilitetsflade for hvert aktiv, dvs. værdier for volatiliteten ved varierende løbetid og strikes. For at forenkle kalibreringen lidt har vi dog valgt at holde løbetiden fast og dermed kun variere over strikes, da det er her, det såkaldte volatilitetssmil viser sig. Vi skal altså bruge volatiliteter for hvert aktiv over varierende strikes for den givne dag.

Da vi både har brug for *in-the-money* (ITM) og *out-of-the-money* (OTM) volatiliteter for at dække hele fladen, benytter vi os af, at man ved hjælp af *put-call pariteten* kan regne OTM put volatiliteter om til ITM call volatiliteter. Dette viser sig at være nødvendigt, da likviditeten⁶ på ITM calloptioner sjældent er høj. Dette skyldes, at når optionen er ITM, er delta høj, og optionselementet i produktet forsvinder dermed. I dette tilfælde vil man derfor lige så godt kunne købe det underliggende aktiv.

Vi henter derfor OTM put og call priser for alle aktieindeks (på nær OMXC20, da der ikke findes priser på disse optioner) fra Bloomberg og Datastream for at kunne regne disse om til implicitte volatiliteter.

Vi får imidlertid også brug for ITM put og call priser i forbindelse med, at vi skal bestemme implicite dividender for aktieindeksene. Så for de strikes, hvor der findes likvide ITM priser, hentes disse også. De hentede optionspriser kan ses i tabel 7.4 og 7.5.

Som det fremgår af tabellen, varierer løbetiden for optionerne en hel del. Da de produkter, vi ønsker at prise, har meget lange løbetider (henholdsvis 3.5 og 7 år), skulle vi optimalt set have fat i vanilla optioner med samme løbetider. Vanilla optionerne findes dog ikke med så lange løbetider, hvorfor vi har taget den længste løbetid, vi har kunnet finde, hvor priserne samtidig var forholdsvis likvide.

Som tidligere nævnt er det ikke muligt at beregne implicitte volatiliteter for OMXC20 indekset på samme måde som for de andre indeks, da man ikke kan hente historiske optionspriser på dette indeks. Vi er derfor nødt til at beregne volatilitetsfladen for dette indeks via et af de andre europæiske indeks. Da strukturen i STOXX og OMXC20 indekset minder meget om hinanden, har vi valgt at beregne volatilitetsfladen for OMXC20 ved at parallelforskyde volatilitetsfladen for STOXX. Faktoren, hvormed STOXX volatilitetsfladen forskydes, findes som forholdet mellem de faktiske volatiliteter på prisningsdagen. Det er derfor ikke nødvendigt at hente flere optionspriser for at bestemme volatilitetsfladen for OMXC20 indekset.

Ud over volatiliteter på aktieindeksene skal vi også bruge volatiliteter på valutakrydsene CNYUSD og CNYEUR⁷, da disse indgår som underliggende aktiver i PLUS 7 Index produktet. Disse er dog ikke så lige til at finde implicit, da de optioner, der findes på den kinesiske valuta, grundet den valutakurspolitik Kina har ført siden

⁶Hvorvidt en pris er likvid eller ej vurderes ud fra størrelsen open interest. Open interest beskriver hvor mange optionskontrakter, der er blevet indgået uden at være blevet lukket igen for den pågældende option på den givne dag.

⁷I markedet kvoterer valutakrydsene som USDCNY og EURCNY, men da de er vendt om i prospektet for PLUS 7 Index vælger vi at benytte os af notationen CNYUSD og CNYEUR gennem hele opgaven.

Dato	Underliggende	Løbetid	Spot	Strike	Put pris	Call pris
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	5400	100.0	1168.9
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	5500	115.2	1086.9
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	5600	132.1	1007.0
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	5700	150.7	928.7
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	5800	171.7	852.7
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	5900	194.8	778.7
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6000	220.1	707.1
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6100	248.0	638.1
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6200	278.6	572.0
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6300	312.4	508.9
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6350	330.6	478.3
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6400	314.9	448.9
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6500	353.0	392.8
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6600	395.3	340.6
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6700	441.6	292.5
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6800	492.3	248.3
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	6900	547.5	208.6
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	7000	606.9	173.8
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	7100	670.5	143.5
27/11/2006	DAX	0.8167	6369	7200	738.4	117.3
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3000	90.1	1024.0
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3100	106.5	947.8
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3200	125.0	873.6
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3300	145.5	801.9
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3400	168.3	732.2
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3500	193.6	665.0
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3600	221.3	600.1
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3700	251.9	538.0
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3800	285.3	479.0
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	3900	321.8	423.0
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4000	362.0	370.7
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4100	405.7	322.0
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4200	453.6	277.4
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4300	505.7	237.1
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4400	562.0	200.8
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4500	622.3	168.7
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4600	686.7	140.7
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4700	755.1	116.5
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4800	826.8	95.7
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	4900	894.3	77.2
27/11/2006	STOXX	2.0861	4002	5000	979.6	63.4

Tabel 7.4: Optionspriser på aktieindeks indeholdt i produktet *PLUS 7 Index*. Kilde: Datastream.

1994, kun handles som *over-the-counter* (OTC) produkter.

Den kinesiske *Renminbi* har siden 1994 været fastlåst til den amerikanske Dollar, hvilket beskrives i *Morisson, W. [2010]*. Her beskriver *Wayne M. Morrison* det handelsmæssige bånd, der er mellem Kina og USA, hvilket formentlig er hovedårsagen til, at Kina har valgt at fastlåse deres valuta til den amerikanske Dollar.

Dato	Underliggende	Løbetid	Spot	Strike	Put pris	Call pris
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	400	15.0	-
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	500	30.0	-
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	600	48.0	-
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	700	75.0	-
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	800	113.0	200.0
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	900	161.9	147.0
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	1000	205.5	106.2
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	1100	-	69.0
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	1200	-	48.8
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	1300	-	25.0
9/12/2008	S&P 500	1.0417	888	1400	-	15.0
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2000	345.3	777.4
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2100	383.7	725.0
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2200	424.5	674.7
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2300	467.4	626.7
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2400	512.6	580.8
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2500	559.8	537.3
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2600	609.5	496.0
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2700	661.4	457.0
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2800	715.5	420.2
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	2900	772.0	385.7
9/12/2008	STOXX	3.0500	2480	3000	830.6	353.4
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	6000	1357.15	3438.47
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	6500	1624.09	3214.72
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	7000	1908.69	3008.63
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	7500	2209.39	2818.63
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	8000	2524.77	2643.33
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	8500	2853.54	2481.41
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	9000	3194.52	2331.69
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	9500	3546.64	2193.12
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	10000	3908.93	2064.71
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	10500	4280.51	1945.6
9/12/2008	Nikkei	2.0000	8395	11000	4660.59	1834.99

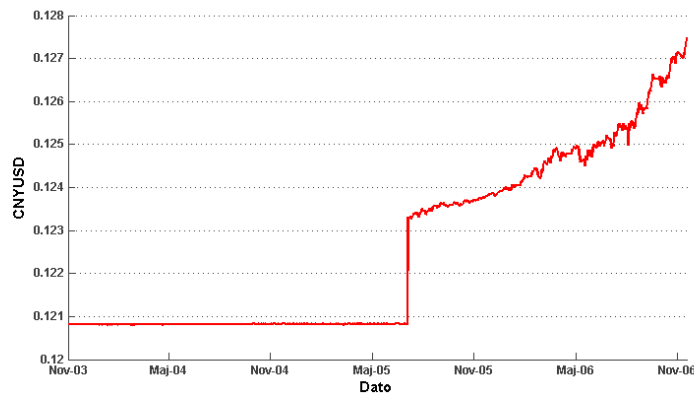
Tabel 7.5: *Optionspriser på aktieindeks indeholdt i produktet KK Aktiekurv.* Kilde: Bloomberg.

Fra 1994 til juli 2005 har den kinesiske Renminbi været pegget til den amerikanske Dollar med en kurs for CNYUSD omkring 0.12. I juli 2005 apprecierede Kina Renminbien med omkring 2.1% i forhold til Dollaren for at overgå til en ny *managed float* politik, hvor kursen nu afhænger af en kurv af flere store valutaer inklusiv den amerikanske Dollar. For at fastholde en target kurs til Dollaren og de andre store valutaer holder den kinesiske regering kontrol med alle kapitaltransaktioner, og der findes strenge restriktioner på dette område.

I figur 7.2 ses udviklingen i kursen for CNYUSD fra november 2003 til november 2006, altså de seneste tre år frem til prisningsdagen for PLUS 7 Index.

Der findes masser af kritik af den fastkurspolitik, som Kina benytter sig af. Vi nævner nogle af eksemplerne fra Morrisons rapport i det følgende.

Handlen mellem USA og Kina er steget fra \$5 milliarder i 1980 til \$409 milliarder



Figur 7.2: Udvikling i kursen for CNYUSD.

i 2008. Den kunstigt lave valutakurs er med til at øge Kinas eksport til USA. Dette har været kritiseret af amerikanske økonomer, som mener, at den kunstigt lave valutakurs har skadet flere amerikanske producenter, som er tvunget til at kæmpe mod billige kinesiske lavprisprodukter. Dette har ifølge økonomerne medført et stort tab af arbejdspladser i USA.

På trods af at man i 2005 overgik til den ny *managed float* politik, er Renminbien stadig i høj grad bundet til den amerikanske Dollar. Dette viste sig som et problem under den finansielle krise i 2009, da den amerikanske Dollar deprecierede voldsomt over for andre store valutaer. På grund af den fastlåste valutakurs deprecierede den kinesiske valuta også over for disse landes valutaer, hvilket medførte, at kinesisk eksport til landene blev billigere mens import fra landene blev dyrere.

Kina har grundet den faste valutakurspolitik ikke mulighed for at afhjælpe eventuelt forestående problemer som inflation og økonomiske bobler ved brug af pengepolitik. Dette er endnu et argument for ikke at fastholde den nuværende fastkurspolitik.

Med alle disse fremtidige risici forbundet med den fastlåste valutakurspolitik kan man begynde at overveje, hvor længe Kina vil fastholde denne politik. Dette leder os hen til en pointe vedrørende volatiliteten på valutakrydsene CNYUSD og CNY-EUR. Da kursen er fastlåst (indenfor et lille spænd), vil volatiliteten i princippet være tæt på nul. Men på grund af muligheden for, at fastkurspolitiken bryder sammen, kan volatiliteten på disse valutakryds ses som en binær (0,1) variabel - holder fastlåsningen eller ej?!

Grundet denne specielle volatilitetsstruktur er de optioner, der handles på for eksempel USDCNY, ikke som optioner på andre valutakryds, hvor man kan forsikre sig mod større eller mindre udsving i kursen. På USDCNY er der i virkeligheden tale om en forsikring mod et sammenbrud i fastkurspolitiken.

Som tidligere nævnt handles optioner på USDCNY kun OTC. Det vil sige, at prisen på produkterne er drevet af udbud og efterspørgsel. Det medfører, at der ikke er nogen gennemsigtighed i markedet. Det har derfor været svært at finde implicitte volatiliteter for valutakrydsene CNYUSD og CNYEUR. Det er kun lykkedes os at finde en ATM volatilitet for USDCNY i Bloomberg. Det er derfor ikke muligt at bestemme en hel volatilitetsflade for de to valutakryds. Da vi skal bruge en volatilitetsflade for at kalibrere Heston modellen, har vi derfor valgt kun at behandle disse

valutakryds i Black-Scholes modellen⁸.

Det er lykkedes os at finde implicitte ATM volatiliteter for USDCNY og EURUSD på prisningsdagen og implicitte korrelationer mellem USDCNY og EURUSD fra i dag⁹. Vi benytter derfor disse til at bestemme den implicitte volatilitet på EURCNY. Vi vælger at se bort fra *Siegels Paradoks*¹⁰ og antager, at volatiliteten på et valutakryds er den samme, uanset hvilken vej krydset vender. Det vil sige, at vi kan benytte den volatilitet, som vi har hentet på USDCNY som input for CNYUSD i vores prisninger.

De implicitte korrelationer fra i dag benyttes sammen med de faktiske korrelationer fra i dag til at bestemme forholdet mellem de faktiske og de implicitte korrelationer. Den faktor, der er mellem de to størrelser, ganges på de faktiske korrelationer på prisningsdagen for at estimere de implicitte korrelationer på prisningsdagen. Data til brug for dette er vist i tabel 7.6 og 7.7. Beregningerne for bestemmelse af volatiliteten på EURCNY vil blive gennemgået i afsnittet "Estimation af parametre".

	CNYUSD	USDEUR
1Y implied volatility d. 27/11/2006	0.0369	0.0827

Tabel 7.6: *Volatiliteter på valutakryds*. Kilde: Barclays Capital.

	CNYUSD,USDEUR
1Y actual correlation d. 8/2/2011	0.2100
1Y implied correlation d. 8/2/2011	0.2000
Faktor	0.9524
1Y actual correlation d. 27/11/2006	0.1094
1Y implied correlation d. 27/11/2006	0.1042

Tabel 7.7: *Korrelationer mellem valutakryds*. Kilde: Barclays Capital.

Til simulering af de underliggende aktivers kurser skal vi bruge en matrix med korrelerede normalfordelte variable. Denne matrix dannes ved hjælp af korrelationsmatrixen for de underliggende aktiver, som er beregnet ved brug af faktiske korrelationer. Da begge produkter indeholder et quantoelement, har vi også brug for at kende quantokorrelationer¹¹ og volatiliteten på valutakrydsene mellem de valutaer, aktiverne er denomineret i, og den valuta produktet prises i. Quantokorrelationerne beregnes som faktiske korrelationer, mens volatiliteten på valutakrydsene er hentet som implicitte 1Y ATM volatiliteter fra Bloomberg og kan ses i tabel 7.8.

⁸I Heston modellen gøres dette ved, at sætte vol af vol parametren til 0.

⁹I dag er i dette tilfælde d. 8/2/2011

¹⁰Siegels Paradoks beskriver problemstillingen om, at prisen på en valutaoption ikke er den samme set fra den indenlandske og den udenlandske investors synspunkt. Paradokset fremstår som følge af *Jensens ulighed*. For nærmere information se *Dumas et al. [1995]* og *Chu [2005]*

¹¹Quantokorrelationen er korrelationen mellem et aktiv og det dertilhørende valutakryds.

	EURDKK	USDDKK	JPYDKK
1Y ATM implied volatility d. 27/11/2006	0.58%	7.95%	-
1Y ATM implied volatility d. 9/12/2008	0.50%	19.16%	23.44%

Tabel 7.8: *Volatilitet på valutakryds*. Kilde: Bloomberg.

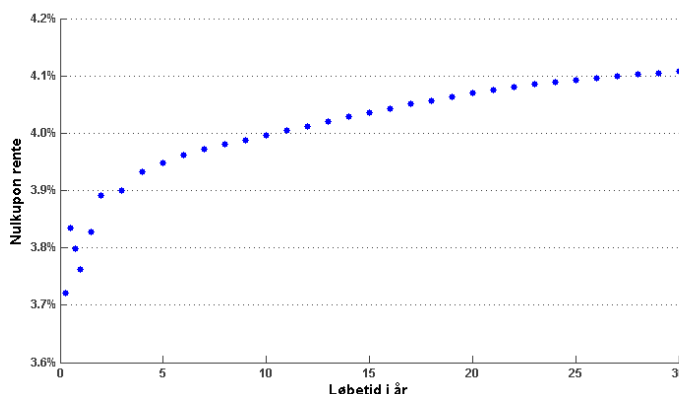
Alle faktiske volatiliteter og korrelationer er beregnet på tidsserier af historiske indekspriser hentet fra Bloomberg.

7.3 Estimation af parametre

I forige afsnit gennemgik vi det rådata, der ligger til grund for estimationen af de inputparametre, der benyttes i de anvendte modeller. I dette afsnit beskriver vi, hvorledes de enkelte parametre estimeres ud fra rådata.

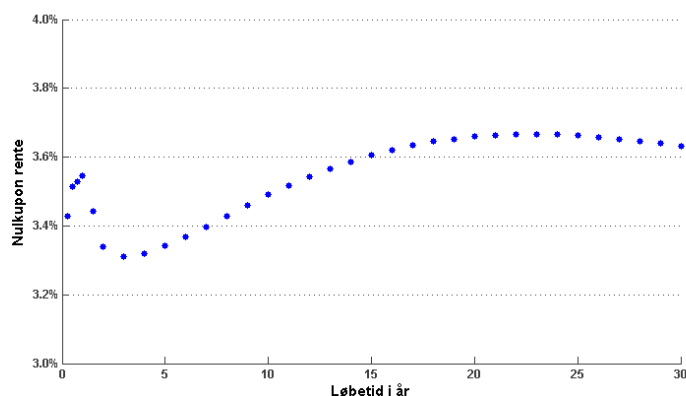
I rådata har vi LIBOR- og swaprenter med løbetider fra 3 måneder til 30 år, for alle de valutaer, som et underliggende aktiv i de to produkter eller selve produkterne er denomineret i. Ved brug af bootstrapping kan vi, som beskrevet i kapitel 3, finde de dertilhørende swap-nulkuponrentekurver, som vi skal bruge til simulering af kurserne for de underliggende aktiver og tilbagediskontering af options- og hovedstolsbetalinger.

Som nævnt i kapitel 3 er det ikke helt korrekt at antage, at betalingerne blot skal tilbagediskonteres med en risikofri rente¹², da der eksisterer en konkursrisiko for udstederen af produktet. Det vil derfor give en mere retvisende pris, hvis der modelleres et kreditspænd for udstederen, som pålægges de risikofrie renter. Vi har dog valgt at se bort fra dette kreditspænd i prisingen af vores produkter, men vender tilbage til det i analysen af resultaterne i afsnit 7.6. I figur 7.3 og 7.4 er vist swap-nulkuponrentestrukturen for Euro på prisningsdagen for de to produkter.



Figur 7.3: *EUR swap-nulkuponrentestruktur den 27. november 2006*.

¹²Igen benævnes markedsrenterne som risikofrie renter af hensyn til sammenhængen med notationen i den anvendte teori.



Figur 7.4: *EUR swap-nulcuponrentestruktur den 9. december 2008.*

KK Aktiekurv og Plus 7 Index har en løbetid på henholdsvis 3.5 og 7 år, så i prisen af produkterne benyttes nulcuponrenter med tilsvarende løbetider. Disse er vist i tabel 7.9.

Valuta	Dato	Løbetid i år	Beregnet rente
DKK	27/11/2006	7.0	4.13%
EUR	27/11/2006	7.0	3.97%
USD	27/11/2006	7.0	4.97%
CNY	27/11/2006	7.0	2.47%
DKK	9/12/2008	3.5	4.04%
USD	9/12/2008	3.5	2.31%
EUR	9/12/2008	3.5	3.32%
JPY	9/12/2008	3.5	1.00%

Tabel 7.9: *Swap-nulcuponrenter til prisning af de to produkter.*

I Black-Scholes modellen skal vi bruge en konstant volatilitet som inputparameter, hvorimod vi i Heston modellen modellerer volatiliteten til hvert tidspunkt via variansprocessen. Til simulering af variansprocessen bruges fem inputparametre som alle kalibreres til den gældende volatilitetsflade. Dette er beskrevet i afsnit 7.4.

Som input til alle aktivvolatiliteter har vi valgt at benytte implicitte volatiliteter. En implicit volatilitet er den volatilitet, som implicit ligger i prisen på den givne vanilla option. Denne kan findes ved at holde alle andre parametre i Black-Scholes formel fast og derefter invertere den analytisk. Det implicite volatilitetsmål er at foretrække fremfor det faktiske volatilitetsmål, da markedets forventninger til den fremtidige volatilitet er indpriset i den implicite volatilitet.

Som tidligere nævnt er det ikke muligt at finde implicitte volatiliteter på OMXC20 indekset via historiske optionspriser, hvorfor vi har valgt at lade volatilitetsfladen for OMXC20 være en parallelforskydning af volatilitetsfladen for STOXX. STOXX fladen er forskudt med en faktor 1.0971, svarende til forholdet mellem de faktiske volatiliteter på prisningsdagen.

$$Faktor = \frac{ActVol_{OMXC20}}{ActVol_{STOXX}} = \frac{0.1569}{0.1430} = 1.0971$$

I afsnit 7.2 viste vi hvordan vi ved brug af en faktor estimerede den historiske implicitte korrelation mellem valutakrydsene CNYUSD og USDEUR. Vi skal nu benytte denne korrelation og de implicitte volatiliteter for CNYUSD og EURUSD til at bestemme den implicitte volatilitet for valutakrydset CNYEUR. Dette gøres ud fra nedenstående sammenhæng.

$$\sigma_{CNYEUR}^2 = \sigma_{USDCNY}^2 + \sigma_{EURUSD}^2 + 2 \cdot \rho_{USDCNY, EURUSD} \cdot \sigma_{USDCNY} \cdot \sigma_{EURUSD} \quad (7.7)$$

Indsættes værdier i (7.7) fås

$$\sigma_{CNYEUR} = \sqrt{0.03693^2 + 0.0827^2 + 2 \cdot 0.1042 \cdot 0.03693 \cdot 0.0827} = 0.0940$$

For at finde ud af hvilke volatiliteter, vi skal benytte som ATM volatiliteter i Black-Scholes modellen, beregner vi delta for alle strikes ved brug af de tilhørende renter, volatiliteter og dividender. Deltaværdierne for DAX er vist i tabel 7.10, og værdierne for de resterende indeks kan ses i bilag C.

Strike	Delta	Implied vol
5400	0.93	15.52%
5500	0.90	16.04%
5600	0.88	16.37%
5700	0.85	16.52%
5800	0.82	16.59%
5900	0.79	16.56%
6000	0.76	16.48%
6100	0.72	16.35%
6200	0.68	16.19%
6300	0.64	15.99%
6350	0.62	15.87%
6400	0.60	15.77%
6500	0.56	15.54%
6600	0.52	15.30%
6700	0.47	15.07%
6800	0.43	14.82%
6900	0.38	14.58%
7000	0.34	14.37%
7100	0.30	14.18%
7200	0.26	14.01%

Tabel 7.10: Deltaværdier og dertilhørende implicitte volatiliteter for DAX d. 27/11/2006 med parameter værdierne $S = 6370$, $T - t = 0.82$, $r = 3.92\%$ og $\delta = 0$.

Det ses, at $\Delta = 0.5$ ligger et sted mellem strike 6600 og 6700. Den ATM volatilitet, som vi benytter i Black-Scholes modellen, beregnes nu som en lineær interpolation mellem de to volatiliteter. I tabel 7.11 ses de ATM aktivvolatiliteter, som er benyttet i prisingen af de to produkter ved brug af Black-Scholes modellen.

Indeks	Dato	Implied σ
OMXC20	27/11/2006	17.58%
DAX	27/11/2006	15.21%
STOXX	27/11/2006	16.76%
CNYUSD	27/11/2006	3.69%
CNYEUR	27/11/2006	9.40%
S&P 500	9/12/2008	41.79%
STOXX	9/12/2008	33.29%
Nikkei	9/12/2008	52.53%

Tabel 7.11: *Implicitte ATM aktivvolatiliteter til prisning af de to produkter.*

Som det især fremgår af de to volatiliteter for STOXX indekset, er de implicitte volatiliteter steget voldsomt fra udstedelsen af PLUS 7 Index i slutningen af 2006 til udstedelsen af KK Aktiekurv i slutningen af 2008. Dette er en generel tendens, som skyldes de meget volatile markeder, som opstod, da finanskrisen for alvor brød ud i efteråret 2008.

Her er et tydeligt eksempel på, hvorfor det er mere fremadskuende at bruge implicitte volatiliteter frem for faktiske historiske volatiliteter. Havde vi ved prisningen af KK Aktiekurv i stedet brugt faktiske volatiliteter baseret på historisk data, ville dette afspejle, hvordan volatiliteten havde været historisk set over den valgte tidsperiode. Den faktiske volatilitet ville altså ikke afspejle den krise i de finansielle markeder, som pludselig fik volatiliteterne til at stige så voldsomt.

I både Black-Scholes og Heston modellen skal vi bruge årlige dividendeudbetalinger for de underliggende aktieindeks. Indeksene i sig selv udbetaler ikke dividender, men da de underliggende aktier udbetaler dividender, vil prisen på indekset ændres som følge heraf. Det eneste indeks, dette ikke gør sig gældende for, er DAX, da det er et totalafkastindeks. Det vil sige, at de dividendeudbetalinger, der bliver foretaget på de underliggende aktier, bliver akkumuleret i prisen på indekset. Derfor sættes dividenden på DAX indekset til nul i alle beregninger.

Ligesom med volatiliteterne kan dividenderne findes implicit eller historisk. Igen vælger vi at benytte det implicitte mål, da dette er fremadskuende. De implicitte dividender findes ud fra put-call pariteten (7.8), hvor alle andre parametre end dividenden er kendte.

$$P(t) - C(t) = e^{-r(T-t)}K - e^{-\delta(T-t)}S \quad (7.8)$$

Her $P(t)$ og $C(t)$ prisen på tidspunkt t på en put- henholdsvis calloption med udløbstidspunkt T , strike K og årlig dividendeudbetaling δ . r er den risikofri rente for det pågældende marked og for løbetid $(T - t)$. Isoleres dividenden i (7.8) fås

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{C - P + e^{-r \cdot (T-t)} \cdot K}{S}\right)}{-(T - t)} \quad (7.9)$$

Dividenden beregnes for alle de strikes, hvor vi har priser for både put- og cal-

loptioner, hvorefter gennemsnittet af disse dividender for hvert indeks udgør den dividende, der benyttes i prisingen. For at sikre os at vi ikke benytter dividender udregnet fra priser, som ikke opfylder put-call pariteten, tjekker vi, at alle de beregnede dividender er af nogenlunde samme størrelse. Det viser sig, at alle dividender ser fornuftige ud. Såfremt nogle var faldet udenfor, måtte vi ekskludere disse fra beregningen af den gennemsnitlige dividende. Den risikofri rente, som indgår i (7.9), er fundet fra den pågældende swap-nulkuponrentestruktur for en løbetid svarende til den pågældende options restløbetid.

Grundet de manglende optionspriser på OMXC20 indekset har det ikke været muligt at beregne dividenden for dette indeks implicit. Vi har derfor taget den historiske dividende for det seneste år op til prisfastsættelsen og benyttet denne i stedet¹³.

De beregnede dividender er vist i tabel 7.12.

Indeks	Dato	Beregnet δ
OMXC20	27/11/2006	1.97%
DAX	27/11/2006	0.00%
EuroSTOXX	27/11/2006	3.88%
S&P 500	9/12/2008	2.39%
EuroSTOXX	9/12/2008	3.38%
Nikkei	9/12/2008	2.69%

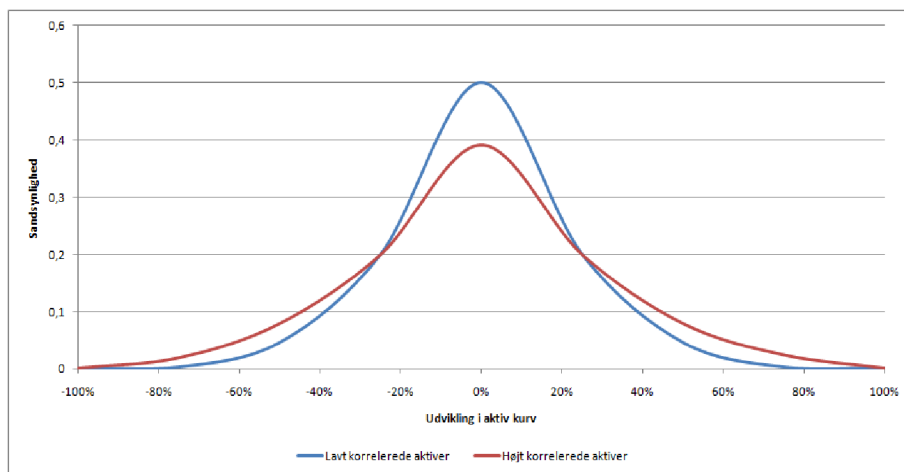
Tabel 7.12: Årlige dividendeudbetalinger for de underliggende aktieindeks.

Når stierne for de underliggende aktiver simuleres, er det vigtigt, at der tages hensyn til den korrelation, der er mellem de underliggende aktiver i produktet. Korrelationen mellem de underliggende aktiver har ofte stor betydning for prisen på optionsdelen af produktet, især for de såkaldte *Mountain Range* optioner, som Himalaya optionen er en del af. Det skyldes, at man i denne type optioner fjerner et underliggende aktiv fra aktivkurven, hver gang der sker en fastlåsning af afkastet på de underliggende aktiver. Det vil sige, at hvis halvdelen af aktiverne stiger, og halvdelen af aktiverne falder tilsvarende, ender man med et afkast for kurven på omkring nul. Det er man naturligvis ikke interesseret i som investor. Har aktiverne i kurven derimod høje korrelationer med hinanden, vil det betyde, at de bevæger sig i samme retning, altså enten falder eller stiger samtidig. Hvis alle aktiverne stiger, giver det et samlet positivt afkast for aktivkurven, hvilket betyder udbetaling til indehaveren af optionen. Sker det derimod, at alle aktiverne falder, vil optionsværdien blot være nul ved udløb - man kommer altså aldrig til at betale (mere end man har betalt for optionen) for det negative afkast for aktivkurven.

Det er den skæve afkastfordeling i optioner (negative afkast vejer ikke så tungt som positive) som gør det attraktivt med høj korrelation imellem de underliggende aktiver. I figur 7.5 er illustreret en sandsynlighedstæthedsfunktion for udviklingen i en fiktiv aktivkurv ved lav henholdsvis høj aktivkorrelation.

Som det kan ses i figur 7.5, øger korrelationen mellem aktiverne altså både sandsynligheden for store positive og negative afkast, men da alle negative afkast vejer lige

¹³De daglige dividendeudbetalinger er hentet fra Bloomberg.



Figur 7.5: Fiktiv sandsynlighedstæthedsfunktion for udvikling i aktivkurv afhængig af korrelation.

tungt, er det ikke væsentligt for investor, om aktivkurven har tabt 5% eller 50%. Derimod har det selvfølgelig stor betydning om et positivt afkast er på 5% eller 50%. Som før nævnt er korrelationseffekten størst for Mountain Range optioner som den i PLUS 7 Index, men også for produkter som KK Aktiekurv vil højere korrelationer resultere i en højere pris. Her bliver der ikke taget indeks ud af kurven, men alle indeks vægter stadig lige tungt, når det samlede afkast skal gøres op, hvorfor samme argumenter som for Mountain Range optionerne gør sig gældende.

Aktivkorrelationerne er estimeret som faktiske korrelationer ved et 260 dages rullende vindue anvendt på data for de seneste 3 år frem til prisningsdagen. Korrelationerne bestemmes ved først at beregne de daglige logafkast for de to aktiver, vi ønsker at bestemme korrelationen imellem. Logafkastet mellem tidspunkt $t - 1$ og t findes ved

$$y(t) = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right), t = 1, \dots, T \quad (7.10)$$

Herefter beregnes korrelationen mellem de to aktiver ved

$$\rho_{ij}(t) = \frac{\sigma_{ij}(t)}{\sigma_i(t)\sigma_j(t)} = \frac{\sum_{k=t-259}^t (y_i(k) - \bar{y}_i(t)) (y_j(k) - \bar{y}_j(t))}{\sqrt{\sum_{k=t-259}^t (y_i(k) - \bar{y}_i(t))^2 \sum_{k=t-259}^t (y_j(k) - \bar{y}_j(t))^2}} \quad (7.11)$$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{260} \sum_{k=t-259}^t y(k) \quad (7.12)$$

Som det kan ses i figur 7.6, svinger aktivkorrelationen ofte meget, hvorfor det ikke virker hensigtsmæssigt blot at benytte korrelationen for det seneste år op til prisningsdagen. Ud fra argumenterne ovenfor om, at prisen på optionen er stigende med



Figur 7.6: *Estimeret korrelation mellem OMXC20 og DAX.*

aktivkorrelationerne, mener vi, at det er sandsynligt, at optionsmodparten vælger korrelationen så høj som muligt, når han priser optionen. Ud fra de 522 korrelationer, vi har beregnet ved brug af det rullende vindue, vælger vi derfor den højeste til brug i prisningen af produkterne.

I tabel 7.13 og 7.14 er vist de anvendte korrelationsmatricer.

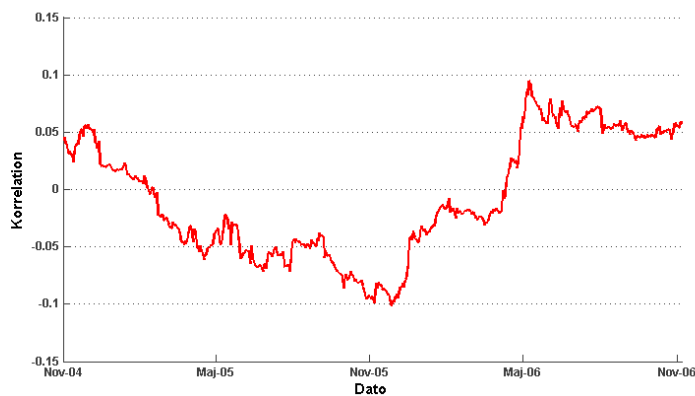
	OMXC20	DAX	STOXX	CNYUSD	CNYEUR
OMXC20	1.0000	0.6431	0.6646	0.0356	0.1077
DAX	0.6431	1.0000	0.9784	0.0977	0.1421
STOXX	0.6646	0.9784	1.0000	0.0828	0.1287
CNYUSD	0.0356	0.0977	0.0828	1.0000	0.1460
CNYEUR	0.1077	0.1421	0.1287	0.1460	1.0000

Tabel 7.13: *Aktivkorrelationer for PLUS 7 Index.*

	S&P 500	STOXX	Nikkei
S&P 500	1.0000	0.5927	0.1842
STOXX	0.5927	1.0000	0.4978
Nikkei	0.1842	0.4978	1.0000

Tabel 7.14: *Aktivkorrelationer for KK Aktiekurv.*

Som tidligere nævnt indeholder både KK Aktiekurv og PLUS 7 Index et quanto-element, da alle eller flere af de underliggende aktiver er denomineret i en valuta forskellig fra den, produktet prises i. Det vil sige, at der også skal tages hensyn til den valutarisiko, som er forbundet med at omregne fra de underliggende aktivers valuta til DKK. Dette gøres, som beskrevet i afsnit 4.8, ved brug af de såkaldte quantokorrelationer (korrelationen mellem det enkelte aktiv og det dertilhørende valutakryds) samt volatiliteten på valutakrydsene.



Figur 7.7: *Estimeret korrelation mellem DAX og EURDKK.*

Quantokorrelationerne er beregnet på samme måde som aktivkorrelationerne, og da disse også har en positiv indvirkning på prisen på optionen, benytter vi igen den højeste korrelation i prisningen af produktet. De anvendte quantokorrelationer er vist i tabel 7.15.

Aktiv	Valutakryds	Dato	Korrelation
DAX	EURDKK	27/11/2006	0.0949
STOXX	EURDKK	27/11/2006	0.1015
CNYUSD	USDDKK	27/11/2006	0.1083
CNYEUR	EURDKK	27/11/2006	0.0618
S&P 500	USDDKK	9/12/2008	0.2166
STOXX	EURDKK	9/12/2008	0.1667
Nikkei	JPYDKK	9/12/2008	0.0713

Tabel 7.15: *Quantokorrelationer for PLUS 7 Index og KK Aktiekurv.*

Volatiliteten på valutakrydsene er hentet direkte fra Bloomberg som ATM implicitte volatiliteter og er allerede præsenteret i afsnit 7.2 tabel 7.8, hvorfor de ikke vil blive fremstillet igen her.

7.4 Kalibrering

Vi har nu gennemgået, hvorledes alle inputparametre estimeres, på nær de fem, der kræves til simulering af variansprocessen. Vi har tidligere nævnt, at disse ikke på samme måde som andre parametre er observerbare størrelser. Vi ønsker derfor at kalibrere disse inputparametre, så de fitter hele volatilitetsfladen bedst muligt. I dette afsnit gennemgår vi, hvorledes denne kalibrering foretages og efterfølgende præsenterer vi de parametre, vi har brugt i prisningen af produkterne.

Variansprocessen i Heston modellen følger en kvadratrodsproces, som den i ligning (7.13) nedenfor.

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_{var}\sqrt{v(t)}dW_t^2 \quad (7.13)$$

Herudfra ses det klart, at der, for at simulere udviklingen i variansen, kræves et estimat for de fire parametre κ , θ , $v(0)$ og σ_{var} . Her beskriver κ tilbageløbstiden i processen, θ angiver langtidsniveauet, $v(0)$ er startniveauet for variansen, og σ_{var} er volatiliteten på variansen. Ud over disse fire parametre skal vi også bruge et estimat for parametren ρ_{var} , som beskriver korrelationen mellem variansprocessen og prisprocessen for aktiverne.

Formålet med kalibreringen er at bestemme de parameterværdier, som gør, at Heston modellen fitter den givne volatilitetsflade bedst muligt. Sagt med andre ord: vi skal bestemme de parameterværdier, som minimerer afvigelsen fra den faktiske volatilitetsflade.

For at sikre, at positive og negative afvigelser vægtes ens, benytter vi mindste kvadraters metode til at bestemme afvigelsen. Det vil sige, at vi søger at løse optimeringsproblemet i (7.14) nedenfor.

$$\text{Min} \left(\sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n (\sigma_{Heston}(t, K_i) - \sigma_{Actual}(t, K_i))^2 \right) \quad (7.14)$$

Her angiver n antal strikes og m antal løbetider på den observerede volatilitetsflade. Optimeringsproblemet i (7.14) beskriver den optimale måde at kalibrere parametrene på, således at man får effekten fra både moneyness og løbetid med i volatilitetsfladen. For at forenkle minimeringsproblemet og dermed nedsætte mængden af data og beregningstiden, har vi dog valgt kun at kigge på den effekt, der er af varierende moneyness i volatilitetsfladen. Det vil sige, at vi holder løbetiden konstant i (7.14), hvilket giver os optimeringsproblemet i (7.15).

$$\text{Min} \left(\sum_{i=1}^n (\sigma_{Heston}(K_i) - \sigma_{Actual}(K_i))^2 \right) \quad (7.15)$$

Som nævnt i afsnit 7.2 har vi valgt at tage de længste løbetider, vi kunne finde (som samtidig har likvide priser), da de produkter, vi ønsker at prisfastsætte, generelt har lange løbetider. Løbetiderne for de optioner, hvis priser ligger til grund for volatilitetskurverne, er derfor fra 1 til 3 år.

For at kunne bestemme de implicitte volatiliteter fra optionspriserne benyttes de estimerede renter som svarer til optionens restløbetid og de dividender, som er beskrevet i afsnit 7.3 til at invertere Black-Scholes formel (7.16) og dermed udlede volatiliteten.

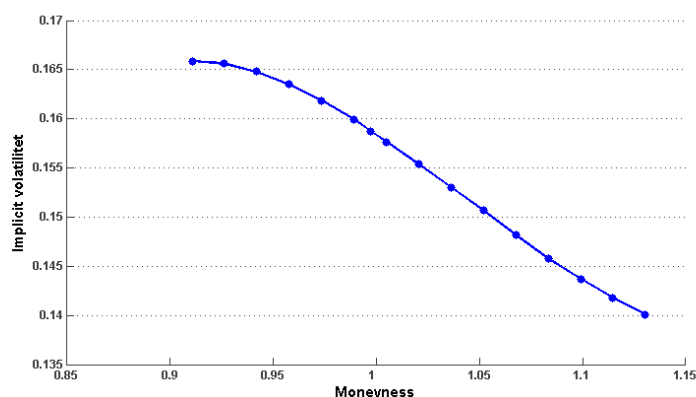
$$C(t) = S_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot t} N(d_2) \quad (7.16)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} \quad (7.17)$$

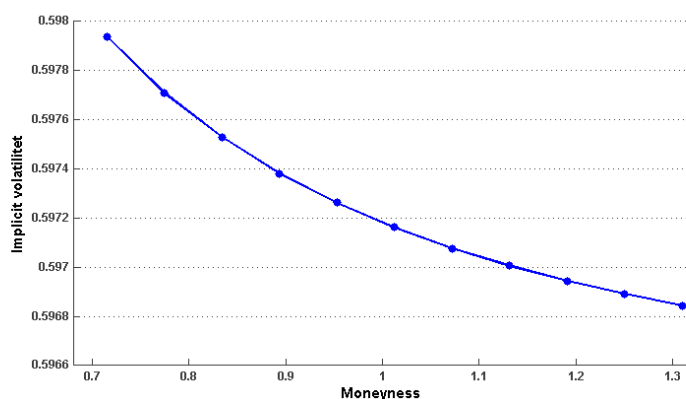
Som beskrevet i afsnit 7.3 er volatilitetskurven for OMXC20 fundet ved at parallelforskyde volatilitetskurven for STOXX med en faktor 1.0971, svarende til forholdet mellem de faktiske volatiliteter på prisningsdagen.

I afsnit 7.2 forklarede vi, hvorfor det ikke er muligt at finde en volatilitetskurve for de to underliggende valutakryds i PLUS 7 Index produktet. Da vi ikke har volatilitetskurver for andre aktiver, som minder om de to valutakryds, kan vi ikke på samme måde som for OMXC20 benytte os af en parallelforskydning af en anden kurve. Vi har derfor valgt kun at behandle de to valutakryds i Black-Scholes modellen, hvorfor alle parametre for de to valutakryds i dette afsnit vil blive sat til nul.

I figur 7.8 og 7.9 er vist eksempler på en estimeret volatilitetskurve for et af de underliggende indeks i hvert produkt.



Figur 7.8: *Volatilitetsstruktur for DAX den 27. november 2006.*

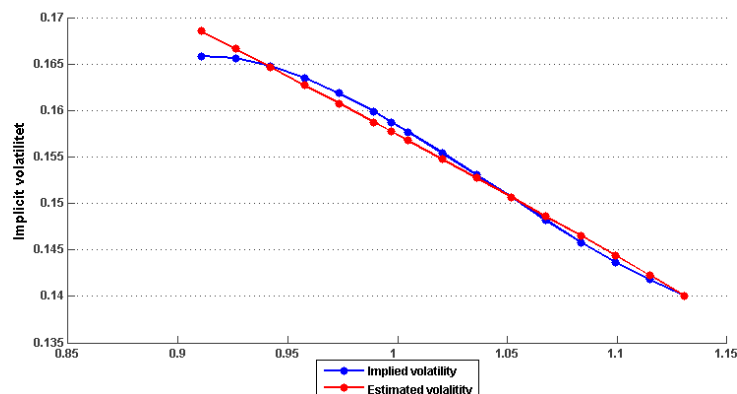


Figur 7.9: *Volatilitetsstruktur for Nikkei den 9. december 2008.*

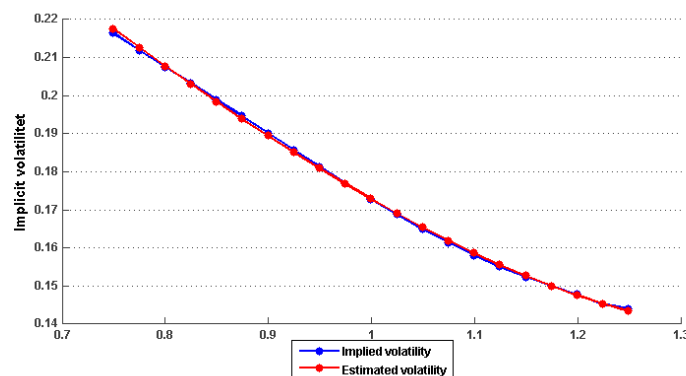
Som beskrevet i afsnit 5.3 benyttes metoden *Differential Evolution* til at løse minimeringsproblemet i (7.15). I tabel 7.16 ses resultaterne af kalibreringerne for de underliggende indeks. I figur 7.10 - 7.15 har vi plottet de implicitte volatiliteter mod volatiliteterne beregnet med den analytiske Heston model ved brug af parametrene fra tabel 7.16. Som det både kan ses i tabellen og figurerne, fitter de kalibrerede parametre de implicitte volatilitetskurver rigtig pænt.

Indeks	Dato	κ	θ	$v(0)$	σ_{var}	ρ_{var}	Gns. afv.
DAX	27/11/2006	1.2478	0.0100	0.0329	0.1040	-0.9999	0.48%
STOXX	27/11/2006	2.1473	0.0425	0.0261	0.6119	-0.6883	0.26%
OMXC20	27/11/2006	1.0000	0.0629	0.0191	0.5042	-0.6331	0.23%
S&P 500	9/12/2008	1.8635	0.2610	0.2171	0.9997	-0.8383	1.18%
STOXX	9/12/2008	1.0005	0.2694	0.0208	0.9998	-0.7605	0.05%
Nikkei	9/12/2008	3.8735	0.2989	0.7661	0.4587	-0.0406	0.00%

Tabel 7.16: Kalibrerede parametre for PLUS 7 Index og KK Aktiekurv.



Figur 7.10: Estimeret vs. implicit volatilitetsstruktur for DAX den 27. november 2006.

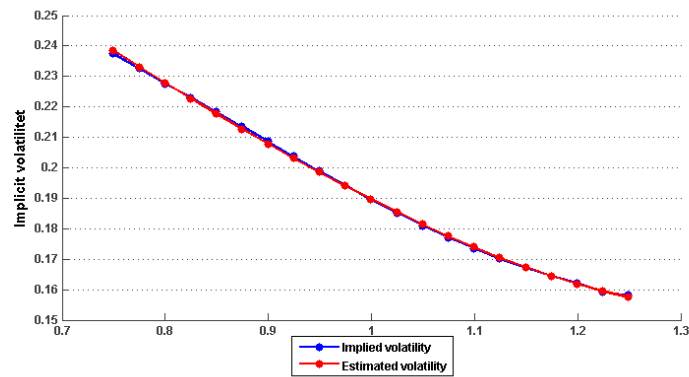


Figur 7.11: Estimeret vs. implicit volatilitetsstruktur for STOXX den 27. november 2006.

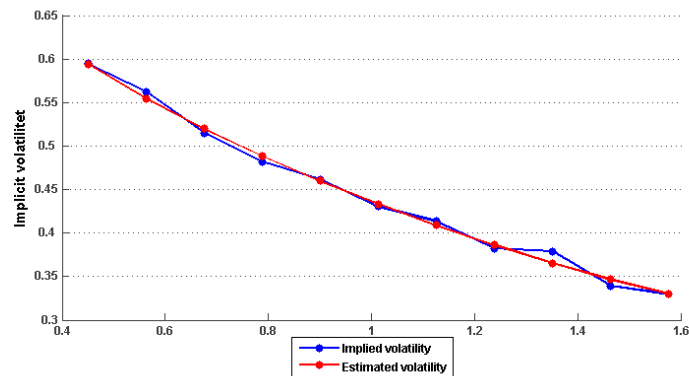
7.5 Prisning

I dette afsnit gennemgår vi de beregningsgange, der benyttes i prisningen af de to produkter. Vi har to produkter, som hver især prises i to forskellige modeller, hvilket vil sige, at vi samlet set har fire forskellige beregninger. *MATLAB* koden til de fire beregninger kan findes i bilag G.

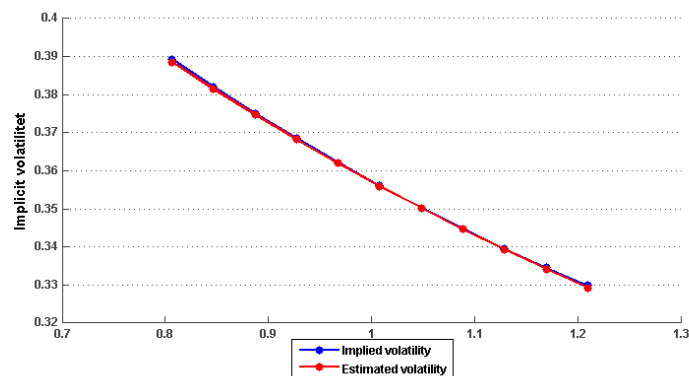
Da KK Aktiekurv kun har aktieindeks som underliggende aktiver, er det det mindst



Figur 7.12: *Estimeret vs. implicit volatilitetsstruktur for OMXC20 den 27. november 2006.*

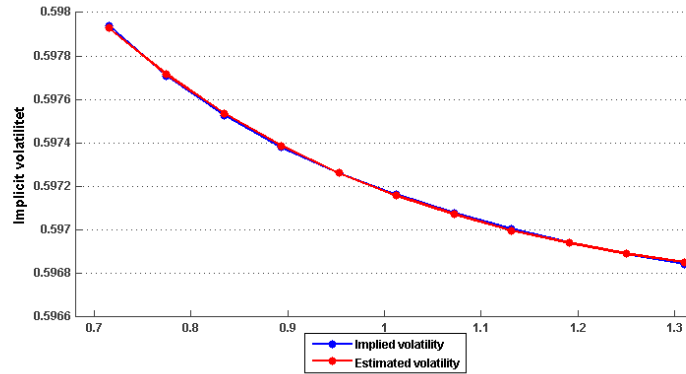


Figur 7.13: *Estimeret vs. implicit volatilitetsstruktur for S&P 500 den 9. december 2008.*



Figur 7.14: *Estimeret vs. implicit volatilitetsstruktur for STOXX den 9. december 2008.*

komplerede af de to produkter, og vi starter derfor med at beskrive beregningerne for dette produkt. Herefter går vi videre til PLUS 7 Index, som ud over aktieindeks også har valutakryds som underliggende aktiver. Samtidig har PLUS 7 Index også



Figur 7.15: *Estimeret vs. implicit volatilitetsstruktur for Nikkei den 9. december 2008.*

en mere kompliceret struktur, da indeksene låses fast og tages ud af kurven på bestemte datoer.

Når KK Aktiekurv prises i Black-Scholes modellen, starter vi med at beregne kovarianserne ved brug af formel (7.18).

$$\sigma_{1,2} = \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \quad (7.18)$$

Benyttes matrixnotation kan hele kovariansmatricen findes ved

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & \rho_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Med henblik på at generere multivariate normalfordelte variable foretages en Cholesky dekomposition af kovariansmatricen således at

$$Chol(\Sigma) \cdot Chol(\Sigma)^T = \Sigma \quad (7.19)$$

hvorefter de multivariate normalfordelte variable i $3 \times n$ matricen $\mathbf{X}$ genereres ved

$$\mathbf{X} = Chol(\Sigma) \cdot \mathbf{Z} \quad (7.20)$$

hvor $\mathbf{Z}$ er en $3 \times n$ matrix indeholdende tilfældige standardnormalfordelte variable, og n er det totale antal tidssteps i simulationen.

I kapitel 6 så vi, hvordan størrelsen på tidsintervallet Δt og antallet af simulationer ændrede præcisionen i prisen. Vi så, at for $\Delta t \leq \frac{1}{12}$ og $n \geq 2,000,000$, kunne afvigelsen i prisen på plain vanilla optionen først aflæses i anden decimal. Vi mener derfor, at tidssteps af størrelsen $\Delta t \leq \frac{1}{12}$ og 2,000,000 simulationer er fornuftige at benytte i beregningen. Da lukkekurserne i KK Aktiekurv observeres d. 28. i hver måned det sidste halve år frem til udløb, har vi valgt at inddele vores tidssteps i måneder, således at $\Delta t = \frac{1}{12}$. Da vi starter simuleringen d. 9/12/2008, bliver der dog en skæv periode fra d. 9/11/2011 til d. 28/11/2011, hvor observationerne starter.

Denne periode på 19 dage beregnes som ét tidsstep, således at vi ialt har $n = 42$ tidssteps i simuleringen.

Vi kan nu beregne værdien af et givent underliggende aktieindeks på tidspunkt $t + \Delta t$ ved

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot e^{(r_u - \delta + \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2) \Delta t + \sqrt{\Delta t} \cdot X(t)} \quad (7.21)$$

Her er r_u renten hørende til den valuta, aktieindekset er kvoteret i, δ er den implicitte årlige dividende, σ er den implicitte årlige volatilitet, α er den implicitte volatilitet på valutakrydset, γ er quantokorrelationen, og X er en multivariat normalfordelt variabel fra matricen i ligning (7.20) hørende til det givne indeks.

Prisstien for hvert indeks simuleres for hvert af de 42 tidssteps, og i de sidste 7 tidssteps lagres den simulerede indekxsværdi. Når hele prisstien er simuleret, kan værdien af aktiekurven findes ved brug af ligning (7.2), hvorefter værdien af optionen på udløbstidspunktet for en given sti findes ved ligning (7.1).

Prisstierne for de underliggende indeks simuleres hver 2 millioner gange, da dette antal simulationer jf. kapitel 6 giver et acceptabelt konfidensinterval for plain vanilla optionen. Konfidensintervallet for optionsdelen i KK Aktiekurv ved 2 millioner simulationer er beregnet til ± 0.0237 hvilket vi mener er acceptabelt.

For at den antitetiske simulering beskrevet i afsnit 6.4 er variansreducerende, skal estimatet for priserne på de underliggende aktiver, ved brug af de normalfordelte variable Z og $-Z$, være negativt korrelerede. Vi har testet de beregnede priser på de underliggende aktiver, og det viser sig, at (6.20) er opfyldt. Vi simulerer derfor prisstierne ved brug af antitetiske variable, hvorefter den endelige optionsværdi ved udløb beregnes som gennemsnittet af optionsværdierne ved de 4 millioner stier¹⁴.

Prisen på KK Aktiekurv på prisningsdagen findes nu ved, som i ligning (7.22), at gange den gennemsnitlige optionsværdi med deltagelsesgraden og herefter tilbage-diskontere denne størrelse og hovedstolsbetalingen med den indenlandske rente.

$$Pris_{KK_Aktiekurv} = e^{-r_i t} \cdot (V(T)_{option} \cdot 85\% + 100) \quad (7.22)$$

Når KK Aktiekurv prises i Heston modellen, starter vi ligesom ved brug af Black-Scholes modellen med at beregne kovariansmatricen og foretage en Cholesky dekomposition af denne. Forskellen er, at fordi variansen er stokastisk i Heston modellen, er kovariansmatricen nu tidsafhængig. Hermed får vi et sæt korrelerede variable for hvert af de 42 tidssteps.

For at kunne bestemme den tidsafhængige varians i Heston modellen på diskrete tidspunkter, er vi nødt til at benytte os af et diskretiseringsskema. Det simpleste af sådanne diskretiseringsskemaer er *Euler skemaet*. I Andersen, L. [2007] testes forskellige diskretiseringsskemaer, og resultatet viser, at Euler skemaet klarer sig fint. Da Euler skemaet altså både er let at implementere og giver fornuftige resultater, vælger vi at benytte os af dette.

Kvadratrodsprocessen, som benyttes i Heston modellen, er i sig selv sikret at give positive værdier. Herimod kan den diskretiserede proces, som vi får ved brug af

¹⁴Ved brug af antitetisk simulering fordobles antallet af stier.

Euler skemaet, med en sandsynlighed strengt større end nul give negative værdier. Dette er især et problem, fordi vi så ikke kan udregne kvadratroden af variansen.

I *Lord et al. [2007]* undersøges det, hvordan forskellige metoder til at komme omkring dette problem performer. De fem metoder, de undersøger, er vist i tabel 7.17, hvor det også vises, hvordan de implementeres.

Der findes tre steder i Euler diskretiseringen af variansprocessen, hvor $v(t)$ indgår. Disse betegnes $v(t)_i, i = 1, 2, 3$. For hvert $v(t)_i$ kan man vælge at benytte $v(t)^{15}$, som er den faktiske værdi af variansen, $v(t)^+$ som er $\max(v(t), 0)$ eller $|v(t)|$ som er den numeriske værdi af variansen.

Metode	Paper	$v(t)_1$	$v(t)_2$	$v(t)_3$
Absorption	Ukendt	$v(t)^+$	$v(t)^+$	$v(t)^+$
Reflection	Diop [2003], Bossy og Diop [2004], Berkaoui et al. [2008]	$ v(t) $	$ v(t) $	$ v(t) $
Higham and Mao	Higham og Mao [2005]	$v(t)$	$v(t)$	$ v(t) $
Partial Truncation	Deelstra og Delbaen [1998]	$v(t)$	$v(t)$	$v(t)^+$
Full Truncation	Lord et al. [2007]	$v(t)$	$v(t)^+$	$v(t)^+$

Tabel 7.17: *Oversigt over Euler skemaer kendt fra litteraturen.* Kilde: Lord et al. [2007]

I artiklen kommer de frem til, at *full truncation* er den metode, der samlet har den mindste bias ved prisningen af tre forskellige typer optioner, og vi vælger derfor at benytte full truncation metoden i vores beregninger. Dette vil altså sige, at vi erstatter $v(t)_i, i = 2, 3$ med $v(t)^+$ i Euler diskretiseringen af variansprocessen.

På grund af muligheden for at variansen bliver negativ, benytter vi også $v(t)^+$, når vi simulerer værdien af de underliggende aktieindeks.

I (7.23) og (7.24) ses Euler diskretiseringen af prisprocessen for de underliggende aktiver samt variansprocessen.

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \left(r_u - \delta + \alpha \cdot \gamma \cdot \sqrt{\text{var}(t)^+} \right) S(t) \cdot \Delta t + S(t) \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot X(t) \quad (7.23)$$

$$\text{var}(t + \Delta t) = \text{var}(t) + \kappa \cdot \left(\theta - \text{var}(t)^+ \right) \Delta t + \sigma_{\text{var}} \cdot \sqrt{\text{var}(t)^+} \sqrt{\Delta t} \cdot \left(\rho_{\text{var}} \cdot X(t) + \sqrt{1 - \rho_{\text{var}}^2} \cdot Z(t)_{\text{var}} \right) \quad (7.24)$$

Her er κ tilbageløbstiden, θ er langtidsniveauet, σ_{var} er volatiliteten på variansen, ρ_{var} er korrelationen mellem variansprocessen og prisprocessen for de underliggende aktiver, $X(t)$ er en multivariat normalfordelt variabel fra matricen $\mathbf{X}$ defineret i (7.20), og Z_{var} er en tilfældig normalfordelt variabel.

Igen foretages 2 millioner antitetiske simuleringer. Prisen på KK Aktiekurv ved

¹⁵Den faktiske værdi kan ikke benyttes for $v(t)_3$, da man tager kvadratroden af denne.

brug af Heston modellen kan herefter findes på samme måde som ved brug af Black-Scholes modellen.

Når vi skal prise PLUS 7 Index, er den største forskel, at der udover aktieindeks også indgår valutakryds. Når udviklingen for valutakurserne simuleres i Black-Scholes modellen, erstattes dividenden i (7.21) med den kinesiske rente, således at formlen ser ud som i (7.25) nedenfor.

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot e^{(r_u - r_{Kina} + \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2) \Delta t + \sqrt{\Delta t} \cdot X(t)} \quad (7.25)$$

Når prisudviklingen for de underliggende aktieindeks simuleres i Black-Scholes modellen, benyttes (7.21) fuldstændigt, som for KK Aktiekurv.

I Heston modellen er dividenden i (7.23) ligeledes udskiftet med den kinesiske rente for valutakrydsene, hvorimod prisen på aktieindeksene stadig simuleres som i (7.23). Variansen i Heston modellen simuleres for alle aktiver ved brug af (7.24). Grundet manglen på volatilitetsdata for de to valutakryds sættes κ og σ_{var} til nul for disse, således at variansen ikke er stokastisk for valutaaktiverne.

Ligesom for KK Aktiekurv benytter vi også her 2 millioner antitetiske simuleringer. For PLUS 7 Index giver dette antal simuleringer et konfidensinterval på ± 0.0198 , hvilket vi igen finder acceptabelt.

I PLUS 7 Index produktet er observationsdagene den anden handelsdag i december hvert år frem til udløb. Vi har igen valgt at lade tidssteppene i beregningen have størrelsen $\Delta t = \frac{1}{12}$, således at de svarer til en måned. Som beskrevet i kapitel 6 bliver Euler diskretiseringen mere upræcis, når tidsintervallerne gøres større. Dette er grunden til, at vi har valgt ikke at have årlige observationer i simuleringen af PLUS 7 Index.

Ligesom i prisningen af KK Aktiekurv er det i nogle tilfælde nødvendigt at have tidsintervaller på mindre end en måned, da den anden handelsdag i december ikke altid er d. 2. december. Alt i alt har vi 86 perioder, hvor observationsdagene er på tidspunkt 13, 25, 37, 49, 61, 74 og 86.

Når vi rammer et af disse tidspunkter, lagres værdien af alle indeks. Da valutakrydsene kun vægter som ét samlet aktiv i aktivkurven, gemmes værdien af den samlede valutaposition fremfor de enkelte valutakurser.

$$Valutaposition = 0.8 \cdot CNYUSD + 0.2 \cdot CNYEUR \quad (7.26)$$

Når stierne for alle de underliggende indeks er fundet for en given simulation, bestemmer vi, hvilket indeks, der har klaret sig bedst fra start til det givne tidspunkt. Herefter tjekkes det, hvorvidt indekset allerede har været fastlåst to gange (for valutapositionen kun én gang). Hvis dette ikke er tilfældet, gemmes indeksværdien, og det registreres, at det givne indeks er blevet fastlåst. Har indekset været fastlåst det antal gange, det indgår i aktivkurven, identificerer vi i stedet indekset med det næststørste afkast, og proceduren med at tjekke antal fastlåsnings starter forfra. Sådan fortsættes indtil vi identificerer et indeks, som endnu ikke har været fastlåst

det antal gange, det må.

Når der er fastlåst et indeks for hver observationsdag, kan værdien af aktivkurven findes ved brug af (7.5), og værdien af optionen for den givne simulation kan findes ved (7.4).

Når alle 2 millioner antitetiske simulationer er beregnet, findes prisen på PLUS 7 Index produktet på prisningsdagen (ligesom for KK Aktiekurv) ved at gange den gennemsnitlige optionsværdi med deltagelsesgraden og herefter tilbagediskontere denne størrelse og hovedstolsbetalingen med den indenlandske rente.

$$Pris_{PLUS_7Index} = e^{-r_i t} \cdot (V(T)_{option} \cdot 218.3\% + 100) \quad (7.27)$$

7.6 Resultater

I dette afsnit præsenteres resultaterne af prisningen af de to produkter i Black-Scholes henholdsvis Heston modellen. Vi sammenholder resultaterne fra de to modeller og diskuterer hvilke effekter, der spiller ind på den forskel, der er i prisen ved brug af henholdsvis Black-Scholes og Heston modellen. Herefter sammenlignes resultaterne med de faktiske markedspriser, og vi kigger på fejlmarginen fra forskellige vinkler for at prøve at forklare denne. Samtidig diskuterer vi indvirkningen på fejlmarginen fra forskellen i strukturen i de to produkter.

Hvert produkt er priset ved konstruktion af 2 millioner antitetiske simuleringer med tidssteps $\Delta t = \frac{1}{12}$, på nær for de skæve perioder, som opstår for at vi kan ramme en bestemt observationsdag. Disse perioder er beskrevet i afsnit 7.5.

I tabel 7.18 og 7.19 ses de beregnede priser for KK Aktiekurv og PLUS 7 Index i henholdsvis Black-Scholes og Heston modellen.

	Black-Scholes	Heston
Pris på option	9.4262	10.1263
Pris på NKO	86.1996	86.1996
Omkostninger (0.70% pr. år)	2.5235	2.5235
Samlet pris	98.1493	98.8494

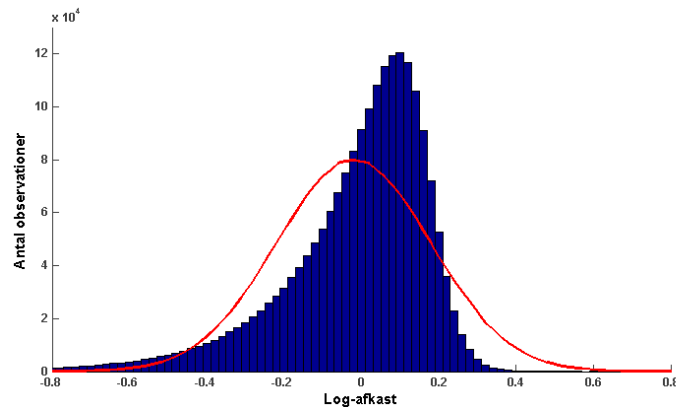
Tabel 7.18: *Beregnete priser for KK Aktiekurv.*

Det ses, at priserne beregnet ved Heston modellen for begge produkter er en smule højere end de priser, der er beregnet ved brug af Black-Scholes modellen. Dette skyldes formentlig den venstreskævhed, som vi så i afkastfordelingen i afsnit 5.2. For at fastlægge hvordan fordelingen af log-afkastet i Heston modellen ser ud med de parameterværdier, modellen er kalibreret til for de to produkter, er en simulering af disse afkast vist i figur 7.16 og 7.17. Der er foretaget 2 millioner daglige simulationer for $T = 1$, $r = 0$ og $\delta = 0$.

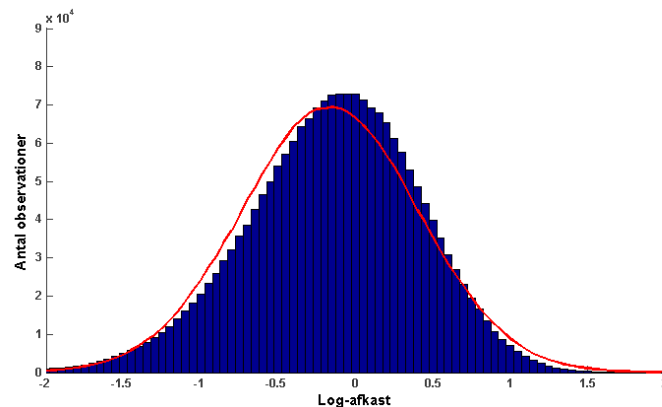
Det ses, at fordelingen af log-afkastene i begge tilfælde er en venstreskæv fordeling med en positiv topstejlhed. Både venstreskævheden og den positive topstejlhed er

	Black-Scholes	Heston
Pris på option	22.6573	23.3894
Pris på NKO	74.6723	74.6723
Omkostninger (0.31% pr. år)	2.3870	2.3870
Samlet pris	99.7166	100.4487

Tabel 7.19: Beregnede priser for PLUS 7 Index.



Figur 7.16: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen med parametrene $\theta = 0.04$, $\kappa = 1.5$, $\text{var}(0) = 0.03$, $\sigma_{\text{var}} = 0.4$ og $\rho_{\text{var}} = -0.8$, svarende til de gennemsnitlige parameterverdier for PLUS Produktet. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.2$.



Figur 7.17: Histogram over fordelingen af log-afkastet i Heston modellen med parametrene $\theta = 0.27$, $\kappa = 2.2$, $\text{var}(0) = 0.33$, $\sigma_{\text{var}} = 0.8$ og $\rho_{\text{var}} = -0.5$, svarende til de gennemsnitlige parameterverdier for KK Aktiekurv. Den røde kurve er de tilsvarende log-afkast beregnet i Black-Scholes modellen med $\sigma = \sqrt{\theta} = 0.52$.

dog markant mere udtalt for PLUS produktet end for KK Aktiekurv, hvilket skyldes, at de finansielle markeder var meget forskellige i 2006 og 2008. Ud fra de parametre, de to modeller er kalibreret til, er dette dog, som vi ville forvente jf. afsnit 5.2. I dette afsnit så vi, hvordan en øgelse af korrelationsparameteren flyttede skævheden

af fordelingen fra venstre mod højre. Dette er præcis den effekt, vi ser i afkastfordelingen for KK Aktiekurv, da korrelationsparameteren i forhold til PLUS 7 Index er øget fra -0.8 til -0.5. Ved sammenligning med PLUS produktet er σ_{var} meget højere for KK Aktiekurv. Hvis vi alene kigger på denne parameter, ville vi forvente, at fordelingen af log-afkast for KK Aktiekurv var mere topstejl end afkastfordelingen for PLUS 7 Index. Grunden til, at vi ikke ser denne effekt men derimod den modsatte, er at både θ og κ også er meget højere for KK Aktiekurv end for PLUS 7 Index. En forøgelse af disse to parametre resulterer i begge tilfælde i en mindre topstejl fordeling.

At fordelingen er venstreskæv resulterer i flere store negative afkast, færre store positive afkast og markant flere små positive afkast. Den større sandsynlighed for store negative afkast, samt den mindre sandsynlighed for store positive afkast, trækker naturligvis prisen ned. Det ser dog ud til, at denne tendens opvejes af den markante stigning i sandsynligheden for små positive afkast.

Da KK Aktiekurv har en cap på 50% på det samlede afkast, kunne man forestille sig, at den mindre sandsynlighed for store positive afkast ikke ville have så stor betydning for dette produkt. Det ser dog ikke ud til, at der er den store forskel på de to produkter, hvilket nok skyldes, at cap'en er på det samlede afkast frem for på afkastet for det enkelte aktiv. Samtidig er hverken venstreskævheden eller topstejlheden specielt udtalt for fordelingen af log-afkast for KK produktet, hvorfor vi ikke oplever den store forskel i prisen ved brug af Black-Scholes henholdsvis Heston.

Hvor følsomt et produkt er overfor ændringer i volatiliteten viser sig i høj grad i, hvor følsomt det er over for at skifte til en stokastisk volatilitetsmodel. Fra tabel 7.18 og 7.19 ses det, at priserne på de to produkter ikke ændrer sig voldsomt, når man skifter fra Black-Scholes til Heston modellen. Det tyder altså ikke på, at de to produkter er specielt følsomme overfor ændringer i volatiliteten.

Som vi tidligere har været inde på, er PLUS produktet, grundet Himalaya strukturen, meget følsomt overfor de underliggende korrelationer. Da korrelationsparameteren tilmed er en meget usikker parameter (da den ikke er fundet implicit), kunne det være interessant at se, hvor meget en ændring af korrelationerne ville ændre prisen på produktet. Vi har derfor testet dette ved at beregne prisen for PLUS 7 Index i Black-Scholes modellen med alle korrelationer lig 0.01 og derefter med alle korrelationer lig 0.99. Vi genkalder, at den faktiske beregnede pris på produktet (uden omkostninger) i Black-Scholes modellen var 97.33. I tilfældet med korrelationer på 0.01 fik vi en tilsvarende pris på 93.02, og ved korrelationer på 0.99 fik vi 99.14. Det ses altså, at aktivkorrelationen i høj grad har indflydelse på dette produkt. Til sammenligning var den faktiske pris (uden omkostninger) for KK Aktiekurv i Black-Scholes modellen 95.63, hvilket ændrer sig til 95.14, henholdsvis 95.77 ved ændring af korrelationerne til 0.01, henholdsvis 0.99. Det er således tydeligt, at PLUS 7 Index er langt mere følsomt overfor de underliggende korrelationer end KK Aktiekurv. Da vi allerede har valgt de højeste korrelationer indenfor vores vindue, kan det dog ikke forsvares, at produktet skulle være dyrere end beregnet af denne grund.

I tabel 7.20 og 7.21 sammenlignes de beregnede priser med de faktiske priser på produkterne. Afvigelsen i priserne er både angivet som en faktisk og en procentvis størrelse.

Som vi hurtigt ser, er der ingen af de beregnede priser, der rammer markedspriserne

	Black-Scholes	Heston
Faktisk udstedelsespris	103.0000	103.0000
Beregnet udstedelsespris	98.1493	98.8494
Bias	-4.8507	-4.1506
Afvigelse i %	-4.71%	-4.03%

Tabel 7.20: *Sammenligning af beregnede og faktiske priser for KK Aktiekurv.*

	Black-Scholes	Heston
Faktisk udstedelsespris	110.0000	110.0000
Beregnet udstedelsespris	99.7156	100.4487
Bias	-10.2834	-9.5513
Afvigelse i %	-9.35%	-8.68%

Tabel 7.21: *Sammenligning af beregnede og faktiske priser for PLUS 7 Index.*

specielt godt. På trods af at priser beregnet ved brug af Heston modellen er en smule højere, end dem vi finder ved brug af Black-Scholes modellen, er de stadig langt mindre end de faktiske udstedelseskurser. Dette kan til dels skyldes, at vi ikke kan regne med, at nulkupondelen bliver udstedt til markedspris, da udstederens incitament for at udstede produktet netop er, at de kan opnå billig funding. Vi kan altså godt regne med, at nulkuponobligationen er blevet solgt dyrere, end hvis man skulle købe den i markedet. Da udstederne af produkterne er AAA ratede, mens de banker, der danner grundlag for swaprenterne, kun er AA eller A ratede, skulle man i realiteten også tillægge de nulkuponrenter, vi diskonterer med, et negativt kreditspænd. For at finde ud af hvor meget dette cirka vil ændre priserne på nulkuponobligationerne, har vi indhentet oplysninger¹⁶ om, hvordan kreditspændet mellem KommuneKredit og swapkurven er i dag¹⁷ for løbetider på henholdsvis 3 og 5 år. Ved en løbetid på 3 år handler KommuneKredit til (*midswap* – 24bp), mens de for en løbetid på 5 år handler til (*midswap* – 12bp). Da KommuneKredit og PLUSInvest begge er AAA ratede, antager vi, at de nævnte kreditspænd gælder for begge udstedere¹⁸. Da vi også er nødt til at tage hensyn til, at størrelsen på kreditspændet i 2006 og 2008 nok ikke er den samme som i dag, er *swapsreadet*¹⁹ for de to prisningsdatoer samt dags dato indhentet. For PLUS produktet bruges en løbetid på 5 år, mens vi for KK aktiekurv benytter en løbetid på 3 år. De indhentede swapsreads er vist i tabel 7.22.

Swapsreadene for de tre datoer bruges til at udregne en faktor for hver prisningsdag, således at vi antager, at forholdet mellem kreditspændet for udstederen idag

¹⁶Disse tal er leveret af Lasse Vest i KommuneKredit.

¹⁷I dag er her d. 14. april 2011.

¹⁸I virkeligheden afhænger kreditspændet selvfølgelig også af navnet på udstederen, og der kan i praksis være stor forskel på AAA ratede udstedere.

¹⁹Forskellen mellem danske stats- og swaprenter.

Løbetid	D. 27/11/2006	D. 9/12/2008	D. 14/4/2011
3 år	35bp	85bp	75bp
5 år	38bp	40bp	55bp

Tabel 7.22: *Swapspreadet på de to udstedelsesdatoer samt dags dato.* Kilde: Bloomberg.

og på prisningsdagen er det samme som forholdet mellem swapspreadene i dag og på prisningsdagen. De beregnede faktorer er vist i tabel 7.23.

Dato	Løbetid	Faktor
9/12/2008	3 år	1.13
27/11/2006	5 år	0.69

Tabel 7.23: *Faktorer som skal ganges på det nuværende kreditspænd.*

Faktorerne vist i tabel 7.23 ganges altså på det nuværende kreditspænd for at finde et estimat for kreditspændet på prisningsdagen. I tabel 7.24 er vist prisen på nulcupondelen med og uden kreditspænd, samt forskellen på de to.

	KK Aktiekurv	PLUS 7 Index
Pris med kreditspænd	87.03	75.11
Pris uden kreditspænd	86.2	74.7
Forskel	0.83	0.44

Tabel 7.24: *Sammenligning af beregnede priser med og uden kreditspænd for udsteder.*

Det ses, at en indprisning af et sådant kreditspænd som forventet gør obligationerne dyrere. Alt i alt er det altså to effekter som gør, at vi formentlig har prisfastsat obligationerne billigere, end de burde være. Forskellene er dog ikke så store, at de kan forklare den afvigelse, som vi ser i priserne på produkterne.

Spørgsmålet er så, om optionsmodparten har solgt optionsdelen for dyrt. Om dette kan lade sig gøre afhænger i stor grad af, hvordan optionsdelen er blevet købt. Hvis der er indhentet priser fra flere forskellige investeringsbanker i markedet, burde dette sikre, at optionsdelen bliver købt til en konkurrencedygtig pris. Forholder det sig derimod sådan, at udstederen af den strukturerede obligation har en fast aftale med en investeringsbank om, at de altid handler gennem denne bank, kan det godt forekomme, at prisen er blevet stillet urimeligt højt.

Som vi tidligere har nævnt, er PLUS 7 Index et mere eksotisk produkt end KK Aktiekurv. Den meget komplekse struktur i eksotiske optioner gør, at der ikke er så mange, der har mulighed for at udbyde dem. Dette skyldes antageligt at der er en

større modelrisiko forbundet med disse produkter, og man kan derfor forvente, at der er en større risikopræmie på at sælge mere eksotiske optioner frem for mindre eksotiske optioner. Det er derfor forventeligt, at den faktiske afvigelse i prisen på PLUS 7 Index produktet er en del større, end den er på KK Aktiekurv. Samtidig må vi forvente en afvigelse i prisen på de to produkter i forhold til, hvis vi havde priset et plain vanilla produkt.

I tabel 7.25 er vist biasen for hvert produkt og model som en procentdel af den beregnede optionspris. Det ses, at for at opnå den pris, de strukturerede obligationer er blevet solgt til, skulle optionsmodparten sælge optionsdelen omkring 40-50% dyrere, end vores beregninger viser.

	Black-Scholes	Heston
KK aktiekurv	51.46%	40.99%
PLUS 7 Index	45.39%	40.84%

Tabel 7.25: *Bias i procent af beregnet optionspris.*

Der er selvfølgelig også den mulighed, at vores priser ikke er korrekte. Der er mange inputparametre, til hvilke der knytter sig en del usikkerhed. Dette kommer vi nærmere ind på i afsnit 7.7, men som udgangspunkt er der ikke noget, der gør, at vi vil forvente, at vores priser ligger så langt fra de faktiske markedspriser, som de gør.

En anden ting, der springer i øjnene, er, at afvigelserne er en hel del større for PLUS 7 Index end for KK Aktiekurv. Dette kan skyldes to ting; for det første har PLUS 7 Index produktet, som tidligere nævnt, en struktur, som er en hel del mere kompliceret end den for KK Aktiekurv. Dette skyldes især, at man løbende fjerner de underliggende indeks fra kurven. Grundet denne meget komplekse struktur er produktet svært at gennemskue og dermed også svært for en investor at prise. Man kan derfor forestille sig, at produktet er blevet priset en hel del dyrere, end hvad der kan retfærdiggøres, da der ikke er den store risiko for, at en privat investor vil kunne gennemskue, at produktet sælges for dyrt. En anden pointe, som bakker op om denne teori, er, at produktet er udstedt, inden den offentlige kritik af uigenomsigtigheden i strukturerede produkter begyndte. Denne kritik gik netop på, at produkterne blev solgt til overpris, fordi investorerne ikke havde mulighed for at gennemskue, hvad produktet i virkeligheden var værd.

Den anden ting, der kan være med til at forårsage, at afvigelsen i priserne er så store i forhold til på KK Aktiekurv, er, at løbetiden for PLUS 7 Index er dobbelt så lang som løbetiden for KK Aktiekurv. Det vil altså sige, at vi simulerer dobbelt så mange tidssteps for PLUS produktet og den lille usikkerhed, der er i inputparametrene, vil derfor slå dobbelt så hårdt igennem i PLUS produktet. Når man skal kigge på, hvor fair de to produkter hver især er priset i henhold til vores beregninger, giver det derfor mening at kigge på en annualiseret procentvis afvigelse. Denne størrelse er vist i tabel 7.26.

Det ses udfra de annualiserede afvigelser, at den årlige fejlmargin faktisk er meget ens for de to produkter.

Uanset hvordan vi vender og drejer resultaterne, kan vi dog ikke komme uden om, at

	Black-Scholes	Heston
KK Aktiekurv	-1.35%	-1.15%
PLUS 7 Index	-1.34%	-1.24%

Tabel 7.26: *Annualiseret afvigelse på den beregnede pris i %.*

der ifølge vores beregninger, er nogle omkostninger forbundet med at investere i de to produkter, som ikke er oplyst i prospektet. Vi vil derfor som det sidste forsøge at vurdere priserne på de to produkter ved at sammenligne de samlede omkostninger, der er ved at investere i de strukturerede obligationer med omkostningerne ved at investere i en passiv investeringsforening (de såkaldte *index trackere*) med en lignende eksponering. Et meget kendt og anvendt mål til at sammenligne forskellige investeringsmuligheder er $\dot{A}OP^{20}$, som beskriver de årlige omkostninger i procent. $\dot{A}OP$ giver et hurtigt og overordnet billede af de omkostninger, der er forbundet med en given investering og kan derfor let sammenlignes på tværs af produkttyper og aktivklasser. I tabel 7.27 er vist $\dot{A}OP$ for de to produkter ved brug af Black-Scholes og Heston modellen.

	Black-Scholes	Heston
KK Aktiekurv	2.05%	1.85%
PLUS 7 Index	1.65%	1.55%

Tabel 7.27: *Årlige omkostninger i procent.*

Det ses, at de årlige omkostninger i procent er lidt højere for KK Aktiekurv end for PLUS 7 Index, hvilket nok primært skyldes, at produktets løbetid er halvt så lang som PLUS produktets. Det vil sige, at der kun er halvt så mange år at fordele omkostningerne på, hvilket også ses ved, at de oplyste årlige omkostninger er dobbelt så høje for KK Aktiekurv som for PLUS 7 Index.

Til sammenligning har den passive investeringsforening *Sparindex DJSI World Index*, som investerer i aktier verden over og derfor har en eksponering, som ligner den i KK Aktiekurv, årlige omkostninger på 0.61%²¹. Hvis man tror på, at Heston modellen giver det mest realistiske resultat, er KK Aktiekurv altså omkring tre gange så dyr som en lignende passiv investering. Når man sammenligner PLUS 7 Index med en index tracker, er *Sparindex OMXC20 Aktier*, som investerer i aktier, der indgår i OMXC20 indekset, den hvis eksponering ligner PLUS produktets mest. Sparindex OMXC20 Aktier har årlige omkostninger på 0.59%²², hvilket vil sige, at PLUS produktet også er knap tre gange så dyrt. I PLUS produktet har man dog også eksponering til den kinesiske valuta og flere europæiske indeks, men denne eksponering

²⁰<http://www.ifr.dk/composite-1516.htm>

²¹Kilde:http://www.sparindex.dk/get/13742.html?lang=da¤cy=DKK&country=DKx&fund=DK0010297464&sortby=b_fundname&sortorder=ASC&tab=

²²Kilde:http://www.sparindex.dk/get/13740.html?lang=da¤cy=DKK&country=DKx&fund=DK0010068006&sortby=b_fundname&sortorder=ASC&tab=

kunne man få ved at investere i flere forskellige index trackere samtidigt. Samlet set støtter ovenstående argumenter altså antagelsen om, at de to produkters priser er for høje i forhold til konkurrerende produkter. Man skal dog tage i betragtning, at private investorer kun i meget lav grad har adgang til index trackere, hvorfor det ikke kan betragtes som et fuldkomment alternativ. Det står dog private investorer frit for at investere i Sparindex trackerne.

Alt i alt må vi konkludere, at hvis de beregnede priser antages at være korrekte, indeholder begge produkter en hel del skjulte omkostninger. Totalt set er de skjulte omkostninger størst for PLUS 7 Index, men hvis man kigger på de årlige omkostninger i procent, er det KK Aktiekurv, der har de højeste omkostninger. Sammenlignes de årlige omkostninger i procent med dem for en passiv investeringsforening, viser det sig da også, at omkostningerne ved at investere i de to strukturerede obligationer er højere end de omkostninger, der er ved at få en lignende eksponering via en investeringsforening.

7.7 Diskussion

I dette afsnit diskuterer vi anvendeligheden af de to modeller samt muligheden for fejlkilder i de inputparametre, som ligger til grund for modellerne. Vi kigger efterfølgende på, hvordan inputparametrene skulle ændres for at opnå de faktiske markedspriser. Herefter kigger vi kort på, hvad der kendetegner en god model med henblik på at belyse, om de store forskelle i priserne kan skyldes, at vi ikke benytter samme modeller som dem, der har priset produkterne. Til sidst kigger vi på mulighederne for at forbedre resultatet ved at udvide til mere komplicerede modeller.

Når det drejer sig om at vurdere fordele og ulemper ved de to modeller, må man klart gå ud fra, at Heston modellen i udgangspunktet har de bedste forudsætninger for at prise optionerne korrekt. Dette skyldes naturligvis, at modellen er kalibreret til at fitte hele volatilitetssmilet, mens Black-Scholes modellen kun benytter ATM volatiliteten. Når vi siger i udgangspunktet, er det, fordi både pris- og variansprocessen i Heston modellen gennemgår en diskretisering for at gøre det muligt at beregne priser på diskrete tidspunkter. Denne diskretisering er selvfølgelig en oplagt kilde til fejl, og det nævnes da også i stort set alle lærebøger, at metoden kun er en god approksimation ved brug af tilpas små tidssteps. Ud fra vores undersøgelser i afsnit 6.4 mener vi dog at kunne konkludere, at den afvigelse vi ser i de beregnede priser, ikke stammer fra diskretiseringsfejl.

En ulempe ved Heston modellen er, at den tager væsentlig længere tid at beregne end Black-Scholes modellen. Det tager ca. 6 timer at beregne en pris for KK Aktiekurv i Heston modellen, mens det kun tager lidt over 1.5 time i Black-Scholes modellen. Samtidig ligger der også et stort arbejde i at kalibrere parametre til Heston modellen, mens det er noget mere ligetil at finde inputparametre til Black-Scholes modellen i eksempelvis Bloomberg.

Med hensyn til inputparametre har vi valgt at vurdere dem i to grupper; sikre og usikre parametre. De sikre parametre er renter, dividender, volatiliteter på aktier og volatiliteter på valutakryds (på nær for CNYEUR). Grunden til, at vi refererer

til disse parametre som sikre, er, at de enten er hentet direkte fra Bloomberg eller lignende databaser eller er beregnet implicit ud fra optionspriser, der ligeledes er hentet fra en finansiel database. I gruppen af usikre parametre ligger aktivkorrelationer, quantokorrelationer og volatilitet på valutakrydset CNYEUR. Disse parametre er alle nogle, vi selv har estimeret ved brug af historisk data. Både aktiv- og quantokorrelationer er estimeret ud fra historiske tidsserier, mens volatiliteten på CNYEUR blandt andet er estimeret ved brug af korrelationen mellem USDCNY og EURUSD, som i sig selv bygger på et historisk estimat. At disse faktorer er estimeret ved brug af historisk data gør, at de fremtidige forventninger til markedet ikke ligger implicit i disse faktorer. De fortæller altså nærmere noget om fortiden end om fremtiden.

For at kortlægge hvor meget de usikre parametre (på nær volatiliteten på CNYEUR) skulle ændre sig for at få de faktiske markedspriser, har vi testet på KK Aktiekurv i Black-Scholes modellen. Af Black-Scholes formel i (7.21) fremgår det, at quantokorrelationen har en direkte positiv indvirkning på aktiv prisen, hvorimod det ikke er helt så lige til at se effekten fra aktivkorrelationerne. Ved at sætte alle quantokorrelationer til 1, hvilket selvfølgelig ikke er spor realistisk, opnås en pris på 99.1, hvilket stadig er 1.4 lavere end den faktiske pris. Det er som beskrevet i afsnit 7.6 kun lykkedes at gøre denne pris en lille smule højere ved at ændre på aktivkorrelationerne. Der er altså ikke noget, der tyder på, at de skjulte omkostninger udelukkende skulle skyldes vores parametervalg, nok nærmere tværtimod.

Når prisforskellen ikke skyldes inputparametrene til vores model, skyldes det måske i stedet valget af model. De investeringsbanker, som har solgt optionerne, lægger formentlig vægt på nogle andre ting i deres modeller, end vi gør. Det vigtigste for en investeringsbank er, at deres modeller beregner nogle gode *greeks*, da de hele tiden ligger og hedger deres positioner. Det er ikke noget, vi har lagt specielt meget vægt på i vores modelvalg. Så det er meget muligt, at de benytter andre modeller, som er mere effektive til deres formål. Samtidig har det høj prioritet, at modellerne kan beregnes relativt hurtigt, da det ikke nytter noget, at prisen er forældet, inden modellen har beregnet den. Dette kan nok ikke siges at være et kendetegn ved vores modeller. Vi mener dog, at de modeller, vi har brugt, er hensigtsmæssige at anvende til vores formål, og at vi derfor kan regne med, at resultaterne er retvisende.

Skulle man alligevel nævne nogle forslag til udvidelser, kunne det være, ud over stokastisk volatilitet, også at implementere stokastisk rente. I *Mertons model* med stokastisk rente²³ modelleres renten i en *Vasicek model*, men man kunne også sagtens vælge at modellere renten i en *CIR model*, således at den fulgte samme kvadratrodsproces, som volatiliteten følger i Heston modellen. Empiriske studier²⁴ viser dog, at optionsmodellerne ikke performer bedre, fordi man implementerer stokastisk rente. En anden oplagt udvidelse er at implementere en model med spring, således at man tillader spring i prisen på det underliggende aktiv. Dette gøres eksempelvis i *Bates modellen*, som kombinerer Mertons model med spring²⁵ med Heston modellen. Der findes masser af empiriske undersøgelser²⁶, der viser, at Bates modellen outperfor-

²³Se Lando, D. [2004] s. 17-20

²⁴Se eksempelvis Kim, Y. [2001]

²⁵Se Lando, D. [2004] s. 20-27

²⁶Se eksempelvis Fang, H. [2000]

mer både Black-Scholes og Heston modellen, men det viser sig ofte, at effekten kun ses på optioner med korte løbetider. Det er derfor ikke sikkert, at det ville forbedre vores resultat, da optionerne i de to produkter, vi priser, har forholdsvis lange løbetider.

Derfor ville det måske være bedre endnu en gang at benytte de modeller, vi benytter i opgaven, til at prise produktet, når der eksempelvis er et år til udløb. Da arrangørerne af produkterne godt ved, at flowet efter udstedelsen stort set kun går en vej, vil man formentlig se en tendens til, at de selv samme modeller nu ville ramme væsentlig tættere på prisen. Hvis det var tilfældet, ville man i høj grad have bevis for, at produkterne blev solgt for dyrt ved udstedelsen eller købt tilbage for billigt efterfølgende.

Kapitel 8

Konklusion

Vi har i de første 6 kapitler i opgaven opfyldt de målsætninger fra problemformuleringen, som handlede om at beskrive og forstå produkterne. Det viste sig, at især hovedstolsbeskyttelse, kombineret med investering i risikofyldte aktiver, de store afkastmuligheder i porteføljen og muligheden for alternativ eksponering, gør produkterne attraktive for private investorer.

I kapitel 7 prisfastsatte vi empirisk to udvalgte produkter ved brug af Black-Scholes og Heston modellen. Resultaterne viste, at priserne beregnet ved Heston modellen var en smule højere end priserne beregnet ved Black-Scholes modellen. Vi simulerede log-afkastet for Heston modellen med parametrene anvendt i henholdsvis PLUS 7 Index og KK Aktiekurv for at få en fornemmelse af, hvordan afkastfordelingen for de to produkter så ud. Fordelingen af log-afkastene var i begge tilfælde venstreskævt med positiv topstejlhed, hvilket forklarer, hvorfor Heston modellen i begge tilfælde genererede højere priser end Black-Scholes modellen. Det viste sig således, at valget af optionsmodel har betydning for størrelsen af produkternes priser. I hvor høj grad afhænger af de parametre, som modellen er kalibreret til.

På trods af at priserne beregnet ved Heston modellen var højere end de tilsvarende priser i Black-Scholes modellen, var de beregnede priser i begge modeller væsentligt lavere end de faktiske udstedelseskurser. Ved at angive de samlede omkostninger som de oplyste emissionsomkostninger plus de skjulte omkostninger, som vores resultater viste, at produkterne indeholdt, fandt vi, at PLUS 7 Index og KK Aktiekurv har årlige omkostninger på henholdsvis 1.55% og 1.85%. Vi sammenlignede disse tal med omkostningerne ved at investere i en passiv investeringsforening med en lignende eksponering. I begge tilfælde var produkternes årlige omkostninger næsten tre gange så høje som investeringsforeningens.

Når det kommer til spørgsmålet om, hvorvidt de to produkter er blevet solgt til en fair pris, må svaret derfor være nej. Den store forskel i den beregnede pris og udstedelseskursen kan enten skyldes, at et af de underliggende produkter (NKO eller option) er blevet købt for dyrt, eller at prisen på den strukturerede obligation er blevet sat for højt. Det er ikke usandsynligt, at både nulkuponobligationen og den underliggende option er blevet købt for dyrt. Motivationsfaktoren for udstederen af den strukturerede obligation er, at de kan opnå billig funding ved at udstede nulkuponobligationen til overpris. Desuden må optionsmodparten forventes at kræve en risikopræmie for den modelrisiko, der er forbundet med de meget eksotiske

optioner. Yderligere kan man forestille sig, at optionen er blevet købt for dyrt, hvis den er købt hos en fast modpart. Når optionerne er så komplekse, som det eksempelvis er tilfældet i PLUS produktet, er der ikke mange parter, der byder ind med priser, hvorved den manglende konkurrence i markedet er med til at øge prisen på optionen. Da produkterne er så komplekse og uigennemsigtige, kan man også forestille sig, at arrangøren har sat prisen på den strukturerede obligation kunstigt højt, vel vidende at langt de fleste private investorer ikke har en rimelig chance for at vurdere, hvad den strukturerede obligation reelt er værd.

Den høje grad af kompleksitet er netop en af de ting, som de strukturerede obligationer er blevet kritiseret for, og det er da også svært at være uenig i kritikken. Optionsdelen er i mange af produkterne yderst kompleks. Som vi så i prisfastsættelsen af de to strukturerede obligationer i opgaven, er det meget omstændigt at beregne prisen på så komplekse optioner. Man kan derfor ikke forvente, at en privat investor har de forudsætninger, som det kræver for at kunne gennemskue, om prisen på den strukturerede obligation er fair. Vi må derfor konkludere, at de strukturerede obligationer er svært uigennemsigtige. Kritikken må derfor siges at være berettiget. Hvorvidt udstedelsen af strukturerede obligationer kan berettiges, er et spørgsmål om, hvorvidt investor opnår noget, han ikke kunne have opnået ved at investere i andre produkter. Dette kan enten være i form af alternativ eksponering eller afkastmuligheder. Vi har set, at det er den komplekse struktur i de underliggende optioner, som gør produktet uigennemskueligt. Det er derfor nærliggende at overveje, om investor drager nogen fordel af denne komplekse struktur. Ved sammenligning med en plain vanilla option er caps, asiatiske haler og Himalaya strukturer alt sammen med til at gøre optionen billigere. Dette medfører, at arrangøren kan øge deltagelsesgraden for den strukturerede obligation. Om dette er en fordel for investor afhænger i høj grad af hans forventning til det underliggende marked. Forventer han, at det underliggende marked kun vil stige en lille smule, vil en cap, som ligger over det forventede niveau eksempelvis være en fordel for investor. Hvis man som investor ønsker at investere i en sidelæns bevægelse i markedet, er det ligeledes en fordel, at dette er muligt via eksotiske optioner. I langt de fleste tilfælde ønsker private investorer dog blot at investere udfra en forventning om et stigende marked, hvilket vil sige, at investor blot ønsker β -eksponering. Den private investor ville derfor for det meste være bedre stillet ved at have en plain vanilla calloption som underliggende. Dette skyldes primært, at produktet da ville være gennemsigtigt, og investor dermed forholdsvis let ville kunne gennemskue, om prisen på produktet var fair.

Alt i alt ville de fleste private investorer formentlig kunne få dækket deres behov, hvis de strukturerede obligationer havde plain vanilla optioner som underliggende. Muligheden for at øge deltagelsesgraden på produktet ved at gøre optionen eksotisk, betyder dog umiddelbart, at arrangørerne formentlig vil blive ved med at benytte eksotiske optioner i produkterne. En høj deltagelsesgrad gør salgsargumentationen lettere for distributørerne. Samtidig giver en høj kompleksitet, som beskrevet, mulighed for at sælge produkterne til overpris, da investorerne ikke kan gennemskue prisen. De meget komplekse produkter giver derfor arrangøren mulighed for at tjene flere penge, end hvis produktet var gennemskueligt. Man kan derfor forvente, at så længe der er investorer, som er villige til at købe de komplekse produkter, vil arrangørerne også blive ved med at sælge dem.

Litteratur

- [1] Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W. and J. Tistaert (2006). “*The Little Heston Trap*“, <https://perswww.kuleuven.be/~0009713/HestonTrap.pdf>
- [2] Andersen, L. (2007). “*Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model*“, <http://www.javaquant.net/papers/LeifAndersenHeston.pdf>
- [3] Bakshi, G., Cao, C. and Z. Chen (1997). “*Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models*“, The Journal of Finance, vol. LII, no. 5.
- [4] Berkaoui, A., Bossy, M. and A. Diop (2008). “*Euler scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient: strong convergence*“, ESAIM Probability and Statistics, vol. 12, no. 1, pp. 1-11.
- [5] Björk, T. (2009). “*Arbitrage Theory in Continuous Time*“, Oxford University Press.
- [6] Bossy, M. and A. Diop (2004). “*An efficient discretization scheme for one dimensional SDEs with a diffusion coefficient function of the form $|x|^\alpha$, $\alpha \in [1/2, 1)$* “, INRIA working paper no. 5396.
- [7] Castagna, A. (2009). “*FX Options and Smile Risk*“, John Wiley And Sons Ltd.
- [8] Chu, K. (2005). “*Solution to the Siegel Paradox*“, Open economies review 16, pp. 399-405.
- [9] Deelstra, G. and F. Delbaen (1998). “*Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term*“, Applied Stochastic Models and Data Analysis, vol. 14, no. 1, pp. 77-84.
- [10] Diop, A. (2003). “*Sur la discrétisation et le comportement à petit bruit d’EDS unidimensionnelles dont les coefficients sont à dérivées singulières*“, PhD thesis,

INRIA.

- [11] Dragulescu, A. and Yakovenko, V. (2002). “*Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility*“, http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/0203/0203046v3.pdf
- [12] Dumas, B., Jennergren, P. and B. Näslund (1995). “*Siegel’s paradox and the pricing of currency options*“, Journal of International Money and Finance, vol. 14, no. 2, pp. 213-233.
- [13] Fang, H. (2000). “*Option Pricing Implications of a Stochastic Jump Rate*“, <http://www.smartquant.com/references/OptionPricing/option12.pdf>
- [14] Glasserman, P. (2003). “*Monte Carlo Methods in Financial Engineering*“, Springer.
- [15] Hakala, J. and U. Wystup (2007). “*Foreign Exchange Risk*“, Risk Books.
- [16] Heston, S. (1993). “*A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*“, The Review of Financial Studies 1993, vol. 6, no. 2, pp. 327-342
- [17] Higham, D.J. and X. Mao (2005). “*Convergence of the Monte Carlo simulations involving the meanreverting square root process*“, Journal of Computational Finance, vol. 8, no. 3, pp. 35-62.
- [18] Hull, J. (2006). “*Options, Futures and other Derivatives*“, Pearson Education.
- [19] Høgh, U. (2009). “*Prisfastsættelse af aktieindekserede garantiobligationer*“, Kandidatafhandling, CBS.
- [20] Jakobsen, S. (2000). “*Aktie-, valuta- og råvareindekserede obligationer*“, Finans/Invest, no. 8, pp. 17-21.
- [21] Jessen, C. (2006). “*Store skjulte omkostninger i Forstædernes Bank*“, Børsen, D. 26. April 2006, pp. 25.

- [22] Kim, Y. (2001). “*Option Pricing Under Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation*“, <http://www.math.chuo-u.ac.jp/~sugiyama/06/06-09.pdf>
- [23] Kjaergaard, C. (2007). “*Små banker fastlåser kunder til investeringer*“, Børsen, D. 7. maj 2007, pp. 2.
- [24] Lando, D. (2004). “*Credit Risk Modeling*“, Princeton.
- [25] Lando, D. and B. Huge (2000). “*Swap Pricing with Two-Sided Default Risk in a Rating-Based Model*“, European Finance Review, pp. 239-268.
- [26] Lando, D. and P. Feldhütter (2008). “*Decomposing swap spreads*“, Journal of Financial Economics 88, pp. 375-405.
- [27] Lando, D. and R. Poulsen (2006). “*Lecture Notes for Finance 1*“, <http://www.math.ku.dk/~rolf/ifnotes.pdf>
- [28] Lord, R., Koekkoek, R. and D. van Dijk (2008). “*A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models*“, <http://www.tinbergen.nl/discussionpapers/06046.pdf>
- [29] McDonald, R. (2006). “*Derivatives Markets*“, Pearson Education.
- [30] Morrison, W. (2010). “*China-U.S. Trade Issues*“, http://assets.opencrs.com/rpts/RL33536_20100621.pdf
- [31] Plesner, S. (2007). “*Strukturerede produkter - værdiskabelse gennem kreativ og ansvarlig finansiel ingeniørkunst?*“, Finans/Invest, no. 4, pp. 11-21.
- [32] Rasmussen, A. (2007). “*Indekserede obligationer*“, Danmarks Nationalbank Kvartalsoversigt 2. kvartal 2007, pp. 47-61.
- [33] Rasmussen, M. (2009). “*Heston modellen*“, KAndidatafhandling, CBS.
- [34] Schoutens, W, Simons, E. and J. Tistaert (2003). “*A Perfect Calibration! Now what?*“, <http://www.mathfinance.com/workshop/2005/papers/tistaert/extension.pdf>

- [35] Tjur, T. (2004). *“Sandsynlighedsregning”*, Samfundslitteratur.

Bilag A

Mellemregninger i udledningen af Heston modellen

Partielt afledte for derivaterne C_1 og C_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial x} &= e^{x-\delta\tau} \left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} &= e^{x-\delta\tau} \left(P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial C_1}{\partial v} &= e^{x-\delta\tau} \frac{\partial P_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 C_1}{\partial v^2} &= e^{x-\delta\tau} \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 C_1}{\partial x \partial v} &= e^{x-\delta\tau} \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) & \frac{\partial C_1}{\partial \tau} &= e^{x-\delta\tau} \left(-\delta P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} &= K e^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} &= K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C_2}{\partial v} &= K e^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 C_2}{\partial v^2} &= K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 C_2}{\partial x \partial v} &= K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} & \frac{\partial C_2}{\partial \tau} &= K e^{-r\tau} \left(-r P_2 + \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Ingen-arbitrage betingelser for C_1 og C_2 med $x(S(t), t)$ som underliggende

$$\begin{aligned} \delta P_1 - \frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \left(r - \delta - \frac{1}{2}v \right) \left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \kappa(\theta - v) \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2}v \left(P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) \\ + \frac{1}{2}\sigma_{var}^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + v\sigma_{var}\rho_{var} \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right) = r P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \left(r - \delta - \frac{1}{2}v \right) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial P_2}{\partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma_{var}^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \\ + v\sigma_{var}\rho_{var} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v} = r P_2 \end{aligned}$$

Udledning af $G(\tau, \phi)$ og $D(\tau, \phi)$

De karakteristiske funktioner for sandsynlighederne P_1 og P_2 skal jf. (5.17) opfylde følgende PDE

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f_i}{\partial \tau} + (r - \delta + u_i v) \frac{\partial f_i}{\partial x} + (a - b_i v) \frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \\ & \frac{1}{2} \sigma_{var}^2 v \frac{\partial^2 f_i}{\partial v^2} + v \sigma_{var} \rho_{var} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

for

$$i = 1, 2; u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = (\kappa \theta), b_1 = (\kappa - \rho_{var} \sigma_{var}), b_2 = \kappa$$

Terminalbetingelsen er givet ved $f_i(x, v, 0, \phi) = e^{i\phi x}$ og vi gætter på en løsning af formen

$$f_i(x, v, \tau, \phi) = e^{G(\tau, \phi) + D(\tau, \phi)v + i\phi x} \quad (\text{A.3})$$

Nu findes de partielt afledte (funktionsargumenterne udelades for overblik skyld)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x} &= e^{G+Dv+i\phi x} i\phi & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} &= e^{G+Dv+i\phi x} i^2 \phi^2 \\ \frac{\partial f_i}{\partial v} &= e^{G+Dv+i\phi x} D & \frac{\partial^2 f_i}{\partial v^2} &= e^{G+Dv+i\phi x} D^2 \\ \frac{\partial f_i}{\partial \tau} &= e^{G+Dv+i\phi x} \left(\frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{\partial D}{\partial \tau} v \right) & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial v} &= e^{G+Dv+i\phi x} i\phi D \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

I (A.5) nedenfor er de partielt afledte indsat i (A.2) og $e^{G+Dv+i\phi x}$ er divideret ud. Vi har ligeledes benyttet os af, at $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial G}{\partial \tau} + (r - \delta) i\phi + aD \right) + \\ & \left(-\frac{\partial D}{\partial \tau} + u_i i\phi - \frac{1}{2} \phi^2 - b_i D + \frac{1}{2} \sigma_{var}^2 D^2 + \rho_{var} \sigma_{var} i\phi D \right) v = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

PDE'en i (A.2) er kun opfyldt såfremt begge paranteser i (A.5) er lig nul, hvorfor (A.5) nu opsplittes i to ordinære differentialligninger. Da den anden parantes kun indeholder D løser vi denne differentialligning først

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = u_i i\phi - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \sigma_{var}^2 D^2 - (b_i - \sigma_{var} \rho_{var} i\phi) D \quad (\text{A.6})$$

Differentialligningen i (A.6) kan skrives som

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \alpha - \beta D + \gamma D^2 \quad (\text{A.7})$$

hvor

$$\alpha = \left(u_i i\phi - \frac{1}{2} \phi^2 \right), \beta = (b_i - \sigma_{var} \rho_{var} i\phi), \gamma = \frac{1}{2} \sigma_{var}^2$$

Løsningen til differentialligningen i (A.7) kan skrives som

$$D = \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)} \quad (\text{A.8})$$

Ved at differentiere (A.8) med hensyn til τ fås

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{\varphi'(\tau)^2 - \varphi''(\tau)\varphi(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)^2} \quad (\text{A.9})$$

Nu indsættes (A.8) og (A.9) i (A.7)

$$\frac{\varphi'(\tau)^2 - \varphi''(\tau)\varphi(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)^2} = \alpha - \beta \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)} + \gamma \left(\frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)} \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

$\Updownarrow$

$$\varphi''(\tau) + \beta\varphi'(\tau) + \alpha\gamma\varphi(\tau) = 0$$

Udtrykket i (A.10) er en 2. ordens differentialligning med løsningen

$$\varphi(\tau) = Ae^{(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} + Be^{(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} \quad (\text{A.11})$$

Terminalbetingelsen $f_i(x, v, 0, \phi) = e^{i\phi x}$ medfører at $D(0, \phi) = 0$, hvilket medfører at for at $\varphi'(0) = 0$ for at (A.8) kan være opfyldt. Derfor differentieres $\varphi(\tau)$ nu med hensyn til τ

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) = & A \left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) e^{(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} + \\ & B \left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) e^{(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Nu sættes $\varphi'(0)$ lig nul for at bestemme B udtrykt ved A

$$0 = A \left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) + B \left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \quad (\text{A.13})$$

$\Updownarrow$

$$B = A \left(\frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} \right)$$

Udtrykket for B indsættes nu i udtrykket for $\varphi(\tau)$ og $\varphi'(\tau)$, hvorefter disse indsættes i (A.8). I nedenstående udtryk er A og $e^{-\frac{1}{2}\beta\tau}$ divideret ud

$$D = \frac{- \left(\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) e^{(\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} + \left(\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) e^{(-\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} \right)}{\gamma \left(e^{(\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} + \left[\frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} \right] e^{(-\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma})\tau} \right)}$$

Det viser sig nu at være smart, at gange igennem med $2e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma}\right)\tau}$.

$$D = \frac{\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right) - \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)e^{-\left(\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)\tau}}{2\gamma \left(1 - \left[\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right]e^{-\left(\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)\tau}\right)}$$

For at simplificere udtrykket ovenfor definerer vi nu to variable d og g

$$d \equiv \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{(b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi)^2 - \sigma_{var}^2(2u_i\phi i - \phi^2)} \quad (\text{A.14})$$

$$g \equiv \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} = \frac{b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d}{b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi + d} \quad (\text{A.15})$$

Det endelige udtryk for D kan nu opskrives som

$$D(\tau, \phi) = \frac{(b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d)(1 - e^{-d\tau})}{\sigma_{var}^2(1 - ge^{-d\tau})} \quad (\text{A.16})$$

Vi kan nu benytte udtrykket for D til at bestemme G . Som tidligere nævnt skal begge paranteser i (A.5) være lig nul, hvorfor der må gælde

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau} &= (r - \delta)i\phi + aD \Leftrightarrow G = \int_0^\tau (r - \delta)i\phi + aD(u)du \Leftrightarrow \\ G &= \int_0^\tau (r - \delta)i\phi du + \int_0^\tau aD(u)du \Leftrightarrow G = (r - \delta)i\phi\tau + a \int_0^\tau D(u)du \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Nu ønsker vi altså at finde $\int_0^\tau D(u)du$. Fra (A.8) har vi at $D = \frac{-\varphi'(\tau)}{\gamma\varphi(\tau)} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}$. Der gælder at $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x))$, hvilket giver os

$$\begin{aligned} \int_0^\tau D(u)du &= -\frac{1}{\gamma} \int_0^\tau \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}du = -\frac{1}{\gamma} [\ln(\varphi(u))]_{u=0}^{u=\tau} \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\ln(\varphi(\tau)) - \ln(\varphi(0))) = -\frac{1}{\gamma} \left(\ln\left(\frac{\varphi(\tau)}{\varphi(0)}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Fra (A.10) kender vi udtrykket for $\varphi(\tau)$. Med B indsat og A divideret ud får vi

$$\varphi(\tau) = e^{\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} - \frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}} e^{\left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} \quad (\text{A.19})$$

Leddet $\frac{\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}{\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}}$ genkendes som g i (A.15) og vi får derfor

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau D(u)du &= -\frac{1}{\gamma} \left(\ln \left(\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} - ge^{\left(-\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau}}{1 - g} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{\gamma} \left(\ln \left(\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma}\right)\tau} \left(1 - ge^{\left(-\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right)\tau}\right)}{1 - g} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{\gamma} \left(\left(-\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma} \right) \tau + \ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sigma_{var}^2} \left(\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \tau - 2\ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sigma_{var}^2} \left((b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d) \tau - 2\ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

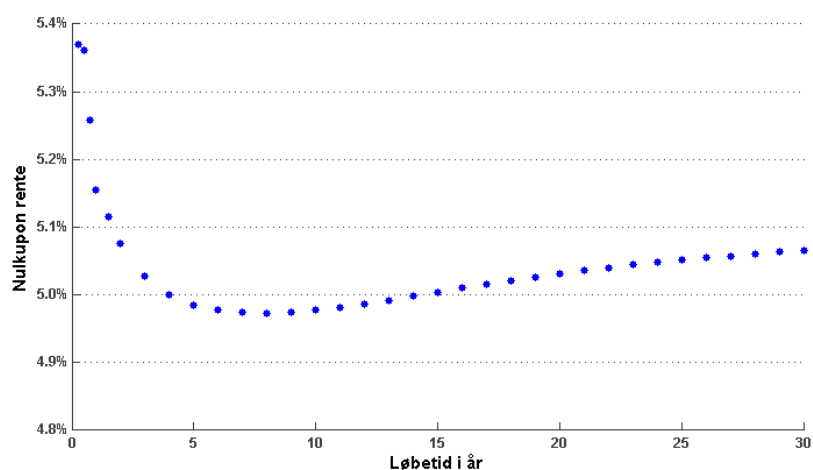
Nu findes løsningen for G til

$$G(\tau, \phi) = (r - \delta) i\phi\tau + \frac{a}{\sigma_{var}^2} \left((b_i - \sigma_{var}\rho_{var}i\phi - d) \tau - 2\ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right) \tag{A.21}$$

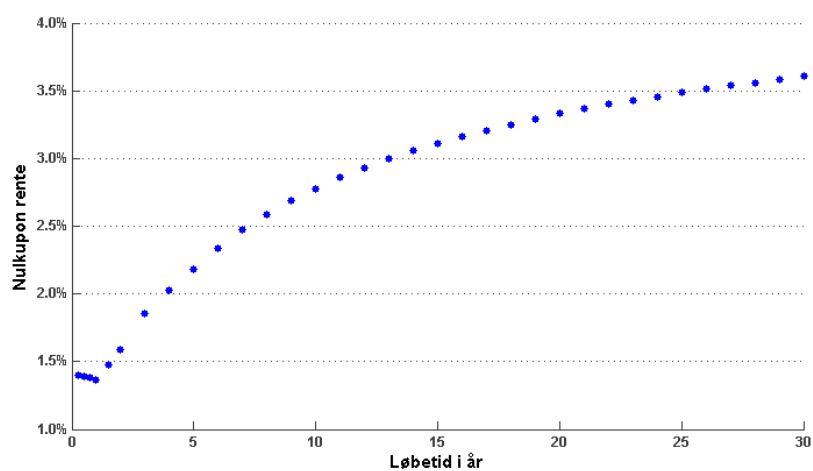
Bilag B

Swap-nulkuponrentekurver

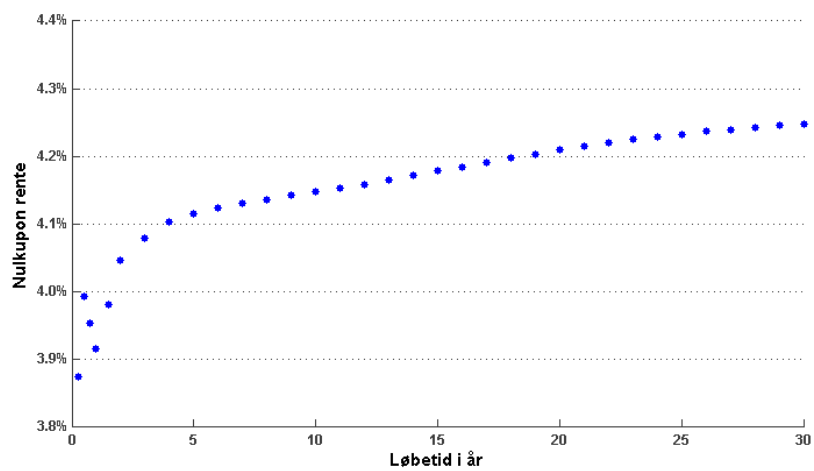
PLUS 7 Index Super



Figur B.1: *USD swap-nulkuponrentestruktur den 27. november 2006.*

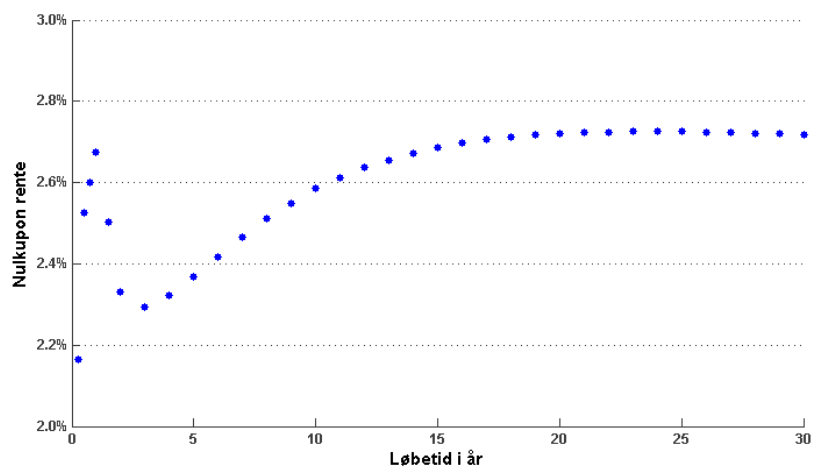


Figur B.2: *CNY swap-nulkuponrentestruktur den 27. november 2006.*

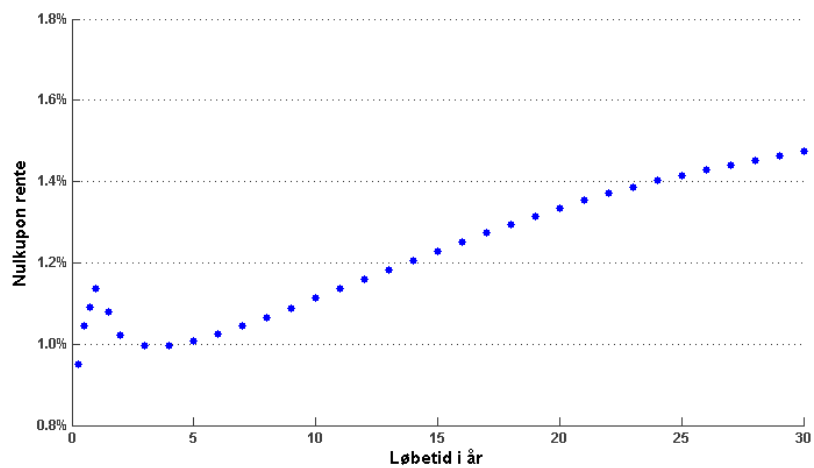


Figur B.3: *DKK swap-nulkuponrentestruktur den 27. november 2006.*

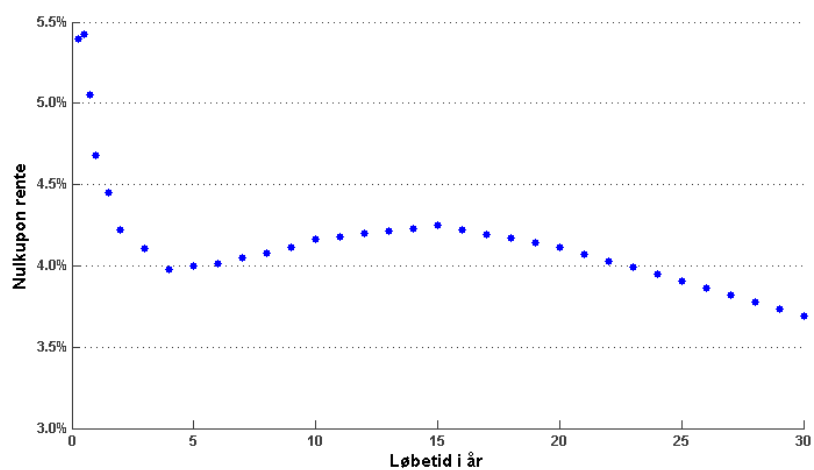
KK Aktiekurv



Figur B.4: *USD swap-nulkuponrentestruktur den 8. december 2008.*



Figur B.5: *JPY swap-nulkuponrentestruktur den 8. december 2008.*



Figur B.6: *DKK swap-nulkuponrentestruktur den 8. december 2008.*

Bilag C

Deltaværdier

Strike	Delta	Implied vol
3000	0.86	21.65%
3100	0.84	21.20%
3200	0.82	20.75%
3300	0.79	20.33%
3400	0.76	19.90%
3500	0.73	19.47%
3600	0.70	19.02%
3700	0.67	18.58%
3800	0.63	18.14%
3900	0.59	17.70%
4000	0.55	17.28%
4100	0.51	16.87%
4200	0.47	16.49%
4300	0.43	16.14%
4400	0.38	15.81%
4500	0.34	15.51%
4600	0.30	15.24%
4700	0.27	15.00%
4800	0.23	14.78%
4900	0.20	14.52%
5000	0.17	14.41%

Tabel C.1: *Deltaværdier og dertilhørende implicitte volatiliteter for EuroSTOXX d. 27/11/2006 med parameterverdierne $S = 4002$, $T - t = 2.09$, $r = 3.97\%$ og $\delta = 3.88\%$.*

Strike	Delta	Implied vol
318	0.88	23.75%
329	0.86	23.26%
339	0.84	22.77%
350	0.82	22.31%
360	0.80	21.83%
371	0.77	21.36%
381	0.75	20.87%
392	0.72	20.38%
403	0.69	19.90%
413	0.66	19.42%
424	0.62	18.96%
434	0.59	18.51%
445	0.55	18.09%
456	0.51	17.71%
466	0.47	17.35%
477	0.44	17.01%
487	0.40	16.72%
498	0.36	16.46%
509	0.32	16.21%
519	0.29	15.93%
530	0.26	15.81%

Tabel C.2: Deltaværdier og dertilhørende implicitte volatiliteter for OMXC20 d. 27/11/2006 med parameterværdierne $S = 424$, $T - t = 2.09$, $r = 4.27\%$ og $\delta = 1.97\%$.

Strike	Delta	Implied vol
400	0.95	59.54%
500	0.90	56.30%
600	0.84	51.54%
700	0.77	48.28%
800	0.68	46.19%
900	0.58	43.08%
1000	0.47	41.37%
1100	0.36	38.24%
1200	0.28	37.94%
1300	0.18	33.92%
1400	0.12	32.98%

Tabel C.3: Deltaværdier og dertilhørende implicitte volatiliteter for S&P 500 d. 9/12/2008 med parameterværdierne $S = 888$, $T - t = 1.04$, $r = 2.67\%$ og $\delta = 2.39\%$.

Strike	Delta	Implied vol
2000	0.74	38.88%
2100	0.72	38.16%
2200	0.69	37.47%
2300	0.67	36.81%
2400	0.64	36.18%
2500	0.62	35.58%
26000	0.59	35.00%
2700	0.56	34.45%
2800	0.54	33.93%
2900	0.51	33.43%
3000	0.48	32.97%

Tabel C.4: Deltaværdier og dertilhørende implicitte volatiliteter for EuroSTOXX d. 9/12/2008 med parameterverdierne $S = 2480$, $T - t = 3.05$, $r = 3.31\%$ og $\delta = 3.38\%$.

Strike	Delta	Implied vol
6000	0.78	59.67%
6500	0.75	59.68%
7000	0.73	59.69%
7500	0.70	59.70%
8000	0.67	59.71%
8500	0.64	59.72%
9000	0.62	59.73%
9500	0.59	59.74%
10000	0.57	59.75%
10500	0.55	59.76%
11000	0.53	59.77%

Tabel C.5: Deltaværdier og dertilhørende implicitte volatiliteter for Nikkei d. 9/12/2008 med parameterverdierne $S = 8395$, $T - t = 2.00$, $r = 1.02\%$ og $\delta = 2.69\%$.

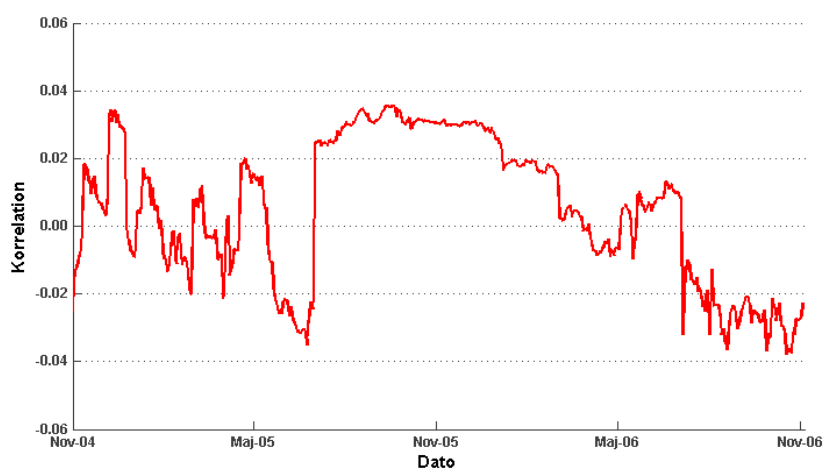
Bilag D

Aktivkorrelationer

PLUS 7 Index Super



Figur D.1: *Estimeret korrelation mellem OMXC20 og EuroSTOXX50.*



Figur D.2: *Estimeret korrelation mellem OMXC20 og CNYUSD.*



Figur D.3: *Estimeret korrelation mellem OMXC20 og CNYEUR.*



Figur D.4: *Estimeret korrelation mellem DAX og EuroSTOXX50.*



Figur D.5: *Estimeret korrelation mellem DAX og CNYUSD.*



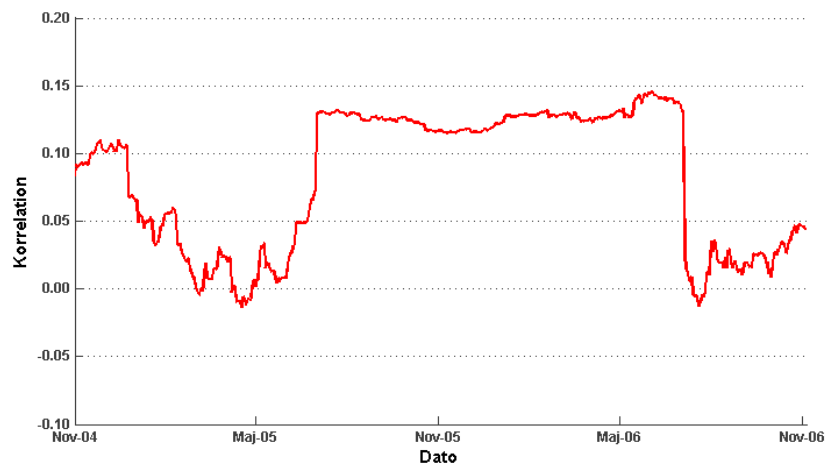
Figur D.6: *Estimeret korrelation mellem DAX og CNYEUR.*



Figur D.7: *Estimeret korrelation mellem EuroSTOXX50 og CNYUSD.*



Figur D.8: *Estimeret korrelation mellem EuroSTOXX50 og CNYEUR.*



Figur D.9: *Estimeret korrelation mellem CNYUSD og CNYEUR.*

KK Aktiekurv



Figur D.10: *Estimeret korrelation mellem S&P500 og EuroSTOXX50.*



Figur D.11: *Estimeret korrelation mellem S&P500 og Nikkei.*



Figur D.12: *Estimeret korrelation mellem EuroSTOXX50 og Nikkei.*

Bilag E

Quantokorrelationer

PLUS 7 Index Super



Figur E.1: *Estimeret korrelation mellem EuroSTOXX50 og EURDKK.*



Figur E.2: *Estimeret korrelation mellem CNYUSD og USDDKK.*



Figur E.3: *Estimeret korrelation mellem CNYEUR og EURDKK.*

KK Aktiekurv



Figur E.4: *Estimeret korrelation mellem S&P500 og USDDKK.*



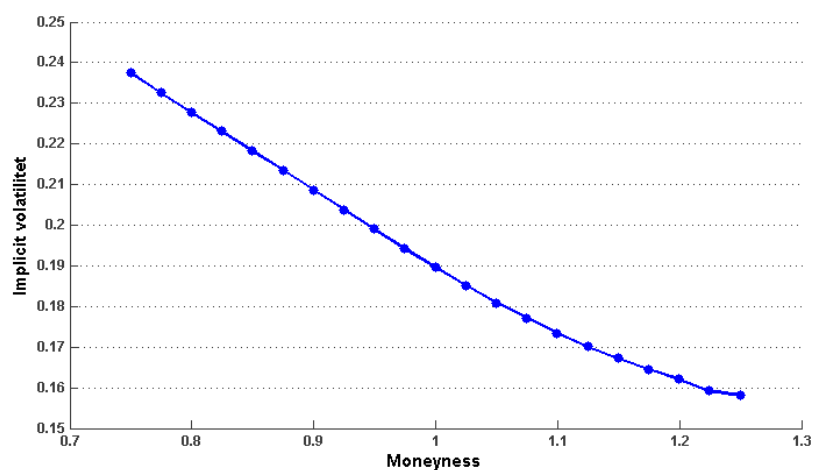
Figur E.5: *Estimeret korrelation mellem EuroSTOXX50 og EURDKK.*



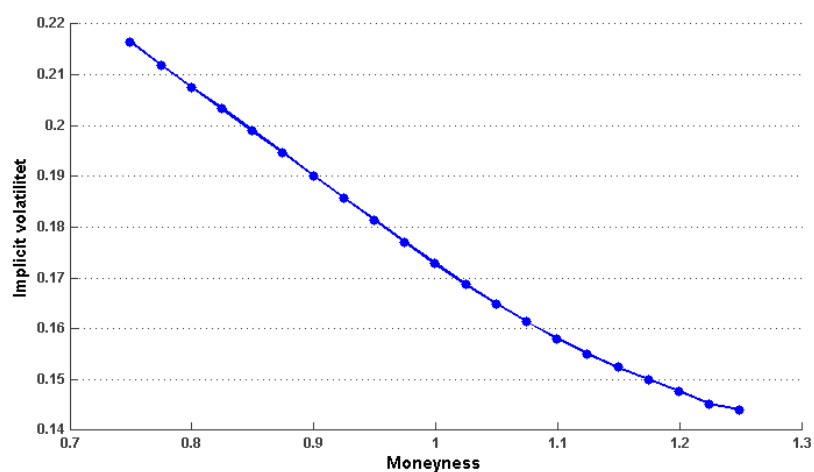
Figur E.6: *Estimeret korrelation mellem Nikkei og JPYDKK.*

Bilag F

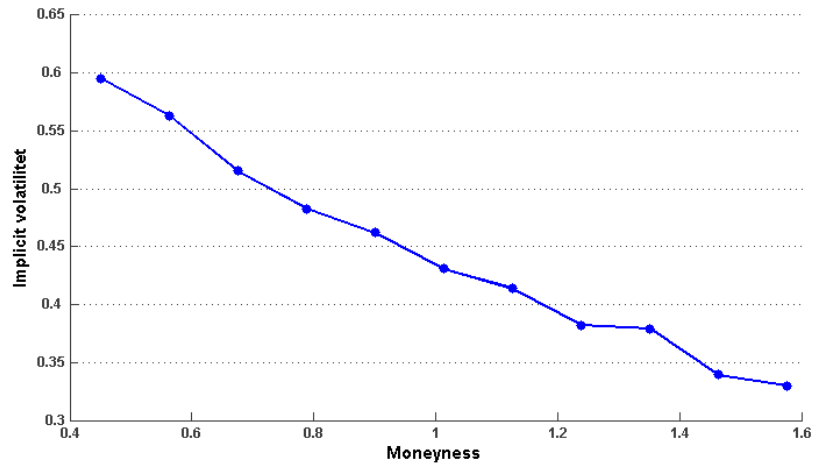
Volatilitetsskews



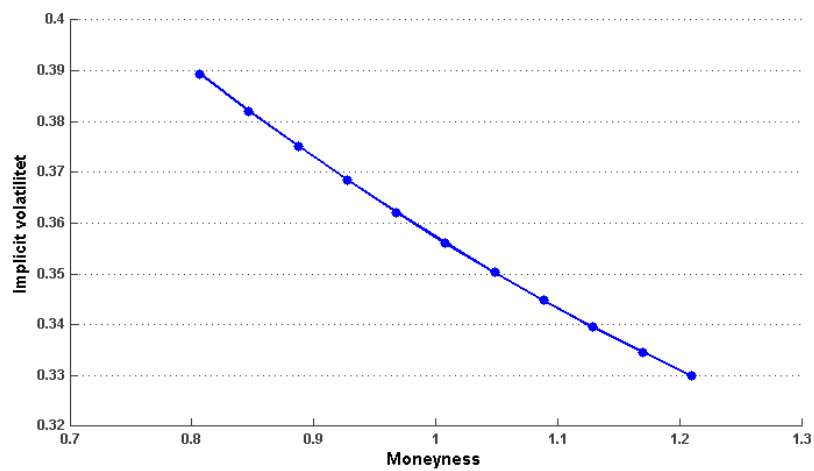
Figur F.1: *Volatilitetsstruktur for OMXC20 den 27. november 2006.*



Figur F.2: *Volatilitetsstruktur for EuroSTOXX den 27. november 2006.*



Figur F.3: *Volatilitetsstruktur for S&P 500 den 8. december 2008.*



Figur F.4: *Volatilitetsstruktur for EuroSTOXX den 8. december 2008.*

Bilag G

MATLAB kode til prisning af produkter

KK Aktiekurv priset ved brug af Black-Scholes modellen

```
%Prisning af KommuneKredit Aktiekurv ved brug af Black-Scholes modellen

%clear everything
clear all;
%sætter udskriftsformat til long
format('long');

%%Initialiserer parametre

%antal simulationer
sim=2000000;

%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 9/12/2008 til 9/11/2011)
month1=35;
%antal steps hvor delta_t=19/365 (perioden 9/11/2011 til 28/11/2011)
month2=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 28/11/2011 til
%28/5/2012)
month3=6;

%løbetid i år ved actual/365 konventionen
t=1281/365;
%deltagelsesgrad
del_grad=0.85;

%angiver om der benyttes antitetisk simulering
Antithetic=1;

%inputparametre til Black-Scholes modellen
%rækkefølgen for elementerne i alle vektorer er SPX, SX5E, NKY.
%udenlandske årlige risikofrie renter
r_u=[0.023081548; 0.033155759; 0.009962779]';
%indenlandsk årlig risikofri rente
r_i=0.042313927;
```

```

%årlig dividendeudbetaling på aktieindeks
delta=[0.023867373; 0.03376291; 0.026851238]';
%årlig volatilitet på aktieindeks
vol=[0.417865; 0.332901; 0.525347]';

%korrelationer mellem aktieindeks
rho=[ 1, 0.592778374, 0.184218173; ...
      0.592778374, 1, 0.497841271; ...
      0.184218173, 0.497841271, 1 ];

%quanto relaterede parametre
%quanto korrelationer mellem aktieindeks og valutakurser
gamma=[0.216575567; 0.166748487; 0.071255036]';
%volatilitet på valutakryds
alpha=[0.18803; 0.005; 0.19981]';

%fordobler variablen sim hvis der er valgt antitetisk simulering
if Antithetic==1
    sim=sim*2;
end

%%Initialiserer matricer

S=zeros(1,3);
cho_matrix=zeros(3,3);
S_obs=zeros(7,3);
OptionPayoff=0;

%%Påbegynder simulering

%laver kovariansmatrix
sigma = diag(vol)*rho*diag(vol);

%laver Cholesky dekomponering så cho_matrix*cho_matrix'=sigma
cho_matrix(:,:)=chol(sigma)';

%påbegynder måling af beregningstid
tic;

%løkke som tæller antal simulationer
for n=1:sim

    %startværdi for de underliggende aktieindeks
    S=[100, 100, 100];

    %initialiserer i som styrer på hvilken plads i vektoren S_obs en given
    %observation lagres
    i=1;

    %løkke som spejler random numbers hvis antitetisk simulation er valgt
    if Antithetic==1
        if mod(n,2)==0
            Z(:,:)= -Z(:,:);
        else
            Z=randn(3,month1+month2+month3);
        end
    end
end

```

```

else
    Z=randn(3,month1+month2+month3);
end

%laver korrelerede normalfordelte variable
korr_var=(cho_matrix*Z)';

%løkke som tæller tidssteps
for l=1:(month1+month2+month3)

    %switch løkke som giver delta_t og sqrtdelta værdi afhængig af
    %perioden
    switch logical(true)
        case l==month1+month2
            delta_t=16/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        otherwise
            delta_t=1/12;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
    end

    %simulerer aktiekurserne for de underliggende indeks
    S(1,:) = S(1,:).*exp((r_u - delta + alpha.*vol.*gamma - 0.5*vol.^2)
        *delta_t + sqrtdelta*korr_var(l, :));

    %fastlåser kurser på observationsdagene
    if l>35
        S_obs(i,:)=S(1,:);
        i=i+1;
    end
end

%finder samlet optionspayoff for simulationerne
OptionPayoff = OptionPayoff + max(min(1/3*(mean(S_obs(:,1))+
    mean(S_obs(:,2))+ mean(S_obs(:,3)))/100-1,0.5), 0)*100;
end

%afslutter måling af sberegningstid
toc;

%finder den simulerede pris som gennemsnit af de simulerede optionspriser
Option=exp(-r_i*t)*del_grad*OptionPayoff/sim;

%pris på NKO
NKO=exp(-r_i*t)*(100);

%pris på struktureret obligation
Pris=Option+NKO

```

KK Aktiekurv priset ved brug af Heston modellen

```

%%Prisning af KommuneKredit Aktiekurv ved brug af Heston modellen

%clear everything

```

```

clear all;
% sætter udskriftsformat til long
format('long');

%% Initialiserer parametre

% antal simulationer
sim=2000000;

% antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 9/12/2008 til 9/11/2011)
month1=35;
% antal steps hvor delta_t=19/365 (perioden 9/11/2011 til 28/11/2011)
month2=1;
% antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 28/11/2011 til
% 28/5/2012)
month3=6;

% løbetid i år ved actual/365 konventionen
t=1281/365;
% deltagelsesgrad
del_grad=0.85;

% angiver om der benyttes antititisk simulering
Antithetic=1;

% inputparametre til Black-Scholes modellen
% rækkefølgen for elementerne i alle vektorer er SPX, SX5E, NKY.
% udenlandske årlige risikofrie renter
r_u=[0.023081548; 0.033155759; 0.009962779]';
% indenlandsk årlig risikofri rente
r_i=0.042313927;
% årlig dividendeudbetaling på aktieindeks
delta=[0.023867373; 0.03376291; 0.026851238]';

% korrelationer mellem aktieindeks
rho=[ 1, 0.592778374, 0.184218173; ...
      0.592778374, 1, 0.497841271; ...
      0.184218173, 0.497841271, 1 ];

% quanto relaterede parametre
% quanto korrelationer mellem aktieindeks og valutakurser
gamma=[0.216575567; 0.166748487; 0.071255036]';
% volatilitet på valutakryds
alpha=[0.18803; 0.005; 0.19981]';

% inputparametre til Heston modellen
% mean reversion niveau for variansen
theta=[0.51084048558580; 0.51899028405005; 0.54670833684127]'.^2;
% mean reversion hastighed for variansen
kappa=[1.86349381129685; 1.00052753806109; 3.87346905909723]';
% volatilitet på variansen
vol_vol=[0.99969804189152; 0.99983666631654; 0.45869163920362]';
% korrelation mellem aktier og varians
rho_var=[-0.83834792963472; -0.76052851626170; -0.04063080258960]';
% startniveau for variansen
var=[0.46598858969086; 0.14434214363958; 0.87525095446938]'.^2;

```

```

%fordobler variablen sim hvis der er valgt antitetisk simulering
if Antithetic==1
    sim=sim*2;
end

%%Initialiserer matricer

S=zeros(1,3);
cho_matrix=zeros(3,3);
S_obs=zeros(7,3);
OptionPayoff=0;

%%Påbegynder simulering

%påbegynder måling af beregningstid
tic;

%løkke som tæller antal simulationer
for n=1:sim

    %startværdi for de underliggende aktieindeks
    S=[100, 100, 100];

    %initialiserer i som styrer på hvilken plads i vektoren S_obs en given
    %observation lagres
    i=1;

    %løkke som spejler random numbers hvis antitetisk simulation er valgt
    if Antithetic==1
        if mod(n,2)==0
            Z(:, :)= -Z(:, :);
            Zvar(:, :)= -Zvar(:, :);
        else
            Z=randn(3,month1+month2+month3);
            Zvar=randn(3,month1+month2+month3)';
        end
    else
        Z=randn(3,month1+month2+month3);
        Zvar=randn(3,month1+month2+month3)';
    end

    %løkke som tæller tidssteps
    for l=1:(month1+month2+month3)

        %laver kovariansmatrix
        sigma = diag(sqrt(abs(var)))*rho*diag(sqrt(abs(var)));

        %laver Cholesky dekomponering så cho_matrix*cho_matrix'=sigma
        cho_matrix(:, :)=chol(sigma)';

        %laver korrelerede normalfordelte variable
        korr_var=(cho_matrix*Z)';

        %switch løkke som giver delta_t og sqrtdelta værdi afhængig af
        %perioden

```



```

switch logical(true)
    case l==month1+month2
        delta_t=16/365;
        sqrtdelta=sqrt(delta_t);
    otherwise
        delta_t=1/12;
        sqrtdelta=sqrt(delta_t);
end

%simulerer aktiekurser og varians for de underliggende indeks ved
%brug af et Euler skema
S(1,:) = S(1,:) + (r_u - delta + alpha.*gamma.*sqrt(max(var,0))).*
    S(1,:)*delta_t + S(1,:)*sqrtdelta.*korr_var(1, :);
var(1,:) = var(1,:) + kappa(1,:).*(theta(1,:) - max(var(1,:),0)).*
    delta_t + vol_vol(1,:).*sqrt(max(var(1,:),0)).*sqrtdelta
    .*(rho_var(1,:).*korr_var(1,:)+sqrt(1-rho_var(1,:).^2).
    *Zvar(1,:));

%fastlåser kurser på observationsdagene
if l>35
    S_obs(i,:)=S(1,:);
    i=i+1;
end
end

%finder samlet optionspayoff for simulationerne
OptionPayoff = OptionPayoff + max(min(1/3*(mean(S_obs(:,1)) +
    mean(S_obs(:,2)) + mean(S_obs(:,3)))/100 - 1, 0.5), 0)*100;
end

%afslutter måling af sberegningstid
toc;

%finder den simulerede pris som gennemsnit af de simulerede optionspriser
Option=exp(-r_i*t)*del_grad*OptionPayoff/sim;

%pris på NKO
NKO=exp(-r_i*t)*(100);

%pris på struktureret obligation
Pris=Option+NKO

```

PLUS 7 Index priset ved brug af Black-Scholes modellen

```

%%Prisning af Plus 7 Index ved brug af Black-Scholes modellen

%clear everything
clear all;
%sætter udskriftsformat til long
format('long');

%%Initialiserer parametre

```

```

%antal simulationer
sim=2000000;

%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 27/11/2006 til
%27/11/2007)
month1=12;
%antal steps hvor delta_t=7/365 (perioden 27/11/2007 til 04/12/2007)
month2=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 04/12/2007 til
%04/11/2008)
month3=11;
%antal steps hvor delta_t=28/365 (perioden 04/11/2008 til 02/12/2008)
month4=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 02/12/2008 til
%02/12/2012)
month5=48;
%antal steps hvor delta_t=2/365 (perioden 02/12/2012 til 04/12/2012)
month6=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 04/12/2012 til
%04/11/2013)
month7=11;
%antal steps hvor delta_t=29/365 (perioden 04/11/2013 til 03/12/2013)
month8=1;

%total antal perioder
total_month=month1+month2+month3+month4+month5+month6+month7+month8;

%perioder hvor observationer fastlåses
ObsDays=[13, 25, 37, 49, 61, 74, 86];

%løbetid i år ved actual/365 konventionen
t=2558/365;
%deltagelsesgrad
del_grad=2.183;

%angiver om der benyttes antititisk simulering
Antithetic=1;

%inputparametre til Black-Scholes modellen
%rækkefølgen for elementerne i alle vektorer er OMXC20, DAX, SX5E, CNY/USD,
%CNY/EUR.
%udenlandske årlige risikofrie renter
r_u=[0.041674; 0.040103; 0.040103; 0.049740; 0.040103]';
%indenlandsk årlig risikofri rente
r_i=0.041674;
%kinesisk risikofri rente
r_kina=0.024786;
%årlig dividendeudbetaling på aktieindeks og udenlands rente på valutakryds
delta=[0.019718142; 0; 0.038827011;r_kina; r_kina]';
%årlig volatilitet på aktiver
vol=[0.175835; 0.152123; 0.167641; 0.003693; 0.094019]';

%korrelationer mellem aktiver
rho=[ 1, 0.643123309, 0.66462769, 0.035573918, 0.10766109;...
      0.643123309, 1, 0.978366718, 0.097701061, 0.142139535;...
      0.66462769, 0.978366718, 1, 0.082838611, 0.128745532;...

```

```

0.035573918, 0.097701061, 0.082838611, 1, 0.145957067;...
0.10766109, 0.142139535, 0.128745532, 0.145957067, 1; 1];

%quanto relaterede parametre
%quanto korrelationer mellem aktieindeks og valutakurser
gamma=[0; 0.094891074; 0.101522737; 0.108313208; 0.061761624]';
%volatilitet på valutakryds
alpha=[0; 0.00475; 0.00475; 0.08408; 0.00475]';

%fordobler variablen sim hvis der er valgt antitetisk simulering
if Antithetic==1
    sim=sim*2;
end

%%Initialiserer matricer

S=zeros(1,5);
cho_matrix=zeros(5,5);
S_obs=zeros(7,5);
S_obs_tot=zeros(7,4);
max_obs=zeros(7,1);
OptionPayoff=0;

%%Påbegynder simulering

%laver kovariansmatrix
sigma = diag(vol)*rho*diag(vol);

%laver Cholesky dekomponering så cho_matrix*cho_matrix'=sigma
cho_matrix(:,:)=chol(sigma)';

%påbegynder måling af beregningstid
tic;

%løkke som tæller antal simulationer
for n=1:sim

    %startværdi for de underliggende indeks
    S=[100, 100, 100, 100, 100];

    %initialiserer i som styrer på hvilken plads i vektoren S_obs en given
    %observation lagres
    i=1;

    %nulstiller array der tæller låste index
    count_index=zeros(4,1);

    %løkke som spejler random numbers hvis antitetisk simulation er valgt
    if Antithetic==1
        if mod(n,2)==0
            Z(:,:)= -Z(:,:);
        else
            Z=randn(5,toltal_month);
        end
    else
        Z=randn(5,toltal_month);
    end
end

```

```

end

%Laver korrelerede normalfordelte variable
korr_var=(cho_matrix*Z)';

%løkke som tæller tidssteps
for l=1:(toltal_month)

    %switch løkke som giver delta_t og sqrtdelta værdi afhængig af
    %perioden
    switch logical(true)
        case l==month1+month2
            delta_t=7/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        case l==month1+month2+month3+month4
            delta_t=28/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        case l==month1+month2+month3+month4+month5+month6
            delta_t=2/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        case l==month1+month2+month3+month4+month5+month6+month7+month8
            delta_t=29/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        otherwise
            delta_t=1/12;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
    end

    %simulerer aktikurserne for de underliggende indeks
    S(1,:) = S(1,:).*exp((r_u - delta + alpha.*vol.*gamma - 0.5*vol.^2)
        *delta_t + sqrtdelta*korr_var(l, :) );

    %noterer kurser på observationsdagene
    if l==ObsDays(1,i)
        S_obs(i,:)=S(1,:);
        for k=1:3
            S_obs_tot(:,k)=S_obs(:,k);
        end
        %beregner værdi af samlet valutaposition
        S_obs_tot(:,4)=0.8*S_obs(:,4)+0.2*S_obs(:,5);
        i=i+1;
    end
end

%fastlåser bedste aktiv i kurven
for i=1:7
    x=0;
    %Løkken kører så længe x=0
    while x==0
        %finder højeste afkast for perioden
        max_obs(i,1)=max(S_obs_tot(i,:));
        for k=1:4
            %identificerer hvilket indeks afkastet tilhører
            if max_obs(i,1)==S_obs_tot(i,k)
                %opdaterer vektor som tæller antal fastlåsnings
                count_index(k,1)= count_index(k,1)+1;
            end
        end
        x=1;
    end
end

```

```

        %tjekker om afkastet tilhører valuatpositionen
        if max_obs(i,1)==S_obs_tot(i,4)
            %tjekker om valutapositionen har været låst før
            if count_index(k,1)>1
                %hvis den har været låst før får den værdien
                %-100
                S_obs_tot(i,k)=-100;
            else
                %hvis ikke sættes x=1 således at løkken ikke
                %kører igen
                x=1;
            end
            %hvis afkastet ikke tilhører valutapositionen tjekkes
            %om indekset har været låst to gange før
            elseif count_index(k,1)>2
                %hvis det har været låst to gange før sættes
                %værdien til -100
                S_obs_tot(i,k)=-100;
            else
                %hvis ikke sættes x=1 således at løkken ikke kører
                %igen
                x=1;
            end
        end
    end
end
end

%finder samlet optionspayoff for simulationerne
OptionPayoff = OptionPayoff + max(mean(max_obs(:,1))-100,0);
end

%afslutter måling af sberegningstid
toc;

%finder den simulerede pris som gennemsnit af de simulerede optionspriser
Option=exp(-r_i*t)*del_grad*OptionPayoff/sim;

%pris på NKO
NKO=exp(-r_i*t)*(100);

%pris på struktureret obligation
Pris=Option+NKO %samlet pris

```

PLUS 7 Index priset ved brug af Heston modellen

```

%%Prisning af Plus 7 Index ved brug af Heston modellen

%clear everything
clear all;
% sætter udskriftsformat til long
format('long');

%Initialiserer parametre

```

```

%antal simulationer
sim=2000000;

%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 27/11/2006 til
%27/11/2007)
month1=12;
%antal steps hvor delta_t=7/365 (perioden 27/11/2007 til 04/12/2007)
month2=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 04/12/2007 til
%04/11/2008)
month3=11;
%antal steps hvor delta_t=28/365 (perioden 04/11/2008 til 02/12/2008)
month4=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 02/12/2008 til
%02/12/2012)
month5=48;
%antal steps hvor delta_t=2/365 (perioden 02/12/2012 til 04/12/2012)
month6=1;
%antal steps hvor delta_t=1/12 (måneder i perioden 04/12/2012 til
%04/11/2013)
month7=11;
%antal steps hvor delta_t=29/365 (perioden 04/11/2013 til 03/12/2013)
month8=1;

%total antal perioder
total_month=month1+month2+month3+month4+month5+month6+month7+month8;

%perioder hvor observationer fastlåses
ObsDays=[13, 25, 37, 49, 61, 74, 86];

%løbetid i år ved actual/365 konventionen
t=2558/365;
%deltagelsesgrad
del_grad=2.183;

%angiver om der benyttes antititisk simulering
Antithetic=1;

%inputparametre til Black-Scholes modellen
%rækkefølgen for elementerne i alle vektorer er OMXC20, DAX, SX5E, CNY/USD,
%CNY/EUR.
%udenlandske årlige risikofrie renter
r_u=[0.041674; 0.040103; 0.040103; 0.049740; 0.040103]';
%indenlandsk årlig risikofri rente
r_i=0.041674;
%kinesisk risikofri rente
r_kina=0.024786;
%årlig dividendeudbetaling på aktieindeks og udenlands rente på valutakryds
delta=[0.019718142; 0; 0.038827011;r_kina; r_kina]';
%årlig volatilitet på aktiver

%korrelationer mellem aktiver
rho=[ 1, 0.643123309, 0.66462769, 0.035573918, 0.10766109;...
      0.643123309, 1, 0.978366718, 0.097701061, 0.142139535;...
      0.66462769, 0.978366718, 1, 0.082838611, 0.128745532;...

```

```

0.035573918, 0.097701061, 0.082838611, 1, 0.145957067;...
0.10766109, 0.142139535, 0.128745532, 0.145957067, 1; 1];

%quanto relaterede parametre
%quanto korrelationer mellem aktieindeks og valutakurser
gamma=[0; 0.094891074; 0.101522737; 0.108313208; 0.061761624]';
%volatilitet på valutakryds
alpha=[0; 0.00475; 0.00475; 0.08408; 0.00475]';

%inputparametre til Heston modellen
%mean reversion niveau for variansen
theta=[0.25084889504563;0.10014383068239;0.20612537782019;0;0]'.^2;
%mean reversion hastighed for variansen
kappa=[1.00000431540890;1.24782141923327;2.14725014478828;0;0]';
%volatilitet på variansen
vol_vol=[0.50422625357425;0.10401480958937;0.61194067760298;0;0]';
%korrelation mellem aktier og varians
rho_var=[-0.63309649634511;-0.99995823280933;-0.68831410347056;0;0]';
%startniveau for variansen
var=[0.13807551108687; 0.18147861516282;0.16170825734762;0.03693; 0.094019]'.^2;

%fordobler variablen sim hvis der er valgt antitetisk simulering
if Antithetic==1
    sim=sim*2;
end

%%Initialiserer matricer

S=zeros(1,5);
cho_matrix=zeros(5,5);
S_obs=zeros(7,5);
S_obs_tot=zeros(7,4);
max_obs=zeros(7,1);
OptionPayoff=0;

%%Påbegynder simulering

%påbegynder måling af beregningstid
tic;

%løkke som tæller antal simulationer
for n=1:sim

    %startværdi for de underliggende indeks
    S=[100, 100, 100, 100, 100];

    %initialiserer i som styrer på hvilken plads i vektoren S_obs en given
    %observation lagres
    i=1;

    %nulstiller array der tæller låste index
    count_index=zeros(4,1);

    %løkke som spejler random numbers hvis antitetisk simulation er valgt
    if Antithetic==1

```

```

if mod(n,2)==0
    Z(:, :)= -Z(:, :);
    Zvar(:, :)= -Zvar(:, :);
else
    Z=randn(5,total_month);
    Zvar=randn(5,total_month)';
end
else
    Z=randn(5,total_month);
    Zvar=randn(5,total_month)';
end

%løkke som tæller tidssteps
for l=1:(total_month)

    %laver kovariansmatrix
    sigma = diag(sqrt(abs(var)))*rho*diag(sqrt(abs(var)));

    %laver Cholesky dekomponering så cho_matrix*cho_matrix'=sigma
    cho_matrix(:, :)=chol(sigma)';

    %Laver korrelerede normalfordelte variable
    korr_var=(cho_matrix*Z)';

    %switch løkke som giver delta_t og sqrtdelta værdi afhængig af
    %perioden
    switch logical(true)
        case l==month1+month2
            delta_t=7/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        case l==month1+month2+month3+month4
            delta_t=28/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        case l==month1+month2+month3+month4+month5+month6
            delta_t=2/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        case l==month1+month2+month3+month4+month5+month6+month7+month8
            delta_t=29/365;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
        otherwise
            delta_t=1/12;
            sqrtdelta=sqrt(delta_t);
    end

    %simulerer aktikurser og varians for de underliggende indeks ved
    %brug af et Euler skema
    S(1, :) = S(1, :) + (r_u - delta + alpha.*gamma.*sqrt(max(var,0))).*
        S(1, :)*delta_t + S(1, :)*sqrtdelta.*korr_var(l, :);
    var(1, :) = var(1, :) + kappa(1, :).*(theta(1, :) - max(var(1, :),0)).*
        delta_t + vol_vol(1, :).*sqrt(max(var(1, :),0)).*sqrtdelta
        .*(rho_var(1, :).*korr_var(l, :)+sqrt(1-rho_var(1, :).^2)
        *Zvar(l, :));

    %noterer kurser på observationsdagene
    if l==ObsDays(1,i)
        S_obs(i, :)=S(1, :);
    end
end

```



```

        for k=1:3
            S_obs_tot(:,k)=S_obs(:,k);
        end
        %Beregner værdi af samlet valutaposition
        S_obs_tot(:,4)=0.8*S_obs(:,4)+0.2*S_obs(:,5);
        i=i+1;
    end
end

%fastlåser bedste aktiv i kurven
for i=1:7
    x=0;
    %Løkken kører så længe x=0
    while x==0
        %finder højeste afkast for perioden
        max_obs(i,1)=max(S_obs_tot(i,:));
        for k=1:4
            %identificerer hvilket indeks afkastet tilhører
            if max_obs(i,1)==S_obs_tot(i,k)
                %opdaterer vektor som tæller antal fastlåsninger
                count_index(k,1)= count_index(k,1)+1;
                %tjekker om afkastet tilhører valutapositionen
                if max_obs(i,1)==S_obs_tot(i,4)
                    %tjekker om valutapositionen har været låst før
                    if count_index(k,1)>1
                        %hvis den har været låst før får den værdien
                        %-100
                        S_obs_tot(i,k)=-100;
                    else
                        %hvis ikke sættes x=1 således at løkken ikke
                        %kører igen
                        x=1;
                    end
                    %hvis afkastet ikke tilhører valutapositionen tjekkes
                    %om indekset har været låst to gange før
                    elseif count_index(k,1)>2
                        %hvis det har været låst to gange før sættes
                        %værdien til -100
                        S_obs_tot(i,k)=-100;
                    else
                        %hvis ikke sættes x=1 således at løkken ikke kører
                        %igen
                        x=1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

%finder samlet optionspayoff for simulationerne
OptionPayoff = OptionPayoff + max(mean(max_obs(:,1))-100,0);
end

%afslutter måling af sberegningstid
toc;

```

```

%finder den simulerede pris som gennemsnit af de simulerede optionspriser
Option=exp(-r_i*t)*del_grad*OptionPayoff/sim;

%pris på NKO
NKO=exp(-r_i*t)*(100);

%pris på struktureret obligation
Pris=Option+NKO %samlet pris

```