

Copenhagen Business School
Institut for Finansiering
Kandidatafhandling
Cand.merc.(mat.)



**Copenhagen
Business School**
HANDELSHØJSKOLEN

Empirisk Analyse af 2 Udvidelser til Black Scholes Modellen

Skrevet af:

Christian Philip Kjeldgaard

og

Aage Møller Holst

Afleveringsdato: 27-08-2009

Vejleder: Martin Richter

Censor:

Abstract

The famous Black Scholes model assumes that the underlying asset follows a geometric Brownian motion with constant drift and volatility. This assumption implies that returns are lognormally distributed and that the volatility is constant, although it is very easy to show that this is not the case for empirical return series. In this thesis we examine the effect of changing the Black Scholes assumption in such a way that we address the two implications. First, we implement a Normal Inverse Gaussian (NIG) option pricing model that addresses the implication of the marginal distribution of the logreturns. Second, we implement S. Heston's stochastic volatility model that addresses the implication of constant volatility, thereby also changing the marginal distribution of the logreturns. To ensure that we use liquid options in our calibration, we examine Volume and Open Interest and find a suitable slice of strikes. We calibrate the parameters of our three models daily to liquid S&P 500 plain vanilla options under a risk neutral probability measure Q . We use several 'goodness of fit' criteria to ensure that our comparison of the three models does not depend on a single criterion. We see that the Heston model fits observed option prices reasonably well but that the NIG model displays systematical errors, which suggest that it is not a very good model. In order to decide whether one model outperforms the other models, we use the calibrated parameters to perform three different types of delta hedges. The main result of the paper is that the Heston model outperforms the two other models, especially if we aggregate the P&L of the individual options into a portfolio. Although the Heston model is superior to the Black Scholes model, it should be noted that the Black Scholes model is much easier to implement and that the Black Scholes model performs quite well and outperforms the NIG model. The NIG model turns out to be the worst model on all accounts.

Keywords: Option pricing, Black Scholes, Normal Inverse Gaussian (NIG), Heston stochastic volatility model, delta hedge, minimum variance delta, risk neutral probability measure, martingale pricing.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning	1
2.1 Afgrænsning	2
2.2 Opbygning	3
2.3 Notation	4
2 Grundlæggende om optioner	5
2.1 Udviklingen i det underliggende aktiv, S	6
3 Marginale fordelinger og stokastiske processer for Black Scholes og NIG modellen	7
3.1 Normalfordelingen	7
3.1.1 Den brownske bevægelse	8
3.2 Den normal invers gaussiske (NIG) fordeling	11
3.2.1 NIG processen	15
3.3 Den momentgenererende funktion	18
3.3.1 Normalfordelingens momenter	19
3.3.2 NIG fordelings momenter	20
3.4 Fit til empiriske logafkast	21
3.5 Diskussion	27
4 Marginale fordeling og stokastiske processer for Hestons stokastiske volatilitetsmodel	29
4.1 Hestons stokastiske volatilitet model	29
4.2 Simulering af den marginale fordeling for X_T	30
4.3 Fit til empiriske logafkast i Heston Modellen	33
4.4 Diskussion	38
5 Prisfastsættelse under det risikoneutrale sandsynlighedsmål	39
5.1 Udledning af Black Scholes og NIG modellen med Esscher transformation	42
5.1.1 Black Scholes under Q-mål	45
5.1.2 NIG modellen under Q-mål	46
5.2 Udledning af Heston modellen under Q-mål	47
6 Den generelle optionsmodel	50

6.1 Risikoneutrale out-of-the-money sandsynligheder for de 3 optionsmodeller	52
6.2 Partielle afledte	54
7 Data	57
7.1 Dataperiode og priser	57
7.2 Futures pris, F_t til tid t med udløb T	58
7.3 Valg af optioner	60
7.3.1 Open Interest samt Volume	60
7.3.2 Valg af løbetider og udløbstidspunkter	61
7.3.3 Valg af Strikes	62
7.3.4 Filtrering af optioner - Strike monotonicity	65
7.4 Risikofri kontinuert diskonteringsrente	66
7.5 Data til hedging	68
7.6 Kontrol af data med udgangspunkt i Put-Call pariteten	69
8 Kalibrering af modellen	73
8.1 Valg af algoritme	74
8.2 Valg af Kriteriefunktion	75
8.3 Modelspecifikke initialgæt	78
8.3.1 Initialgæt for Black Scholes	78
8.3.2 Initialgæt for NIG modellen	79
8.3.3 Initialgæt for Heston modellen	80
8.4 Kalibreringsresultater	82
8.4.1 Black Scholes modellens kalibreringsresultater	83
8.4.2 NIG modellens kalibreringsresultater	87
8.4.3 Heston modellens kalibreringsresultater	93
8.5 Diskussion	99
9 Hedging	101
9.1 Delta i NIG og Black Scholes modellen	102
9.2 Delta i Heston modellen	102
9.3 Optionshedging i praksis	107
9.4 Den replikerende portefølje	108

10 P&L for de 3 modeller	111
10.1 Simulationsstudie af P&L for de 3 modeller	111
10.2 Empirisk undersøgelse af daglige P&L	115
10.3 Empirisk undersøgelse af P&L når optionerne holdes til udløb.....	120
10.4 Diskussion	123
11 Konklusion	124
12 Perspektivering.....	127
A Appendiks: Den momentgenererende funktion	128
A.1 Den momentgenererende funktion for normalfordelingen	128
A.2 NIG fordelingen.....	129
B Appendiks: Udledning af udtryk til Esscher transformation	130
C Appendiks: Volume og Open Interest	131
D Appendiks: Nødvendige resultater for Heston modellen	132
D.1 Diffusionsled	132
D.2 Udledning af df for Heston modellen	134
D.3 Udledning af PDE'en for Heston modellen.....	135
E Appendiks: Grænse for α i NIG modellen under Q.....	137
F Appendiks: Forholdet mellem $\Delta_{S_t}, \Delta_{\hat{S}_t}$ og Δ_{F_t} samt $\delta_{S_t}^{MV}, \delta_{\hat{S}_t}^{MV}$ og $\delta_{F_t}^{MV}$	139
G Appendiks: Monte Carlo simulering.....	140
G.1 Black Scholes modellen.....	140
G.2 NIG modellen	141
G.3 Heston modellen.....	142
H Appendiks: Problemer med bid-ask spænd	143
Litteraturliste	144

1 Indledning

Den berømte Black Scholes model (Black & Scholes, 1973) og (Merton, 1973) fra 1973 til prisfastsættelse af optioner er en af hjørnestenene i kvantitativ finansiering, både indenfor den akademiske verden men også på trading floors verden over. Modellen bygger på en række simplificerende antagelser, hvoraf nogle af dem strider mod empiriske observationer. Vores fokus er på Black Scholes modellens antagelse om, at aktiekurser S_t følger en geometrisk brownsk bevægelse:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \text{ hvor } \mu \text{ og } \sigma \text{ er konstante} \quad (2.1)$$

Denne antagelse implicerer at logaritmen til afkastet (logafkastet) på det underliggende aktiv er normalfordelt, og at der er konstant volatilitet. Den empiriske marginale fordeling af logafkastet for det underliggende aktiv er imidlertid typisk leptokurtosisk (Cont, 2001) og kan desuden være skæv. I denne kandidatopgave ønsker vi at undersøge effekten af at ændre Black Scholes modellens antagelse (2.1) ved to forskellige fremgangsmåder for bedre at ramme den empiriske marginale fordeling af logafkastene.

I den første fremgangsmåde antager vi, at logafkastet følger den normal invers gaussiske (NIG) fordeling med konstante parametre. NIG fordelingen er udviklet af Barndorff-Nielsen (Barndorff-Nielsen, 1997), og har vist sig at kunne fitte den empiriske marginale fordeling af finansielle data fortrinligt (Rydberg, 1997). Fordelen ved denne fordeling er, at den ud over at afhænge af middelværdi og varians som normalfordelingen gør, også inddrager kurtosis og skævhed. Med udgangspunkt i NIG fordelingen indfører vi en NIG optionsmodel.

I den anden fremgangsmåde udvider vi Black Scholes modellen med stokastisk volatilitet og ændrer som følge deraf også den marginale fordeling af logafkastene. Til dette formål indfører vi Hestons stokastiske volatilitets model (Heston, 1993) fra 1993. Denne model har siden sin opdagelse opnået en utrolig popularitet, da den udtrykker optionsprisen ved et semianalytisk udtryk, der er bekvemt at arbejde med, hvilket også er årsagen til at vi har valgt at benytte den.

Man kunne argumentere for, at normalfordelingen er en nogenlunde approksimation for den marginale fordeling af de observerbare logafkast under ”normale” markedsvilkår, hvor der ikke sker særligt mange voldsomme ændringer i markedspriserne. Man kunne også argumentere for, at der tilnærmelsesvis er en konstant gennemsnitlig volatilitet under normale markedsvilkår. For sådanne perioder kunne man derfor forestille sig, at der ikke er meget at hente ved at lave mere sofistikerede modeller. Vi har derfor valgt at benytte et datasæt, der indeholder finanskrisen anno 2008/2009.

Vores sammenligning af de 3 modeller henholdsvis Black Scholes modellen, NIG modellen og Heston modellen foretages i 3 trin. Først sammenligner vi de marginale fordelinger for de 3 modeller, for at undersøge hvor godt de rammer empiriske logafkast. Dernæst kalibrerer vi modellerne og ser hvor godt de fitter faktiske markedssdata. Til slut undersøger vi, hvor gode de 3 modeller er til at delta hedge med, hvilket endegyldigt afgør, hvilken model der er mest robust. Det er her vigtigt at holde sig for øje, at uanset hvilken af de 3 modeller man vælger, vil den med al sandsynlighed aldrig kunne fange hele den virkelige verdens kompleksitet. En sammenligning af de 3 optionsmodeller ud fra rigtige markedssdata er derfor en øvelse i sig selv og en grundig databehandling er altså vigtig.

Udfordringen i denne kandidatopgave er altså, at ændre Black Scholes modellen i to forskellige retninger og stadig holde en ensartet gennemgang, samtidigt med at alle konklusioner træffes på baggrund af data fra den virkelige verden.

2.1 Afgrænsning

Som nævnt i indledningen giver et studie af virkelige markedssdata potentielt ophav til inkonsistens i forhold til de teoretiske modeller vi ønsker at undersøge. Da vi udelukkende er interesserede i at undersøge effekten af de to udvidelser til Black Scholes modellen, nøjes vi med at undersøge europæiske put og call optioner skrevet på S&P 500 indekset med løbetider på op til ca. 9 måneder. Denne afgrænsning gøres for ikke at inddrage yderligere kompleksitet i form af indviklede eksotiske produkter eller likviditetseffekter. Markedsmodellen kommer således til at bestå af S&P 500 indekset som underliggende risikofyldte aktiv, og et risikofrit aktiv (bankbog). Vi har valgt ikke at fokusere på stokastisk rente, da den primære årsag til prisændringer i finansielle produkter med kort løbetid primært skyldes ændringer i det underliggende aktiv og ikke ændringer i renten (Macbeth & Merville, 1979). Vi antager, at den risikofri rente kan approksimeres ud fra LIBOR-renten og at investorer kan låne og udlåne ubegrænset til denne rente.

Opgaven henvender sig til folk med baggrund indenfor kvantitativ finansiering, og selvom vi bestræber os på at beskrive al den teori vi bruger, må det forventes at læseren er bekendt med sandsynlighedsteori, stokastiske differential ligninger, ito's lemma mv.

2.2 Opbygning

I **Kapitel 2** introducerer vi teorien bag optioner og hvilke egenskaber netop den type option vi vil beskæftige os med opfylder og vi forklarer hvilke statistiske egenskaber aktivet antages at opfylde.

I **Kapitel 3** introduceres fordelingerne for det underliggende aktiv for Black Scholes og NIG modellen samt de tilhørende processer. De centrale momenter beregnes og vi undersøger effekten af fordelingernes parametre. Til slut fitter vi fordelingernes parametre til empiriske logafkast.

I **Kapitel 4** introduceres Heston modellen og vi undersøger effekten af modellens parametre. Vi udleder herefter en funktion for den marginale fordeling for S , som vi benytter til at fitte modellens parametre til empiriske logafkast.

I **Kapitel 5** gennemgår vi prisfastsættelse under det risikoneutrale sandsynlighedsmål, Q . For Black Scholes modellen og NIG modellen introduceres Esscher transformationen for at udlede funktionerne til prisfastsættelse af call- og putoptioner under Q -målet. Da Esscher transformationen kun gælder for Lévy processer, tager vi for Heston modellens udgangspunkt i dens partielle differential-ligning for at udlede funktionerne til prisfastsættelse af call- og putoptioner under Q -målet.

I **Kapitel 6** udleder vi en generel optionsmodel og undersøger de tre modelleres sandsynligheder for at en option ender out-of-the-money. Herefter beregner vi forskellige partielle afledte for optionsmodellerne til brug ved hedging.

I **Kapitel 7** beskriver vi vores data, samt de nødvendige transformationer og filtreringer. Vi kontrollerer desuden kvaliteten af vores data vha. put-call pariteten.

I **Kapitel 8** gennemgår vi kalibreringen af de tre modeller med hensyn til implementering og kalibreringsresultater.

I **Kapitel 9** gennemgår vi teorien bag hedging og udleder delta for alle 3 modeller. For Heston modellen viser det sig at være en smule kompliceret pga. korrelationen og vi benytter derfor en minimum varians metode til at udlede delta. Vi gennemgår til sidst hedging proceduren for en option over tid ved at indgå en position en futures og en bankbog.

I **Kapitel 10** udfører vi 3 forskellige typer af delta hedging og sammenligner resultaterne for de 3 modeller. Vi beregner P&L jf. forrige kapitels hedging procedure.

I **Kapitel 11** konkluderer vi på opgavens resultater og giver forslag til udvidelser i forlængelse af denne kandidatopgave.

2.3 Notation

I nedenstående tabel forklares den valgte notation i opgaven.

Tabel 2.1

Symbol	Inputparametre og sammenhæng	Forklaring
t		Det anskuede tidspunkt i år. Ofte sættes $t = 0$.
T		Udløbstidspunktet i år, hvor $T - t$ angiver antal år til udløb.
t_d		Beregningstidspunktet i dage. Ofte sættes $t_d = 0$.
T_d		Udløbstidspunktet i dage, hvor $T_d - t_d$ angiver antal dage til udløb
T_i^L		Udløbstidspunktet i dage, hvor T_i^L kun kan antage et antal dage svarende til $i = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots, 11$ eller 12 måneder.
$\hat{r}$	t_d, T_i^L	LIBOR-renten til tid t_d med en løbetid, T_i^L .
r	$\hat{r}, t_d, T_d$	Den annualiserede kontinuerte rente til tid t_d med en løbetid på T_d . Den findes ved passende interpolation og transformation af de 2 tidsmæssigt nærmeste LIBOR-renter.
q		Den kontinuerte dividenderate
$\hat{S}_t$		Aktiekursen på det dividendebetalende underliggende aktiv. I de empiriske afsnit repræsenterer den S&P 500 Indekset.
S_t	$S_t = e^{-q(T-t)} \hat{S}_t$	Aktiekursen på underliggende aktiv, $\hat{S}_t$ diskonteret med q .
F_t	$F_t = e^{(r-q)(T-t)} \hat{S}_t \Leftrightarrow F_t = e^{r(T-t)} S_t$	Futures pris til tid t med udløb T og med $\hat{S}_t$ som det underliggende aktiv.
K		Strikepris for option
f_C	S_t, K, t, T	Prisen for en calloption til tid t med S_t som underliggende aktiv, med udløb T og med en strike på K .
f_P	S_t, K, t, T	Prisen for en putoption til tid t med S_t som underliggende aktiv, med udløb T og med en strike på K .
$\hat{\Omega}^P, \hat{\Omega}^Q, \Omega^Q$		Parametervektor som angiver parametre for den tilhørende fordelingsfunktion. Er angivet ved P eller Q afhængigt af sandsynlighedsmål. Hatten, ”^” angiver, om parametervektoren skal estimeres.
$\Delta_{\hat{S}}, \delta_{\hat{S}}^{MV}$ Δ_S, δ_S^{MV} og Δ_F, δ_F^{MV}	Se appendiks F	Δ_{ξ} betegner den partielle afledte ifht. ξ for Black Scholes og NIG modellen, mens δ_{ξ}^{MV} betegner den vægt, der minimerer variansen for optionen ifht. ξ for Heston modellen.
p, P og P_1, P_2		p betegner en tæthedsfunktion, mens P betegner en fordelingsfunktion. P_1 og P_2 skal ikke forveksles med P , da de er de betingede sandsynligheder defineret i Heston modellen.

2 Grundlæggende om optioner

Der findes mange forskellige slags optioner. I denne opgave tager vi udgangspunkt i den europæiske option, der er en af de mest simple og mest handlede optioner. Når vi i resten af opgaven refererer til en option er det underforstået, at vi referer til en *europæisk* option. En option er en kontrakt, der giver ejeren ret, men ikke pligt, til at købe eller sælge et bestemt aktiv til et aftalt tidspunkt til en forudbestemt pris. En option kaldes også for et derivat eller et afledt aktiv, da værdien af optionen afhænger af et andet aktiv, også kaldt det underliggende aktiv. En option, der giver ret til at købe det underliggende aktiv kaldes en calloption, mens en option, der giver ret til at sælge det underliggende aktiv kaldes en putoption. Den forudbestemte pris som det underliggende aktiv kan handles til, kaldes strike prisen eller blot striken.

Kursen på det underliggende aktiv til tid t er givet ved $\hat{S}_t$, og der må derfor til udløbstidspunktet, T gælde, at værdien af en calloption er $\max(\hat{S}_T - K, 0)$, og værdien af en putoption er $\max(K - \hat{S}_T, 0)$. Vi er interesserede i at prissætte en option til et tidspunkt $t < T$, og vi har derfor brug for en statistisk model for udviklingen af det underliggende aktiv $\hat{S}$.

Da vi i ønsker at se bort fra dividendebetalinger, korrigerer vi kursen på det underliggende aktiv ved at erstatte $\hat{S}_t$ med $S_t = \hat{S}_t e^{-q(T-t)}$. Der gælder så ifølge Hull, (Hull, 2005, s. 313), at fordelingen af det underliggende aktiv til tid T er ens i de følgende to tilfælde:

1. Det underliggende aktiv starter ved kurs $\hat{S}_t$ og udbetaler dividende med raten q .
2. Det underliggende aktiv starter ved kurs $S_t = \hat{S}_t e^{-q(T-t)}$ og udbetaler ingen dividender.

Man kan vise en række egenskaber og grænser for optionspriserne, der gælder uanset de bagvedliggende statistiske antagelser. En af de vigtigste egenskaber er put-call pariteten. Hvis man går lang i en calloption og kort i en putoption vil man til udløb, T uanset værdien S have følgende payoff: $\max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K$. Forudsat, at der ikke er arbitragemuligheder må der til tid 0 så gælde følgende sammenhæng, som kaldes put-call pariteten (Hull, 2005, s. 212):

$$f_C - f_P = S_0 - e^{-rT} K \quad (2.1)$$

Det kan desuden vises, at der gælder følgende øvre og nedre grænser for optionspriser (Hull, 2005, s. 209-212):

$$\text{Calloption: } \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq f_C \leq S_0, \text{ Putoption: } \max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \leq f_P \leq Ke^{-rT} \quad (2.2)$$

2.1 Udviklingen i det underliggende aktiv, S

Aktiekurser antages ofte at følge en Markov proces (Hull, 2005, s. 263), der er en speciel type af stokastiske processer, hvor den fremtidige værdi kun afhænger af den nuværende værdi. Aktiens historiske udvikling er således irrelevant. Denne antagelse er konsistent med Fama's (Fama, 1970, s. 383) hypotese om svag markedsefficiens (Hull, 2005, s. 264). Hvis svag markedsefficiens ikke var opfyldt, ville man kunne tjene overnormale afkast ved teknisk analyse af historiske afkast. Det er konkurrencen i markedet, blandt et stort antal investorer, der sørger for at den svage markedsefficiens holder. I de efterfølgende to kapitler vil vi beskrive 3 forskellige statistiske modeller for udviklingen af det underliggende aktiv.

3 Marginale fordelinger og stokastiske processer for Black Scholes og NIG modellen

Den berømte Black Scholes model fra 1973 antager, at logafkastet, $X_t = \ln(S_t/S_0)$ for det underliggende aktiv, S er normalfordelt. I dette afsnit introducerer vi en ny model, hvor logafkastet for det underliggende aktiv er normal invers gaussisk (NIG) fordelt. Motivationen for at ændre fordelingsantagelse er, at T. Rydberg (1997) har vist, at logafkastet for danske og tyske finansielle virksomheder kunne fittes langt bedre med en NIG fordeling end med normalfordelingen samtidigt med, at NIG fordelingen besidder en pæn foldningsegenskab ligesom normalfordelingen.

I dette kapitel forklarer vi normalfordelingens og NIG fordelings egenskaber og de tilhørende stokastiske processer. Normalfordelingen gennemgås, selvom den er velkendt, da den er vigtig for at forstå NIG fordelingen. Til slut fitter vi modellernes parametre til empiriske afkast.

3.1 Normalfordelingen

Normalfordelingen, også kaldt den gaussiske fordeling er defineret ved 2 parametre, henholdsvis positionsparameter μ og skalaparameter σ .

En stokastisk variabel X er normalfordelt med parametrene μ og σ , hvis dens tæthedsfunktion er af formen (Tjur, Sandsynlighedsregning, 5. udgave, 2002, s. 94):

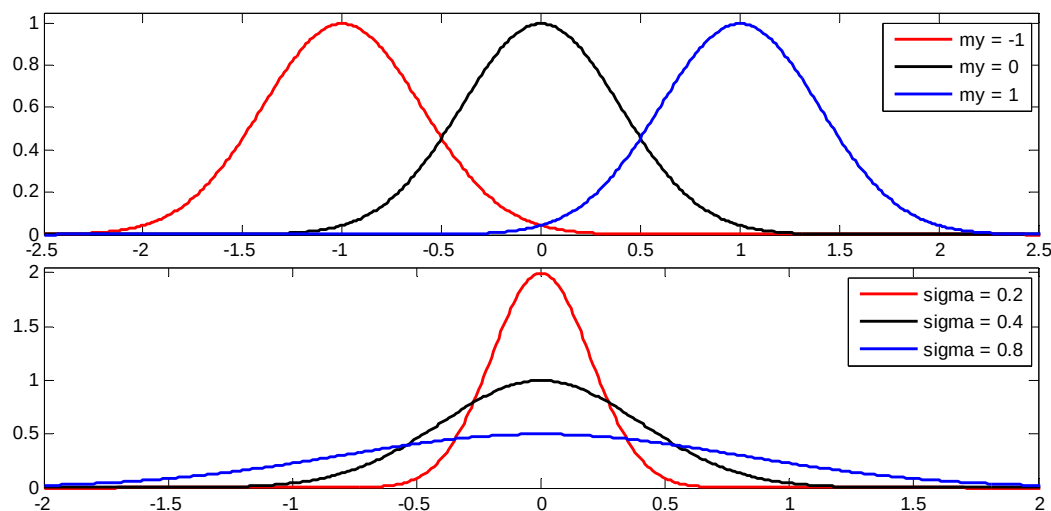
$$p_N(X; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.1)$$

Den tilhørende fordelingsfunktion er så givet ved:

$$P_N(X; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^X \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (3.2)$$

I Figur 3.1 plotter vi tæthedsfunktionen for normalfordelingen og ser hvordan parametrene μ og σ påvirker den:

Figur 3.1



Figur 3.1 viser tæthedsfunktionen for normalfordelingen for forskellige parameterværdier. Som udgangspunkt er $\mu = 0$ og $\sigma = 0,4$, men for hver graf lader vi én af de 2 parametre variere.¹

Det ses tydeligt, at μ er en positionsparameter, der bestemmer tæthedsfunktionens placering på x-aksen, mens σ er en skalaparameter, hvor en lav σ giver en stejl og smal fordeling, mens en høj σ giver en flad og bred fordeling.

3.1.1 Den brownske bevægelse

Den brownske bevægelse er en kontinuert stokastisk proces, der er en af de mest benyttede processer inden for finansiering. Den brownske bevægelse tager udgangspunkt i normalfordelingen, og dette giver den en række simple og gode egenskaber. For den standardiserede brownske bevægelse gælder der (Lawler, 2006, s. 174):

Definition 3.1

1. Initialværdi: $W_0 = 0$
2. Uafhængighed: For enhver $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$ gælder der, at
3. $W_{t_1} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{s_2}, \dots, W_{t_n} - W_{s_n}$ er uafhængige.
4. Stationaritet: For $0 \leq s < t$ gælder der, at $W_{t+s} - W_t \sim N(0, s)$, således at fordelingen af $W_{t+s} - W_t$ ikke afhænger af t .
5. Kontinuitet: W_t er "almost surely" kontinuert.

¹ Anvendt kode kan ses i filen `Distributions.m`

Punkt 3 fra Definition 3.1 følger af normalfordelingens foldningsegenskab, idet summen af 2 uafhængige normalfordelte variable er normalfordelte med følgende parametre

(Tjur, Sandsynlighedsregning, 5. udgave, 2002, s. 119):

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2) \quad (3.3)$$

Vi transformerer nu den standardiserede brownske bevægelse dW_t , således at den får drift μ og volatilitet σ :

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (3.4)$$

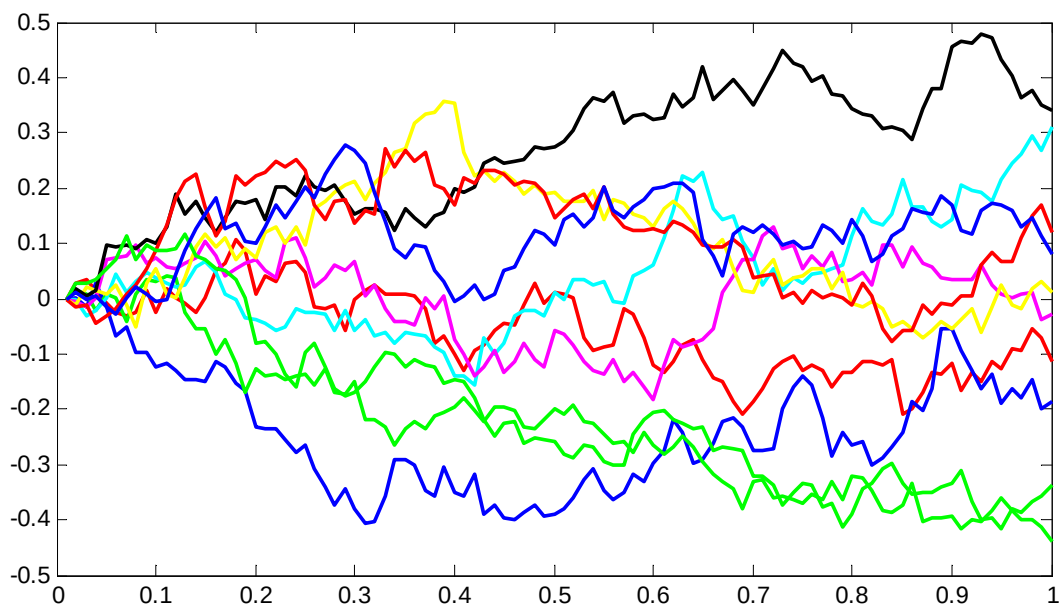
Den transformerede brownske bevægelse med $X_0 = 0$ har så følgende fordeling til tidspunkt T :

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \Rightarrow X_T = \mu T + \sigma \sqrt{T} W_1 \sim N(\mu T, \sigma^2 T), \text{ hvor } W_1 \sim N(0,1) \quad (3.5)$$

Det betyder altså, at hvis X følger en brownsk bevægelse med drift μ og volatilitet σ , så er X_T til tidspunkt T normalfordelt med momenterne μT og $\sigma^2 T$.

Vi har simuleret 10 stier efter et Euler skema med $\mu = 0,05$ og $\sigma = 0,3$ (Glasserman, 2003, s. 7-8), hvilket giver følgende plot:

Figur 3.2

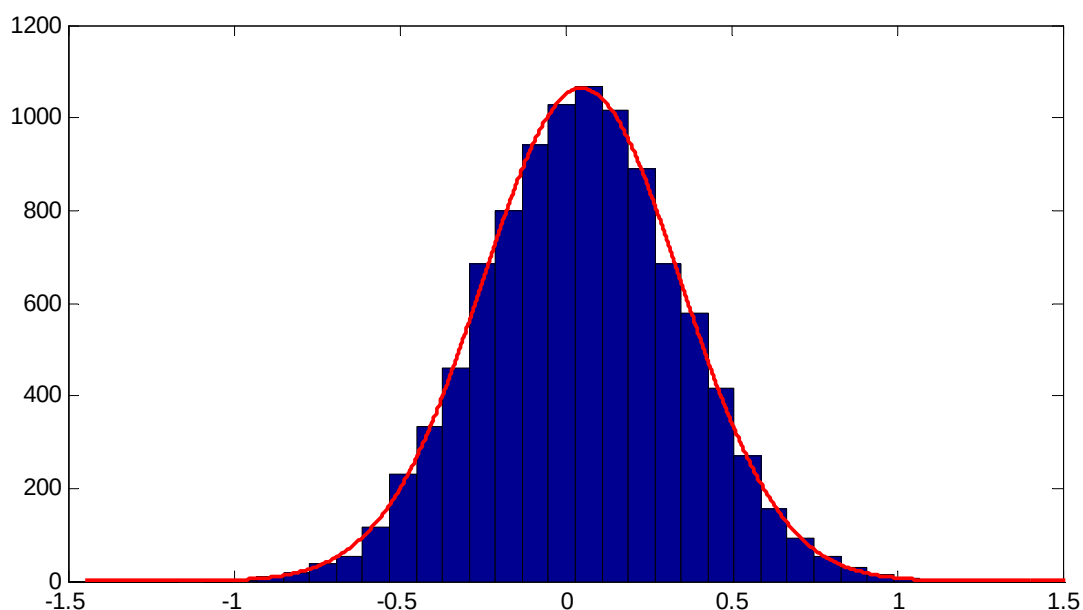


Figur 3.2 viser 10 simulerede brownske bevægelser med $\mu = 0,05$, $\sigma = 0,3$ og $T = 1$.²

² Anvendt kode kan ses i filen `motions.m`

Ifølge teorien bør fordelingen af alle X_T til $T=1$ følge normalfordelingen $N(0,05, 0,3^2)$. Vi simulerer nu 10.000 stier og plotter et histogram for X_T sammen med tæthedsfunktionen for normalfordelingen. Vi har foretaget en skalering af tæthedsfunktionen, således den har samme areal som histogrammet:

Figur 3.3



Figur 3.3 viser 10.000 simulerede brownske bevægelser med $\mu = 0,05$ og $\sigma = 0,3$ afbilledet i et histogram sammen med normalfordelingen, $N(0,05, 0,09)$.²

Det ses, at normalfordeling fitter fordelingen af de genererede X_T 'er til $T = 1$ tilnærmelsesvist perfekt.

Det bemærkes, at aktiekurserne i Black Scholes modellen antages at følge en geometrisk brownsk bevægelse givet ved:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.6)$$

Givet (3.6) kan det vha. ito's lemma (Hull, 2005, s. 273) vises, at logafkastet, $X_t = \ln(S_t/S_0)$ så er givet ved følgende proces svarende til (3.4) hvor driften sættes til $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$:

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \quad (3.7)$$

3.2 Den normal invers gaussiske (NIG) fordeling

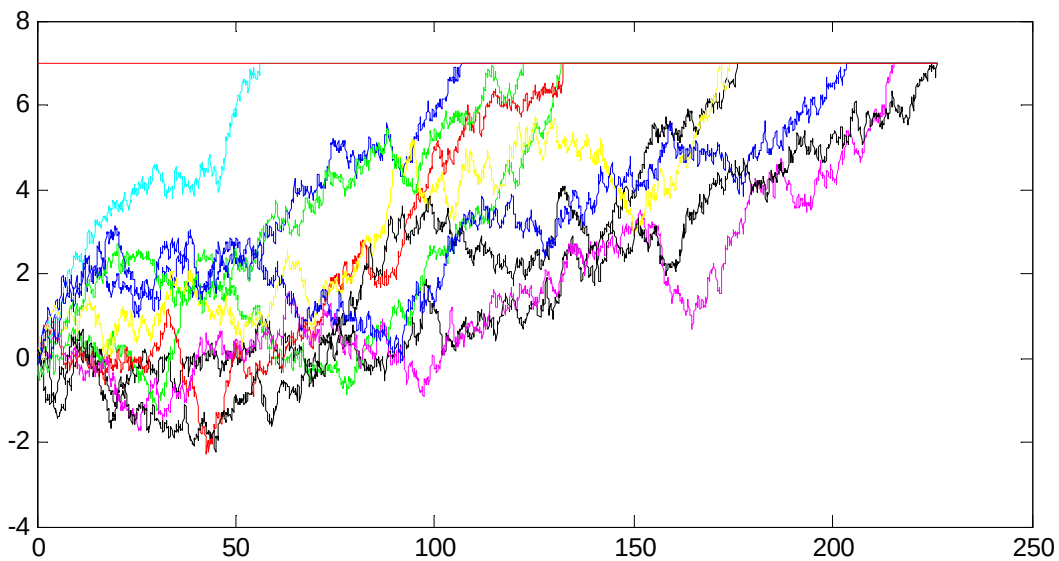
Den normal invers gaussiske (NIG) fordeling er et mix af normalfordelingen og den invers gaussiske fordeling. Vi introducerer derfor den invers gaussiske fordeling, for derefter at udlede NIG fordelingen. En stokastisk variabel X følger en invers gaussisk fordeling med parametrene $\kappa > 0$ og $\lambda > 0$, hvis dens tætheds- og fordelingsfunktion er af formen (Kalemanova & Wernery, 2006, s. 3):

$$p_{IG}(X; \kappa, \lambda) = \begin{cases} \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi\beta}} X^{-3/2} \exp\left(-\frac{(\kappa - \lambda X)^2}{2\lambda X}\right), & \text{hvis } X > 0 \\ 0, & \text{hvis } X \leq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$P_{IG}(X; \kappa, \lambda) = \begin{cases} \int_0^X \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi\beta}} z^{-3/2} \exp\left(-\frac{(\kappa - \lambda z)^2}{2\lambda z}\right) dz, & \text{hvis } X > 0 \\ 0, & \text{hvis } X \leq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Fra det forrige afsnit ved vi, at den gaussiske fordeling beskriver fordelingen af værdien for en brownsk bevægelse til et givent tidspunkt. Heraf følger det, at den inverse gaussiske fordeling beskriver tiden indtil en brownsk bevægelse rammer en given barriere, dvs. en stoppetidsfordeling, hvor stoppetiden så er en stokastisk variabel benævnt τ . I Figur 3.4 simulerer vi 10 stier for den brownske bevægelse med parametrene $\mu = 0,05$ og $\sigma = 0,3$, hvor stoppetiden for hver sti er defineret som $\tau_K = \inf\{t > 0 | X_t \geq K\}$, og barrieren er sat til $K = 7$.

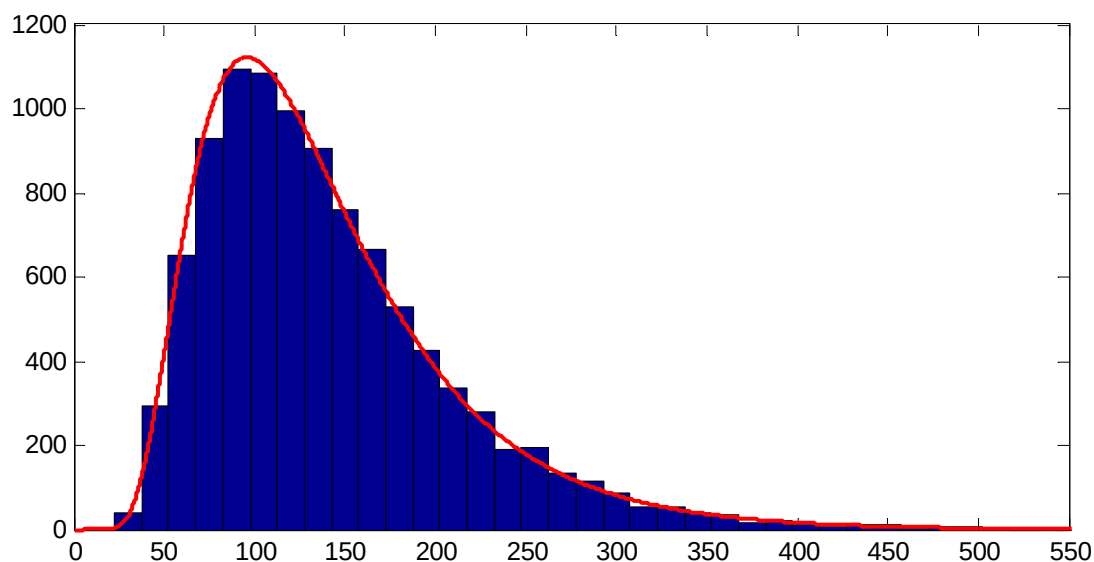
Figur 3.4



Figur 3.4 viser 10 simulerede stier for den brownske bevægelse med $\mu = 0,05$, $\sigma = 0,3$ og stoppetid $\tau_7 = \inf\{t > 0 | X_t \geq 7\}$.²

Ifølge teorien følger stoppetiden τ en invers gaussisk fordeling med parametre $\kappa = K\mu/\sigma^2$ og $\lambda = \mu^2/\sigma^2$ (Glasserman, 2003, s. 144).³ I Figur 3.5 ses et histogram med 10.000 simulerede stoppetider og tæthedsfunktionen for den invers gaussiske fordeling, $IG(K\mu/\sigma^2, \mu^2/\sigma^2)$, hvor parametrene er givet ved $\mu = 0,05$; $\sigma = 0,3$ og $K = 7$:

Figur 3.5



Figur 3.5 viser 10.000 simulerede stoppetider med $\mu = 0,05$; $\sigma = 0,3$ og $K = 7$ sammen med den invers gaussiske fordeling, $IG(3,89; 1,36)$.²

Vi ser, at den invers gaussiske fordelingen fitter den genererede stoppetidsfordeling meget godt. Vi tager herefter udgangspunkt i den invers gaussiske fordeling til at udlede NIG fordelingen.

En stokastisk variabel X følger en normal invers gaussisk fordeling (NIG) med parametrene α, β, μ og δ , hvis (Kalemanova & Wernery, 2006, s. 3):

$$\begin{aligned} (X|Y=y) &\sim N(\mu + \beta y, y) \\ Y &\sim IG(\delta\gamma, \gamma^2), \text{ hvor } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Parametrene skal opfylde følgende betingelser:

$$0 \leq |\beta| < \alpha \text{ og } \delta > 0 \quad (3.11)$$

³ I (Glasserman, 2003, s. 144) er den inverse gaussiske fordeling dog præsenteret på en anden måde. Det kræver derfor en transformation af parametrene for at vise, hvad parametrene i vores model skal være for at approksimere stoppetidsfordelingen.

Tæthedsfunktionen for NIG fordelingen kan så findes ved (Kalemanova & Wernery, 2006, s. 4):⁴

$$p_{NIG}(X; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \int_0^\infty f_N(X; \mu + \beta y, y) \cdot f_{IG}(y; \delta \gamma, \gamma^2) dy \Leftrightarrow$$

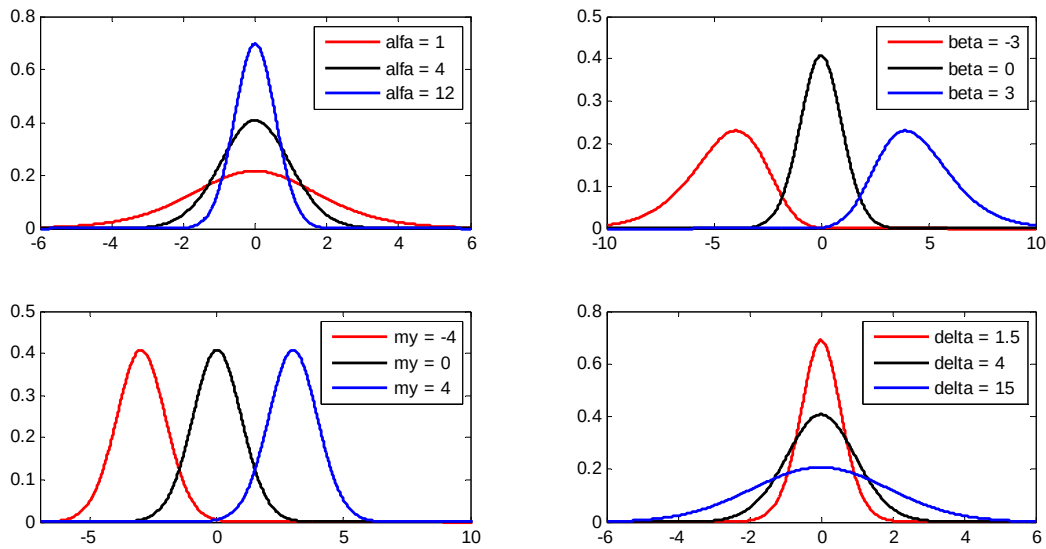
$$p_{NIG}(X; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta \alpha \exp(\delta \gamma + \beta(X - \mu))}{\pi \sqrt{\delta^2 + (X - \mu)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (X - \mu)^2}\right) \quad (3.12)$$

K_1 er den modificerede Bessel funktion af orden 3 med indeks 1 og $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Den tilhørende fordelingsfunktion er så givet ved:

$$P_{NIG}(X; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \int_{-\infty}^X \frac{\delta \alpha \exp(\delta \gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) dx \quad (3.13)$$

I det følgende analyserer vi NIG fordelings parametre og undersøger hvorledes de hver især påvirker tæthedsfunktionens udseende. Vi plottes tæthedsfunktionen for forskellige parametre:

Figur 3.6

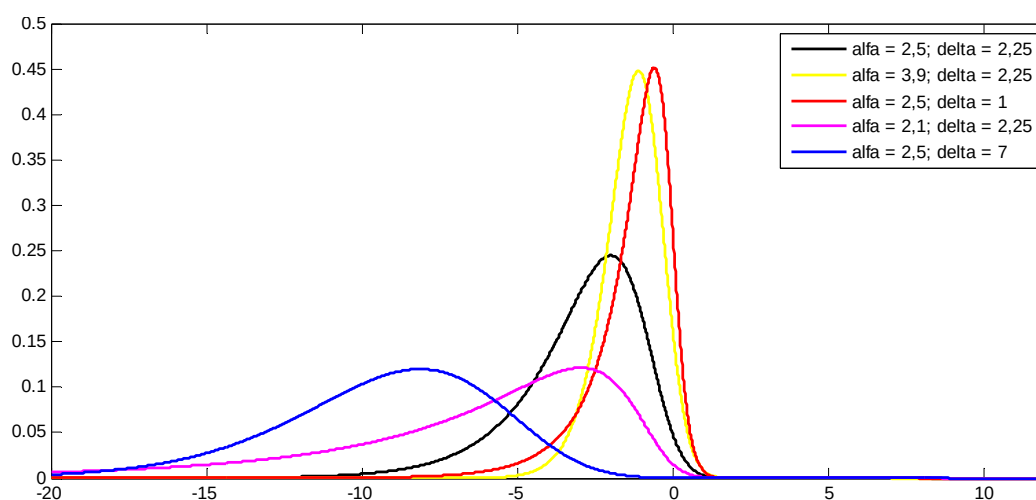


Figur 3.6 viser tæthedsfunktionen for NIG for forskellige parameterværdier. Som udgangspunkt er $\alpha = 4, \beta = 0, \mu = 0$ og $\delta = 4$, men for hver graf lader vi én af de 4 parametre variere.¹

⁴ NIG-fordelingen blev oprindeligt udledt af Barndorff-Nielsen, og kan ses gengivet i (Barndorff-Nielsen, 1997, s. 2). Da vi tager udgangspunkt i en lidt anden notation, har vi valgt at referere til artiklen (Kalemanova & Wernery, 2006).

Parametrene har følgende fortolkning, hvilket er i overensstemmelse med vores grafer: α er en stejlhedsparameter, hvor der gælder, at en høj α giver en stejl fordeling. β er en asymmetriparameter der bestemmer skævheden af fordelingen, således at $\beta = 0$ giver en symmetrisk fordeling, mens $\beta \neq 0$ giver en asymmetrisk fordeling. μ er en positionsparameter, der forskyder fordelingen langs x-aksen. Til sidst er der skalaparameteren, δ , der umiddelbart synes at have samme effekt som α , dog modsat rettet, således at en lav δ , giver en stejl fordeling og omvendt. Det ses f.eks., at plottene $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1; 0; 0; 4)$ og $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (4; 0; 0; 15)$ samt $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (12; 0; 0; 4)$ og $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (4; 0; 0; 1,5)$ i høj grad ligner hinanden. Dette gælder dog kun i situationen hvor $\beta = 0$ og generelt gælder der ikke at α og δ påvirker NIG fordelingen på tilnærmelsesvis samme måde da NIG fordelingen ikke er overparametriseret. I Figur 3.7 ses effekten af α og δ på NIG fordelingen når $\beta \neq 0$.

Figur 3.7



Figur 3.7 viser tæthedsfunktionen for NIG modellen for forskellige parameterkombinationer af α og δ . For alle grafer er $\beta = -2$ og $\mu = 0$. Den sorte graf er udgangspunkt og har $\alpha = 2,5$ og $\delta = 2,25$. For de andre grafer har vi enten ændret α eller δ i forhold til udgangspunktet.¹

I ovenstående figur har vi sat $\beta = -2$ og $\mu = 0$ og undersøgt hvordan ændringer i α og δ påvirker tæthedsfunktionen. Når $\beta \neq 0$ ses det tydeligt, at α og δ ikke længere kan fortolkes på samme måde som i Figur 3.6. Den sorte graf er udgangspunkt og har $\alpha = 2,5$ og $\delta = 2,25$. For de andre grafer har vi enten ændret α eller δ i forhold til udgangspunktet. Det ses, at en højere α giver en stejlere fordeling, og en lavere α giver en fladere fordeling, mens det lige er modsat for δ . Dette resultat svarer til situationen hvor vi satte $\beta = 0$. Som noget nyt ses det, at skævheden ikke længere

er uændret, når vi ændrer α og δ , idet $\beta \neq 0$. Vi får en skæv fordeling, når vi lader $\alpha \rightarrow |\beta|$, for $\alpha > |\beta|$, mens en høj α giver en mere symmetrisk fordeling. Det er det samme billede vi får, når vi lader $\delta \rightarrow 0$. For $\beta \neq 0$ viser nedenstående tabel, hvorledes momenterne ændres *numerisk*, når vi ændrer α eller δ .

Tabel 3.1

$\beta \neq 0$	$\alpha \uparrow$	$\delta \uparrow$
κ_1	↓	↑
κ_2	↓	↑
κ_3	↓	↓
κ_4	↓	↓

I Tabel 3.1 anskuer vi de numeriske ændringer i momenterne. Det viser sig, at de numeriske ændringer er ens for $\beta < 0$ og $\beta > 0$, hvilket nødvendigvis må gælde, idet tæthedsfunktionen for eksempelvis $\beta = 2$ er den samme som den omkring y-asken spejlvendte tæthedsfunktion for $\beta = -2$. Det ses, at κ_1 og κ_2 ændres numerisk i hver sin retning, mens κ_3 og κ_4 ændres numerisk i samme retning, når α eller δ ændres, hvilket er i overensstemmelse med det vi så i Figur 3.7.

Selvom parametrene for NIG fordelingen ikke har den samme effekt i alle situationer ses det, at man i nogle tilfælde kan lave ensartede tæthedsfunktioner ud fra forskellige parameterkombinationer. Dette kan vise sig at blive et problem senere, når vi skal fitte en fordeling til afkast, idet det kan give flertydige resultater.

3.2.1 NIG processen

Som en konsekvens af, at NIG fordelingen er et mix mellem normalfordelingen og den invers gaussiske fordeling, kan vi finde NIG processen repræsenteret ved 2 uafhængige brownske bevægelser.

Den første brownske bevægelse har en drift på $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ samt en volatilitet på 1, således at $dz_t = \gamma dt + dW_t$. Til bevægelsen er der knyttet en stoppetid, $\tau_\delta(T)$, der angiver første gang z_t rammer barrieren $\delta \cdot T$, dvs. $\tau_\delta(T) = \inf(t > 0 | z_t = \delta T)$. Den anden brownske bevægelse har en drift på β og en volatilitet på 1, dvs. $d\hat{z}_t = \beta dt + d\hat{W}_t$, hvor der gælder, at $\text{cov}(dW_t, d\hat{W}_t) = 0$.

Der gælder så, at $\hat{z}_t$ til det stokastiske tidspunkt, $\tau_\delta(T)$, følger en NIG fordeling således at, $\hat{z}_{\tau_\delta(T)} \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, 0, \delta \cdot T)$.

For at give processen den rette positionsparameter skal processen, $\hat{z}_{\tau_\delta(T)}$ skubbes med $\mu \cdot T$. NIG processen er altså defineret ved den forskubbende proces, X_T , der til tid T følger en NIG fordeling, hvor (Barndorff-Nielsen, 1997, s. 3), (Rasmus, 2006, s. 36):

$$X_T = \hat{z}_{\tau_\delta(T)} + \mu \cdot T \sim NIG(\alpha, \beta, \mu \cdot T, \delta \cdot T) \quad (3.14)$$

Det viser sig, at NIG processen, X har samme fine egenskaber som den brownske bevægelse (Barndorff-Nielsen, 1997, s. 2-3), (Papapantoleon, 2005, s. 3).

Definition 3.2

1. Initialværdi: $X_0 = 0$
2. Uafhængighed: For enhver $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$ gælder der, at $X_{t_1} - X_{s_1}, X_{t_2} - X_{s_2}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$ er uafhængige.
3. Stationaritet: For $0 \leq s < t$ gælder der, at $X_{t+s} - X_t \sim NIG(\alpha, \beta, \mu \cdot s, \delta \cdot s)$, således fordelingen af $X_{t+s} - X_t$ ikke afhænger af t .
4. Kontinuitet: X_t er ”almost surely” højrekontinuert med venstre grænseværdi.

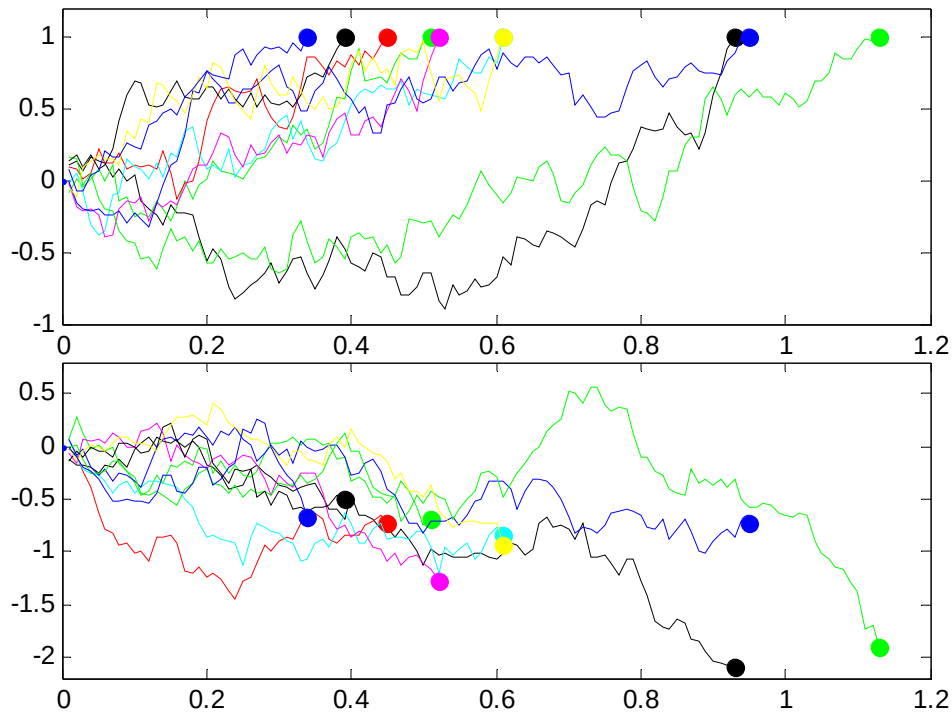
Punkt 3 fra Definition 3.2 kan vises med NIG fordelingsens foldningsegenskab. Der gælder nemlig, at hvis X_1 og X_2 er uafhængige NIG fordelte variable med de samme α og β parametre, men med forskellige positions- og skalaparametre, μ_1, δ_1 og μ_2, δ_2 , så følger summen af X_1 og X_2 en NIG fordeling med følgende parametre (Kalemanova & Wernery, 2006, s. 7):

$$X_1 + X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2) \quad (3.15)$$

De processer der opfylder de 4 ovenstående egenskaber, herunder den brownske bevægelse og NIG processen, går under fælles betegnelsen Lévy processer.

Vi har simuleret 10 stier for hver af de 2 underliggende brownske bevægelser jf. (3.14) med parametrene $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\mu = 0,05$, $\delta = 0,5$. I Figur 3.8a bestemmer den første brownske bevægelse stoppetiderne $\tau_{0,5}(2)$ angivet ved punkterne, $\bullet$. Den anden brownske bevægelse simuleres indtil disse stoppetider, $\tau_{0,5}(2)$ i Figur 3.8b og i punkterne, $\bullet$ aflæses værdierne for X_t til tid $t = 2$ som så jf. (3.14) følger en NIG fordeling.

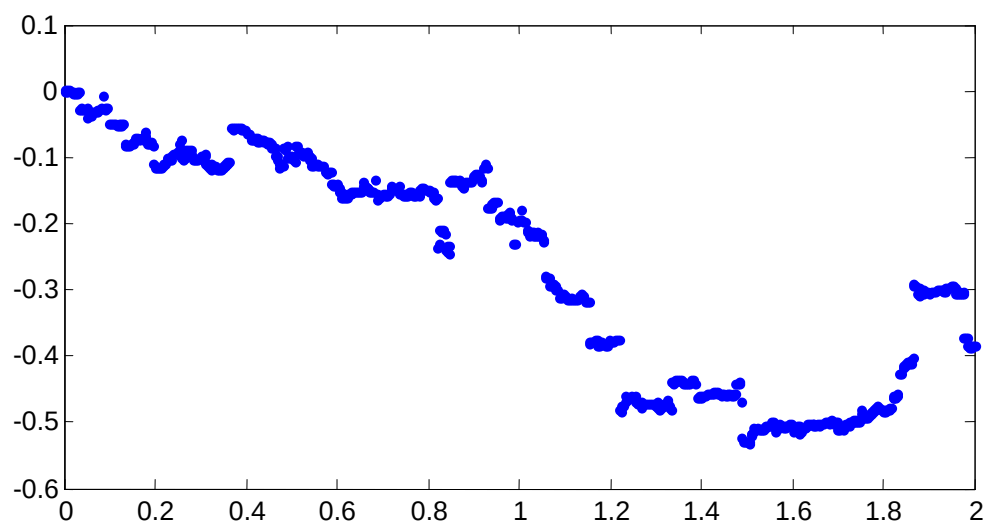
Figur 3.8a og Figur 3.8b



Figur 3.8a og Figur 3.8b viser 10 stier for henholdsvis den første og den anden underliggende brownske bevægelse jf. (3.14) med parametrene $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\mu=0,05$, $\delta=0,5$.²

Vi har i Figur 3.9 simuleret NIG processen for $t \in [0,2]$ og altså ikke kun for sluttidspunktet som ovenfor. Da NIG processen er tidskrævende at simulere ud fra (3.14) benytter vi i stedet proceduren beskrevet i appendiks G.2.

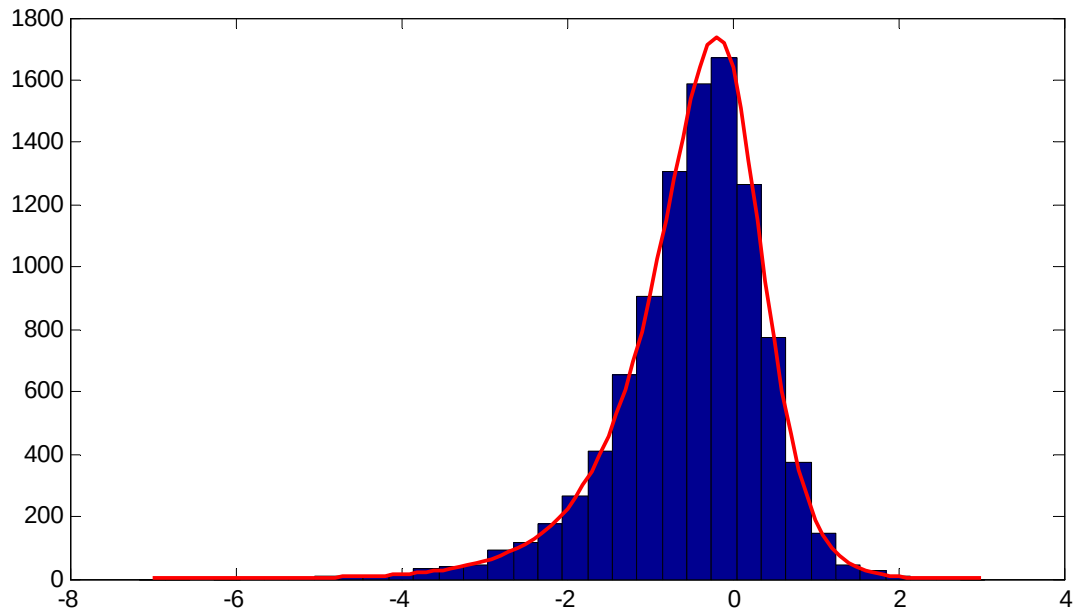
Figur 3.9



Figur 3.9 viser en enkelt simuleret NIG proces for $t \in [0,2]$ med parametrene $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\mu=0,05$, $\delta=0,5$.²

Det ses tydeligt, at der forekommer spring i NIG processen. Vi foretager nu 10.000 simulationer og aflæser værdien for NIG processen X_T til sluttidspunktet $T = 2$ og afbilder dem i et histogram. Dette histogram kan så jf. (3.14) approksimeres med NIG fordelingen, $NIG(2, -1, 0.05 \cdot 2, 0.5 \cdot 2)$.

Figur 3.10



Figur 3.10 viser 10.000 simulerede værdier givet NIG processen til endetidspunktet med parametrene $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\mu = 0,05$, $\delta = 0,5$ og $T = 2$ afbilledet i et histogram sammen med NIG fordelingen, $NIG(2, -1, 0.1, 1)$.²

Det ses, at NIG fordelingen med de givne parametre fitter histogrammet genereret ud fra den tilhørende NIG proces tilnærmelsesvist perfekt.

3.3 Den momentgenererende funktion

Den momentgenererende funktion er en generel metode til at finde momenterne for en bestemt fordeling (Weisstein 1). Hvis X er en stokastisk variabel med en kontinuerlige tæthedsfunktion, $p(X)$, så er den tilhørende momentgenererende funktion givet ved:

$$M(z) = E(\exp(zX)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(zx)p(x)dx \quad (3.16)$$

Ved at differentiere den momentgenererende funktion kan vi finde momenterne for den stokastiske variabel X , da der gælder:

$$\left. \frac{d^n M(z)}{dz^n} \right|_{z=0} = E(X^n) \quad (3.17)$$

Det kan vises, at de centrale momenter kan findes ved følgende generelle udtryk:

$$E[(X - \mu)^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E[X^j] E[X]^{n-j} \quad (3.18)$$

Det centrale moment for $n = 1$ er uinteressant, da denne altid er 0. Vi anskuer udover de centrale

elementer også de standardiserede centrale momenter, der er defineret ved: $\frac{E[(X - E[X])^n]}{\sqrt{E[(X - E[X])^2]}^n}$,

hvor det n 'te centrale moment sættes i forhold til standardafvigelsen opløftet i n . De standardiserede centrale momenter er interessante, da de er skalainvariante. Vi er interesserede i at finde middelværdi, varians, skævhed og kurtosis for vores fordeling. Der gælder, at momentet for $n = 1$ er middelværdien, det centrale moment for $n = 2$ er variansen, mens de standardiserede centrale momenter for $n = 3$ og $n = 4$ er henholdsvis skævhed og kurtosis. I resten af opgaven vil vi referere til middelværdi, standardafvigelse, skævhed og kurtosis jf. den ovenfor beskrevne definition, hvor vi tillader os at kalde dem for henholdsvis 1., 2., 3., og 4. moment.

I Tabel 3.2 og Tabel 3.3 angiver vi de forskellige momenter samt middelværdi, varians, skævhed og kurtosis jf. definitionerne fra (Weisstein 2) for henholdsvis normalfordelingen og NIG fordelingen.

3.3.1 Normalfordelingens momenter

Vi finder nu momenter, centrale momenter og standardiserede centrale momenter for den normalfordelte variabel X med parametrene μ og σ^2 og følgende momentgenererende funktion:

$$\begin{aligned} M(z) &= E(\exp(zX)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xz) \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \Leftrightarrow \\ M(z) &= \exp\left(\mu z + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se appendiks A.1 for en udledning. Vi kan nu finde momenterne for normalfordelingen.

Tabel 3.2

Momenter:	Centrale momenter:	Standardiserede centrale momenter:	middelværdi, varians, skævhed og kurtosis.
$E[X^n]$	$E[(X - E[X])^n]$	$\frac{E[(X - E[X])^n]}{\sqrt{E[(X - E[X])^2]^n}}$	$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$
μ	0	0	μ
$\mu^2 + \sigma^2$	σ^2	1	σ^2
$\mu(\mu^2 + 3\sigma^2)$	0	0	0
$\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$	$3\sigma^4$	3	3

3.3.2 NIG fordelings momenter

Vi finder nu momenter, centrale momenter og standardiserede centrale momenter for NIG fordelingen med følgende parametre, $NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$. Vi benytter samme fremgangsmetode som ved normalfordelingen og udleder derfor fordelings momentgenererende funktion, hvor vi definerer:

$$M(z) = E(\exp(zX)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(zx) \frac{\delta \alpha \exp(\delta \gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) dx \Leftrightarrow \quad (3.20)$$

$$M(z) = \exp(\mu z + \delta(\gamma - \gamma_z)), \text{ hvor } \gamma_z = \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2}$$

Se appendiks A.2 for en udledning.

Vi kan nu finde momenterne for NIG fordelingen. Vi viser dog ikke $E[X^n]$ for $n = 2, 3$ og 4 , da disse udtryk ikke er specielt pæne og egentligt heller ikke særligt interessante:⁵

Tabel 3.3

$E[X^n]$	$E[(X - E[X])^n]$	$\frac{E[(X - E[X])^n]}{\sqrt{E[(X - E[X])^2]^n}}$	middelværdi, varians, skævhed og kurtosis. $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$
$\mu + \frac{\beta \delta}{\gamma}$	0	0	$\mu + \frac{\beta \delta}{\gamma}$
	$\delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3}$	1	$\delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3}$
	$3 \frac{\alpha^2 \beta \delta}{\gamma^5}$	$3 \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\delta \gamma}}$	$3 \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\delta \gamma}}$
	$\frac{3 \alpha^2 \delta (4 \beta^2 + \alpha^2 (1 + \gamma \delta))}{\gamma^7}$	$3 + 3 \left(1 + 4 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) \frac{1}{\delta \gamma}$	$3 + 3 \left(1 + 4 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) \frac{1}{\delta \gamma}$

⁵ Til sammenligning er momenterne angivet i (Lai, 2007, s. 2 (39)).

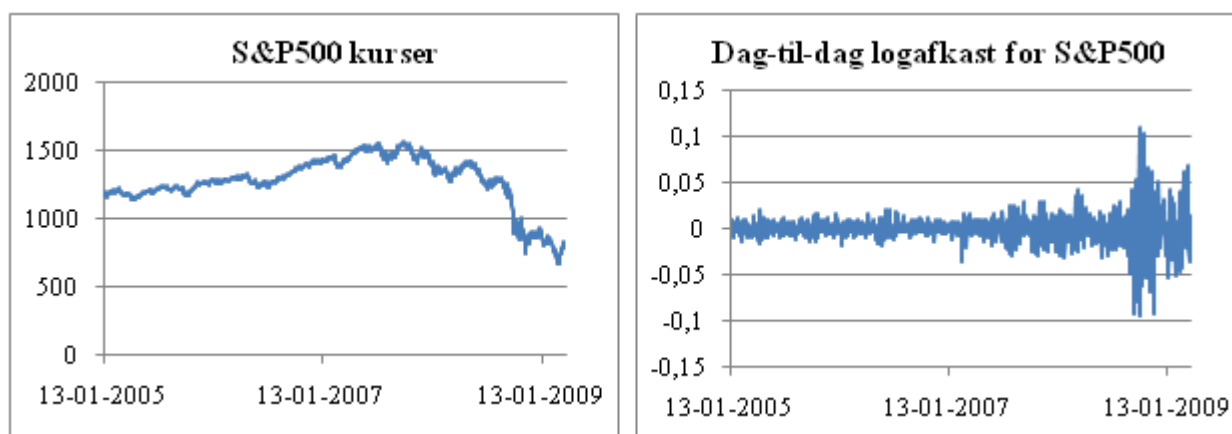
Det bemærkes, at NIG fordelingen for grænsetilfældet $\beta = 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ og $\frac{\delta}{\alpha} = \sigma^2$ går mod en normalfordeling med parametrene $N(\mu, \sigma^2)$ og nedenfor ses det, at momenterne er ens (Barndorff-Nielsen, 1997, s. 3):

$$\kappa_1 = \mu + \frac{\beta\delta}{\gamma} = \mu, \kappa_2 = \delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3} = \frac{\delta}{\alpha} = \sigma^2, \kappa_3 = 3 \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\delta\gamma}} = 0 \text{ og } \kappa_4 = 3 + 3 \left(1 + 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \frac{1}{\delta\gamma} = 3$$

3.4 Fit til empiriske logafkast

I dette afsnit fitter vi normalfordelingen og NIG fordelingen til logafkastet for S&P 500 kurser fra d. 03-01-2006 og frem til d. 31-03-2009. Kurserne og de tilhørende logafkast vises i nedenstående figurer.

Figur 3.11a og Figur 3.11b



I Figur 3.11a og Figur 3.11b ses henholdsvis udviklingen i de daglige S&P 500 kurser og udviklingen i de tilhørende dag-til-dag logafkast fra d. 03-01-2006 og frem til d. 31-03-2009.⁶

Vi anvender momentmatching og maximum likelihood til at estimere parametrene for vores fordelinger. Herefter plotter vi de fittede fordelinger sammen med et histogram for vores empiriske logafkast. Vi starter med at bestemme parametrene med momentmatching for normalfordelingen med parametrene $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ og for NIG fordelingen med parametrene $NIG(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\delta})$. For at fastsætte parametrene tager vi udgangspunkt i de fundne momenter i Tabel 3.2 for normalfordelingen og Tabel 3.3 for NIG fordelingen.

⁶ Data og grafer er fra filen S&P500_kurser_5år.xls

Normalfordelingens parametre er netop 1. og 2. moment, så uden omskrivning får vi normalfordelingens parametre ved at sætte $\kappa_1 = \hat{\mu}$ og $\kappa_2 = \hat{\sigma}^2$.

For NIG fordelingen er parametrene dog ikke givet ved momenterne, så for at få sammenhængen mellem momenterne og $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}$ og $\hat{\delta}$ kræver det en smule omskrivning.

Vi benytter os af der gælder følgende forhold mellem skævhed og excess kurtosis (se Tabel 3.2):

$$\frac{\kappa_3^2}{\kappa_4 - 3} = \frac{9\hat{\beta}^2}{\hat{\alpha}^2 \hat{\delta} \gamma} \frac{\hat{\delta} \gamma}{3(1 + 4(\hat{\beta}/\hat{\alpha})^2)} \Leftrightarrow \frac{\kappa_3^2}{\kappa_4 - 3} = \frac{3(\hat{\beta}/\hat{\alpha})^2}{1 + 4(\hat{\beta}/\hat{\alpha})^2} \Leftrightarrow (\hat{\beta}/\hat{\alpha})^2 = \frac{\kappa_3^2}{3(\kappa_4 - 3) - 4\kappa_3^2} \equiv \eta \quad (3.21)$$

Da der gælder, at $\gamma = \sqrt{\hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2}$ sætter vi $(\hat{\beta}/\hat{\alpha})^2 = \eta \Leftrightarrow \gamma^2 = \hat{\alpha}^2(1 - \eta)$. Vi kan så finde $\hat{\alpha}$ og $\hat{\delta}$ ved at løse 2 ligninger med 2 ubekendte, idet vi ved at $\kappa_2 = \hat{\delta} \frac{\hat{\alpha}^2}{\gamma^3}$ og $\kappa_4 = 3 + 3 \left(1 + 4 \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \right)^2 \right) \frac{1}{\hat{\delta} \gamma}$. Vi bemærker, at $(\hat{\beta}/\hat{\alpha})^2$ kan substitueres med η , hvorefter γ kan bestemmes ud fra $\hat{\alpha}$ og η . Vi finder først $\hat{\delta}$ som funktion af $\hat{\alpha}$:

$$\kappa_2 = \hat{\delta} \frac{\hat{\alpha}^2}{\gamma^3} \Leftrightarrow \kappa_2 = \hat{\delta} \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\alpha}^3(1 - \eta)^{3/2}} \Leftrightarrow \hat{\delta} = \kappa_2 \hat{\alpha} (1 - \eta)^{3/2} \quad (3.22)$$

Vi kan nu benytte det fundne $\hat{\delta}$ til at finde $\hat{\alpha}$:

$$\kappa_4 = 3 + 3 \left(1 + 4 \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \right)^2 \right) \frac{1}{\hat{\delta} \gamma} \Leftrightarrow \kappa_4 - 3 = \frac{3 + 12\eta}{\kappa_2 \hat{\alpha}^2 (1 - \eta)^2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{3 + 12\eta}{\kappa_2 (\kappa_4 - 3) (1 - \eta)^2}} \quad (3.23)$$

Da vi nu kender $\hat{\alpha}$, kan vi både finde $\hat{\delta}$ ud fra (3.22) og γ ud fra $\gamma = \hat{\alpha} \sqrt{1 - \eta}$.

Vi kan nu finde $\hat{\beta}$ ud fra κ_3 :

$$\kappa_3 = \frac{3\hat{\beta}}{\hat{\alpha} \sqrt{\hat{\delta} \gamma}} \Leftrightarrow \hat{\beta} = \frac{\kappa_3 \hat{\alpha} \sqrt{\hat{\delta} \gamma}}{3} \quad (3.24)$$

Til sidst ses det, at $\hat{\mu}$ er givet ved κ_1 :

$$\kappa_1 = \hat{\mu} + \frac{\hat{\beta} \hat{\delta}}{\gamma} \Leftrightarrow \hat{\mu} = \kappa_1 - \frac{\hat{\beta} \hat{\delta}}{\gamma} \quad (3.25)$$

Ovenstående udtryk kan selvfølgelig reduceres væsentlig, men det gør vi dog ikke, da det ikke er nødvendigt, hvis vi implementerer udtrykkene som beskrevet.

Vi estimerer også parametrene med maximum likelihood. Vi anskuer nu en tæthedsfunktion, $p(\mathbf{X}; \hat{\Omega}^P)$, hvor vektoren $\mathbf{X}$ betegner logafkastet og $\hat{\Omega}^P$ angiver det tilhørende parametersæt.⁷ Likelihoodfunktionen, L er så givet som en funktion af parametrene, $\hat{\Omega}^P$, og er defineret ved (Tjur, Statistik, 3. udgave, 2002, s. 1-2):

$$L(\hat{\Omega}^P) = p(\mathbf{X}; \hat{\Omega}^P) \quad (3.26)$$

Vi antager, at logafkastene er uafhængige og identisk fordelte. Dette simplificerer likelihoodfunktionen, idet den således kan skrives som produktet af n én-dimensionale tæthedsfunktioner.

$$L(\hat{\Omega}^P) = \prod_{t=1}^T p(X_t; \hat{\Omega}^P) \quad (3.27)$$

Vi er nu interesseret i at estimere parameteren $\hat{\Omega}^P$, og leder således efter den kombination hvor sandsynligheden for at få vores observationer er størst givet fordelingsantagelsen, eller sagt anderledes, vi maksimerer likelihood funktionen. Vi tager dog først logaritmen til (3.27), da det simplificerer den numeriske problemløsning.

$$\log(L(\hat{\Omega}^P)) = \log\left(\prod_{t=1}^T p(X_t; \hat{\Omega}^P)\right) \Leftrightarrow \ell(\hat{\Omega}^P) = \sum_{t=1}^T \log(p(X_t; \hat{\Omega}^P)) \quad (3.28)$$

Parameteren kan så findes ved at maksimere loglikelihood funktionen. Vi ønsker nu at fitte fordelingerne til vores datasæt med moment matching og maximum likelihood estimation. Vi antager, at logafkastene over en periode på T følger følgende fordeling med tilhørende parametre:

$$X_T^N \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right) \text{ og } X_T^{NIG} \sim N(\alpha, \beta, \mu T, \delta T) \quad (3.29)$$

Bemærk, at parametrene er transformeret ifht. ovenstående gennemgang, så der for normalfordelingen gælder, at $\hat{\mu} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$ og $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 T$, mens der for NIG fordelingen gælder, at $\hat{\alpha} = \alpha$, $\hat{\beta} = \beta$, $\hat{\mu} = \mu \cdot T$ og $\hat{\delta} = \delta \cdot T$. Bemærk også, at antagelsen om at logafkastene er uafhængige over tid gør, at parametrene skal være uafhængige af T . Det betyder, at vi forventer at få de samme parametre, uanset tidsperioden T .

⁷ For normalfordelingen er $\hat{\Omega}^P = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, mens den for den for NIG-fordelingen er $\hat{\Omega}^P = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\delta})$.

For lethedens skyld antager vi, at der er 1 dag mellem fredag og mandag, således at der er ca. 252 handelsdage på et år. Vi ønsker at annualisere parametrene, hvilket betyder, at der for henholdsvis daglige, månedlige og kvartals logafkast tilnærmelsesvis må gælde, at $T = 1/252$, $T = 20/252$ og $T = 60/252$.⁸ Momenterne kan annualiseres ved at benytte følgende sammenhæng idet logafkastene antages at være uafhængige:

Antag, at Y er summen af n uafhængige stokastiske variable, alle med samme fordeling som X_T .

$$\begin{aligned} E[Y] &= nE[X_T] & \text{var}(Y) &= n \text{var}(X_T) \\ \text{skew}(Y) &= 1/\sqrt{n} \text{skew}(X_T) & \text{kurt}(Y) &= 1/n \text{kurt}(X_T) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Vi sætter $n = 1/T$ så Y bliver annualiseret. I Tabel 3.4 ses de annualiserede empiriske momenter for daglige, månedlige og kvartals logafkast.

Tabel 3.4⁹ Annualiserede empiriske momenter

	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}_3$	$\hat{\kappa}_4$
$T = 1/252$	-0,0926	0,0612	-0,0136	3,0423
$T = 20/252$	-0,1038	0,0361	-0,6068	3,6205
$T = 60/252$	-0,1029	0,0398	-0,9404	4,0452

Det ses, at de annualiserede empiriske momenter ikke er ens for de 3 forskellige perioder. Dette tyder på, at logafkastene for de 3 forskellige perioder ikke er uafhængige. Særligt ses det, at skævhed og kurtosis stiger (absolut), når T øges.

Vi estimerer parametrene for $T = 1/252$, $T = 20/252$, $T = 60/252$ og for de aggregerede logafkast. De aggregerede logafkast er konstrueret således, at vi estimerer parametrene for alle logafkastene for de 3 perioder samtidig. Det svarer til at sætte en restriktion om, at parametrene skal være ens for alle perioderne, hvilket er meget hensigtsmæssigt at undersøge, idet vi jo antager, at vi får de samme parametre uanset T . Momentmatching og maximum likelihood estimererne samt de tilhørende implicitte momenter kan ses i nedenstående tabeller.

⁸ Vi benytter $T = 20/252$ i stedet for $T = 1/12$ for månedlige logafkast samt $T = 60/252$ i stedet for $T = 1/4$, for kvartals logafkast, da det var betydeligt lettere at implementere i vores program og fordi det kun giver en marginal forskel.

⁹ Anvendt kode kan ses i filen `momenter.m`

Tabel 3.5¹⁰**Estimerede parametre ved momentmatching**

a	NIG fordeling				Normalfordeling	
	α	β	μ	δ	μ	σ
Periode						
$T = 1/252$	34,22	-1,307	-0,013	2,089	-0,062	0,247

Momenter beregnet ud fra estimerede parametre

b	NIG fordeling				Normalfordeling	
	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_1	κ_2
Periode						
$T = 1/252$	-0,0926	0,0612	-0,0136	3,0423	-0,0926	0,0612

Tabel 3.6**Estimerede parametre ved maximum likelihood**

a¹¹	NIG fordeling				Normalfordeling	
	α	β	μ	δ	μ	σ
Maximum likelihood						
$T = 1/252$	26,242	-5,483	0,247	1,588	-0,062	0,247
$T = 20/252$	26,330	-18,491	0,258	0,367	-0,086	0,190
$T = 60/252$	50,034	-44,083	0,300	0,217	-0,083	0,199
Aggregerede	37,608	-17,973	0,358	0,855	-0,082	0,212

Momenterne beregnet ud fra de estimerede parametre

b¹²	NIG fordeling				Normalfordeling	
	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_1	κ_2
$T = 1/252$	-0,0923	0,0647	-0,0982	3,0865	-0,0925	0,0610
$T = 20/252$	-0,1040	0,0386	-0,8033	4,2964	-0,1041	0,0361
$T = 60/252$	-0,1042	0,0410	-1,1664	5,3980	-0,1028	0,0396
Aggregerede	-0,1072	0,0335	-0,2698	3,2032	-0,1045	0,0449

Vi har kun estimeret parametrene med momentmatching for $T = 1/252$, da det vidste sig, at NIG fordelingen gav ekstreme parameterestimer ($\alpha > 400$ og $\beta > 400$) for $T = 20/252$, og vi fik ugyldige parameterestimer for $T = 60/252$, idet α og δ blev komplekse. Dette skyldes, at NIG modellen kræver, at $\hat{\alpha} > |\hat{\beta}|$, hvilket jf. (3.21) betyder, at der skal gælde følgende forhold mellem skævhed og kurtosis, $5/3\kappa_3^2 + 3 < \kappa_4$. Denne ulighed er ikke opfyldt for $T = 60/252$ og er kun lige netop opfyldt for $T = 20/252$ i Tabel 3.4. Med momentmatching ramte vi ikke overraskende momenterne perfekt, hvilket ses ved at sammenligne Tabel 3.4 og Tabel 3.5b. Det ses, at de implicitte

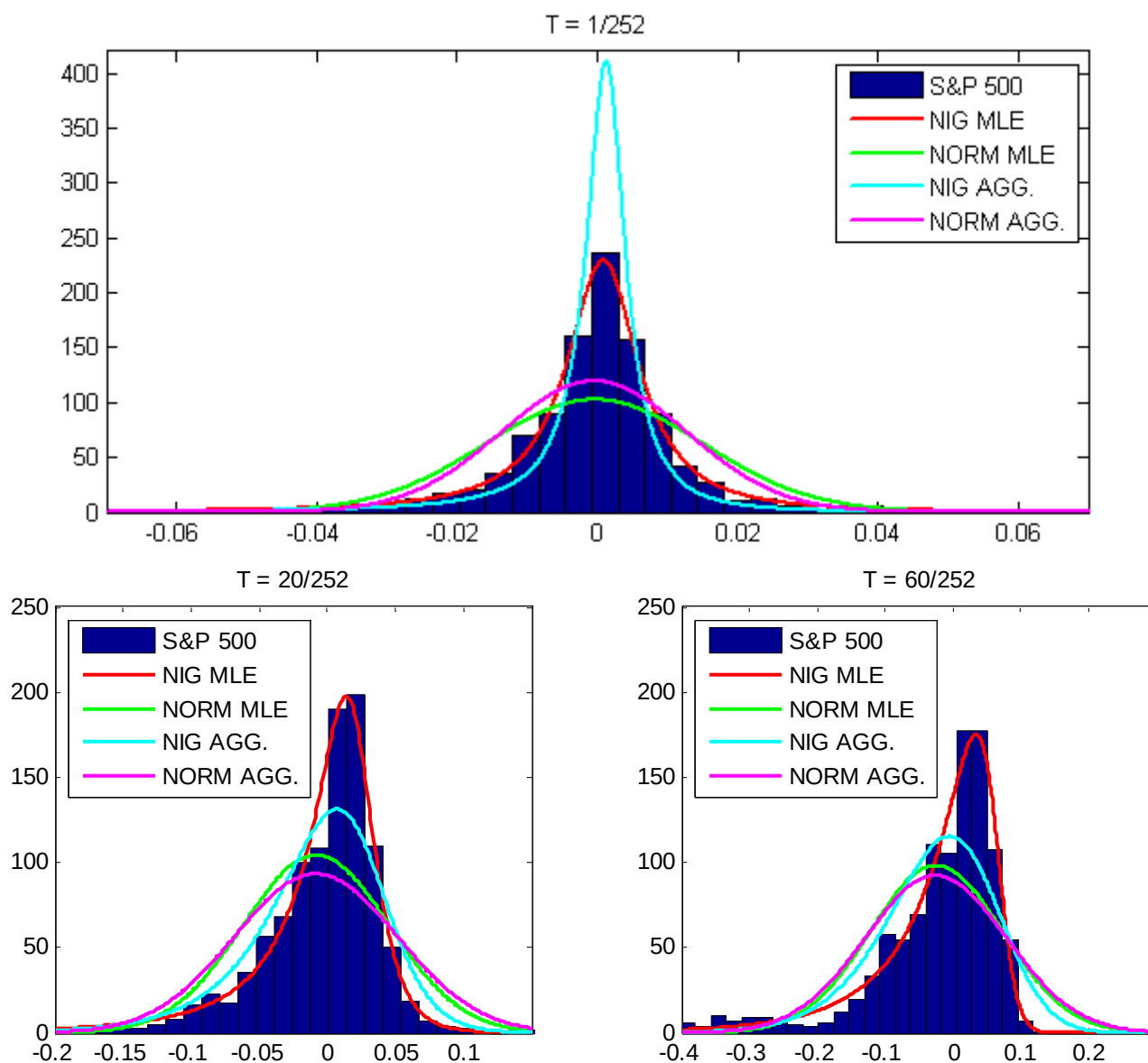
¹⁰ Anvendt kode kan ses i filen `momenter.m` og `normreturndist.m`

¹¹ Anvendt kode kan ses i filerne `normreturndist.m`, `normreturndist1.m` samt `NIGreturndist.m`, `NIGreturndist1.m`

¹² Beregninger kan ses i filen `momenter.xls`

momenter for maximum likelihood i Tabel 3.6b ikke rammer de empiriske momenterne i Tabel 3.4 perfekt, men afvigelserne er dog begrænsede, hvilket særligt ses for 1. og 2. moment. I det efterfølgende undersøger vi maximum likelihood parameterestimerterne og de tilhørende fordelinger. Til dette formål plotter vi fordelingerne med udgangspunkt i de estimerede parametre sammen med histogrammer for de empiriske logafkast i Figur 3.12:

Figur 3.12



Figur 3.12 viser histogrammer for $T = 1/252$, $T = 20/252$ og $T = 60/252$ og de tilhørende fit foretaget med normalfordelingen og NIG fordelingen.¹³

¹³ Anvendt kode kan ses i filen PlotsNORM_OG_NIG.m

For de enkelte perioder ses det tydeligt, at NIG fordelingen (rød) rammer logafkastet bedst. NIG fordelingen fanger den spidse og skæve fordeling samt de fede haler. I Tabel 3.6a ses det dog, at parametrene for NIG fordelingen for perioderne $T = 1/252$, $T = 20/252$ og $T = 60/252$ svinger meget. Idet logafkastene antages at være uafhængige, burde disse parametre have været forholdsvis ens. Vi har derfor foretaget et aggregeret fit, hvor vi undersøger, hvor godt NIG fordelingen rammer de forskellige logafkast med den restriktion, at parametrene skal være ens for alle perioderne. I Figur 3.12 ses det, at den aggregerede NIG fordeling (lyseblå), giver et knapt så godt fit, som de specifikke fit for de 3 perioder. For $T = 1/252$ fås en fordeling der er for spids, mens der for $T = 20/252$ og $T = 60/252$ fås fordelinger der hverken er spidse eller skæve nok. Dette er i overensstemmelse med momenterne i Tabel 3.4, hvor vi især så, at skævhed og kurtosis steg (absolut) når T steg.

Vi får et andet billede for normalfordelingen. For de enkelte perioder rammer normalfordelingen (grøn) ikke log-afkastene særligt godt. Normalfordelingen kan ikke fange den spidse og skæve fordeling samt de fede haler. I Tabel 3.6 ses det dog, at parameterestimerne er rimelig ens for alle perioderne. Det ses også, at den aggregerede parameterestimation for normalfordelingen (lilla) ligger rimelig tæt på parameterestimationerne for de enkelte perioder (grøn).

Det bemærkes, at den aggregerede parameterestimation for NIG fordelingen (lyseblå) ikke synes at være meget bedre end den aggregerede parameterestimation for normalfordelingen. For $T = 1/252$ er den aggregerede NIG fordeling for spids, mens normalfordeling er for flad. For $T = 60/252$ er de to fordelinger rimelig ens. For $T = 20/252$ er den aggregerede NIG fordelingen dog betydeligt pænere end den aggregerede normalfordeling.

3.5 Diskussion

I dette kapitel ser vi, at NIG fordelingen er god til at fitte logafkastet for faste værdier af T , men at modellen lammes, når vi ikke længere tillader parametrene at være afhængige T . Vi forventer derfor, at NIG fordelingen vil være god til at prisfastsætte optioner med samme udløbstidspunkt, men knap så god til at prisfastsætte optioner med forskellige udløbstidspunkter. Dette tyder derfor på, at NIG modellen ikke vil være god til hedging.

Vi forventer ikke, at normalfordelingen vil kunne ramme optionspriserne specielt godt for faste parametre¹⁴ uanset om de har samme eller forskellige udløbstidspunkter. Dog ses det i Tabel 3.6a, at normalfordelingens parametre er meget stabile i forhold til T , og det kan vise sig være en fordel, når vi skal benytte modellen til at hedge. Det bør her holdes for øje, at normalfordelingen er en langt mere simpel fordeling end NIG fordelingen, hvilket alt andet lige er en fordel ved prisfastsættelse og hedging af optionerne.

Det skal pointeres, at ovenstående analyse sker under det fysiske sandsynlighedsmål P . Når vi senere udvikler optionsmodeller med udgangspunkt i de ovenstående fordelinger, sker det under det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q , og her skal det bemærkes at fordelingernes egenskaber under forskellige sandsynlighedsmål ikke er ens.

¹⁴ I Black Scholes modellen der bygger på normalfordelingen benyttes ikke faste parametre, og denne model kan derfor alligevel ramme alle optionspriser perfekt.

4 Marginale fordeling og stokastiske processer for Hestons stokastiske volatilitetsmodel

Hestons model fra 1993, der er en af de mest populære optionsmodeller, er en udvidelse af Black Scholes modellen, hvor antagelsen om konstant volatilitet ændres således at modellen tager højde for stokastisk volatilitet. Motivationen bag indførelsen af stokastisk volatilitet er, at afkastserier såsom den i Figur 3.11b ofte udviser varierende volatilitet. I dette kapitel præsenterer vi Heston modellen, og undersøger modellens parametres effekt på fordelingen af logafkastet. Til sidst fitter vi modellens parametre til virkelige afkast.

4.1 Hestons stokastiske volatilitet model

Heston modellen er baseret på følgende dynamik for aktieprisen og volatiliteten (Heston, 1993):

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

De 2 brownske bevægelser, W_t^1 og W_t^2 er korrelerede, således at, $dW_t^2 = \rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} d\hat{W}_t^1$, hvor W_t^1 og $\hat{W}_t^1$ er uafhængige. Det kan vises, at korrelationen imellem W_t^1 og W_t^2 er ρ , dvs. $\text{corr}(W_t^1, W_t^2) = \rho$.

Processen for aktiekursen ligner processen for aktiekursen i Black Scholes modellen givet ved (3.6), men hvor Black Scholes modellen antager konstant volatilitet, følger volatiliteten i Heston modellen en Cox, Ingersoll og Ross (CIR) proces. CIR processen er en kendt rentemodell foreslået af Cox, Ingersoll og Ross (Hull, 2005, s. 653). Parametrene i CIR-processen har følgende fortolkning:

θ er et long-run volatilitetsniveau, κ angiver den hastighed hvormed den instantane volatilitet trækkes mod long run volatilitetsniveauet og σ angiver størrelsen af usikkerheden på volatiliteten.

Modifikationen med stokastisk volatilitet synes meget rimelig, hvis man ser på grafiske fremstillinger af aktiekurserne såsom Figur 3.11b, idet der ofte optræder nogle perioder med lav og nogle perioder med høj volatilitet. Helt analog til Black Scholes modellen, kan processen for aktiekursen i Heston modellen omskrives vha. Ito's lemma. Logafkastet $X_t = \ln(S_t/S_0)$, har således følgende proces (Hull, 2005, s. 273):

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2} V_t \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^1 \quad (4.2)$$

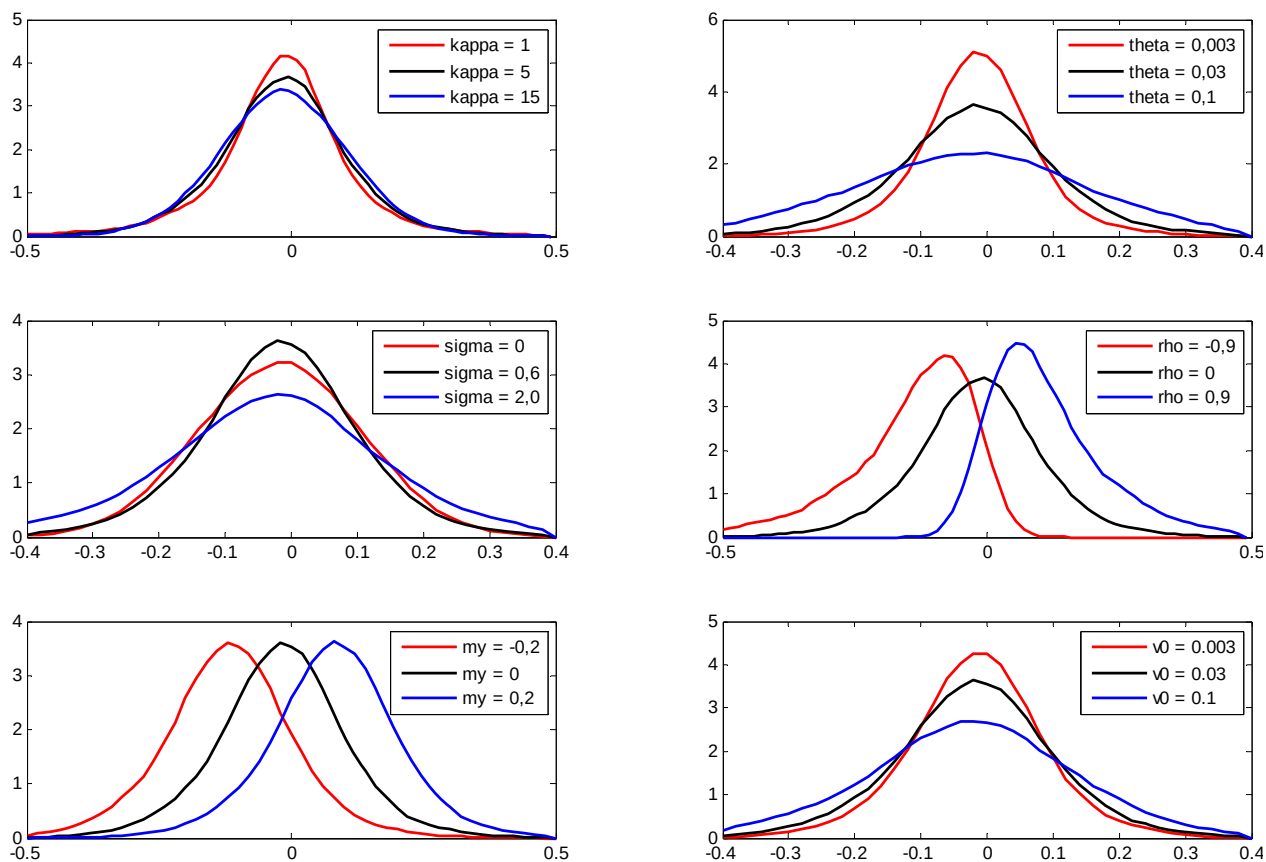
Det bemærkes, at processen for volatiliteten, V_t er uændret. Ud fra Heston modellen kan vi altså finde den simultane fordeling for logafkastet, X_t og volatiliteten, V_t som funktion af t og betinget af den kendte initiale værdi af logafkastet $X_0 = 0$ samt volatiliteten, V_0 . Mens logafkastet let kan findes ud fra de historiske aktiekurser, er volatiliteten ikke direkte observerbar og er derfor en skjult stokastisk variabel. I de efterfølgende afsnit er vi derfor kun interesserede i at undersøge den marginale fordeling for logafkastet, X_t .

4.2 Simulering af den marginale fordeling for X_t

I dette afsnit undersøger vi Heston modellens parametre. Vi simulerer en række logafkast, $X_t = \ln(S_t/S_0)$, for at undersøge hvordan den marginale fordeling af logafkastet påvirkes af modellens parametre, $\kappa, \theta, \sigma, \rho, \mu$ samt den initiale volatilitet, V_0 . Vores Monte Carlo simulering foretages efter et Euler skema jf. appendiks G.3 og vi benytter os af antitetisk simulering for at øge hastigheden/præcisionen (Glasserman, 2003, s. 205-207).

Vi inddeler de simulerede logafkast i lige store intervaller og finder de tilhørende hyppigheder, som så udgør vores marginale tæthedsfunktion for X_t . For at få en pæn overflade på tæthedsfunktionen benytter vi os af Matlab's indbyggede funktion, smooth, som udglatte en dataserie ved at tage et glidende gennemsnit med et spænd på 5 (MathWorks 1). Til sidst foretager vi en normering, så alle tæthedsfunktioner får et areal på 1. Vi får følgende grafer:

Figur 4.1

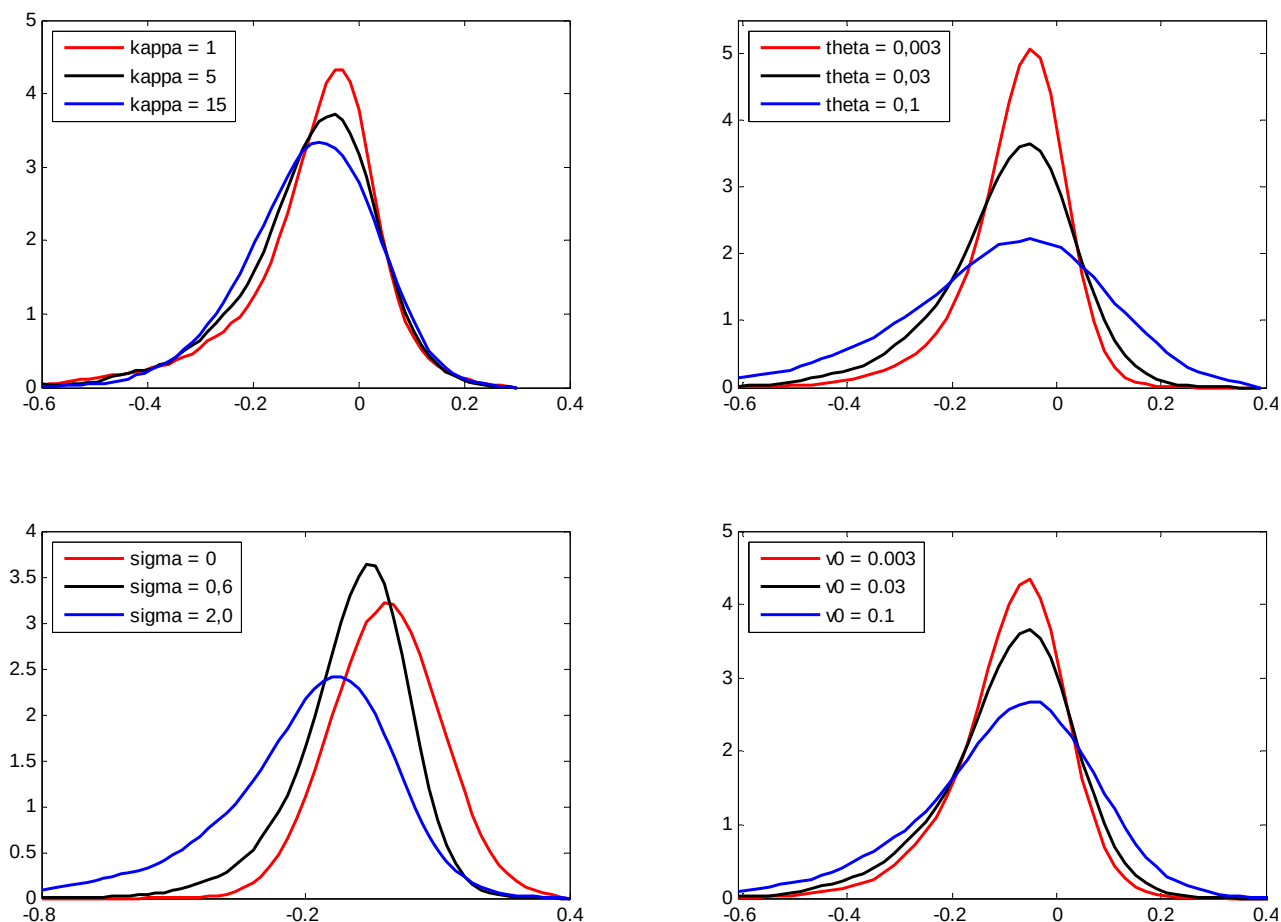


I Figur 4.1 har vi plottet tæthedsfunktionen for Heston modellen for forskellige parameterværdier. Som udgangspunkt er $\kappa=5$, $\theta=0,03$, $\sigma=0,6$, $\rho=0$, $\mu=0$ og $V_0=0,03$, men for hver graf lader vi én af de 6 parametre variere. De 2 resterende parametre er givet ved $S_0=100$ og $T=1/2$ og de er faste for alle grafer.¹⁵

For parametrene κ, θ, σ og V_0 ses det, at de alle påvirker fordelings støjthed og vidde, men ud fra plottene ovenfor, er det dog svært at vurdere hvorledes disse 4 parametre er forskellige. Det ses tydeligt, at μ er en positionsparameter, der forskyder fordelingen langs x-aksen, således at $\mu=0$ centrerer fordelingen omkring 0. Det ses også, at ρ er en skævhedsparametre, hvor $\rho=0$ giver en symmetrisk fordeling, $\rho>0$ gør fordelingen højreskæv og $\rho<0$ gør fordelingen venstreskæv. Det bemærkes desuden, at grafen for $\rho=-0,9$ ikke er symmetrisk i forhold til grafen for $\rho=0,9$, da det viser sig, at $\rho>0$ giver en mere stejl fordeling end $\rho<0$. I Figur 4.2 ser vi nærmere på effekten af at ændre κ, θ, σ og V_0 når $\rho=-0,5$.

¹⁵ Anvendt kode kan ses i filen HestonDensity.m

Figur 4.2



I Figur 4.2 har vi plottet tæthedsfunktionen for Heston for forskellige parameterværdier. Som udgangspunkt er $S_0 = 100$, $T = 1/2$, $\kappa = 5$, $\theta = 0,03$, $\sigma = 0,6$, $\rho = -0,5$, $\mu = 0$ og $v_0 = 0,03$, men for hver graf lader vi enten κ , θ , σ eller V_0 variere.¹⁶

I graferne for κ og σ ses det, at fordelingernes skævhed ændrer sig når vi ændrer κ og σ . I graferne for θ og V_0 ses det, at fordelingerne er blevet en smule venstreskæve som følge af, at vi har sat $\rho = -0,5$, men at skævheden ikke ændrer sig, når vi ændrer θ og V_0 .

Det lader til, at fordelingen bliver mindre skæv og mere flad når κ stiger. Fordelingens skævhed stiger, når σ stiger, men det viser sig, at fordelingen først bliver mere stejl for derefter at blive mere flad. For $\sigma = 0$ ses det, at skævheden helt forsvinder, hvilket er klart, da volatilitetens støjled i dette tilfælde forsvinder og ρ har derfor ingen effekt. Parametrene θ og V_0 ser ud til at have den samme effekt på fordelingerne. Det ses, at fordelingerne bliver mere spidse for lave værdier og me-

¹⁶ Anvendt kode kan ses i filen HestonDensity2.m

re flade, for høje værdier af θ og V_0 . Ved sammenligning af graferne for tilsvarende værdier af θ og V_0 ses det, at θ giver federe haler og mindre spidse fordelinger end V_0 .

I ovenstående grafer ses det altså tydeligt, at κ, θ, σ og V_0 påvirker tæthedsfunktionen på hver sin måde, men det er tydeligt, at forskellige kombinationer kan give tilnærmelsesvis samme fordelingsfunktioner. Dette kan give problemer, når vi skal estimere modellen parametre. I det følgende estimerer vi parametrene under det fysiske sandsynlighedsmål, P ved hjælp af maximum likelihood estimering.¹⁷

4.3 Fit til empiriske logafkast i Heston Modellen

Vi er interesserede i at estimere parametrene i Heston modellen ud fra de historiske logafkast ligesom vi gjorde det for NIG og Black Scholes modellen. Her er det oplagt at estimere parametrene med udgangspunkt i simuleringsmetoden fra afsnit 4.2 for at bestemme den marginale tæthedsfunktion for X_t . Det viser sig dog imidlertid for at være ganske tidskrævende. Vi vælger derfor at integrere den simultane tæthedsfunktion, $p_t(X, V|V_i)$ over volatiliteten, således at vi får et analytisk udtryk for den marginale tæthedsfunktion for logafkastet.¹⁸ Vi benytter så den fundne marginale tæthedsfunktion for logafkastet til at estimere parametrene i Heston modellen ud fra vores historiske logafkast vha. maximum likelihood estimation.

Yakovenko og Drăgulescu (Yakovenko & Drăgulescu, 2002) har udledt den margingale tæthedsfunktion for logafkastet i Heston modellen. Vi anskuer herunder den fundne marginale tæthedsfunktion, hvor vi dog har ændret en smule i den originale terminologi så det passer til vores parameternavne.

$$p_T(\hat{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz_{\hat{x}}\hat{x} + \Psi_T(z_{\hat{x}})} dz_{\hat{x}}, \text{ hvor der gælder}$$

$$\Psi_T(z_{\hat{x}}) = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \Gamma T - \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left(\cosh \left(\frac{\Phi T}{2} \right) + \frac{\Phi^2 - \Gamma^2 + 2\kappa\Gamma}{2\kappa\Phi} \sinh \left(\frac{\Phi T}{2} \right) \right) \quad (4.3)$$

$$\Phi = \sqrt{\Gamma^2 + \sigma^2 (z_{\hat{x}}^2 - iz_{\hat{x}})}$$

$$\Gamma = \kappa + i\rho\sigma z_{\hat{x}}$$

$$\hat{x} = X - \mu T, \text{ hvor } X = \ln(S_T) - \ln(S_0)$$

¹⁷ Vi forklarer sandsynlighedsmålene P og Q i kapitlet 5.

¹⁸ Generelt bevis for dette, kan ses i (Tjur, Sandsynlighedsregning, 5. udgave, 2002, s. 107-109)

Vi benytter Eulerligningen¹⁹ til at omskrive integranden $e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)}$ i (4.3), da vi så kan splitte integranden op i en realdel og imaginærdel. Det er fordelagtigt, da vi hermed kan reducere tæthedsfunktionen, idet det viser sig, at det komplekse led helt forsvinder, hvilket simplificerer den numeriske integration. Vi benytter Eulerligningen i to trin til at omskrive $e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)}$:

$$\begin{aligned} e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)} &= e^{iz_x\hat{x}} e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} e^{i\operatorname{Im}(\Psi_T(z_x))} \Leftrightarrow \\ e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)} &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x}) + i\sin(z_x\hat{x})) \cdot (\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) + i\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x))) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vi splitter så integranden op i en realdel og imaginærdel og definerer dem ved funktionerne $R(z_x)$ og $I(z_x)$, således:

$$e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)} = \underbrace{\operatorname{Re}(e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)})}_{R(z_x)} + i \underbrace{\operatorname{Im}(e^{iz_x\hat{x}+\Psi_T(z_x)})}_{I(z_x)} \quad (4.5)$$

Funktionerne, $R(z_x)$ og $I(z_x)$ kan omskrives til følgende udtryk:

$$\begin{aligned} R(z_x) &= \operatorname{Re}(e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x}) + i\sin(z_x\hat{x})) \cdot (\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) + i\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)))) \Leftrightarrow \\ R(z_x) &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) - \sin(z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x))) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} I(z_x) &= \operatorname{Im}(e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x}) + i\sin(z_x\hat{x})) \cdot (\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) + i\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)))) \Leftrightarrow \\ I(z_x) &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) + \sin(z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x))) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ved at indsætte vilkårlige værdier i $\Psi_T(z_x)$ ses det let, at $\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))$ er en lige funktion af z_x , dvs. $\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x)) = \operatorname{Re}(\Psi_T(-z_x))$. På samme måde ses det, at $\operatorname{Im}(\Psi_T(z_x))$ er en ulige funktion af z_x , dvs. $-\operatorname{Im}(\Psi_T(z_x)) = \operatorname{Im}(\Psi_T(-z_x))$. Dette bruger vi til at vise, at $R(z_x)$ og $I(z_x)$ er henholdsvis en lige og ulige funktion af z_x .²⁰

$$\begin{aligned} R(-z_x) &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(-z_x))} (\cos(-z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(-z_x)) - \sin(-z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(-z_x))) \\ &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) - (-\sin(z_x\hat{x}))(-\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)))) \\ &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) - \sin(z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x))) = R(z_x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} I(-z_x) &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(-z_x))} (\cos(-z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(-z_x)) + \sin(-z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(-z_x))) \\ &= e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (-\cos(z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) - \sin(z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x))) \\ &= -e^{\operatorname{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_x\hat{x})\sin(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x)) + \sin(z_x\hat{x})\cos(\operatorname{Im}\Psi_T(z_x))) = -I(z_x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

¹⁹ $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

²⁰ Vi benytter selvfølgelig også, at $\cos(x)$ er en lige og $\sin(x)$ er en ulige funktion af x .

Da $R(z_{\hat{x}})$ er en lige og $I(z_{\hat{x}})$ er en ulige funktion af $z_{\hat{x}}$ samtidigt med at funktionerne er integrable, må der gælde: $\int_{-\infty}^0 R(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} = \int_0^{+\infty} R(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}}$ og $\int_{-\infty}^0 I(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} = -\int_0^{+\infty} I(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}}$. Dette kan vi bruge til at reducere tæthedsfunktionen:

$$\begin{aligned} p_T(\hat{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz_{\hat{x}}\hat{x} + \Psi_T(z_{\hat{x}})} dz_{\hat{x}} \Leftrightarrow p_T(\hat{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} \Leftrightarrow \\ p_T(\hat{x}) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 R(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} + \int_0^{+\infty} R(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} \right) + \frac{i}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 I(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} + \int_0^{+\infty} I(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} \right) \Leftrightarrow \quad (4.10) \\ p_T(\hat{x}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R(z_{\hat{x}})dz_{\hat{x}} \end{aligned}$$

Vores tæthedsfunktion kommer så til at se ud som følger, idet vi benytter $\hat{x} = X - \mu T$:

$$p_T(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{\text{Re}(\Psi_T(z_x))} (\cos(z_{\hat{x}}(X - \mu T)) \cos(\text{Im} \Psi_T(z_{\hat{x}})) - \sin(z_{\hat{x}}(X - \mu T)) \sin(\text{Im} \Psi_T(z_{\hat{x}}))) dz_{\hat{x}} \quad (4.11)$$

Vi benytter nu maximum likelihood metoden til at estimere vores parametre. Vores datasæt indeholder over 1000 dage, og for daglige logafkast viste vores numeriske integrationsmetode sig at være for langsom. Vi har derfor valgt at inddele logafkastene i små lige store intervaller I_i , hvor vi tæller antallet af logafkast, H_i der rammer indenfor hvert interval, I_i . Vi definerer tæthedsfunktionen for logafkastet X givet parametersættet $\hat{\Omega}^P = (\kappa, \theta, \sigma, \rho, \mu)$ som $p(X; \hat{\Omega}^P)$. Parametrene estimeres så ved at maksimere følgende loglikelihood funktion, hvor I_i^V angiver venstre endepunkt for intervallet, I_i :

$$\ell(\hat{\Omega}^P) = \sum_{i=1}^I \log(p(I_i^V; \hat{\Omega}^P)) \cdot H_i \quad (4.12)$$

Vi estimerer parametrene, $\hat{\Omega}^P$ for logafkastene beregnet ud fra en periodelængde på 1 dag, en måned og et kvartal svarende til $T=1/252$, $T=20/252$, $T=60/252$. Vi estimerer desuden parametrene for de aggregerede logafkast, hvor vi estimerer parametrene for alle periodelængderne samtidig, hvilket svarer til at sætte en restriktion om, at parametrene skal være ens for alle T .

Vi har valgt at sætte integrationsmetodens præcision ned for at fremme metodens hastighed, idet vi vurderer, at det ikke ændrer parametrene væsentligt, og at det således er et rimeligt kompromis. Det bør derfor forventes, at parametrene afviger en smule for de "sande" maximum likelihood parametre og at modellens robusthed er nedsat en smule. Vores parameterestimer kan ses i nedenstående tabel:

Tabel 4.1²¹

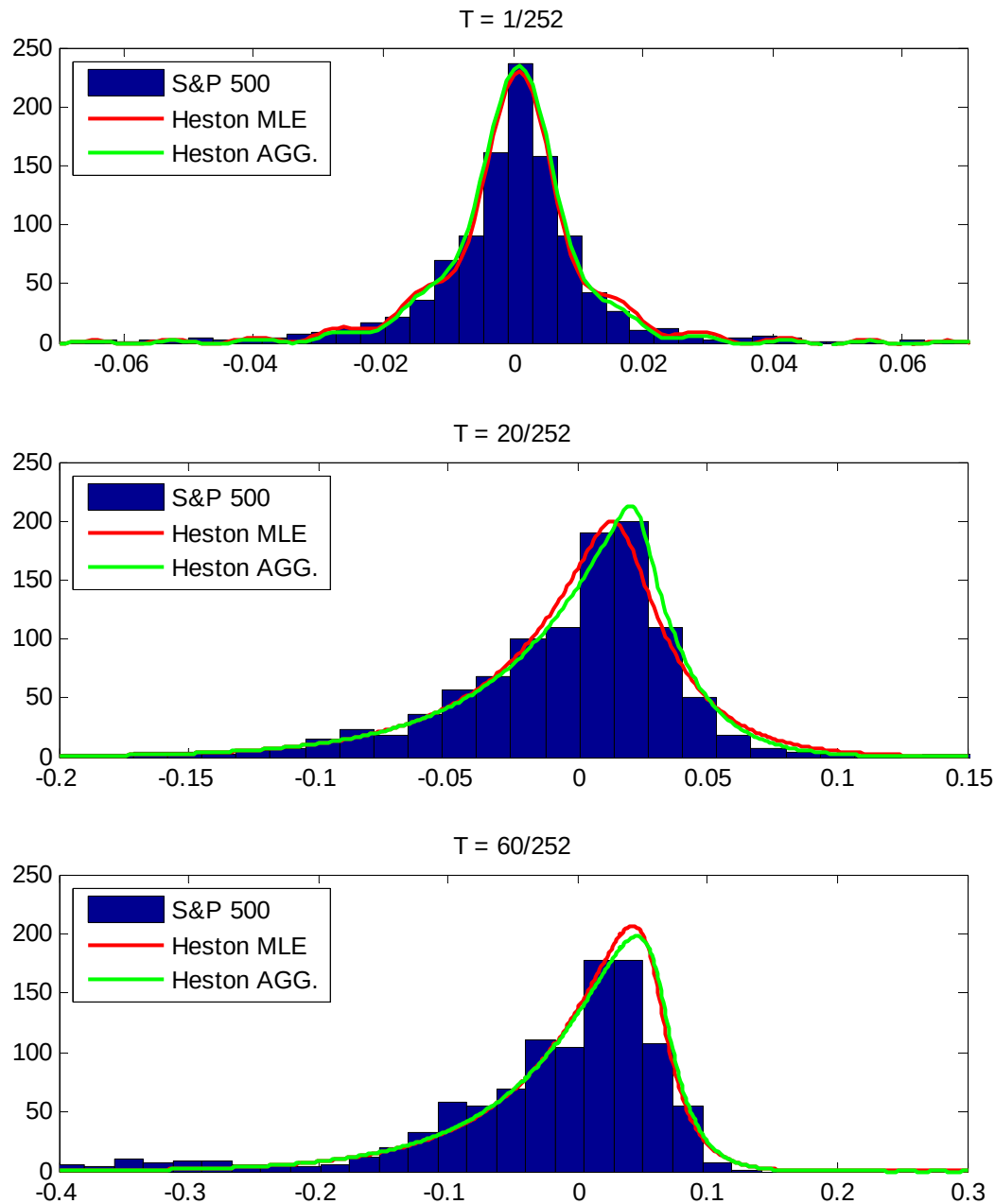
T	κ	θ	σ	ρ	μ
1/365	5,272	0,031	0,635	-1,000	0,013
20/365	5,124	0,024	0,497	-0,810	0,000
60/365	7,405	0,022	0,576	-0,969	-0,001
Agg.	7,632	0,023	0,553	-0,993	0,001

Estimationsmetoden har vist sig at være rimelig, idet den for flere forskellige startgæt har fundet frem til omtrent de samme estimater. Det ses, at parametrene er forholdsvis ens for alle perioderne, hvilket er i overensstemmelse med antagelsen om, at parametrene er uafhængige af T . Det viser sig også, at den aggregerede parameterestimation placerer sig tæt på parameterestimationerne for de enkelte perioder.

I det følgende har vi plottet de marginale tæthedsfunktioner for de 3 perioder samt det aggregerede tilfælde sammen med et histogram for logafkastene. Det kan anes for tæthedsfunktionerne, at der forekommer sinus/cosinus svingninger ud i enderne, hvilket skyldes, at den numeriske integrationsmetode laver approksimationsfejl.

²¹ Anvendt kode kan ses i filerne `Hestonreturndist.m` og `Hestonreturndist2.m`

Figur 4.3



Figur 4.3 viser histogrammer for $T = 1/252$, $T = 20/252$ og $T = 60/252$, hvor de røde grafer er estimeret i forhold til de specifikke T -værdier, mens den grønne er givet ved den aggregerede estimering.²²

De røde grafer er hver fittet ud fra en specifik T -værdi, mens de grønne grafer er det aggregerede fit, hvor parametrene på nær T er ens for de 3 figurer. Det ses, at tæthedsfunktionen for Heston kan fange de spidse fordelinger med fede haler, hvilket især ses for $T = 1/252$. Tæthedsfunktionen kan

²² Anvendt kode kan ses i filen `plotsHeston.m`

ydermere generere en skæv fordeling, hvilket ses for perioderne $T = 20/252$ og $T = 60/252$. Fitterne for de specifikke T -værdier (de røde) for Heston modellen, ses at være næsten ligeså gode som de tilsvarende fit for NIG modellen jf. Figur 3.12. For det aggregerede fit ses det, at Heston modellen klart outperformer både NIG fordelingen og normalfordelingen, da de grønne og røde grafer næsten ligger oveni hinanden for $T = 1/252$ og $T = 60/252$. For $T = 20/252$ er dog en lille forskel imellem den grønne og røde graf, men resultatet er stadig klart at foretrække ifht. de tilsvarende fit for normalfordelingen og NIG fordelingen.

4.4 Diskussion

Heston modellens parametre ses at fitte de empiriske logafkast næsten ligeså godt som NIG modellen for specifikke T -værdier. Det aggregerede fit er dog langt bedre for Heston modellen end for NIG modellen. Faktisk er det aggregerede fit for Heston modellen næsten ligeså godt som fittene for de specifikke T -værdier. Vi vurderer derfor, at Heston modellen sandsynligvis vil være god til at ramme de rigtige optionspriser, og samtidigt være god til at hedge med, da parametrene er stabile for forskellige T -værdier, hvilket tyder på, at modellen vil kunne opfange optionernes dynamik fra dag-til-dag. Ud fra vores analyse af modellerne under det fysiske P-mål vurderer vi, at Heston modellen vil være den bedste til at hedge med. Vi påpeger igen, at fordelingernes egenskaber ikke er de samme under det risikoneutrale sandsynligheds mål jf. diskussionen i afsnit 3.5.

5 Prisfastsættelse under det risikoneutrale sandsynlighedsmål

Prisen på et finansielt aktiv afhænger i høj grad af dets risiko, og da investorer typisk er risikoaverse, kræver de en risikopræmie for at holde et risikofyldt aktiv. For at prisfastsætte aktivet konsistent med resten af markedet, kræver det altså, at man justerer den forventede værdi med aktivets risikopræmie. En alternativ fremgangsmåde er at ændre sandsynlighedsmålet således, at det tager højde for risikopræmien og så blot tage forventningen under dette ændrede sandsynlighedsmål. Det ændrede sandsynlighedsmål kaldes det risikoneutrale sandsynlighedsmål (Q-mål) eller det ækvivalente martingal mål (EMM). Under det risikoneutrale sandsynlighedsmål er prisprocessen for aktivet diskonteret med den risikofri rente en martingal, og prisen på aktivet kan altså til ethvert tidspunkt findes ved at diskontere de forventede fremtidige payoff.

I dette afsnit gennemgår vi den nævnte fremgangsmåde i detaljer, hvor vi inddrager relevante sætninger og definitioner. Vores gennemgang bygger på Björk, kapitel 10 (Björk, 2004).

Vores markedsmodel består som nævnt i indledningen kun af to aktiver, nemlig det risikofrie aktiv S_t^0 (bankbogen, som vi har sat til numeraire) og det risikofyldte aktiv S_t^1 . En portefølje bestående af de to aktiver S_t^0 og S_t^1 defineres som:

Definition 5.1, (Björk, 2004, s. 143)

En portefølje/handelsstrategi er et par af stokastiske processer $H_t = (H_t^0, H_t^1)$ hvor H_t^0 repræsenterer mængden af aktiv 0 til tid t og H_t^1 er mængden af aktiv 1 til tid t . Værdien af en portefølje er så givet ved, $V(t, H) = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1$.

Det antages som regel, at man ikke kan altså skabe noget ud af intet i markedet. Markedet skal altså være arbitragefrit, hvor arbitrage defineres som:

Definition 5.2, (Björk, 2004, s. 92)

En portefølje $H_t = (H_t^0, H_t^1)$ er en arbitrage mulighed, hvis $V(0, H) = 0$, $V(T, H) \geq 0$ med sandsynligheden $P(V(T, H) > 0) > 0$.

Et marked er arbitragefrit hvis der ikke eksisterer nogen arbitrage muligheder.

Jævnfør argumentet i afsnit 2.1, er det i orden for os at antage, at markedet er arbitragefrit, idet vi netop har valgt at fokusere på likvide produkter, hvor et stort antal agenter sørger for at eliminere arbitrage muligheder. Givet et arbitragefrit marked, kan vi benytte de to fundamentale teoremer indenfor asset pricing, der behandler henholdsvis eksistens og entydighed af et ækvivalent martingal sandsynlighedsmål.

Definition 5.3, *First fundamental theorem of asset pricing*, (Björk, 2004, s. 137)

Markedsmodellen er essentielt arbitragefri, hvis og kun hvis der eksisterer et ækvivalent martingalmål (EMM), dvs. et mål $Q \sim P$, således at processen $e^{-rt} S_t^1$ er en martingal under Q .

Definition 5.3 er ifølge Björk noget upræcis og ordet essentielt indikerer, at sætningen ikke bygger på et matematisk bevis. Definition 5.3 har karakter af et folkemunde indenfor matematisk finansiering, dvs. at alle kender den, og den antages at gælde. Indsigten fra Definition 5.3 er, at der eksisterer et EMM, hvis antagelsen om et arbitragefrit markedet er opfyldt. Inden vi gennemgår det andet fundamentale teorem, introducerer vi følgende definitioner.

Definition 5.4 (Björk, 2004, s. 81)

En portefølje H_t er selvfinansierende, hvis der ikke tilføjes midler til den eller fjernes midler fra den. En ændring i porteføljens værdi sker altså udelukkende som følge af ændringer i priser. Der gælder altså, at: $dV(t, H) = H_t^0 dS_t^0 + H_t^1 dS_t^1$.

Definition 5.5, (Björk, 2004, s. 111)

Et afledt aktiv med payoff X til udløbstidspunktet T kan *opnås*, hvis der eksisterer en portefølje H således at $V(T, H) = X$.

En sådan portefølje kaldes opnåelig eller en replikerende portefølje for X .

Et marked er komplet hvis alle payoff's kan *opnås* via en selvfinansierende portefølje.

Definition 5.6, *Second fundamental theorem*, (Björk, 2004, s. 146)

Antag at markedet er arbitragefrit. Markedet er da komplet hvis og kun hvis det ækvivalente martingale mål er unikt.

Når et marked er arbitragefrit eksisterer der altså et EMM, og hvis markedet desuden er komplet er dette EMM altså unikt.

Vi ser nu på et finansielt aktiv (i vores tilfælde en option) der udbetaler X til tid T . Prisprocessen for dette aktiv defineres som $\Pi(t, X)$. For at prisen $\Pi(t, X)$ skal være konsistent med markedet, er der ifølge Björk to grundlæggende fremgangsmåder til at finde prisudtrykket på (Björk, 2004, s. 147):

1. Det finansielle aktiv skal prisfastsættes på en sådan måde, at det er konsistent med priserne på det underliggende aktiv. Mere præcist bør man kræve, at det udvidede marked $\Pi(t, X)$, S_t^0 og S_t^1 er fri for arbitrage muligheder.
2. Hvis fordringen er opnåelig med en selvfinansierende portefølje H , så er den eneste rimelige pris givet ved $\Pi(t, X) = V(t, H)$.

I den første fremgangsmåde kræves der altså et arbitragefrit udvidet marked. Det første fundamentale teorem siger så, at der eksisterer et EMM Q for den udvidede markeds model. Ved at antage eksistensen af en konstant rente (knyttet til det risikofrie aktiv) fås ifølge Björk, at prisen for et afledt aktiv er en martingale under Q , og prisudtrykket bliver:

$$e^{-rt} \Pi(t, X) = e^{-rT} E^Q[X] \Leftrightarrow \Pi(t, X) = e^{-r(T-t)} E^Q[X] \quad (5.1)$$

I den anden fremgangsmåde antages det, at X kan replikeres med en selvfinansierende portefølje. Siden der således ikke er forskel mellem at holde det afledte aktiv eller den replikerende portefølje fra et finansielt synspunkt, må deres priser være ens, dvs. $\Pi(t, X) = V(t, H)$. Ved at diskontere med den risikofrie rente fås:

$$e^{-rt} \Pi(t, X) = e^{-rt} V(t, H) \quad (5.2)$$

Den diskonterede selvfinansierende portefølje V er en martingal under Q og venstresiden i udtryk (5.2) må derfor også være en martingal under Q .

Da vi nu ved, at venstresiden i (5.2) er en martingal, kan vi bruge resultatet fra (5.1) og for alle opnåelige payoff X gælder der altså:

$$e^{-rt} V(t, H) = e^{-rT} E^Q[X] \Leftrightarrow V(t, H) = e^{-r(T-t)} E^Q[X] \quad (5.3)$$

Dette prisudtryk holder for alle selvfinansierende porteføljer under ethvert martingal mål Q . Forskellige valg af Q kan resultere i forskellige prisprocesser for et payoff på X , men hvis X er opnåelig med en selvfinansierende portefølje, så vil alle porteføljer give den samme prisproces.

De to prisfastsættelsesmetoder gennemgået ovenfor giver os den samme pris. I et komplet marked uden arbitrage er prisen entydigt bestemt. I et arbitragefrit marked, der ikke er komplet, er priserne ikke længere entydigt bestemt. Der eksisterer således flere EMM, der giver de samme priser som er konsistente med, at der ikke må være arbitrage i markedet. I Black Scholes modellen kan det vises, at alle payoff kan opnås med en selvfinansierende portefølje og der eksisterer således et entydigt bestemt EMM (Björk, 2004, s. 157). Det kan vises, at hypotesen om komplette markeder fejler hvis:

- Udviklingen i det underliggende aktiv indeholder spring (som i vores NIG model)
- Det underliggende aktiv har stokastisk volatilitet, da markedsprisen på volatilitetsrisiko ikke kan fastsættes, idet volatilitet ikke er et handlet aktiv (som i vores Heston model).²³

For at prisfastsætte optioner med den risikoneutrale prisfastsættelsesformel (5.1) er vi nødt til at vælge et af de potentielt mange martingal sandsynligheds mål (Rasmus, 2006, s. 38). I afsnit 5.1 og 5.2 udleder vi Black Scholes, NIG og Heston modellerne under et Q-mål med udgangspunkt i, at vi kender dynamikken for logafkastet i modellerne under det fysiske sandsynlighedsmål P jf. (3.7), (3.14) og (4.2).

5.1 Udledning af Black Scholes og NIG modellen med Esscher transformation

Vi vil i dette afsnit benytte Esscher transformationen til at forskyde prisprocessen under det fysiske sandsynlighedsmål P til et risikoneutralt sandsynlighedsmål Q , således at den diskonterede prisproces er en martingal under dette Q -mål. Esscher transformationen kan således bruges til at prisfastsætte optioner, hvor logafkastet for det underliggende aktiv antages at følge en Lévy proces, hvilket som nævnt inkluderer både den brownske bevægelse og NIG processen. Den skalar/vektor man forskyder den oprindelige proces under P -målet med, for at komme til et risikoneutralt Q -mål kaldes Esscher parameteren og det er den vi er interesserede i at finde. Vi tager udgangspunkt i (Gerber & Shiu, 1994).

Antag at logafkastet X_t er en Lévy proces, således at X_t er en stationær stokastisk proces, med $X_0 = 0$ og uafhængige tilvækster. Prisprocessen for det underliggende aktiv er så givet ved:

²³ V er ikke et handlet aktiv i vores markedsmodel, men i den virkelige verden eksisterer der produkter såsom variance swaps hvormed handel med volatilitet er mulig.

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad t \geq 0 \quad (5.4)$$

Vi definerer den tilhørende fordelings- og tæthedsfunktion for den stokastiske proces som:

$$P(x, t) = \Pr(X_t \leq x) \text{ og } p(x, t) = \frac{d}{dx} P(x, t), \quad t > 0 \quad (5.5) \text{ og } (5.6)$$

Den momentgenererende funktion er da:

$$M(z, t) = E[e^{zX_t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} p(x, t) dx \quad (5.7)$$

Vi er nu interesserede i at forskyde tæthedsfunktionen ved en Esscher transformation og vi får:

$$p(x, t; h) = \frac{e^{hx} p(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} p(y, t) dy} \Leftrightarrow p(x, t; h) = \frac{e^{hx} p(x, t)}{M(h, t)} \quad (5.8)$$

Tæthedsfunktionen er her blevet forskudt med Esscher parameteren h . For at normere funktionen divideres der med $\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} p(y, t) dy$, således at den nye tæthedsfunktion også har en aggregeret sandsynlighed på 1. Idet der ydermere gælder, at den eksponentielle funktion altid positiv, har vi sikret, at den nye funktion også er en tæthedsfunktion blot med omfordeling af den oprindelige sandsynlighedsmasse. Den momentgenererende funktion for den forskudte funktion er givet ved:

$$M(z, t; h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} p(x, t; h) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \frac{e^{hx} p(x, t)}{M(h, t)} dx = \frac{1}{M(h, t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(z+h)x} p(x, t) dx = \frac{M(z+h, t)}{M(h, t)} \quad (5.9)$$

Vi ønsker nu at finde det $h = h^Q$ hvor sandsynlighedsmassen bliver omfordelt på sådan en måde, at den diskonterede prisproces er en martingal under det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q dvs.:²⁴

$$S_0 = E^Q[e^{-rt} S_t] \Leftrightarrow S_0 = S_0 e^{-rt} E^Q[e^{X_t}] \Leftrightarrow e^{rt} = E^Q[e^{X_t}] \Leftrightarrow e^{rt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^x p(x, t; h^Q) dx \Leftrightarrow e^{rt} = M(1, t; h^Q) \quad (5.10)$$

Da processen er stationær og har uafhængige tilvækster, må der gælde, at h^Q ikke afhænger af t . I appendiks B viser vi, at $M(1, t; h^Q) = M(1, 1; h^Q)^t$ og der gælder derfor:

$$e^{rt} = M(1, t; h^Q) \Leftrightarrow e^{rt} = M(1, 1; h^Q)^t \Leftrightarrow e^r = M(1, 1; h^Q) \Leftrightarrow r = \ln(M(1, 1; h^Q)) \quad (5.11)$$

Vi kan nu finde h^Q ud fra den momentgenererende funktion jf. (5.11). Esscher transformationen med parameteren h^Q giver os et risikoneutralt sandsynlighedsmål Q . Selvom det kan vises, at h^Q er unikt, er det ikke umuligt, at der findes andre ækvivalente martingal sandsynlighedsmål (Delbaen &

²⁴ Vi antager, at renten er deterministisk.

Haezendonck, 1989). For Black Scholes kan det vises, at det ækvivalente martingal sandsynlighedsmål er unik, mens der for NIG modellen findes et helt kontinuum af ækvivalente martingal mål (Rydberg, 1997, s. 9).

Vi kender altså nu sandsynlighedsfordelingen for S under et risikoneutralt sandsynlighedsmål Q og vi kan derfor beregne prisen for en calloption. Vi finder først grænsen, hvor calloptionen er in-the-money til tid T :

$$S_T > K \Leftrightarrow S_0 e^{X_T} > K \Leftrightarrow X_T > \ln(K/S_0) \quad (5.12)$$

Vi vil nu bestemme prisen på en calloption med strike K .

$$\begin{aligned} f_C &= E^Q \left[e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \right] = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x > \ln(K/S_0)\}} (S_0 e^x - K) p(x, T, h^Q) dx \Leftrightarrow \\ f_C &= e^{-rT} \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} (S_0 e^x - K) p(x, T, h^Q) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Vi splitter nu prisfunktionen op i 2 integraler:

$$f_C = e^{-rT} S_0 \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} \underbrace{e^x p(x, T, h^Q)}_1 dx - K e^{-rT} \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} p(x, T, h^Q) dx \quad (5.14)$$

I det følgende omskriver vi integranden, **1** vha. (5.8):

$$p(x, T, h^Q) = \frac{e^{h^Q x} p(x, T)}{M(h^Q, T)} \Leftrightarrow e^x p(x, T, h^Q) = \frac{e^{(h^Q+1)x} p(x, T)}{M(h^Q+1, T)} \quad (5.15)$$

Vi benytter igen (5.8) og substituerer tælleren i (5.15) med udgangspunkt i følgende udtryk:

$$p(x, T, h^Q+1) = \frac{e^{(h^Q+1)x} p(x, T)}{M(h^Q+1, T)} \Leftrightarrow e^{(h^Q+1)x} p(x, T) = p(x, T, h^Q+1) M(h^Q+1, T) \quad (5.16)$$

Integranden, **1** udtrykt i (5.15) kan så jf. (5.16) omskrives til:

$$e^x p(x, T, h^Q) = p(x, T, h^Q+1) \frac{M(h^Q+1, T)}{M(h^Q, T)} \Leftrightarrow e^x p(x, T, h^Q) = p(x, T, h^Q+1) M(1, T, h^Q) \quad (5.17)$$

Udtrykket kan reduceres yderligere, idet der fra (5.11) gælder, at $M(1, T, h^Q) = M(1, 1, h^Q)^T = e^{rT}$:

$$e^x p(x, T, h^Q) = e^{rT} p(x, T, h^Q+1) \quad (5.18)$$

Vi indsætter (5.18) i (5.14) og reducerer prisfunktionen for en calloption til:

$$\begin{aligned}
f_C &= e^{-rT} S_0 \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} e^{rT} p(x, T, h^Q + 1) dx - K e^{-rT} \int_{\ln(K/S_0)}^{\infty} p(x, T, h^Q) dx \Leftrightarrow \\
f_C &= S_0 \left(1 - \int_{-\infty}^{\ln(K/S_0)} p(x, T, h^Q + 1) dx \right) - K e^{-rT} \left(1 - \int_{-\infty}^{\ln(K/S_0)} p(x, T, h^Q) dx \right) \Leftrightarrow \\
f_C &= S_0 (1 - P(\ln(K/S_0), T, h^Q + 1)) - K e^{-rT} (1 - P(\ln(K/S_0), T, h^Q))
\end{aligned} \quad (5.19)$$

Med udgangspunkt i put-call pariteten (2.1), kan prisen for en putoption let findes til:

$$f_P = f_C - S_0 + K e^{-rT} \Leftrightarrow f_P = K e^{-rT} \cdot P(\ln(K/S_0), T, h^Q) - S_0 \cdot P(\ln(K/S_0), T, h^Q + 1) \quad (5.20)$$

Vi ønsker nu at finde prisen for en call- og en putoption udtrykt ved normalfordelingen og NIG fordelingen. Når vi kender $P(x, t)$ kan vi finde $P(x, t; h^Q)$ ved hjælp af den tilhørende momentgenererende funktion. De momentgenererende funktioner, $M(z)$ for henholdsvis normalfordelingen og NIG fordelingen er givet i (3.19) og (3.20).²⁵

5.1.1 Black Scholes under Q-mål

I Black Scholes modellen antages det, at logafkast er normalfordelt, således at:

$$X_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \quad (5.21)$$

Vi benytter (5.9) og finder den modificerede momentgenererende funktion ud fra (3.19) for normalfordelingen givet h^Q :

$$\begin{aligned}
M(z, t; h^Q) &= \frac{M(z + h^Q, t)}{M(h^Q, t)} \Leftrightarrow M(z, t; h^Q) = \frac{\exp\left(\mu(z + h^Q) + \frac{1}{2}\sigma^2(z + h^Q)^2\right)^t}{\exp\left(\mu h^Q + \frac{1}{2}\sigma^2(h^Q)^2\right)^t} \Leftrightarrow \\
M(z, t; h^Q) &= \exp\left(\left((\mu + h^Q\sigma^2)z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right)t\right)
\end{aligned} \quad (5.22)$$

Vi kan nu finde de nødvendige momenter for den forskudte normalfordeling henholdsvis middelværdi og varians ved at differentiere den momentgenererende funktion med z jf. proceduren i afsnit 3.3. Momenterne findes til $\kappa_1^Q = (\mu + h^Q\sigma^2)t$ og $\kappa_2^Q = \sigma^2 t$, hvor det bemærkes, at $\kappa_2^P = \kappa_2^Q$. Den modificerede fordelingsfunktion er således givet ved:

$$P(x, t; h^Q) = N(x; (\mu + h^Q\sigma^2)t, \sigma^2 t) \quad (5.23)$$

²⁵ Det bemærkes, at der gælder $M(z, t) = M(z)^t$

Vi kan desuden finde h^Q ud fra (5.11) og den modificerede momentgenererende funktion i (5.22):

$$r = \ln(M(1,1;h^Q)) \Leftrightarrow r = \ln\left(\exp\left(\mu + h^Q\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) \Leftrightarrow h^Q = \frac{r - \mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \quad (5.24)$$

Vi indsætter (5.22) og (5.23) i prisudtrykket (5.19) for en calloption (5.19) og får:

$$\begin{aligned} f_C &= S_0 \left(1 - N\left(\ln(K/S_0); (\mu + (h^Q + 1)\sigma^2)T, \sigma^2 T\right)\right) - Ke^{-rT} \left(1 - N\left(\ln(K/S_0); (\mu + h^Q\sigma^2)T, \sigma^2 T\right)\right) \Leftrightarrow \\ f_C &= S_0 \left(1 - N\left(\ln(K/S_0); \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)\right) - Ke^{-rT} \left(1 - N\left(\ln(K/S_0); \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)\right) \Leftrightarrow \\ f_C &= S_0 N\left(\frac{\ln(S_0/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; 0,1\right) - Ke^{-rT} N\left(\frac{\ln(S_0/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; 0,1\right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Vi ser at udtrykket reduceres til den kendte Black Scholes formel. Ud fra put call pariteten (2.1) angiver vi også prisen for en putoption:

$$f_P = Ke^{-rT} N\left(-\frac{\ln(S_0/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; 0,1\right) - S_0 N\left(-\frac{\ln(S_0/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; 0,1\right) \quad (5.26)$$

5.1.2 NIG modellen under Q-mål

I NIG modellen antages det, at logafkast er NIG fordelt, således at:

$$X_t \sim NIG(x; \alpha, \beta, \mu \cdot t, \delta \cdot t) \quad (5.27)$$

Vi benytter igen (5.9) og finder den momentgenererende funktion ud fra (3.20) for NIG fordelingen givet h^Q :

$$M(z, t; h^Q) = \frac{M(z + h^Q, t)}{M(h^Q, t)} = \frac{\exp(\mu(z + h^Q) + \delta(\gamma - \gamma_{z+h^Q}))^t}{\exp(\mu h^Q + \delta(\gamma - \gamma_{h^Q}))^t} = \exp((\mu z + \delta(\gamma_{h^Q} - \gamma_{z+h^Q}))t) \quad (5.28)$$

$$\text{hvor } \gamma_z = \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2}$$

Det ses altså, at $M(z, t) = \exp((\mu z + \delta(\gamma - \gamma_z))t)$ er lig $M(z, t; h^Q) = \exp((\mu z + \delta(\gamma_{h^Q} - \gamma_{z+h^Q}))t)$ hvis vi skubber β således at $\beta^* = \beta + h^Q$. Dvs. parametrene α, μ og δ ændrer sig ikke under transformationen.

Fordelingsfunktionen er således givet ved:

$$F(x, t; h^Q) = \text{NIG}(x; \alpha, \beta^*, \mu t, \delta t) \quad (5.29)$$

Vi finder nu h^Q for NIG fordelingen ud fra ligning (5.11):

$$\begin{aligned} r = \ln(M(1, 1; h^Q)) &\Leftrightarrow r = \ln(\exp((\mu + \delta(\gamma_{h^Q} - \gamma_{1+h^Q})))) \Leftrightarrow \\ r = \mu + \delta &\left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + h^Q)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1 + h^Q)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Denne ligning kan vises at have løsningen (Rasmus, 2006, s. 41):

$$\beta^* = \beta + h^Q = -\frac{1}{2} + \frac{r - \mu}{\delta} \sqrt{\left(1 + \frac{(r - \mu)^2}{\delta^2}\right)^{-1} \alpha^2 - \frac{1}{4}} \quad (5.31)$$

Vi indsætter (5.29) og (5.31) i udtryk (5.19) og finder prisen for en calloption:

$$f_C = S_0 \left(1 - \text{NIG}(\ln(K/S_0); \alpha, \beta^* + 1, \mu \cdot T, \delta \cdot T)\right) - Ke^{-rT} \left(1 - \text{NIG}(\ln(K/S_0); \alpha, \beta^*, \mu \cdot T, \delta \cdot T)\right) \quad (5.32)$$

Det er her ikke muligt at ændre grænsen og invertere ” $1 - \text{NIG}$ ”, idet NIG fordelingen ikke er en symmetrisk fordeling. Prisen for putoptionen bliver:

$$f_P = Ke^{-rT} \cdot \text{NIG}(\ln(K/S_0); \alpha, \beta^*, \mu \cdot T, \delta \cdot T) - S_0 \cdot \text{NIG}(\ln(K/S_0); \alpha, \beta^* + 1, \mu \cdot T, \delta \cdot T) \quad (5.33)$$

5.2 Udledning af Heston modellen under Q-mål

Vi vil nu finde prisen for en call- og en putoption, der er skrevet på det underliggende aktiv, S , hvor dynamikken for S er givet ved Hestons stokastiske volatilitetsmodel jf. (4.1). Prisen på en option er da bestemt ud fra processerne for S og V .

I appendiks D.3 udleder vi den PDE, som skal være opfyldt af ethvert afledt aktiv, $f(S, V, t)$, der udelukkende afhænger af S, V og t . PDE'en er gengivet i (5.34).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + (\kappa(\theta - V) - \lambda(S, V, t)) \frac{\partial f}{\partial V} + rS \frac{\partial f}{\partial S} = rf \quad (5.34)$$

I PDE'en repræsenterer $\lambda(S, V, t)$ markedsprisen på volatilitetsrisiko og da volatiliteten ikke er et handlet aktiv ligesom S , kan vi ikke uden videre bestemme $\lambda(S, V, t)$.²³ Heston antager i sin originale artikel, (Heston, 1993, s. 3 (329)), at volatilitetsrisikoen er en lineær funktion af V givet ved $\lambda(S, V, t) = \lambda V$. For at løse PDE'en skal vi finde de risikoneutrale processer for S og V således, at $e^{-rt} f(S, V, t)$ er en martingal under det risikoneutrale sandsynlighedsmål, Q . Vi finder de risikoneutrale processer ved at parallelforskyde med følgende risikopræmier:

$$dS_t = \mu S_t dt + (r - \mu) S_t dt + S_t \sqrt{V_t} \left(dW_t^1 - \frac{r - \mu}{\sqrt{V_t}} dt \right) \Leftrightarrow dS_t = r S_t dt + S_t \sqrt{V_t} d\hat{W}_t^1 \quad (5.35)$$

$$dV_t = (\kappa(\theta - V_t) - \lambda V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} \left(dW_t^2 + \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{V_t} dt \right) \Leftrightarrow dV_t = (\kappa + \lambda) \left(\frac{\kappa \theta}{\kappa + \lambda} - V_t \right) dt + \sigma \sqrt{V_t} d\hat{W}_t^2 \Leftrightarrow$$

$$dV_t = \kappa^* (\theta^* - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} d\hat{W}_t^2, \text{ hvor } \kappa^* = \kappa + \lambda, \quad \theta^* = \frac{\kappa \theta}{\kappa + \lambda} \quad (5.36)$$

Som kontrol undersøger vi ved hjælp af Ito's lemma om $g(S, V, t) = e^{-rt} f(S, V, t)$ er en martingal under Q. Til dette skal vi benytte df , som er udledt i appendiks D.2.

$$dg = d(e^{-rt} f) \Leftrightarrow dg = e^{-rt} (df - r f dt) \Leftrightarrow$$

$$dg = e^{-rt} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS_t + \frac{\partial f}{\partial V} dV_t - r f dt}_{df} \right) \Leftrightarrow$$

$$dg = e^{-rt} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \kappa^* (\theta^* - V) \frac{\partial f}{\partial V} - r f \right) dt}_{=0 \text{ jf. PDE}} + e^{-rt} \sqrt{V} \left(\frac{\partial f}{\partial S} S d\hat{W}_t^1 + \frac{\partial f}{\partial V} \sigma d\hat{W}_t^2 \right) \right) \quad (5.37)$$

Det ses, at dt -leddet forsvinder, når vi substituerer PDE'en fra (5.34) ind i (5.37). Det betyder, at $g(S, V, t) = e^{-rt} f(S, V, t)$ ikke har nogen drift og $g(S, V, t)$ er således en martingal under Q, hvilket betyder, $f(S, V, 0) = e^{-rt} E^Q(f(S, V, t))$. Under det under ækvivalente martingal sandsynlighedsmål er volatilitetsrisikoen $\lambda(S, V, t)$ således elimineret. Som nævnt i indledningen til dette kapitel er volatiliteten ikke et handlet aktiv, og markedet i Heston modellen er altså ikke komplet da det fundne martingal sandsynligheds mål ikke er unikt.

Heston (Heston, 1993, s. 5 (331)) udleder prisen for en calloption, hvor han sætter terminalbetingelsen $f(S, V, T) = \max(S_T - K, 0)$ og analogt til Black Scholes gætter han på, at løsningen har formen:

$$f(S, V, t) = S P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2 \quad (5.38)$$

Her er P_1 og P_2 er betingede sandsynligheder givet ved:²⁶

$$P_j = \Pr(X_{T,j} \geq \ln(K/S_0) | X_0 = 0, V_0) \quad (5.39)$$

Der gælder, at $X_{t,j}$ for $j = 1, 2$ er givet ved:

$$\begin{aligned} dX_{t,1} &= \left(r + \frac{1}{2}V_{t,1}\right)dt + \sqrt{V_{t,1}}d\hat{W}_t^1 & dX_{t,2} &= \left(r - \frac{1}{2}V_{t,2}\right)dt + \sqrt{V_{t,2}}d\hat{W}_t^1 \\ dV_{t,1} &= (\kappa^* - \rho\sigma)\left(\frac{\kappa^*\theta^*}{\kappa^* - \rho\sigma} - V_{t,1}\right)dt + \sigma\sqrt{V_{t,1}}d\hat{W}_t^2 & dV_{t,2} &= \kappa^*(\theta^* - V_{t,2})dt + \sigma\sqrt{V_{t,2}}d\hat{W}_t^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Heston viser, at P_1 og P_2 har følgende semianalytiske løsninger:

$$\begin{aligned} P_j(x, \kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho, V_0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(-i\phi x + C(T, \phi) + D(T, \phi)V_0)}{i\phi} \right) d\phi \\ C(T, \phi) &= i\phi rT + \frac{a}{\sigma^2} \left((b_j - i\phi\rho\sigma + d)T - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{dT}}{1 - g} \right) \right) \text{ og } D(T, \phi) = \frac{b_j - i\phi\rho\sigma + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{dT}}{1 - ge^{dT}} \right) \\ g &= \frac{b_j - i\phi\rho\sigma + d}{b_j - i\phi\rho\sigma - d} \text{ og } d = \sqrt{(i\phi\rho\sigma - b_j)^2 - \sigma^2(2\mu_j i\phi - \phi^2)}, \text{ hvor der for } j = 1, 2 \text{ gælder:} \\ \mu_1 &= \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa^*\theta^*, \quad b_1 = \kappa^* - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa^*, \quad x = \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Udtrykket kan ved første øjekast virke voldsomt, men kan dog forholdsvis let beregnes med en numerisk integrationsmetode, såsom quadl i Matlab (MathWorks 2).

²⁶ I Hestons artikel, (Heston, 1993, s. 5 (331)) ses det, at $P_j = \Pr(X_{T,j} \geq \ln(K) | X_0 = \ln(S_0), V_0)$, som vi har valgt at omskrive en smule.

6 Den generelle optionsmodel

I forrige kapitel udledte vi prisen på en call- og en putoption med udgangspunkt i normalfordelingen, NIG fordelingen samt for Hestons stokastiske volatilitetsmodel. Vi vil i det følgende vise, at prisen for en call- og en putoption kan skrives på følgende generelle formler for alle 3 modeller.

$$\text{Calloption: } f_C = S_0 \cdot (1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q)) - K \cdot e^{-rT} (1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q)) \quad (6.1)$$

$$\text{Putoption: } f_P = K \cdot e^{-rT} P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q) - S_0 \cdot P(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q) \quad (6.2)$$

Her angiver P en fordelingsfunktion med grænsen $\ln(K/S_0)$ og med enten parametrene Ω_1^Q eller Ω_2^Q , hvor der gælder:

$$\lim_{\ln(K/S_0) \rightarrow -\infty} P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = 0, \quad \lim_{\ln(K/S_0) \rightarrow \infty} P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)}{\partial \ln(K/S_0)} \geq 0, \text{ for } j = 1, 2 \quad (6.3)$$

I det følgende vil vi beskrive hvorledes P , Ω_1^Q og Ω_2^Q er defineret for de 3 modeller. Vi viser derefter, at $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ opfylder de beskrevne krav (6.3).

Definition 6.1 - Black Scholes modellen

Den underlæggende fordeling er normalfordelingen, som tager imod 2 parametre, og vi fandt i afsnit 5.1.1, at der må gælde, at $\Omega_1^Q = \left[\left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right]$ og $\Omega_2^Q = \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right]$. Fordelingsfunktionen P er givet ved: $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = N(\ln(K/S_0); \Omega_j^Q)$ for $j = 1, 2$.

Definition 6.2 - NIG modellen

NIG fordelingen, tager imod 4 parametre, og vi fandt i afsnit 5.1.2, at der må gælde, at $\Omega_1^Q = [\alpha, \beta^* + 1, \mu \cdot T, \delta \cdot T]$ og $\Omega_2^Q = [\alpha, \beta^*, \mu \cdot T, \delta \cdot T]$, hvor β^* er givet ved (5.31). Fordelingsfunktionen, P er givet ved: $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = NIG(\ln(K/S_0); \Omega_j^Q)$ for $j = 1, 2$.

Definition 6.3 - Heston modellen

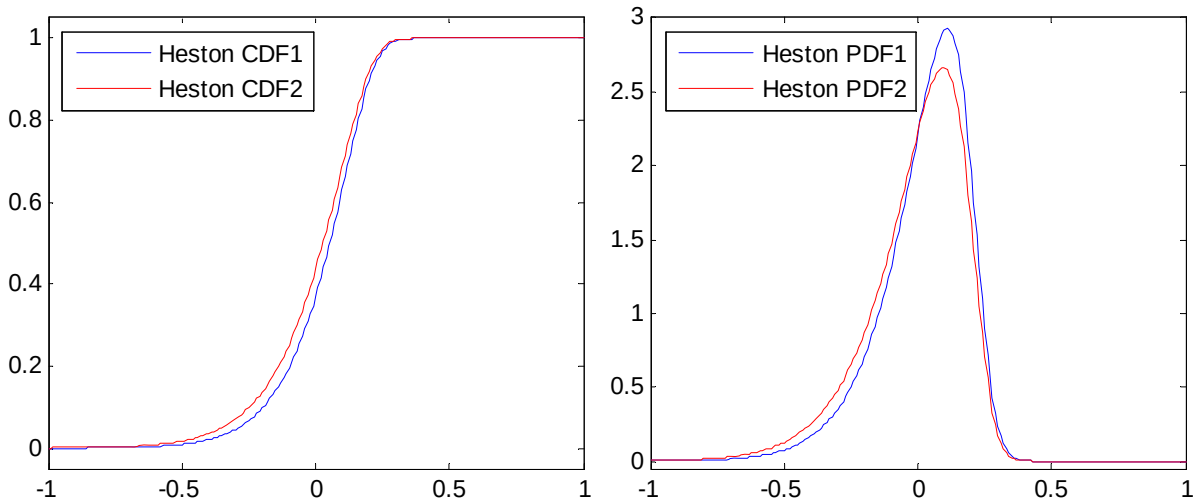
Selvom Heston modellen er en stokastisk volatilitetsmodel viser vi i det følgende, at den også kan skrives på den samme generelle formel som Black Scholes modellen og NIG modellen. Vi sætter $\Omega_j^Q = [\kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho, V_0, r, T, j]$ og definerer $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = 1 - P_j$, for $j = 1, 2$ hvor P_j er de oprin-

delige betingede sandsynligheder fra Heston modellen jf. (5.39), (5.40) og (5.41) gennemgået i afsnit 5.2.

Det er tydeligt, at $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ er veldefinerede fordelingsfunktioner for Black Scholes og NIG modellen, som opfylder kravene givet ved ligning (6.3), da $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ her er givet ved henholdsvis en normalfordeling og en NIG fordeling. For Heston modellen plotter vi $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ og $\frac{\partial P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)}{\partial \ln(K/S_0)}$ som funktion af $\ln(K/S_0)$ i henholdsvis Figur 6.1a og Figur 6.1b for at overbevise os om, at $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ også for Heston modellen er en veldefineret fordelingsfunktion, der opfylder kravene i (6.3). Parametrene, Ω_j^Q kommer fra vores kalibrering i kapitel 8, og er altså fundet ud fra virkelige data fra d. 02-10-2008, men skal her blot antages eksogent givet. Vi anvender følgende parametre for Ω_j^Q :

$$\kappa^* = 7,114; \theta^* = 0,096; \sigma = 1,095; \rho = -0,850; V_0 = 0,193; r = 0,042; T = 0,210 \text{ og } S_0 = 1114,51$$

Figur 6.1a og Figur 6.1b



Figur 6.1a viser et plot af fordelingsfunktionen (CDF), $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ for $j=1,2$ for Heston modellen, mens figur 6.1b viser et plot af den tilhørende tæthedsfunktion (PDF) for $j = 1,2$ for Heston modellen.²⁷

²⁷ Anvendt kode kan ses i filen `plotfordelingsfunktioner02_10_2008.m`

I Figur 6.1a ses det tydeligt, at Heston modellen opfylder $\lim_{\ln(K/S_0) \rightarrow -\infty} P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = 0$,

$\lim_{\ln(K/S_0) \rightarrow \infty} P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = 1$ og i Figur 6.1b ses det, at $\frac{\partial P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)}{\partial \ln(K/S_0)} \geq 0$. Dette medfører, at

$P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ er en veldefineret fordelingsfunktion for Heston modellen jf. (6.3).

Vi viser nu, at $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ kan tolkes som sandsynligheden for at en calloption udløber out-of-the-money for alle 3 optionsmodeller:

$$P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = \Pr(X < \ln(K/S_0)) \Leftrightarrow P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q) = \Pr(S_T < K) \quad (6.4)$$

For alle 3 optionsmodeller gælder der særligt, at $P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q)$ er den risikoneutrale sandsynlighed for at en calloption udløber out-of-the-money, idet de underliggende processer netop for Ω_2^Q ses at være de risikoneutrale processer.

Vi har altså vist, at den eneste forskel på prisudtrykkene for de 3 optionsmodeller er deres fordelingsfunktioner $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$. Dette letter sammenligningen af modellerne samt beregningen af de partielle afledte til brug ved hedging. I de følgende to afsnit sammenligner vi først de risikoneutrale out-of-the-money sandsynligheder for de 3 modeller, og finder dernæst de partielle afledte.

6.1 Risikoneutrale out-of-the-money sandsynligheder for de 3 optionsmodeller

Vi vil nu sammenligne de risikoneutrale out-of-the-money sandsynligheder for de 3 optionsmodeller. Parametrene kommer igen fra vores kalibrering i kapitel 8, og er altså fundet ud fra virkelige data (fra d. 02-10-2008). De skal her blot anses som eksogent givne:

$$S_0 = 1114,51; T = 0,210; r = 0,042$$

Black Scholes modellens parametre afhænger af optionens strike, og da der er 13 forskellige strikes denne dato giver Black Scholes modellen 13 forskellige parametre:

Tabel 6.1

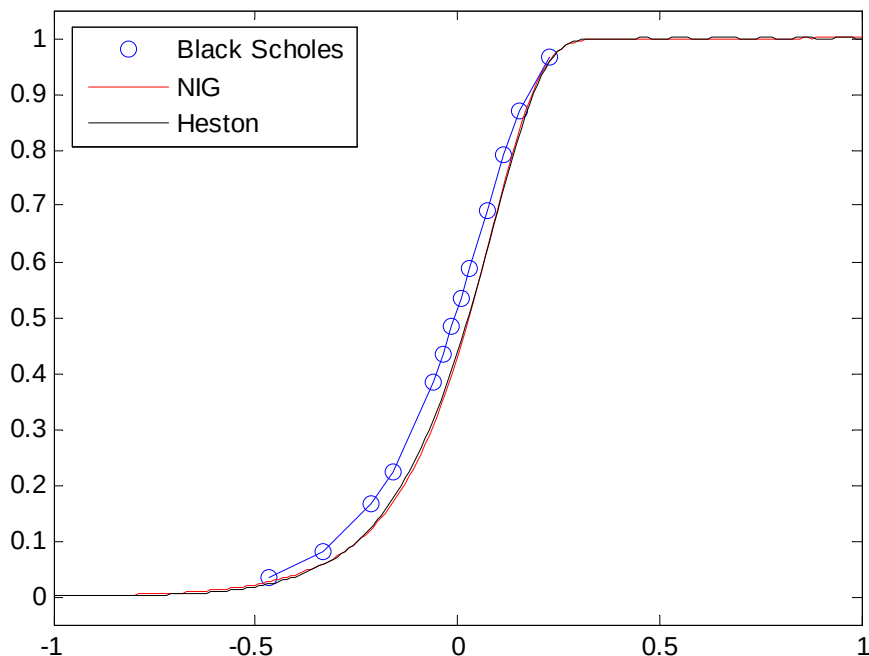
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}
0,529	0,489	0,453	0,427	0,388	0,381	0,371	0,361	0,353	0,334	0,315	0,297	0,272

NIG modellens parametre er : $\alpha = 25,082$; $\mu = 1,149$; $\delta = 0,884$ og β^* der beregnes med (5.31).

Heston modellen parametre er: $\kappa^* = 7,114$; $\theta^* = 0,096$; $\sigma = 1,095$; $\rho = -0,850$; $V_0 = 0,193$.

I nedenstående figur plotter vi fordelingsfunktionerne, $P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q)$ som funktion af $\ln(K/S_0)$ svarende til de risikoneutrale out-of-the-money sandsynligheder for alle 3 modeller:

Figur 6.2



Figur 6.2 viser $P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q)$ svarende til de risikoneutrale sandsynligheder for at en calloptionen udløber out-of-the-money. Da Black Scholes parameteren, σ afhænger af K , har vi kun kunne beregne 13 risikoneutrale sandsynligheder, som vi så har forbundet ved lineær interpolation.²⁷

I Figur 6.2 ses det, at NIG og Heston modellen fastsætter de risikoneutrale sandsynligheder som funktion af $\ln(K/S_0)$ meget ens, mens Black Scholes modellen derimod fastsætter de risikoneutrale sandsynligheder en smule højere. Ovenstående resultat afhænger selvfølgelig af de valgte parametre, men ved at anskue kalibrerede parametre for andre dage, får vi generelt samme resultat. Det er svært at vurdere, hvilken model, der giver de bedste estimer for den risikoneutrale sandsynlighed. Da Heston og NIG er mere avancerede end Black Scholes kunne man dog fristes til at tro at de giver det bedste resultat set i lyset af at de næsten er ens.

6.2 Partielle afledte

I indledningen beskrev vi, hvordan vi ønsker at sammenligne de 3 optionsmodeller med en delta hedge. Til brug for delta hedgen skal vi kende $\partial f / \partial S_0$ for alle 3 modeller. For Heston modellen skal vi desuden kende $\partial f / \partial V_0$.²⁸

Vi starter med at udlede $\partial f / \partial S_0$ for de 3 optionsmodeller med udgangspunkt i den generelle optionsmodel. Vores intuition er, at en calloption, der er langt in-the-money, bevæger sig i forholdet 1:1 med det underliggende aktiv, da der tilnærmelsesvis er 100% sandsynlighed for, at den udløber in-the-money, og der gælder altså, at $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} \partial f_C / \partial S_0 = 1$. Omvendt må en putoption langt in-the-money bevæge sig i forholdet 1:-1 og der må altså gælde $\lim_{S_0 \rightarrow 0} \partial f_P / \partial S_0 = -1$. Intuitionen for en option, der er langt out-of-the-money er, at den er insensitiv i forhold til det underliggende aktiv, da man ikke forventer, at der er nogen sandsynlighed for, at den udløber in-the-money. For en calloption må der i dette tilfælde derfor gælde, at $\lim_{S_0 \rightarrow 0} \partial f_C / \partial S_0 = 0$, mens der for en putoption må gælde, at $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} \partial f_P / \partial S_0 = 0$.

Inspireret af (Poulsen, 2007) benytter vi Eulers sætning til at udlede $\partial f / \partial S_0$ (Sydsæter, 2003, s. 412, sætning 2) da dette viser sig at være bekvemt at gøre ud fra den generelle optionsmodel.²⁹ Hvis $f(X, Y)$ er en C^1 -funktion og er homogen af grad 1 for enhver reel konstant, a , således at $f(aX, aY) = af(X, Y)$, så gælder der ifølge Eulers sætning:³⁰

$$f(X, Y) = X \cdot \partial f / \partial X + Y \cdot \partial f / \partial Y \quad (6.5)$$

Vi anskuer nu den generelle prisfunktion for en calloption fra (6.1):

$$f_C = S_0 \cdot \left(1 - P\left(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q\right)\right) - K \cdot e^{-rT} \left(1 - P\left(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q\right)\right) \quad (6.6)$$

Vi undersøger om den generelle prisfunktion er homogen af grad 1 i S_0 og K jf. Eulers sætning:

$$f_C(aS_0, aK) = aS_0 \cdot \left(1 - P\left(\ln(aK/aS_0), \Omega_1^Q\right)\right) - aK \cdot e^{-rT} \left(1 - P\left(\ln(aK/aS_0), \Omega_2^Q\right)\right) = af_C(S_0, K) \quad (6.7)$$

Da den generelle prisfunktion er homogen af grad 1, må der jf. Eulers sætning gælde:

²⁸ Se kapitel 9 for en gennemgang af hedging for alle 3 optionsmodeller.

²⁹ $\partial f / \partial K$ kan udledes helt analogt til $\partial f / \partial S_0$. Det har vi dog undladt.

³⁰ Vi forudsætter uden nærmere bevis, at alle vores prisfunktioner for put- og calloptioner er C^1 .

$$f_C = S_0 \cdot \partial f_C / \partial S_0 + K \cdot \partial f_C / \partial K_0, \quad (6.8)$$

hvor $\partial f_C / \partial S_0 = 1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q)$, $\partial f_C / \partial K_0 = -e^{-rT} (1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q))$

På samme måde kan vi udlede $\partial f_P / \partial S_0$ ud fra den generelle prisfunktion for putoptionen jf. (6.2):

$$f_P = K \cdot e^{-rT} P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q) - S_0 \cdot P(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q) \quad (6.9)$$

Det ses let, at den generelle prisfunktion for en putoption også er homogen af grad 1 i S_0 og K , så jf. Eulers sætning gælder der derfor:

$$f_P = K \cdot \partial f_P / \partial K_0 + S_0 \cdot \partial f_P / \partial S_0, \quad (6.10)$$

hvor $\partial f_P / \partial S_0 = -P(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q)$, $\partial f_P / \partial K_0 = e^{-rT} P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q)$

For alle 3 optionsmodeller ved vi, at $P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q)$ er en veldefineret fordelingsfunktion, så for alle 3 optionsmodeller gælder der, at $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} \partial f_C / \partial S_0 = 1$, $\lim_{S_0 \rightarrow 0} \partial f_P / \partial S_0 = -1$, $\lim_{S_0 \rightarrow 0} \partial f_C / \partial S_0 = 0$ og $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} \partial f_P / \partial S_0 = 0$, hvilket er i overensstemmelse med intuition fra indledningen af afsnittet.

Vi vil nu udlede $\partial f / \partial V_0$ for Heston modellen. Intuitionen er, at jo højere volatilitet der er i det underliggende aktiv, jo højere er værdien for både en call- og putoption, da gevinsten er nedadtil begrænset, men opadtil ubegrænset. Vi forventer derfor, at $\partial f / \partial V_0 > 0$. Vi differentierer nu den generelle prisfunktion for en calloption (6.1) i forhold til den initiale varians, V_0 for at udlede $\partial f / \partial V_0$ for Heston modellen:

$$\frac{\partial f_C}{\partial V_0} = S_0 \cdot \frac{\partial (1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_1^Q))}{\partial V_0} - K \cdot e^{-rT} \frac{\partial (1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_2^Q))}{\partial V_0} \quad (6.11)$$

Den partielle afledte V_0 findes ved at differentiere (5.41) og vi får:

$$\frac{\partial (1 - P(\ln(K/S_0), \Omega_j^Q))}{\partial V_0} = \frac{\partial P_j}{\partial V_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{D_j(T, \phi) e^{-i\phi \ln(K/S_0) + C_j(T, \phi) + D_j(T, \phi) V_0}}{i\phi} \right) d\phi, \quad j = 1, 2 \quad (6.12)$$

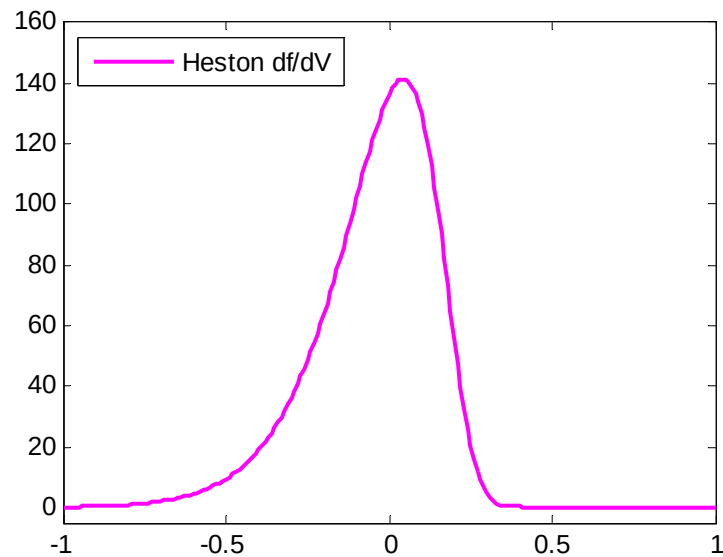
Ved at anskue put-call pariteten (2.1) kan det indses, at $\partial f_C / \partial V_0 = \partial f_P / \partial V_0$:

$$f_C - f_P = S_0 - K e^{-rT} \Rightarrow \frac{\partial f_C}{\partial V_0} - \frac{\partial f_P}{\partial V_0} = \frac{\partial (S_0 - K e^{-rT})}{\partial V_0} \Leftrightarrow \frac{\partial f_C}{\partial V_0} = \frac{\partial f_P}{\partial V_0} \quad (6.13)$$

Den partielle afledte $\partial f_P / \partial V_0$ er altså også givet ud fra (6.11) og (6.12).

I Figur 6.3 plotter vi $\partial f / \partial V_0 = \partial f_c / \partial V_0 = \partial f_p / \partial V_0$ for at kontrollere, om $\partial f / \partial V_0 > 0$. Vi benytter samme data som i Figur 6.1. Det ses i Figur 6.3, at $\partial f / \partial V_0$ som funktion af $\ln(K/S_0)$ altid er større end eller lig 0, hvilket er i overensstemmelse med vores forventning om, at højere volatilitet i det underliggende aktiv giver højere optionspris.

Figur 6.3



Figur 6.3 viser et plot af $\partial f / \partial V_0$ som funktion af $\ln(K/S_0)$ for Heston modellen. Det bemærkes at $\partial f / \partial V_0 > 0$.²⁷

7 Data

Vi har valgt at hente alle data fra Bloomberg.³¹ Datasættet består af følgende parametre:

$t, T, \hat{r}, r, \hat{S}_t, F_t, K, f_C$ og f_P .

I det følgende forklarer vi strukturen af vores datasæt og hvorfor vi netop har valgt at trække dette datasæt. Afsnittet har særligt stor vægt på optionsdata med henblik på, hvordan vi har valgt de forskellige strikes samt udløbstidspunkter og hvorledes vi har valgt at filtrere vores optionsdata for at fjerne uønsket bias. Sidst i afsnittet foretager vi en kontrol af data ved at undersøge om put-call pariteten holder indenfor rimelige afvigelser.

7.1 Dataperiode og priser

Vi har medtaget et halvt års data fra d. 01-10-2008 og frem til d. 31-03-2009. I denne periode har markedet udvist store udsving, hvilket skyldes den globale finanskrisen. Det ses eksempelvis ved, at S&P500 indekset i denne periode antager værdier i et stort interval, nemlig fra 677 til 1161.

Det er muligt at hente flere forskellige slags historiske priser på Bloomberg. I det følgende forklarer vi bid, ask, mid og last priserne og forklarer kort, hvilken pris vi vil benytte som repræsentant for den ”rigtige markedspris” og hvorfor.

Bid prisen repræsenterer den højeste udbudte pris i markedet en agent kan sælge til markedet for, der var tilgængelig, da markedet lukkede på den pågældende dag. På samme måde repræsenterer ask prisen den laveste udbudte pris i markedet en agent kan købe af markedet for, som var tilgængelig, da markedet lukkede på den pågældende dag. Bid og ask er begge tilbud eller ”quote”-priser, det vil sige, at det er priser som sælger/køber er villige til at indgå. Det er altså ikke priser som det pågældende finansielle produkt er blevet handlet til. Man kunne derfor synes, at de ikke er gode repræsentanter for markedsprisen. Markedsprisen må imidlertid tilhøre intervallet udspændt af bid og ask prisen, det såkaldte bid-ask spænd, idet ingen er villige til at sælge under bid prisen, og ingen er villige til at købe over ask prisen.

Last prisen repræsenterer handelsprisen på den sidst handlede ordre før markedet lukkede den pågældende dag. Fordelen ved last prisen som repræsentant for markedsprisen er, at det pågældende finansielle produkt netop er blevet handlet i markedet til denne pris, og at der således findes både en

³¹ I mappen ”Data fra Bloomberg” ses 13 Excelark, der trækker data for forskellige løbetider og over forskellige tidsperioder. Vi kunne ikke nøjes med at trække data til kun ét excelark, da vores Bloomberg-terminalen ikke kunne håndtere dette. Excelarket Data.xls har kæder til de førnævnte 13 excelark og indeholder således alt data samlet.

køber og sælger som mener, at denne pris er fair. Ulempen er dog, at der kan være bias imellem tidspunktet for last prisen og den ”rigtige markedspris”. Hvor bid og ask netop er de aktuelle quotes, kan last prisen godt være nogle minutter gammel, hvis produktet ikke er særlig likvidt. Last prisen er ofte mellem ask og bid prisen, men det er ikke umuligt, at last prisen er lavere end bid prisen eller højere end ask prisen. Der kan jo eksempelvis sagtens komme en lavere ask eller højere bid efter dagens sidste handel, hvilket gør last prisen højere end ask eller lavere end bid.

Vi har undersøgt, hvor tit last prisen rammer mellem bid ask spændet for vores optioner og vi finder, at det kun gælder for lidt over 50 % af optionspriserne. Vi vurderer derfor, at last prisen ikke er en god repræsentant for markedsprisen. Vi antager, at den ”rigtige markedspris” må ligge mellem bid og ask. Da det er svært at vurdere, hvilken pris i intervallet, der er den bedste repræsentant for markedsprisen, vælger vi som de fleste, at anvende mid prisen, der er et gennemsnit af bid og ask.

Vores Bloomberg terminal kan ikke trække de korrekte bid ask priser for vores futures, så her er vi nødsaget til at bruge last priser. Det er dog ikke et problem, idet futures er så likvide, at der ikke er noget særligt tidsbias. I afsnit 7.6 kontrollerer vi, hvor konsistente de tilhørende optionspriser og futurespriser er ved hjælp af put-call pariteten.

7.2 Futures pris, F_t til tid t med udløb T

Vi har valgt at trække futures priser i stedet for priser på aktieindekset, da det har en lang række fordele. I det følgende forklarer vi kort hvad en futures er og hvorfor den kan bruges i stedet for aktieindekset til at prisfastsætte optioner. Derefter gennemgår vi fordelene ved at benytte futures priser i stedet for priser på aktieindekset.

En futures er en kontrakt, der forpligter indehaveren til at købe et bestemt aktiv til et aftalt tidspunkt til en futures pris, hvor futures prisen er bestemt således, at futures kontrakten har en værdi på 0. Hvis der gælder, at $\hat{S}_0$ er prisen på aktieindekset, q er den kontinuerte dividenderate og T er tid til udløb for den tilhørende futures, så må sammenhængen mellem $\hat{S}_0$ og futures prisen til tid 0 være (Hull, 2005, s. 111):

$$\hat{S}_0 = F_0 e^{-(r-q)T} \quad (7.1)$$

Da vi i de generelle prisudtryk for en call- og en putoption fra (6.1) og (6.2) benytter S_0 i stedet for $\hat{S}_0$,³² finder vi også sammenhængen mellem S_0 og futures prisen:

$$S_0 e^{qT} = F_0 e^{-(r-q)T} \Leftrightarrow S_0 = F_0 e^{-rT} \quad (7.2)$$

Når vi kender denne sammenhæng kan vi substituere det ind i prisudtrykket for en option. Prisen for en calloptionen viser sig eksempelvis at være givet ved:

$$f_C = e^{-rT} \left(F_0 \cdot \left(1 - P\left(\ln(K/F_0 e^{-rT}), \Omega_1\right) \right) - K \cdot \left(1 - P\left(\ln(K/F_0 e^{-rT}), \Omega_2\right) \right) \right) \quad (7.3)$$

Det bemærkes at substitutionen kræver, at futures kontrakten og optionen skal have akkurat samme udløbsdato. Bemærk også, at optionen er den samme som før. Det er ikke en option på vores futures, det er stadig en option på aktieindekset.

Vi forklarer fordelene ved at anskue futures i stedet for aktieindekset i de følgende punkter:

- Optionerne handles på Chicago Board Options Exchange (CBOE), mens S&P500 Indekset handles på New York Stock Exchange (NYSE). CBOE lukker kl. 15:15 Chicago tid, hvilket er kl. 22:15 dansk tid.³³ NYSE lukker kl. 16:00 New York tid, hvilket er kl. 22:00 dansk tid.³⁴ Idet der er en tidsforskel på en time mellem Chicago og New York er tidsforskellen mellem børsenes lukketidspunkt 15 minutter. Ved at benytte indekset sammen med optionerne opstår der tidsbias pga. af de forskellige lukketider. Denne forskel fjernes ved at se på futures, idet futures ligesom optionerne handles på CBOE.
- Vi kender ikke den tilhørende kontinuert dividenderate q for hvert udløbstidspunkt, T . Vi kan imidlertid helt se bort fra denne problemstilling ved at anskue futures i stedet for aktieindekset, da den kontinuerte dividenderate så bliver substitueret ud jf. (7.3).
- Når vi skal replikere en option er det nødvendigt at erhverve en position i det underlæggende aktiv. Det er upraktisk at handle med et aktieindeks som S&P500 grundet det store antal aktier og da kompositionen af S&P500 ændrer sig over tid. Ved i stedet at anskue futures, behøver vi aldrig erhverve os aktieindekset, da futures blot er en kontrakt om køb af indekset på et fremtidigt tidspunkt.³⁵

³² Hvor S_0 er prisen på aktieindekset diskonteret med den kontinuerte dividenderate, således der gælder $S_0 = \hat{S}_0 e^{-qT}$,

³³ <http://www.cboe.com/LearnCenter/Workbench/products/etf.htm>

³⁴ <http://www.nyse.com/about/newsevents/1095581297148.html>

³⁵ Det er dog muligt at investere i produkter såsom "Spiders", der svarer til at købe en andel af S&P500 Indekset.

Alle de overstående punkter løses ved at benytte på futures på aktieindekset i stedet for selve aktieindekset.

7.3 Valg af optioner

Vi er interesserede i optioner med høj likviditet, da deres priser er de mest opdaterede og derfor de mest konsistente og sammenlignelige, både indbyrdes og i forhold til den tilhørende futures pris. Vi skal derfor finde nogle nøgletal, der kan bruges til at bedømme hvilke strikes og løbetider vi skal vælge for få de mest likvide optioner.

7.3.1 Open Interest samt Volume

Open Interest beskriver antallet af åbne kontrakter i markedet, mens Volume beskriver antallet af transaktioner på den givne dag. Open Interest og Volume beskriver altså i hvor høj grad en option historisk er blevet handlet samt optionens handel den pågældende dag, hvilket gør dem velegnede til at vurdere optionens likviditet. Tabel 7.1 forklarer Open Interest og Volume, i et marked bestående af agenterne A, B og C, hvori der af simplificerende grunde kun eksisterer én slags option.

Tabel 7.1

Dag, t:	Handelsaktivitet:	Open Interest:	Volume:
0	A, B og C ejer ingen optioner.	0	0
1	A køber 10 optioner af C .	10	10
2	B køber 4 optioner af A .	10	4
3	A sælger 5 optioner til C .	5	5
4	Hverken A, B eller C foretager nogen handel.	5	0

I det følgende giver vi eksempler på optioner med forskellige kombinationer af høj/lav Open Interest og Volume.

Hvis både Open Interest og Volume er høj, er optionen blevet handlet meget både historisk og den pågældende dag. Det kunne eksempelvis være en call- eller en putoption der har lagt og stadig ligger 0-20 % out-of-the-money. Denne type optionen er meget likvid og derfor meget interessant.

Hvis Open Interest er høj men volumen er lav kan det skyldes, at optionen historisk har været out-of-the-money og er blevet handlet meget, men at markedet nu har rykket sig, så optionen er in-the-money.

Hvis Open Interest er lav, men Volume er høj, kan det skyldes at optionen historisk har været in-the-money og/eller har haft en ”skæv strike”³⁶ som markedet ikke bryder sig om, men at markedet har rykket sig således, at optionenens strike netop nu ligger marginalt out-of-the-money.

Hvis både Open Interest og Volume er lav, er optionen hverken historisk eller på den pågældende dag blevet handlet meget. Dette kan skyldes, at optionen har en ”skæv strike” og er langt out-of-the-money eller in-the-money.

I det følgende anskuer vi 4 scenarier som viser de forskellige kombinationer af høj/lav Open Interest og Volume. Det er kun optionen fra d. 03-03-09 der er interessant for os at have med i vores endelige datasæt.

Tabel 7.2

Dato	Navn	S&P 500	S&P 500 logafkast	Open Interest	Volume
03-03-2009	SPX 03/09 P600	696,33	-0,6 %	114.451	41.741
13-10-2008	SPX 12/08 C875	1003,35	11,0 %	22.315	5
09-03-2009	SPX 06/09 C735	676,53	-1,0 %	350	1939
14-10-2008	SPX 03/09 C600	998,01	-0,5 %	18	2

Når vi fremover i opgaven refererer til, at en option er likvid, er det vurderet med udgangspunkt i, at den har en høj Open Interest og Volume.

7.3.2 Valg af løbetider og udløbstidspunkter

De mest likvide optioner udløber indenfor 3 måneder. Optioner med løbetider over 3 måneder har en betragtelig lavere likviditet og der er meget lidt likviditet i de optioner der har en løbetid på over et år. Det ses, at likviditeten, for de optioner med løbetider længere end 3 måneder, klumper sig sammen omkring de optioner der udløber til enten marts, juni, september eller december.

Når især at-the-money optioner kommer tæt på udløb udviser prisen og den tilhørende 1. afledte store udsving og det bliver vanskeligt at estimere optionsmodellernes parametre. Vi har derfor valgt at anskue optioner der har 0,5 – 3,5; 3,5 – 6,5 og 6,5 – 9,5 måneder til udløb, hvor udløbsmåneden altid er enten marts, juni, september eller december.

Det bemærkes at futurespriserne skal trækkes med samme udløbsdato som optionerne og meget hensigtsmæssigt har Bloomberg en række tickers, der trækker futurespriser med udløb til marts, juni, september eller december. Udløbsmåneden skifter som tiden går, således at løbetiden holdes

³⁶ En skæv strike, K er f.eks. hvor K modulus 25 ikke er 0

indenfor et interval bestemt af den pågældende ticker.³⁷ Det er således muligt at benytte disse tickers for både futures og optioner til at holde styr på, at udløbsmåneden altid er enten marts, juni, september eller december og med et givet tidsinterval til udløb.

7.3.3 Valg af Strikes

I dette afsnit vil vi finde de mest likvide optioner på baggrund af Volume og Open Interest. Det ville være optimalt at trække Volume og Open Interest for hver dag og for hver option for så ud fra nogle passende kriterier at vælge, hvilke strikes vi vil have med for den pågældende dag. Denne metode kræver dog en mængde data, som vil være for tungt og tidskrævende for vores Bloomberg-terminal. Vi har derfor kun undersøgt et udsnit af vores data. På baggrund af denne undersøgelse, har vi konstrueret en mekanisk sorteringsmetode, der bestemmer hvilke strikes, der giver de mest likvide optioner. I Tabel C.1a og Tabel C.1b i appendiks C vises Volume og Open Interest for henholdsvis en serie med putoptioner og en serie med calloptioner for d. 13. oktober 2008, hvor S&P500 indekset havde en værdi på 1003,35. Putoptionerne har udløb december 2008, mens calloptionerne har udløb marts 2009. Vi har valgt kun at medtage strikes afrundet med hele 25, idet Volume og Open Interest er meget lave for mindre afrundinger.

Der gælder generelt, at optioner med strikes omkring at-the-money og op til 20 % out-of-the-money er mest likvide, og at likviditeten dør ud jo længere man er fra dette interval. For vores korte optioner med en løbetid på 0,5-3,5 måneder ses det i Tabel C.1a, at man er nødt til at afrunde til hele 100 for at fange likviditeten for strikes deep-out-of-the-money. Samtidig ses det, at en afrunding til nærmeste hele 25 er tilstrækkelig for at fange likviditeten når optionen er tæt på at være at-the-money. I intervallet "mellem" at-the-money og deep-out-of-the-money vurderer vi, at en afrunding på 50 optimal. For vores optioner med en løbetid på 3,5-6,5 måneder ses det i Tabel C.1b, at en afrunding på mindst 50 er nødvendig, hvilket skyldes, at strikes der ender på 25 eller 75 generelt ses at have en lav Volume eller Open Interest. For de mellemlange optioner gælder der desuden, at likviditeten hurtigt dør ud, når man bevæger sig deep-out-of-the-money, og vi vælger derfor en afrunding på 50 og ikke 100.

Vi har ikke medtaget en tabel for optioner med løbetid på 6,5-9,5 måneder, da Volume og Open Interest opfører sig usystematisk for disse optioner. Problemet er, at Volume og Open Interest nogle dage indikerer tilstrækkelig likviditet til, at man kan medtage flere forskellige strikes, mens de for

³⁷ Tickers hedder: SP1 Index (0 – 3 mdr.), SP2 Index (3 – 6 mdr.), SP3 Index (6 – 9 mdr.) mv. Hvis udløbsmåneden er ens for futures'en og optionen på S&P500 har de også samme udløbsdag.

andre dage indikerer, at det netop kun er de to optioner omkring at-the-money, der er likvide nok til at tage med. Vi vælger også for de lange optioner en afrunding på 50.

I det efterfølgende beskriver vi hvor meget en option er i pengene vha. af den relative størrelse K/S , som vi herefter kalder moneyness. Det ses ofte, at moneyness defineres som S/K , men vi har valgt at benytte den inverse størrelse, da vores generelle optionsmodel fra kapitel 6 er en funktion af $\ln(K/S)$ og da vi ønsker at moneyness skal stige når vi øger K .

For de korte optioner har vi valgt et moneyness interval, K/S fra 60 % til 105 % for putoptionerne, mens vi for calloptionerne har valgt et moneyness interval fra 95 % til 130 %. De tilhørende afrundninger kan ses i nedenstående tabel. Vi vælger at medtage 9 putoptioner, henholdsvis 1 in-the-money, 2 at-the-money og 6 out-of-the-money. Vi vælger kun at medtage 8 calloptioner, henholdsvis 1 in-the-money, 2 at-the-money og 5 out-of-the-money, da calloptionerne er knap så likvide som putoptionerne. Vi sørger for, at 4 in-the-money og at-the-money optioner har overlappende strikes, så vi kan foretage en kontrol af konsistens imellem priserne med put-call-pariteten. Nedenstående tabel viser, hvordan vi med den mekaniske sorteringsmetode finder de interessante strikes med et indeks på 1003,35:

Tabel 7.3

Call-navn	Put-navn	Strike, $\hat{K}$	Modificeret Strike, K	Afrund, ω	Moneyness, δ	$K/\hat{S}$
	Put 1	700	700	100	60%	70%
	Put 2	800	800	100	70%	80%
	Put 3	850	850	50	80%	85%
	Put 4	900	900	50	85%	90%
	Put 5	950	950	50	90%	95%
Call 8	Put 6	975	975	25	95%	97%
Call 7	Put 7	1000	1000	25	100%	100%
Call 6	Put 8	1025	1025	25	100 ⁺ %	102%
Call 5	Put 9	1050	1050	25	105%	105%
Call 4		1100	1100	50	110%	110%
Call 3		1150	1150	50	115%	115%
Call 2		1200	1200	50	120%	120%
Call 1		1300	1300	100	130%	130%

Strike-kolonnen, $\hat{K}$ beregnes ved:

$$\hat{K}_i = \begin{cases} \text{rund_op}(\delta_i \cdot \hat{S}, \omega_i), & \text{for } \delta_i < 100\% \text{ og } \delta_i = 100^{+}\% \\ \text{rund_ned}(\delta_i \cdot \hat{S}, \omega_i), & \text{for } \delta_i > 100\% \text{ og } \delta_i = 100^{-}\% \end{cases} \quad (7.4)$$

Fordelen ved at runde $\hat{K}$ op for de lave δ og runde $\hat{K}$ ned for høje δ er, at moneyness intervallet bliver så lille så mulig med de givne afrundinger. Problemet med denne afrundingsmetode er dog, at

to strikes kan blive ens (som det ses markeret med blå i Tabel 7.4). Vi har derfor implementeret en modificeret strike, K , der afrunder en ekstra gang til næste nærmeste strike i de tilfælde med overlap, så alle put- og calloptioner altid får hver deres strike. Den reelle moneyness, $K/\hat{S}$, kan pga. af afrundingerne afvige en smule fra den fastsatte moneyness, δ , men de afviger sjældent med mere end 10 %. Der gælder altid, at (Call 5, Put 9), (Call 6, Put 8), (Call 7, Put 7), (Call 8, Put 6) har samme strike og de kan derfor sammenlignes med put-call pariteten.

For de mellemlange optioner med en løbetid på 3,5-6,5 måneder har vi vurderet, at vi kun kan tage fem putoptioner og fem calloptioner med, nemlig de 2 nærmeste at-the-money og 3 out-of-the-money, hvilket betyder, at moneyness intervallet for putoptionerne bliver fra 85 % til 100 %, mens moneyness intervallet for calloptionerne bliver fra 80 % til 100 %. Nedenstående tabel viser hvordan vi med den mekaniske sorteringsmetode finder de interessante strikes for et indeks på 1003,35:

Tabel 7.4

Call-navn	Put-navn	Strike, $\hat{K}$	Modificeret Strike, K	Afrund, ω	Moneyness, δ	$K/\hat{S}$
	Put 1	850	850	50	80%	85%
	Put 2	950	900	50	90%	90%
	Put 3	950	950	50	95%	95%
Call 5	Put 4	1000	1000	50	100%	100%
Call 4	Put 5	1050	1050	50	100 ⁺ %	105%
Call 3		1050	1100	50	105%	110%
Call 2		1100	1150	50	110%	115%
Call 1		1200	1200	50	120%	120%

Det ses her, at striken, $\hat{K}$, ikke er god, idet Put 2 og 3 begge har strike 950 og Call 3 og 4 begge har strike 1050. Den modificerede strike, K løser problemet og giver en pæn stigende strike. Igen ser vi, at den reelle moneyness, $K/\hat{S}$ ikke afviger med mere end omkring 10 % fra den valgte moneyness, δ .

For de lange optioner er vi gået på kompromis og valgt kun at tage de 2 nærmeste at-the-money optioner og 1 out-of-the-money option med for både put og call. Vi har valgt at medtage dem, da det er interessant at se, hvordan optionsmodellerne fanger optionspriserne for lange løbetider. Man skal dog være opmærksom på, at den lave likviditet kan give u hensigtsmæssige likviditetsspænd som optionsmodellerne kan have svært ved at håndtere. Nedenstående Tabel 7.5 viser hvordan vi med den mekaniske sorteringsmetode finder de interessante strikes for en spot på 1003,35:

Tabel 7.5

Call-navn	Put-navn	Strike, $\hat{K}$	Modificeret Strike, K	Afrund, ω	Moneyness, δ	$K/\hat{S}$
	Put 1	950	950	50	95%	95%
Call 3	Put 2	1000	1000	50	100%	100%
Call 2	Put 3	1050	1050	50	100%	105%
Call 1		1050	1100	50	105%	110%

Det ses, at optionerne har samme strikes som de 4 midterste optioner i tabel Tabel 7.4

7.3.4 Filtrering af optioner - Strike monotonicity

I afsnit 6.2 fandt vi, at $\partial f_c / \partial S$ stiger og $\partial f_p / \partial S$ falder når S stiger. På samme måde kan vi finde, at $\partial f_c / \partial K$ falder og $\partial f_p / \partial K$ stiger når K stiger, da optionens pris afhænger af forholdet mellem K/S i stedet for niveauet af S . Det synes rimeligt at forlange, at de faktiske priser skal overholde dette krav, kaldet strike monotonicity. Vores faktiske priser skal altså opfylde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{p,i-1}}{\partial K_{i-1}} < \frac{\partial f_{p,i}}{\partial K_i} &\Rightarrow \frac{f_{p,i} - f_{p,i-1}}{K_i - K_{i-1}} < \frac{f_{p,i+1} - f_{p,i}}{K_{i+1} - K_i} \dots \text{for put optioner} \\ \frac{\partial f_{c,i-1}}{\partial K_{i-1}} > \frac{\partial f_{c,i}}{\partial K_i} &\Rightarrow \frac{f_{c,i} - f_{c,i-1}}{K_i - K_{i-1}} > \frac{f_{c,i+1} - f_{c,i}}{K_{i+1} - K_i} \dots \text{for call optioner} \end{aligned} \quad , \text{ hvor } K_{i-1} < K_i < K_{i+1} \quad (7.5)$$

Er ovenstående ikke opfyldt, sletter vi option 'i'. Nedenstående tabel illustrerer hvorledes vi har implementeret strike monotonicity kravet i datasættet:³⁸

Tabel 7.6

Tid t				Tid t+1			
Strike, K	Mid	$\partial f_{p,i} / \partial K_i$	Filtrerede Mid	Strike, K	Mid	$\partial f_{p,i} / \partial K_i$	Filtrerede Mid
700	36,95		36,95	700	14		14
		0,258				0,126	
750	49,85		49,85	750	20,3		20,3
		0,314				0,213	
800	65,55		SM(t+1)	800	30,95		SM(t+1)
		0,374				0,133	
850	84,25		SM(t)	850	37,6		SM(t)
		0,359				0,254	
900	102,2		102,2	900	50,3		50,3

Tabel 7.6 angiver midpriser for putoptioner d. 10-10-2008 (tid t) og d. 11-10-2008 (tid t + 1) med udløb d. 19-03-2009 og de tilhørende strikes, K .³⁹

³⁸ Man kan mistænke, at der er en fejl i datasættet, idet optionspriserne falder voldsomt fra den ene dag til den anden. Det skyldes dog, at S&P500 indekset steg fra 890,80 til 1016,90 fra den 10. til den 11. oktober 2008.

³⁹ Strike monotonicity koden er skrevet i VBA køres i excelfilen data.xls.

Vi undersøger om $\frac{f_{P,i} - f_{P,i-1}}{K_i - K_{i-1}} < \frac{f_{P,i+1} - f_{P,i}}{K_{i+1} - K_i}$ og angiver med rød (dag t) og blå (dag $t+1$) de steder strike monotonicity ikke holder. Vi sletter så den tilhørende pris, i . Vi medtager optionspriser for 2 dage, da det er nødvendigt for at hedge i afsnit 10.2. Hvis der er en pris, der skal filtreres væk for den ene dag, så skal den også filtreres væk for den anden. Vi har derfor slettes pris 3 og 4 for både d. 10-10-2008 og d. 11-10-2008. Der er en klar tendens til, at dage med store dag-til-dag afkast for S&P 500 Indekset, har øget hyppighed for brud på strike monotonicity. Forklaringen på dette er, at store afkast gør det besværligt for optionspriserne at tilpasse sig konsistent med hinanden.

7.4 Risikofri kontinuert diskonteringsrente

Til vores optionsmodeller har vi brug for den ”risikofri rente” med kontinuerlig rentetilskrivning. Vi er interesserede i den amerikanske risikofrie rente, da S&P 500 er et amerikansk indeks angivet i US-dollars. Det ville være nærliggende at udlede den sande risikofrie rente ud fra de amerikanske Treasury Bills (nulkuponobligationer) vha. bootstrapping. Det anbefales dog ikke, da Treasury renterne er for lave pga. forskellige skatteregler samt regulative krav, og man ser derfor ofte, at den risikofri rente findes ud fra LIBOR-renterne, $\hat{r}$. LIBOR-renten er den rente som en given bank kræver for at udlåne penge til en anden bank. Det er muligt at finde LIBOR-renter med løbetid fra 2 uger og op til 12 måneder i Bloomberg. En bank skal typisk mindst have en AA-rating⁴⁰ for at kunne låne til LIBOR-renten, hvilket betyder, at LIBOR-renten indeholder en smule kreditrisiko, da der altid er en lille risiko for, at en AA-rated finansielle institution går fallit. Det tilføjer et lille rentespænd til LIBOR-renten i forhold til den *sande* risikofrie rente. På trods af dette spænd, antages LIBOR-renten ofte (Hull, 2005, s. 76) at være den bedste indikator for den *sande* risikofri rente, og vi benytter derfor LIBOR-renten som den risikofrie rente.

LIBOR-renten er en P-rente, der opgøres i henhold til pengemarkedskonventionen, hvilket svarer til princippet om simpel rente (lineær interpolation) (Jensen, 2005, s. 70). Det betyder, at man kan finde LIBOR-renten, $\hat{r}(t_d, T_d)$, ved lineær interpolation ud fra de tidsmæssige nærmeste LIBOR-renter $\hat{r}(t_d, T_i^L)$ og $\hat{r}(t_d, T_{i+1}^L)$ med de tilhørende vægte $w_{T_i^L}$ og $w_{T_{i+1}^L}$, således at der gælder:

$$\hat{r}(t_d, T) = w_{T_i^L} \hat{r}(t_d, T_i^L) + w_{T_{i+1}^L} \hat{r}(t_d, T_{i+1}^L) \quad (7.6)$$

⁴⁰ Rating fra bureauet Standard & Poor's

T_d kan på samme måde findes ved lineær interpolation:

$$T_d = w_{\tau_i} T_i^L + w_{\tau_{i+1}} T_{i+1}^L \quad (7.7)$$

Idet vægtene summer til 1 kan de findes ved at løse følgende ligningssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau_i & \tau_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\tau_i} \\ w_{\tau_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ T_d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_{\tau_i} \\ w_{\tau_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau_i & \tau_{i+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ T_d \end{pmatrix} \Leftrightarrow w_{\tau_i} = \frac{T_{i+1}^L - T_d}{T_{i+1}^L - T_i^L} \text{ og } w_{\tau_{i+1}} = \frac{T_d - T_i^L}{T_{i+1}^L - T_i^L} \quad (7.8)$$

For T_d lavere end 2 uger sættes $\hat{r}(t_d, T_d)$ lig den korteste LIBOR rente, mens $\hat{r}(t_d, T_d)$ sættes lig den længste LIBOR rente for T_d større end 12 måneder.

Fordi LIBOR-renten er en P-rente, benytter den faktisk/360 rentekonventionen. Hvis vi ønsker at finde rentetilskrivningen for et givent antal dage, $T_d - t_d$ normeret i forhold til 360 får vi følgende udtryk:

$$M_{T_d} = M_{t_d} \left(1 + \hat{r}(t_d, T_d) \cdot \frac{T_d - t_d}{360} \right) \quad (7.9)$$

Vi ønsker nu at transformere ovenstående rente, så vi i stedet får en O-rente, der opgøres i henhold til obligationsmarkedskonventionen, hvilket svarer til princippet om renters rente (geometrisk interpolation) og faktisk/faktisk (Jensen, 2005, s. 70). Når vi anskuer årlige renter betyder det, at renten skal normeres med $365 + 1_{\{\text{skudår}\}}$. Her skal indikatorfunktionen forstås på den måde, at referenceperioden er 366 dage, hvis den 29. februar indgår pga. skudår og ellers er referenceperioden på 365 dage. Rentetilskrivningsudtrykket med n rentetilskrivninger pr. år ser så ud som følger:

$$M_{T_d} = M_{t_d} \left(1 + \frac{r(t_d, T_d)}{n} \right)^{\frac{T_d - t_d}{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}} \cdot n} \quad (7.10)$$

Da vi ønsker kontinuerlige rentetilskrivninger lader vi $n \rightarrow \infty$ og ser så, at (7.10) konvergerer mod eksponentialfunktionen:

$$M_{T_d} = M_{t_d} e^{\frac{r(t_d, T_d) \cdot (T_d - t_d)}{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}}} \text{ for } n \rightarrow \infty \quad (7.11)$$

Vi kan nu finde den kontinuerlige O-rente, r som funktion af P-renten, $\hat{r}$:

$$\begin{aligned} M_{t_d} \left(1 + \hat{r}(t_d, T_d) \cdot \frac{T_d - t_d}{360} \right) &= M_{t_d} e^{\frac{r(t_d, T_d) \cdot (T_d - t_d)}{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}}} \Leftrightarrow \\ r(t_d, T_d) &= \frac{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}}{T_d - t_d} \cdot \ln \left(1 + \hat{r}(t_d, T_d) \cdot \frac{T_d - t_d}{360} \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

For at transformere LIBOR-renten, r i et trin benyttes følgende udtryk:⁴¹

$$r(t_d, T_d) = \frac{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}}{T_d - t_d} \cdot \ln \left(1 + \left(\frac{T_{i+1}^L - T_d}{T_{i+1}^L - T_i^L} \hat{r}(t_d, T_i^L) + \frac{T_d - T_i^L}{T_{i+1}^L - T_i^L} \hat{r}(t_d, T_{i+1}^L) \right) \cdot \frac{T_d - t_d}{360} \right) \quad (7.13)$$

Vi giver herunder et eksempel med udgangspunkt i vores data, hvor vi er interesserede i at finde den kontinuerlige rente, r fra d. 10-10-2008 til d. 17-09-2009, dvs. over 342 dage. De nærmeste LIBOR-renter har udløb d. 10-09-2009 (11 måneder) og d. 10-10-2009 (12 måneder) og har således henholdsvis 335 og 365 dage til udløb. LIBOR-renterne er givet ved $\hat{r}(0,335) = 4,20250\%$ og $\hat{r}(0,365) = 4,16875\%$. Den kontinuerlige rente, r bliver derfor jf. (7.13):

$$r(0,342) = \ln \left(1 + \left(\frac{365 - 342}{365 - 335} \cdot 4,20250\% + \frac{342 - 335}{365 - 335} \cdot 4,16875\% \right) \cdot \frac{360}{365 + 0} \right) \Leftrightarrow r(0,342) = 4,17033\%$$

7.5 Data til hedging

I én af vores hedge undersøgelser (afsnit 10.2), indgår vi en position i et aktiv til handelsdag t_d som vi igen afvikler den efterfølgende handelsdag.⁴² Vi skal derfor kende aktivets priser for den følgende handelsdag. Umiddelbart er det ikke et stort problem, da man jo så bare kan bruge det allerede trukne prisdata for den efterfølgende handelsdag. Det er dog ikke altid muligt, da optionernes strike, K og udløbstidspunkt, T kan ændre sig over tid. Til handelsdag t_d er vi derfor nødt til, udover at trække prisdata til den pågældende handelsdag, også at trække prisdata til den efterfølgende handelsdag. Vi skal derfor også kende den rente, som vi skal tilskrive den risikofrie position med fra handelsdag t_d til den efterfølgende handelsdag. Vi benytter igen LIBOR-renten ligesom i afsnit 7.4 og da den korteste LIBOR-rente vi har trukket fra Bloomberg er på 2 uger fås analog til (7.13):

$$r(t_d, T_d) = \left(\frac{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}}{T_d - t_d} \right) \cdot \ln \left(1 + \hat{r}(t_d, T_1^L) \cdot \frac{T_d - t_d}{360} \right) \quad (7.14)$$

⁴¹ $\frac{T_d - t_d}{365 + 1_{\{\text{skudår}\}}}$ er udtryk for antal år til udløb og vil ofte blot være angivet ved T .

⁴² Bemærk, at der er 3 dage mellem de to handelsdage, hvis den første handelsdag er en fredag. Helligdage tæller heller ikke med som handelsdage.

7.6 Kontrol af data med udgangspunkt i Put-Call pariteten

Vi undersøger med udgangspunkt i put-call pariteten (2.1), om der er konsistens mellem vores put- og callpriser samt vores futurespriser. Ved at undersøge for konsistens får vi kontrolleret vores datasæt på følgende områder:

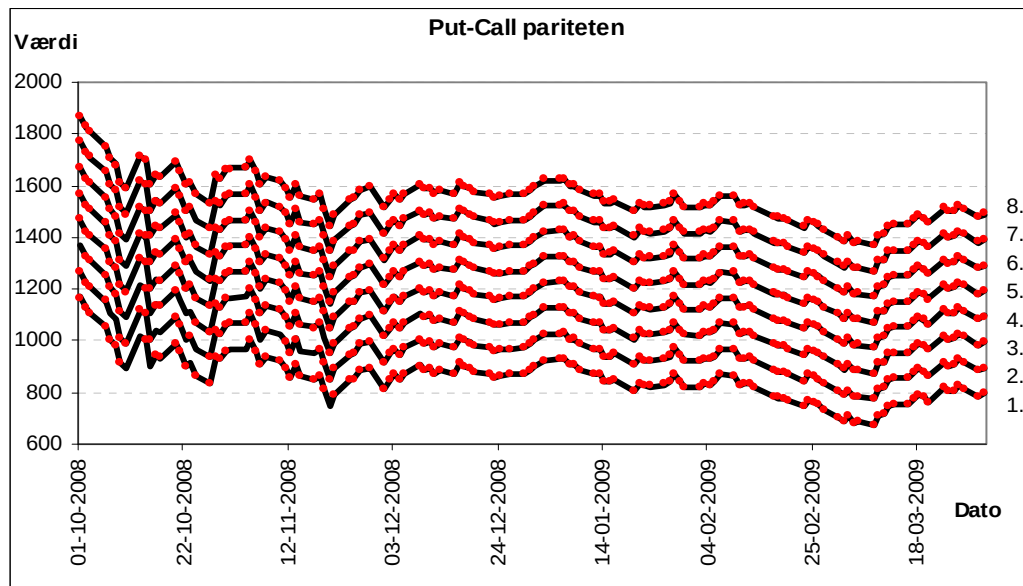
1. Er data trukket rigtigt og er transformationerne beregnet korrekt?
2. Er der fejl i data fra Bloomberg?
3. Kan vi benytte futuresens last pris sammen med optionernes midpris?
4. Er der sket noget ekstraordinært i markedet, som har skabt outliers?
5. Er der put- og callpriser der giver anledning til arbitragemuligheder ud fra put-call pariteten?

Vi omskriver put-call pariteten (2.1), så den er givet ud fra en futures pris:

$$f_C - f_P = \hat{S}_0 e^{-qT} - K e^{-rT} \Leftrightarrow f_C - f_P = F_0 e^{-rT} - K e^{-rT} \Leftrightarrow F_0 = e^{rT} (f_C - f_P) + K \quad (7.15)$$

I nedenstående figur har vi plottet de faktiske futurespriser, F_0 (fede sorte streger) samt de syntetiske futurespriser vi har beregnet med put-call pariteten, $e^{rT}(f_C - f_P) + K$ (røde punkter).

Figur 7.1



Figur 7.1 viser de faktiske futures priser, F_0 (fede sorte streger) samt de syntetiske futurespriser givet ved $e^{rT}(f_C - f_P) + K$ (røde punkter) for alle par af call- og putoptioner, hvor der er overlap med striken. De er holdt adskilt ved parallelforskydninger jf. Tabel 7.7.⁴³

⁴³ Beregnes i Excel-filen "data.xls" i underarket "Tegn paritet".

Vi har foretaget denne undersøgelse for hver strike med overlap for put og call og for alle løbetidsperioder, 0,5 – 3,5; 3,5 – 6,5 og 6,5 – 9,5. Alle plottene er beskrevet i nedenstående tabel ud fra deres nummer.

Tabel 7.7

Nr.	Periode	Moneyness K/S	Parallel- forskydning	Gennemsnits- afvigelse (%)	Standard Afgivelse (%)	Største numeriske Afgivelse (%)
1.	0,5 – 3,5	95 %	+ 0	0,02 %	0,07 %	0,20 %
2.	0,5 – 3,5	100 ⁻ %	+ 100	0,01 %	0,07 %	0,30 %
3.	0,5 – 3,5	100 ⁺ %	+ 200	0,02 %	0,08 %	0,39 %
4.	0,5 – 3,5	105 %	+ 300	0,00 %	0,07 %	0,31 %
5.	3,5 – 6,5	100 ⁻ %	+ 400	0,02 %	0,10 %	0,37 %
6.	3,5 – 6,5	100 ⁺ %	+ 500	0,00 %	0,10 %	0,57 %
7.	6,5 – 9,5	100 ⁻ %	+ 600	0,02 %	0,10 %	0,33 %
8.	6,5 – 9,5	100 ⁺ %	+ 700	-0,01 %	0,11 %	0,33 %

Det ses i Figur 7.1, at punkterne følger linjerne pænt og der er ingen store outliers. Det tyder umiddelbart på, at der ikke er fejl i vores datasæt. Små systematiske afvigelser kan dog være svære at se på grafen og vi tager derfor udgangspunkt i den beregnede statistik i Tabel 7.7.

Vi ser, at gennemsnitsafvigelsen er meget tæt på 0 for alle futures ifht. syntetiske futures. Det tyder på, at der ikke er nogle systematiske fejl, selvom om det er mistænkeligt, at næsten alle gennemsnitlige afvigelser er positive. Hvis gennemsnitsafvigelsen havde været større, kunne det have tydet på en datafejl. En datafejl kunne eksempelvis være, hvis vi havde trukket nogle T -værdier, som var for små, hvilket så ville forskyde de gennemsnitlige afvigelser væk fra 0.⁴⁴

Det ses, at standardafvigelsen er lavest for perioden 0,5 – 3,5 måned. Det giver dog også mening, idet likviditeten her er størst, hvilket giver mere ”præcise” og konsistente priser med lavere bid ask spænd. Standardafvigelsen vokser, når vi ser på perioden 3,5 – 6,5 og 6,5 til 9,5, men der er forsat tale om små afvigelser på omkring 0,10 %. Det svarer i absolutte termer til, at en futurespris på 800 har en afvigelse på 0,8. Det er lavt, især i forhold til, at den syntetiske futurespris er beregnet ud fra optioner med et bid ask spænd på omkring 5. Den største afvigelse på 0,57 % er fundet d. 24-10-2008 for perioden 3,5 – 6,5 og strike 100⁺ %. Her var futuresprisen 865,0, mens den syntetiske futurespris beregnet ved put-call pariteten var på 869,9, hvilket gav en absolut forskel på 4,9. Vi undersøger derfor om der var mulighed for arbitrage for så at vurdere om denne afvigelse er rimelig:

⁴⁴ I 1. kontrolstadiet fandt vi en fejl ved netop at anskue gennemsnitsafvigelsen. Vi så, at gennemsnitsafvigelsen var 0,25% for et af plottene, hvilket skyldtes at vi havde trukket T forkert.

Med udgangspunkt i $F_0 = e^{rT}(f_C - f_P) + K$, (7.15), går vi lang i futures'en da den er billig og kort i "højresiden" da den er dyr. Vi benytter os af de givne bid og ask for optionerne alt efter om vi køber eller sælger. Proceduren for at opnå arbitrage er beskrevet i følgende tabel:

Tabel 7.8

$t = 0$		$t = T$	
Beskrivelse	Værdi	Beskrivelse	Værdi
Køb futures	0	Exercise futures ⁴⁵	$S_T - F_0$
Sælg call	$f_{C,BID}$	Exercise call	$-\max(S_T - K, 0)$
Køb put	$-f_{P,ASK}$	Exercise put	$\max(K - S_T, 0)$
Indlån	$e^{-rT} K$	Udlån	$-e^{-rT} e^{rT} K = -K$
Delsum	$f_{C,BID} - f_{P,ASK} + e^{-rT} K$	Delsum	$S > K : S_T - F_0 - (S_T - K) - K = -F_0$ $S < K : S_T - F_0 + K - S_T - K = -F_0$
Udlån	$-(f_{C,BID} - f_{P,ASK} + e^{-rT} K)$	Indlån	$e^{rT}(f_{C,BID} - f_{P,ASK}) + K$
Total sum	0	Total sum	$K - F_0 + e^{rT}(f_{C,BID} - f_{P,ASK})$

Vi undersøger nu, om $K - F_0 + e^{rT}(f_{C,BID} - f_{P,ASK}) > 0$ og om vi i så fald kan udnytte ovenstående strategi til arbitrage. Gælder der omvendt, at $K - F_0 + e^{rT}(f_{C,BID} - f_{P,ASK}) < 0$, betyder det, at arbitragemuligheden er "spist" af bid ask spændet.

For d. 24-10-2008 er der givet følgende værdier.

$$F_0 = 865,0, f_{C,BID} = 85,0, f_{C,ASK} = 98,3, f_{P,BID} = 116,6, f_{P,ASK} = 126, K = 900, r = 3,55\%, T = 0,40 \text{ år}$$

Vi indsætter og får:

$$900 - 865,0 + e^{3,55\% \cdot 0,40}(85,0 - 126) = -6,59 < 0$$

Vi vil miste 6,59 til tid T ved at udnytte ovenstående strategi. Man kan umiddelbart få den tanke, at man kunne tjene 6,59 ved at gå kort i F_0 og lang i "højresiden" jf. put-call pariteten. Det vil dog blot give et dårligere resultat, da vi så i stedet anskuer ask prisen for call-optionen og bid prisen for put-optionen.

$$-(900 - 865,0 + e^{0,0355 \cdot 0,40}(98,3 - 116,6)) = -16,44 < 0$$

⁴⁵ Her antager vi, at futures med passende vægtning over tid jf. (Hull, 2005, s. 127) har samme payoffstruktur som forwards, nemlig, at den udbetaler $S_T - F_0$ til tid T . Både futures og forwards er kontrakter om levering af et aktiv på et fastsat fremtidig tidspunkt. Forskellen er dog, at en futures har en marginalkonto, hvor priserne dagligt opdateres modsat en forward, hvor priserne er faste. Hvis man ser bort fra skatter, transaktionsomkostninger, stokastisk rente og kreditrisiko kan det dog vises, at futures og forward priser er ens og i praksis er antagelsen om samme payoffstruktur ifølge Hull rimelig (Hull, 2005, s. 109-110 og s. 127-128).

Ved denne strategi vil vi miste endnu mere til tid T , nemlig 16,44. Det ses desuden, at vi (heldigvis) får put-call pariteten, (7.15), når vi anskuer grænsetilfældet, hvor vi forudsætter ingen arbitrage og benytter midpriser: $K - F_0 + e^{rT}(f_{C,MID} - f_{P,MID}) = 0 \Leftrightarrow F_0 = e^{rT}(f_{C,MID} - f_{P,MID}) + K$

Analysen giver os altså, at der er konsistens imellem vores futures samt call- og putoptioner.

8 Kalibrering af modellen

Den grundlæggende ide bag prisfastsættelse af optioner er, som nævnt i kapitel 5, at finde et risikoneutralt sandsynlighedsmål Q , hvorunder den diskonterede prisproces er en martingal. I kapitel 5 fandt vi et martingal sandsynlighedsmål for hver af vores 3 modeller givet parametervektoren Ω^Q jf. henholdsvis Definition 6.1, Definition 6.2 og Definition 6.3 ud fra den generelle prisfastsættelsesformel (5.1) gengivet nedenfor, hvor vi har tilføjet indekset i for at symbolisere $i \in [1 : n]$ forskellige optioner:

$$f_{0,i} = e^{-rT} E^{Q(\Omega^Q)}[X_{T,i}] \quad \forall i \quad (8.1)$$

Prisfastsættelsesproblemet afhænger således af parametersættet Ω^Q som vi hidtil har antaget eksogent givet. Ifølge Björk (Björk, 2004, s. 152) bør parametersættet vælges på en sådan måde, at modelpriserne er i overensstemmelse med markedspriserne $f_{0,i}$. Denne problemstilling kaldes kalibreringsproblemet og er således det inverse til prisfastsættelsesproblemet. Det skal her bemærkes, at markedspriserne på optionerne kan indeholde risikopræmier og at markedspriserne i så fald ikke er givet under det risikoneutrale sandsynlighedsmål Q . Da vi ikke kender risikopræmierne, antager vi de er lig 0, hvilket svarer til at antage, at optionernes markedspriser er givet under det risikoneutrale sandsynlighed Q . Eftersom det kun er nogle af parametrene i Ω^Q der skal kalibreres definerer vi en ny parametervektor, $\hat{\Omega}^Q$:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^Q &= (\sigma_i) \text{ for Black Scholes modellen} \\ \hat{\Omega}^Q &= (\alpha, \mu, \delta) \text{ for NIG modellen} \\ \hat{\Omega}^Q &= (\kappa^*, \theta^*, \rho, \sigma, V_0) \text{ for Heston modellen} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Afhængigt af hvilken model man anvender, kan kalibreringsproblemet have ingen, en unik eller flere løsninger. Situationen med ingen løsninger opstår ofte, hvis der er tilstrækkeligt mange input i form af markedspriser, hvilket er tilfældet for vores kalibrering af NIG og Heston modellerne. Kalibreringsproblemet falder derfor ind under klassen af ill-posed problemer (Hadamard, 1902), hvilket ofte er tilfældet for inverse problemer. Fordi kalibreringsproblemet ofte er uløseligt, tager vores kalibrering af de forskellige optionsmodeller udgangspunkt i at minimere en kriteriefunktion, der udtrykker hvor stor en fejl vores modelpriser har i forhold til de observerede markedspriser givet parametersættet, $\hat{\Omega}^Q$. Minimeringen af en given kriteriefunktion kan foretages med forskellige al-

goritmer, hvilket har betydning for det endelige resultat. I det efterfølgende behandler vi valget af kriteriefunktion og algoritme.⁴⁶

8.1 Valg af algoritme

Valget af algoritme er afhængigt af hvilket formål man har med sin kalibrering. Da kalibreringsproblemet ikke er pænt og konvekst er der risiko for at man finder et lokalt minimum i stedet for det globale. Typiske optimeringsalgoritmer inkorporeret i diverse software applikationer benytter sig ofte af gradient baserede søgemetoder, Nelder-Mead søgemetoder eller lignende. Fælles for disse metoder er, at de ofte er meget afhængige af det initialgæt man sætter og at de ikke nødvendigvis finder det globale minimum. En anden fremgangsmåde man ofte støder på i nyere litteratur er at benytte globale søgealgoritmer hvor en af de mest populære er ”adaptive simulated annealing” (ASA) algoritmen. ASA algoritmen er i familien af simulated annealing algoritmer der benytter en stokastisk søgemetode og kan med et passende valg af tolerancer finde det globale minimum. Ideen bag algoritmen er, at der for hver iteration vælges et nyt tilfældigt nabopunkt, valgt med en sandsynlighed der er proportional med hvor meget kriteriefunktionen historisk har ændret sig. På denne måde kan nye punkter der forværrer den gældende løsning accepteres, og algoritmen er derfor med passende valg af tolerancer sikret imod at ramme et lokalt minimum (Ingber).

Uanset hvilken algoritme man benytter bør man holde sig for øje, at ingen af de bagvedliggende optionsmodeller vi har gennemgået kan fange dynamikken af den virkelige verden perfekt. Valget af kalibreringsalgoritme afhænger derfor af flere hensyn end blot hvilken, der giver det globale minimum. Disse hensyn er stabilitet af parametre over tid, fortolkning af parametre mv. En marginal forbedring af kalibreringsfejlen er altså ikke alene argument for at anvende de globale algoritmer frem for de lokale. Vi anvender derfor de lokale søgealgoritmer; et valg der understøttes af at de globale søgealgoritmer er væsentligt langsommere end de lokale. Dette betyder dog, at vi er nødt til at analysere hvorvidt vores kalibrering har fundet en acceptabel løsning, hvilket hænger sammen med det initiale gæt vi benytter. Disse analyser kan ses i afsnittene 8.3 og 8.4. Vi benytter Matlab’s indbyggede søgealgoritme `lsqnonlin` til at udføre de lokale optimeringer. Denne søgealgoritme benytter en Levenberg-Marquardt algoritme, der er en blanding af en gauss-newton og en gradient decent metode og anbefales derfor ofte (Hull, 2005, s. 672).

⁴⁶ Anvendt kode 5 ses i mappen ”Kalibrering af parametre og empiriske P&L” som desuden indeholder Excelark med de kalibrerede parametre for Black Scholes, NIG og Heston modellerne over den halvårige periode.

8.2 Valg af Kriteriefunktion

Idet vi som nævnt benytter Matlabs indbyggede funktion `lsqnonlin` bliver kriteriefunktionen en kvadratsum med følgende form:

$$\min_{\hat{\Omega}_t^Q} G(\hat{\Omega}_t^Q) = \min_{\hat{\Omega}_t^Q} \sum_{i=1}^N w_{t,i} \left(g(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^Q) - \hat{g}(K_{t,i}, T_{t,i}) \right)^2, \text{ hvor } \hat{\Omega}_t^Q = (\hat{\Omega}_{t,1}^Q, \hat{\Omega}_{t,2}^Q, \dots, \hat{\Omega}_{t,N}^Q) \quad (8.3)$$

Her angiver $\hat{\Omega}_t^Q$ modellens parametre der ønskes kalibreret til tidspunkt t . Vi lader $\hat{\Omega}_{t,i}^Q$ afhænge af i , da flere af modellernes parametre kan afhænge af K og T . Når man anvender Black Scholes antages det ofte i strid med modellen, at volatiliteten afhænger af K og T , da modellen ellers ikke kan ramme markedspriserne (Hull, 2005, s. 375). For Black Scholes estimerer vi derfor et $\hat{\Omega}_{t,i}^Q = \sigma_{t,i}$ for hver option i , således Black Scholes rammer alle priser perfekt. Da vi har op til 25 optioner med for hver dag betyder det, at vi for Black Scholes modellen skal estimere op til 25 parametre pr. dag. NIG og Heston modellerne kan ramme en serie optioner med et fast parametersæt. Mikael og Nögel viser dog, at man kan gøre θ^* afhængig af tid til udløb, og at Heston modellen så kalibrerer signifikant bedre (Mikhailov & Nögel, 2003, s. 78). Vi sætter derfor $\hat{\Omega}_{t,i}^Q = (\kappa_t^*, \theta_{t,D(i)}^*, \rho_t, \sigma_t, (V_0)_t)$, hvor $D(i)$ kan antage værdien 1, 2 eller 3 alt efter om option i henholdsvis har mellem 0,5-3,5; 3,5-6,5 eller 6,5-9,5 måneder til udløb. Vi har valgt at følge eksemplet fra Heston modellen og også gøre en parameter afhængig af tid til udløb i NIG modellen, som så får parametersættet $\hat{\Omega}_{t,i}^Q = (\alpha_{t,D(i)}, \mu_t, \delta_t)$. Da vi har medtaget optioner med 3 forskellige løbetider betyder det, at vi for hver dag estimerer 7 parametre for Heston modellen og 5 parametre for NIG modellen.

Afhængigt af definitionen af $g(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^Q)$, $\hat{g}(K_{t,i}, T_{t,i})$ og $w_{t,i}$ fås forskellige kriteriefunktioner. Det mest intuitive er at opfatte $g(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^Q)$ og $\hat{g}(K_{t,i}, T_{t,i})$ som henholdsvis modelpriser og faktisk observerede optionspriser. På denne måde minimerer man den euklidiske afstand imellem de faktiske og beregnede priser. I stedet for at se på forskellen imellem modelpriser og faktiske, kan man benytte implicitte volatiliteter eller andre spidsfindige transformationer, der har hver deres fordele og ulemper. Hvert kvadratled i (8.3) multipliceres med en vægt $w_{t,i}$, således, at de får den ønskede vægtning i den samlede kvadratsum. Hvis eksempelvis $g(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^Q)$ og $\hat{g}(K_{t,i}, T_{t,i})$ opfattes som priser, vil den dyreste option spille for stor en rolle i bestemmelsen af modellens parametre hvis $w_i = 1 \forall i$. Dette er ikke hensigtsmæssigt, idet billige optioner er ligeså vigtige som dyre. Pro-

blemet kan løses ved at sætte $w_{t,i} = 1/\hat{g}(K_{t,i}, T_{t,i})^2$. Kalibrering med vægte kan også tage højde for likviditetseffekter. Prisen på en likvid option må formodes at være mere nøjagtig end prisen på en illikvid, idet markedet har haft størst effekt på justeringen af prisen på den likvide. Når man kalibrerer, bør den likvide option altså vægte mere end den illikvide. Nedenfor gennemgår vi nogle af de mest benyttede kriteriefunktioner hvor:

- $f(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^o)$ er den modelspecifikke optionspris
- $\hat{f}(K_{t,i}, T_{t,i})$ er den faktiske optionspris
- $ask(K_{t,i}, T_{t,i}) - bid(K_{t,i}, T_{t,i})$ er den euklidiske afstand for bid-ask spændet
- $IMV(\hat{f})$ er implied volatility beregnet ved Black Scholes modellen for optionen med pris $\hat{f}$.

Kriteriefunktion 1: $\min_{\hat{\Omega}_t^o} G_1(\hat{\Omega}_t^o) = \min_{\hat{\Omega}_t^o} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\hat{f}(K_{t,i}, T_{t,i})^2} (f(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^o) - \hat{f}(K_{t,i}, T_{t,i}))^2$

Modellen benyttes af K. Detlefsen og W. Härdle og her er vægten den faktiske optionspris således at kvadratsummen udtrykker den relative prisfejl (Detlefsen & Härdle, 2006, s. 6). På denne måde tages der højde for, at nogle optioner er dyrere end andre. Modellen tager ikke højde for likviditetseffekter.

Kriteriefunktion 2: $\min_{\hat{\Omega}_t^o} G_2(\hat{\Omega}_t^o) = \min_{\hat{\Omega}_t^o} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(bid_{t,i} - ask_{t,i})^2} (f(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^o) - \hat{f}(K_{t,i}, T_{t,i}))^2$

Modellen benyttes af K. Detlefsen og W. Härdle og her er vægten det inverse bid-ask spænd. (Detlefsen & Härdle, 2006, s. 6) Intuitionen er, at optioner med små bid-ask spænd er de mest likvide og de får således tildelt størst vægt, da de anses for at være mest nøjagtige. Herved opnår man, at de mest likvide optioner får mest indflydelse på de kalibrerede parametre.

Kriteriefunktion 3: $\min_{\hat{\Omega}_t^o} G_3(\hat{\Omega}_t^o) = \min_{\hat{\Omega}_t^o} \sum_{i=1}^N (IMV(f(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^o)) - IMV(\hat{f}(K_{t,i}, T_{t,i})))^2$

Denne model anvendes af R. Weron og U. Wystup og benytter sig af implied volatility (IMV) beregnet via Black Scholes ud fra modelprisen og den faktiske pris (Weron & Wystup, 2005, s. 170).

Vægten $w_{t,i}$ sættes til 1 da implied volatilitet ikke behøver at blive normeret da de forskellige implied volatiliteter ligger tæt på hinanden.

Kriteriefunktion 4:

$$\min_{\hat{\Omega}_t^Q} G_4(\hat{\Omega}_t^Q) = \min_{\hat{\Omega}_t^Q} \sum_{i=1}^N \left(\max(f(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^Q) - ask(K_{t,i}, T_{t,i}), 0) + \max(bid(K_{t,i}, T_{t,i}) - f(K_{t,i}, T_{t,i}, \hat{\Omega}_{t,i}^Q), 0) \right)^2$$

Denne model beskrevet af T. Coleman, Y. Li og A. Verma benytter viden om bid-ask spændet til at vurdere om man rammer uden for spændet eller ej (Coleman, Li, & Verma, 1999, s. 4). Såfremt man rammer inden for spændet sættes fejleddet til 0. Er man uden for spændet sættes fejlen til den euklidiske afstand til spændet. Der tages højde for likviditetseffekter vha. bid-ask spændet og vægten w_i kan således sættes 1.

Ingen af kriteriefunktionerne har i litteraturen vist sig at være konsistent bedre end de andre. Det ses ofte, at der vægtes med den inverse til antallet af optioner N . Dette gøres for at kunne sammenligne fejl for forskellige datasæt af varierende størrelser. Dette har imidlertid ingen relevans for os. Model 2 og Model 4 afhænger i modsætning til Model 1 og Model 2 af bid-ask spændet. Det er værd at bemærke, at bid-ask spændet hverken er bestemt som en procentuel størrelse af optionsprisen eller et konstant beløb forbundet med transaktionsomkostningerne. Det ses oftest, at den absolutte størrelse på bid-ask spændet vokser, når optionsprisen stiger, men det forekommer, at enkelte options bid-ask spænd opfører sig underligt. For en yderligere gennemgang af fænomenet henviser vi til appendiks H.

Givet forskellen på de 4 kriteriefunktioner er det plausibelt, at de forskellige kriteriefunktioner kan lede til forskellige resultater. Idet vi er interesserede i at undersøge hvilken af de 3 modeller der er bedst, er det uhensigtsmæssigt, hvis resultatet er afhængigt af hvilken kriteriefunktion vi har anvendt, og vi vælger derfor at benytte alle de gennemgåede kriteriefunktioner. Vi finder et parametersæt $\hat{\Omega}_t^Q$ for hver af de 4 kriteriefunktioner givet et modelspecifikt initialgæt. Vores algoritme itererer indtil kriteriefunktion $G_j(\hat{\Omega}_t^Q)$ ændrer sig med mindre end $1e-8$. Afhængigt af hvilke initialgæt vi sætter, fås oftest forskellige optimale punkter. Initialgættene findes i afsnit 8.3. Initialgættet gælder kun for den første dag. Herefter opdateres gættet med gårdagens kalibrerede parametre $\hat{\Omega}_t^Q$. Årsagen til denne fremgangsmåde er, at vi forventer, at gårdagens kalibrerede parametre må

være det bedste gæt for kalibreringen den følgende dag, da vi antager, at markedet som regel ikke ændrer tilstand fra dag til dag⁴⁷.

Når kalibreringen er færdig, benyttes kriteriefunktionerne også til at beregne kriteriefunktionsfejlen. For *hver* dags kalibrering med én given kriteriefunktion j beregnes de 4 kriteriefunktionsfejl $G_{j,l}(\hat{\Omega}_t^Q)$, hvor l angiver hvilken kriteriefunktion der er brugt til at beregne fejlen. Der er altså følgende 16 udfald.

Tabel 8.1

	Kriteriefunktionsfejl (KFF)			
Kalibrering med:	KFF $l=1$	KFF $l=2$	KFF $l=3$	KFF $l=4$
Kriteriefunktion $j=1$	$G_{1,1}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{1,2}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{1,3}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{1,4}(\hat{\Omega}_t^Q)$
Kriteriefunktion $j=2$	$G_{2,1}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{2,2}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{2,3}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{2,4}(\hat{\Omega}_t^Q)$
Kriteriefunktion $j=3$	$G_{3,1}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{3,2}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{3,3}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{3,4}(\hat{\Omega}_t^Q)$
Kriteriefunktion $j=4$	$G_{4,1}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{4,2}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{4,3}(\hat{\Omega}_t^Q)$	$G_{4,4}(\hat{\Omega}_t^Q)$

Tabel 8.1 viser de 4 kriteriefunktionsfejl (KFF) for hver kalibrering med kriteriefunktion j .

8.3 Modelspecifikke initialgæt

I det følgende vil vi bestemme initialgættene for den første dags kalibrering for de 3 optionsmodeller. Initialgættet er uvigtigt for Black Scholes modellen, mens initialgættet derimod er afgørende for at få en god parameterestimation for NIG og Heston modellen.

8.3.1 Initialgæt for Black Scholes

For Black Scholes modellen skal der bestemmes én implicit volatilitet parameter for hver option. Denne parameter eksisterer og kan findes entydigt ud fra de faktiske optionspriser, hvis restriktionerne (2.2) er opfyldt.

Vi har sat startgættet for option i til $\sigma_{t,i} = 0,3$. Det har dog vist sig, at vores optimeringsalgoritme ikke kan finde en løsning i de tilfælde, hvor $\sigma_{t,i} > 1$, givet vi har sat initialgættet til $\sigma_{t,i} = 0,3$. I disse tilfælde har vi så i stedet valgt at ændre initialgættet til $\sigma_{t,i} = 1$.

⁴⁷ Volatility clusters er et eksempel på hvordan markedet kan være i forskellige tilstande med høj/lav volatilitet.

8.3.2 Initialgæt for NIG modellen

Kalibreringsproblemet for NIG modellen er ikke så simpelt som for Black Scholes modellen. Det skyldes, at der for NIG modellen ikke eksisterer en entydig løsning som for Black Scholes modellen, da NIG modellen ikke har en parameter for hver af de op til 25 optioner. Problemet er derfor overbestemt og det viser sig, at ingen af kriteriefunktionerne er pænt konvekse og der findes således flere forskellige lokale minima. Da vi benytter os af en lokal optimeringsalgoritme er det vigtigt at sætte et godt initialgæt for NIG modellens parametre, idet den lokale søgealgoritme dermed har større chance for at finde et acceptabelt minimum.

Uanset om vi antager at risikopræmien sættes lig 0 eller ej, kan vi benytte maximum likelihood estimererne fra Tabel 3.6a som initialgæt, idet vi fra afsnit 5.1.2 ved vi, at det kun er β der forskydes ved overgangen fra P-mål til Q-mål. Vi benytter de aggregerede parametre i overensstemmelse med, at parametrene skal fungere som initialgæt for optioner med forskellige løbetider. Det bemærkes, at den forskudte β er defineret ud fra r, α, μ og δ jf. (5.31) og behøver derfor ikke estimeres. Som nævnt i indledningen af afsnit 8.2 vælger vi at gøre én af NIG modellens parametre afhængige af optionernes løbetid. Vi har testet effekten af at gøre parametrene α, δ og μ tidsafhængige og det viser umiddelbart, at det er α der giver de bedste kalibreringsresultater. Som initialgæt sætter vi alle de tidsafhængige α 'er lig det aggregerede α dvs. $\alpha_{0,1} = \alpha_{0,2} = \alpha_{0,3} = 37,6$. Det initiale parametersæt bliver altså:

$$\hat{\Omega}_{0,i}^Q = (\alpha_{0,D(i)}, \mu_0, \delta_0) = (37,6; 0,358; 0,855) \forall i \quad (8.4)$$

For NIG fordelingen skal der for alle i gælde, at $\alpha_{t,D(i)} > |\beta_t^*|$, hvilket vi i appendiks E viser er ækvivalent med:

$$\alpha_{t,D(i)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{t,D(i)} - \mu_t}{\delta_t} \right)^2} > 0 \quad (8.5)$$

I vores kalibrering med Matlabfunktionen, lsqnonlin er vi nødt til at sætte nogle grænser for hvor den må søge. Da (8.5) ikke er en statisk ligning, skal restriktionen omformuleres for at kunne implementeres i Matlab. Inputvariablene med tilhørende øvre og nedre grænser bliver således:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_{t,i}^Q &= \begin{bmatrix} \alpha_{t,D(i)}^{\text{kal}} & \mu_t & \delta_t \end{bmatrix} & \text{hvor } \alpha_{t,D(i)}^{\text{kal}} &= \alpha_{t,D(i)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{t,D(i)} - \mu_t}{\delta_t} \right)^2} \\
\text{nedre} &= \begin{bmatrix} 0 + \varepsilon & -\infty & 0 + \varepsilon \end{bmatrix} & \text{og } \varepsilon &= 0,0000000001 \\
\text{øvre} &= \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Efter Matlab har itereret sig frem til en løsning transformeres $\alpha_{t,D(i)}^{\text{kal}}$ tilbage igen så parametrene fås på den ønskede form:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t,D(i)}^{\text{kal}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{t,D(i)} - \mu_t}{\delta_t} \right)^2} & \mu_t & \delta_t \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

8.3.3 Initialgæt for Heston modellen

Kalibreringsproblemet for Heston modellen kompliceres ligesom for NIG modellen af, at der ikke eksisterer en entydig løsning som der gjorde for Black Scholes modellen. Heston modellen har ligesom NIG modellen færre parametre end antallet af optioner og problemet er derfor overbestemt. Det er derfor igen vigtigt med et godt initialgæt, da vi anvender en lokal optimeringsmetode. Vi benytter Gatheral's lemma til at give et initialgæt til den initiale volatilitet V_0 for Heston modellen (Gatheral, 2006, s. 34).

$$\begin{aligned}
\sigma_{ATM}^2(T) &\approx \frac{1}{T} \int_0^T (V_0 - \theta') e^{-\kappa' t} + \theta' dt \Leftrightarrow \sigma_{ATM}^2(T) \approx (V_0 - \theta') \frac{1 - e^{-\kappa' T}}{\kappa' T} + \theta' \\
\text{hvor } \kappa' &= \kappa^* - \frac{\rho\sigma}{2} \text{ og } \theta' = \frac{\theta^* \kappa^*}{\kappa'}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Vi er interesserede i grænsetilfældet $T \rightarrow 0$ for brøken, $\frac{1 - e^{-\kappa' T}}{\kappa' T}$ som vi finder med L'hospitals regel, (Sydsæter, 2003):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\kappa' T}}{\kappa' T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dT}(1 - e^{-\kappa' T})}{\frac{d}{dT}(\kappa' T)} = \lim_{T \rightarrow 0} e^{-\kappa' T} = 1 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \sigma_{ATM}^2(T) \approx (V_0 - \theta') \cdot 1 + \theta' = V_0 \tag{8.9}$$

Den implicite volatilitet fra Black Scholes modellen er altså approksimativt lig den initiale volatilitet i Heston modellen for optioner med en løbetid meget tæt på 0. Vi har ikke optioner med så korte løbetider i vores datasæt og benytter derfor at-the-money optionen i løbetidsgruppen 0,5 – 3,5 som

tilnærmelse. Vi mener, at dette er en rimelig antagelse og refererer til følgende citat af Chen Bin, (Bin, 2007, s. 30):

“The Black-Scholes implied variance of ATM options of about 2 months maturity is a satisfactory estimate for the initial variance, V_0 , in the Heston model.”

Den initiale volatilitet findes for d. 01-10-2008 til $(V_0)_0 = 0,1052$. Vi mangler stadig initialgæt for κ^*, θ^*, ρ og σ . Idet vi antager at risikopræmierne er lig 0, kan vi bruge maximum likelihood estimerne under P fra Tabel 4.1 som initialgæt.⁴⁸ Det bemærkes, at ρ og σ ikke ændres ved skift af sandsynlighedsmål fra P til Q, og de kunne derfor bruges som initialgæt uanset antagelsen om risikopræmierne. V benytter de aggregerede parametre fra Tabel 4.1 som initialgæt, da de er estimeret med den restriktion, at parametrene skal være ens for de valgte løbetider.

Ligesom for NIG modellen gør vi en af Heston modellens parametre afhængige af optionernes løbetid. Motivationen er som nævnt i indledningen af afsnit 8.2, at Mikael og Nögel viser, at Heston modellen kalibrerer signifikant bedre, hvis man gør θ^* afhængig af T . Som initialgæt sætter vi alle de tidsafhængige θ^* 'er lig det aggregerede θ^* dvs. $\theta_{0,1}^* = \theta_{0,2}^* = \theta_{0,3}^* = 0,023$. Det initiale parametersæt bliver altså:

$$\hat{\Omega}_{0,i}^Q = (\kappa_0^*, \theta_{0,D(i)}^*, \sigma_0, \rho_0, (V_0)_0) = (7,632; 0,023; 0,553; -0,993; 0,105) \forall i \quad (8.10)$$

For Heston modellen skal der for alle i gælde, at $2\kappa_t^* \theta_{t,D(i)}^* > \sigma_t^2$ (Moodley, 2005, s. 29). Da dette ikke er en statisk restriktion, laver vi samme trick som for NIG modellen og definerer derfor variabelen, $\theta_{t,D(i)}^{\text{kal}} = 2\kappa_t^* \theta_{t,D(i)}^* - \sigma_t^2 > 0$, så programmets inputvariabler og tilhørende nedre og øvre grænser bliver:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{t,i}^Q &= \begin{bmatrix} \kappa_t^* & \theta_{t,D(i)}^{\text{kal}} & \sigma_t & \rho_t & (V_0)_t \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \theta_{t,D(i)}^{\text{kal}} = 2\kappa_t^* \theta_{t,D(i)}^* - \sigma_t^2 \\ \text{nedre} &= \begin{bmatrix} 0 + \varepsilon & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og } \varepsilon = 0.0000000001 \\ \text{øvre} &= \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Efter Matlab har itereret sig frem til en løsning transformeres $\theta_{t,D(i)}^{\text{kal}}$ tilbage igen så parametrene fås på den ønskede form:

⁴⁸ Det bemærkes, at $\kappa^* = \kappa + \lambda$ og $\theta^* = \kappa\theta/\kappa^*$ og når det antages at $\lambda = 0$ fås $\kappa^* = \kappa$ og $\theta^* = \theta$.

$$\begin{bmatrix} \kappa_t^* & \frac{\theta_{t,D(i)}^{\text{kal}} + \sigma_t^2}{2\kappa_t^*} & \sigma_t & \rho_t & (V_0)_t \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

8.4 Kalibreringsresultater

I dette afsnit undersøger vi optionsmodellerne separat for at afgøre om de regner rigtigt, forstået således, at der ikke er systematiske fejl i modelpriserne i forhold til de observerede priser. Dette gøres med en detailanalyse af de dage, hvor der er mange overskridelser af bid-ask spændet samt de dage hvor kriteriefunktionsfejlene bliver store. Formålet er at undersøge hvor slemme overskridelserne/fejlene er, og om hvorvidt de skyldes outliers i data eller om der er tale om noget systematik modellen ikke kan opfange.

Afsnittet har ydermere til formål at belyse kriteriefunktionerne, med henblik på at forklare hvilke fordele og ulemper de har, samt at give et bud på, hvilken kriteriefunktion der giver de bedste resultater. Til dette formål virker det mest oplagt at undersøge antallet af bid-ask overskridelser, men antallet af overskridelser siger dog ikke noget om, ”hvor store” overskridelserne er. Størrelserne af overskridelserne er givet ud fra kriteriefunktionsfejlene. Alle kriteriefunktionerne giver intuitive mål for goodness of fit, og da der ikke er én kriteriefunktion, der er mere vigtig end de andre, ønsker vi at finde den kriteriefunktion, der generelt giver den laveste kriteriefunktionsfejl for alle kalibreringerne. Vi er heller ikke interesserede i en kriteriefunktion, der giver meget fluktuerende parametre, da sådanne modeller ofte er dårlige til at forudsige fremtidige markedsbevægelser, hvilket er vigtigt når man konstruerer en delta hedge. Til at afgøre hvilken kriteriefunktion der giver det bedste resultat, har vi derfor valgt at se på følgende punkter:

1. Antallet af overskridelser af bid-ask spændet
2. Kriteriefunktionsfejl
3. Parameterstabiliteten af de kalibrerede parametre

For hvert punkt defineres en Scorefunktion, der giver point fra 1 til 4, hvor 4 gives til den bedste. Scoren findes ud fra summen af en række delscores der også giver point fra 1 til 4. Scoren for de 3 punkter vægtes ligeligt i den endelige bedømmelse af kriteriefunktionerne, og den kriteriefunktion der får flest point, er således vores bud på den bedste kriteriefunktion. I det følgende forklarer vi hvordan vi vil implementere de 3 punkter.

1. For hver dags kalibrerede parametre tæller vi antallet af gange vores modelpriser rammer under bidprisen og over askprisen for hver kriteriefunktion. Vi giver point ud fra antal bid overskridelser, antal ask overskridelser og total antal overskridelser. Ud fra summen af disse 3 delscores finder vi Score 1.
2. For at afgøre, hvilken kriteriefunktion, der generelt giver de laveste kriteriefunktionsfejl, beregnes kriteriefunktionsfejlen $G_{j,l}(\hat{\Omega}_t^o)$ for hver dag. Når alle n dage er kalibreret findes middelværdien af fejlene $\bar{G}_{j,l} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n G_{j,l}(\hat{\Omega}_t^o)$, som vi så sammenligner og giver point. Det giver 4 delscores og ud fra dem finder vi Score 2. Det må forventes, at kriteriefunktionsfejlen $\bar{G}_{j,l}$ kalibreret med kriteriefunktion j giver den laveste kriteriefunktionsfejl for $l = j$, da det netop her er kriteriefunktionsfejlen der bliver minimeret.
3. Til sidst undersøges parameterstabiliteten. De kalibrerede parametre plottes over tid, hvorefter vi beregner standardafvigelsen for dem. Den laveste standardafvigelse på tværs af kriteriefunktionerne udløser maksimum point. Vi medtager kun standardafvigelsen for én af de tidsafhængige parametre, for ikke at overvægte betydningen af dem. Vi vælger parameteren for den korte optionsserie, da der er flest optioner med i denne serie. Ud fra delscorerne finder vi så Score 3.

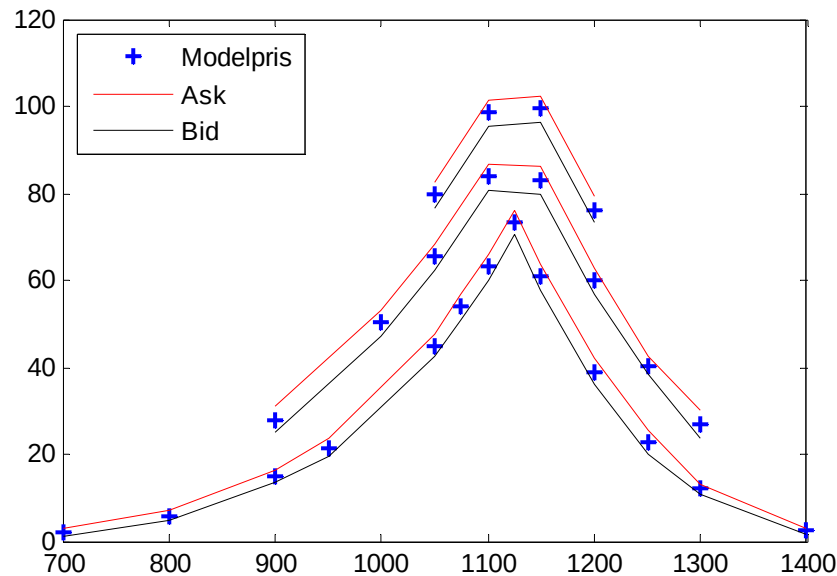
Ved hjælp af Score 1, Score 2 og Score 3 vurderer vi hvilken kriteriefunktion der giver det bedste resultat.

8.4.1 Black Scholes modellens kalibreringsresultater

Som tidligere nævnt er kalibreringsproblemet simpelt for Black Scholes modellen. Vi finder også, at Black Scholes modellen for alle optioner i datasættet giver 0 i kriteriefunktionsfejl og 0 i antal overskridelser af bid ask spændet uanset, hvilken kriteriefunktion vi benytter.⁴⁹ Detailanalysen er således hurtig overstået og vi ser bort fra at give kriteriefunktioner Scores, da de alle klarer sig lige godt. I det følgende præsenterer vi flere resultater som er beregnet med Black Scholes. I nedenstående figur har vi plottet bid ask spændet sammen med de beregnede Black Scholes priser for d. 02-10-2008.

⁴⁹ Bemærk, at det ikke er muligt at benytte kriteriefunktion 4 for Black Scholes modellen.

Figur 8.1



Figur 8.1 viser Black Scholes modelpriser og bid-ask spænd som funktion af strike for d. 02-10-2008. Den nederste, mellemste og øverste optionsserie repræsenterer henholdsvis de optioner med kortest, mellemst og længst tid til udløb.

For d. 02-10-2008 er der ikke overraskende 0 overskridelser og 0 i kriteriefunktionsfejl, og alle optionspriser rammes derfor perfekt. I nedenstående tabel ses de estimerede implicitte volatiliteter for både call og put optionerne d. 02-10-2008.

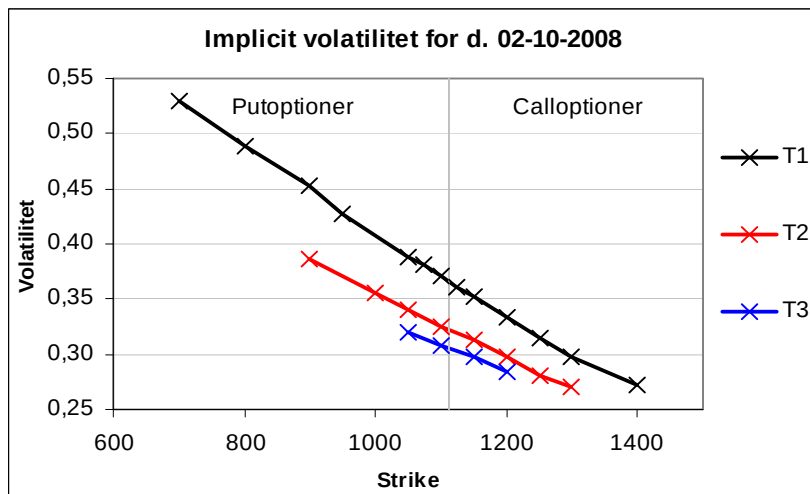
Tabel 8.2

	$T_1 = 0,210$		$T_2 = 0,460$		$T_3 = 0,710$			
Nr.	K	$\sigma_{T_1,K}$	K	$\sigma_{T_2,K}$	K	$\sigma_{T_3,K}$		
1	700	0,529	Put	900	0,386	Put	1050	0,320
2	800	0,489		1000	0,356	1100	0,307	
3	900	0,453		1050	0,340	Call	1150	0,297
4	950	0,427		1100	0,325		1200	0,284
5	1050	0,388	Call	1150	0,313			
6	1075	0,381		1200	0,298			
7	1100	0,371		1250	0,280			
8	1125	0,361		1300	0,271			
9	1150	0,353						
10	1200	0,334						
11	1250	0,315						
12	1300	0,297						
13	1400	0,272						

Tabel 8.2 viser de implicitte volatiliteter for alle call- og putoptioner for d. 02-10-2008.

Den tilhørende graf for ovenstående data er givet i Figur 8.2, og viser de implicitte volatiliteter som funktion af strike.

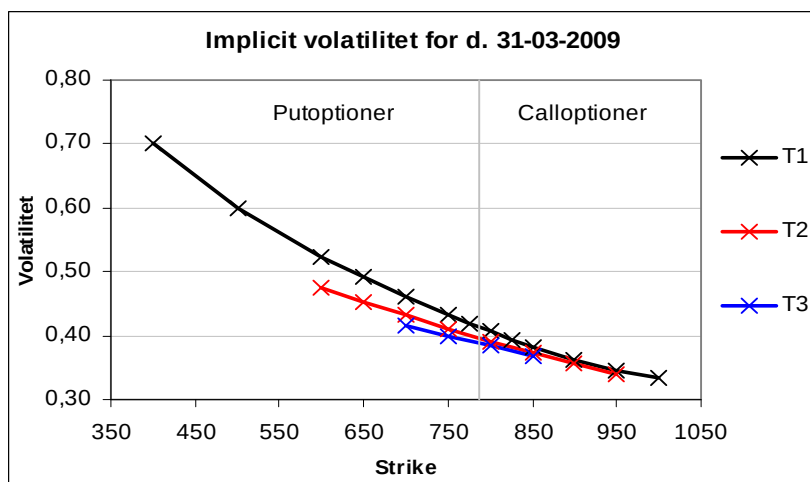
Figur 8.2



Figur 8.2 viser de implicitte volatiliteter som funktion af strikes for alle 3 løbetider d. 02-10-2008.

Figur 8.2 ses tydeligt at være i strid med Black Scholes modellens antagelse om konstant volatilitet. Den implicitte volatilitet ses at falde jo længere der er til udløb for optionen. Det tyder på, at de historiske volatiliteter er høje, og at der er i markedet er en forventning om, at volatiliteten med tiden vil falde (Hull, 2005, s. 382) Det ses samtidig, at den implicitte volatilitet falder med en næsten konstant hældning, når striken stiger. Det er ikke unormalt, men man vil dog oftere se, at hældningen bliver fladere når striken stiger. Dette fænomen omtales ofte som "volatility skew" eller "volatility smirk", da det grafisk ligner et skævt smil. Følgende figur for den 31-03-2009 viser et eksempel på et "volatility skew":

Figur 8.3

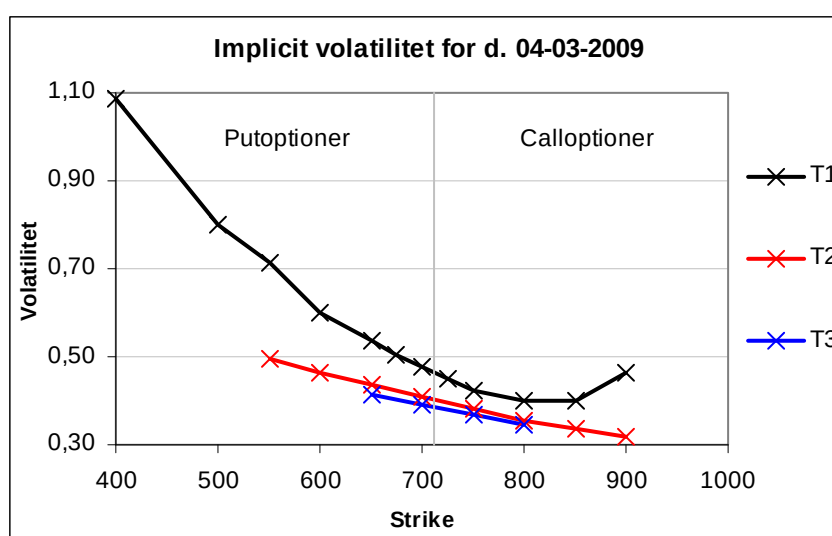


Figur 8.3 viser de implicitte volatiliteter som funktion af strikes for alle 3 løbetider d. 31-03-2009.

For de korte optioner ses det tydeligt, at hældningen for den implicitte volatilitet bliver fladere når striken stiger og dette resulterer grafisk i et ”volatility skew”, hvilket er typisk for indeksoptioner (Hull, 2005, s. 380). Det bemærkes samtidigt, at overgangen fra put til call optioner ikke medfører spring i den implicitte volatilitet og det lader altså til, at der er en pæn sammenhæng mellem put og call optioner.

Det forekommer også sommetider, at den implicitte volatilitet begynder at stige, når striken bliver tilpas høj. Det fænomen kaldes et volatilitetssmil, hvilket følgende Figur 8.4 for den 04-03-2009 viser et eksempel på:

Figur 8.4



Figur 8.4 viser de implicitte volatiliteter som funktion af strikes for alle 3 løbetider d. 04-03-2009.

For de korte optioner begynder den implicitte volatilitet for de to sidste optioner at stige igen og vi får så et volatilitetssmil. På baggrund af Figur 8.2, Figur 8.3 og Figur 8.4 kan det ikke afgøres om den mellemlange og lange optionsserie udviser nogle af de nævnte karakteristika, da optionerne ikke er tilstrækkelig out-of-the-money i forhold til deres længere løbetider.

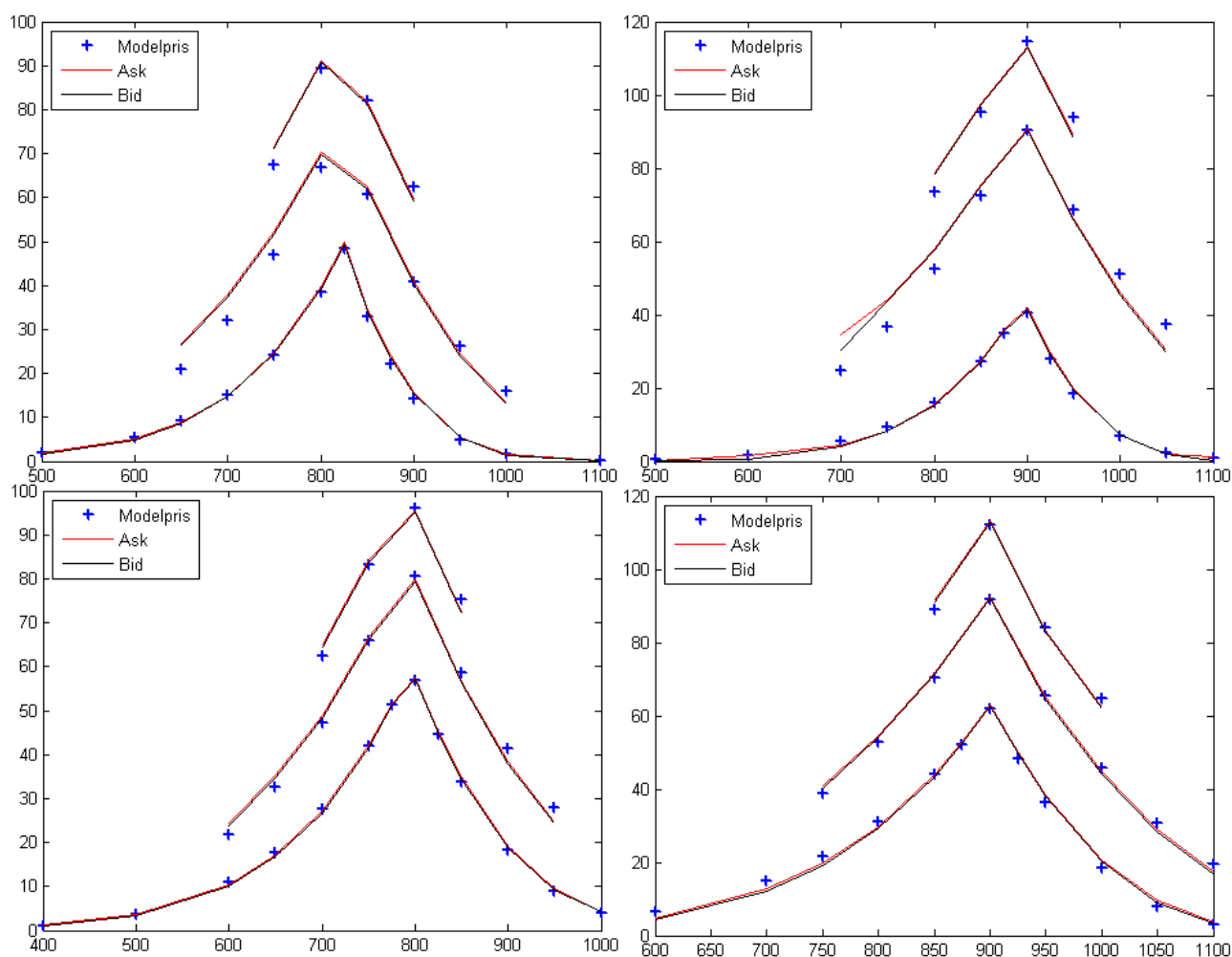
Vores kalibrering med Black Scholes modellen giver resultater der stemmer overens med det man kan forvente ud fra et teoretisk synspunkt. De tre nævnte situationer er alle velkendte i litteraturen, men er i strid med Black Scholes modellens antagelser og man kan derfor frygte, at dette går ud over modellens hedging egenskaber.

8.4.2 NIG modellens kalibreringsresultater

Kalibreringsproblemet for NIG modellen er betydeligt vanskeligere end for Black Scholes modellen, og vi foretager derfor den beskrevne detailanalyse, for de dage hvor summen af bid og ask overskridelser er størst for de 4 kalibreringer, for at vurdere, om modellen har systematiske fejl.

Det viser sig, at kriteriefunktion 1 til 4 giver flest overskridelser henholdsvis d. 30/01/2009, d. 28/11/2008, d. 31/03/2009 og d. 31/12/2008. Figur 8.5 viser observerede bid-ask spænd samt modelpriser som funktion af strike for de dage med flest overskridelser for de 4 kalibreringer.

Figur 8.5



Figur 8.5 viser modelpriser og bid-ask spænd som funktion af strike. Hvert plot viser det fit med flest bid-ask overskridelser for den pågældende kriteriefunktion. Øverst til venstre ses kalibrering med Kriteriefunktion 1 d. 30/01/2009. Øverst til højre ses kalibrering med Kriteriefunktion 2 d. 28/11/2008. Nederst til venstre ses kalibrering med Kriteriefunktion 3 d. 31/03/2009. Nederst til højre ses kalibrering med Kriteriefunktion 4 d. 31/12/2008.

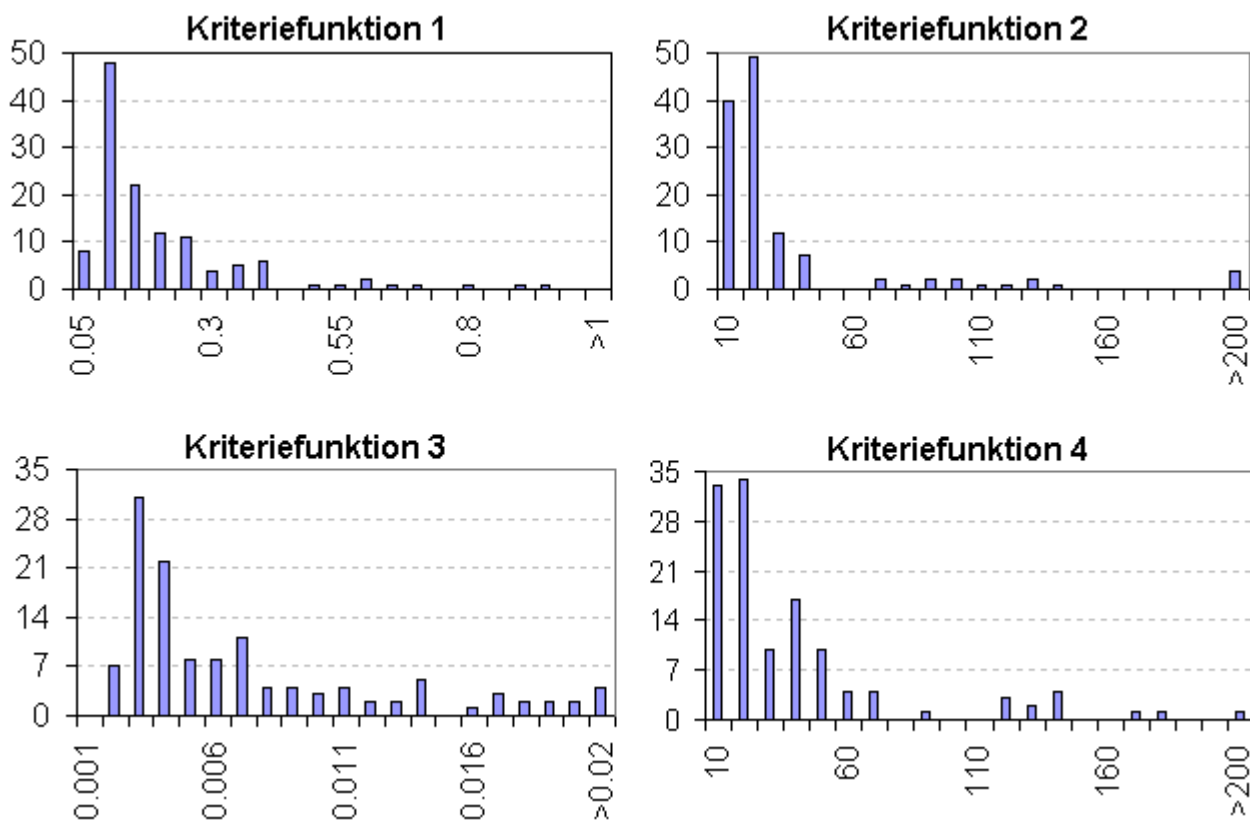
Det kan straks konkluderes, at kalibreringerne ikke fitter det observerede data perfekt, da vi har op til 22 overskridelser ud af 25 optioner, men der er også tale om det dårligste fit, mht. overskridelser af bid-ask spændet i hele vores datasæt med 125 dages observationer. Det lader til, at der er en generel tendens til, at modelpriserne for out-of-the-money putoptioner rammer over bid-ask spændet for den korte optionsserie, mens de rammer under bid-ask spændet for den mellemste og den lange optionsserie. Helt symmetrisk ses det, at modelpriserne for out-of-the-money calloptioner rammer under bid-ask spændet for den korte optionsserie, mens de rammer over bid-ask spændet for den mellemste og den lange optionsserie. Noget tyder altså på, at vores NIG model systematisk rammer ved siden af bid-ask spændene. Dette stemmer overens med det vi så i Figur 3.12 i afsnit 3.4, der tydeligt viste, at NIG modellens parametre ændrede sig meget afhængigt af hvilken tidsperiode afkastet blev beregnet over. Når vi kalibrerer til 3 forskellige løbetider resulterer det altså i, at vores NIG model ikke rammer nogen af serierne optimalt. Vores plot 1-4 i Figur 8.5 indikerer altså, at NIG modellen ikke er særlig god til at fange dynamikken af den virkelige verden. Spørgsmålet er nu hvor slemt det står til. Af Figur 8.5 ses det tydeligt at der er forskel på Kriteriefunktion 1 og 4 i forhold til Kriteriefunktion 2 og 3 selvom de alle har mange overskridelser af bid-ask spændet. Det viser sig, at vores NIG model ikke nødvendigvis klarer sig værst de dage hvor der er mange overskridelser af bid-ask spændet, men snarere når kriteriefunktionsfejlene er store, og en dybere analyse af kriteriefunktionsfejlene for hver kalibrering er derfor nødvendig. Vi ser på hvilke dage, der giver de største kriteriefunktionsfejl for de forskellige kalibreringer:

Tabel 8.3

Kalibrering med:	KFF 1	KFF 2	KFF 3	KFF 4
Kriteriefunktion 1	04/03/2009	28/11/2008	04/03/2009	24/11/2008
Kriteriefunktion 2	04/03/2009	28/11/2008	04/03/2009	01/12/2008
Kriteriefunktion 3	04/03/2009	28/11/2008	03/03/2009	28/11/2008
Kriteriefunktion 4	03/03/2009	03/12/2008	24/02/2009	01/12/2008

Det ses, at nogle dage går igen, såsom f.eks. d. 04/03/2009 (markeret med gråt) for forskellige kalibreringer med forskellige kriteriefunktioner. Noget tyder altså på, at der er nogle dage hvor markedet opfører sig underligt, hvilket bestemt ikke er utænkeligt. Vi ønsker at vide, om de værste dage blot er outliers, eller om de er forholdsvis almindelige i vores datasæt, og vi undersøger derfor hyppigheden af kriteriefunktionsfejlene. I Figur 8.6 ses hyppigheden af kriteriefunktionsfejlene 1-4 for de tilhørende kalibreringer.

Figur 8.6



Figur 8.6 viser hyppigheden af kriteriefunktionsfejlene 1-4 for kalibrering 1-4.

Der er en tendens til, at de største kriteriefunktionsfejl udgør en lille del af de i alt 125 kriteriefunktionsfejl. Det ses ydermere, at de største kriteriefunktionsfejl generelt ligger relativt langt fra hovedparten af de resterende kriteriefunktionsfejl. Vi har anskuet grafer som dem i Figur 8.5 for flere dage med middelstore kriteriefunktionsfejl, og vi ser generelt, at NIG modellen fitter forholdsvis pænt (se f.eks. d. 31/12/2008 nederst til venstre i Figur 8.5). Det er dog tydeligt, at modelpriserne for NIG modellen næsten altid har den førømtalte systematisk fejl og vores forventninger til NIG modellens delta hedge er derfor ikke særligt høje. I det efterfølgende undersøger vi kriteriefunktionernes karakteristika for NIG modellen og tildeler Scores.

Antal af overskridelser

Antallet af overskridelser af bid-ask spændet for kalibreringen med de 4 forskellige kriteriefunktioner for NIG modellen ses i Tabel 8.4. Af Score 1 ses det, at kriteriefunktion 3 er den bedste.

Tabel 8.4

	Overskridelser			Score for overskridelser				
Kalibrering med:	ASK	BID	Sum	ASK score	BID score	Sum score	Sum	Score 1
Kriteriefunktion 1	477	957	1434	4	2	3	9	3
Kriteriefunktion 2	742	765	1507	2	3	2	7	2
Kriteriefunktion 3	701	644	1345	3	4	4	11	4
Kriteriefunktion 4	923	1043	1966	1	1	1	3	1

Kriteriefunktionsfejl

Middelværdien af kriteriefunktionsfejlene for de forskellige kalibreringer med NIG modellen ses i Tabel 8.5. Det fremgår, at kalibreringen med kriteriefunktion 2 og 3 giver de bedste resultater. Vi bemærker desuden, at der som ventet gælder, at der gives maksimal point i de tilfælde, hvor kriteriefunktion og kriteriefunktionsfejl er ens, dvs. diagonalen i Scoretabellen.

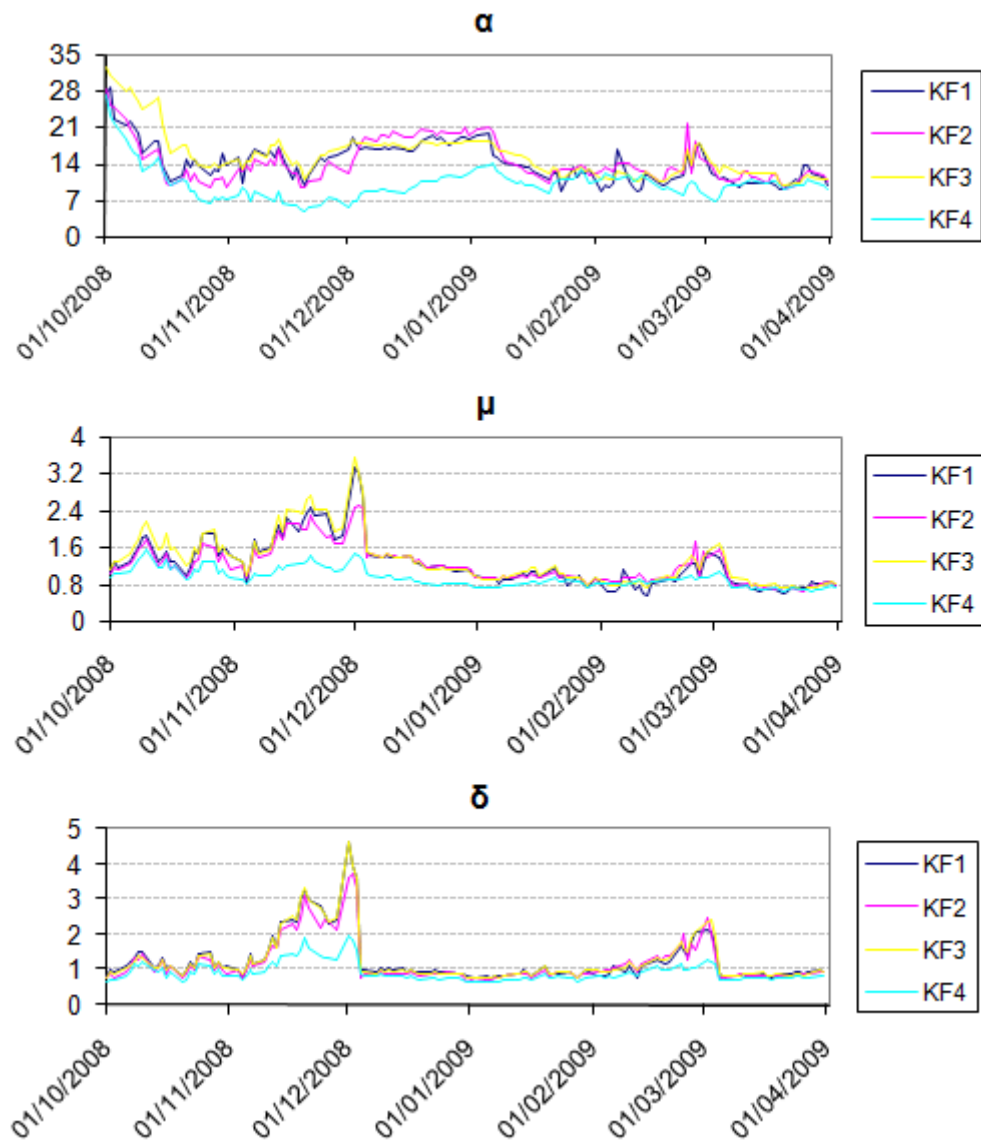
Tabel 8.5

	Kriteriefunktionsfejl (KFF)				Score for KFF					
Kalibrering med:	KFF1	KFF2	KFF3	KFF4	KFF1	KFF2	KFF3	KFF4	Sum	Score 2
Kriteriefunktion 1	0,132	57,64	0,0095	129,7	4	2	2	1	9	2
Kriteriefunktion 2	0,251	38,29	0,0092	85,8	2	4	3	3	12	3
Kriteriefunktion 3	0,168	48,30	0,0076	95,1	3	3	4	2	12	3
Kriteriefunktion 4	3,217	151,8	0,0341	45,8	1	1	1	4	7	1

Parameter stabilitet

Ved at se på figurer af de kalibrerede parametre for de forskellige kriteriefunktioner over tid får vi et indtryk af hvilke parametre der er mest fluktuerende og hvilke der er mest stabile.

Figur 8.7



I Figur 8.7 ses udvikling for de kalibrerede parametre for NIG modellen over tidsperioden fra d. 01-10-2008 og frem til d. 31-03-2009.

Af alle plottene ses det, at Kriteriefunktion 4 er den mest stabile, og at Kriteriefunktion 3 er den mest ustabile. Kriteriefunktion 4 giver desuden oftest de laveste estimater for alle parametrene hvor Kriteriefunktion 3 oftest giver de højeste estimater. Vi beregner standardafvigelsen for de kalibrerede parametre nedenfor og finder Score 3. Det ses som forventet, at det er Kriteriefunktion 4 som klarer sig klart bedst.

Tabel 8.6

	Standardafvigelse for parametre			Score for parametre				
Kalibrering med:	α_1	μ	δ	α_1	μ	δ	Sum	Score 3
Kriteriefunktion 1	3.8	0.53	0.68	3	2	2	7	2
Kriteriefunktion 2	3.9	0.41	0.60	2	3	3	8	3
Kriteriefunktion 3	4.5	0.56	0.70	1	1	1	3	1
Kriteriefunktion 4	3.2	0.20	0.27	4	4	4	12	4

Tabel 8.6 viser parameterstabiliteten for NIG modellens parametre.

I Tabel 8.7 sammenfattes resultaterne af de 3 test. Kriteriefunktion 2 og 3 er marginalt de bedste, men da Scorene for de 4 kriteriefunktioner ligger meget tæt på hinanden, kan vi ikke træffe nogen klar afgørelse om, hvilken der er den bedste. Analysen har dog belyst hvor de forskellige kriteriefunktioner har deres stærke og svage sider.

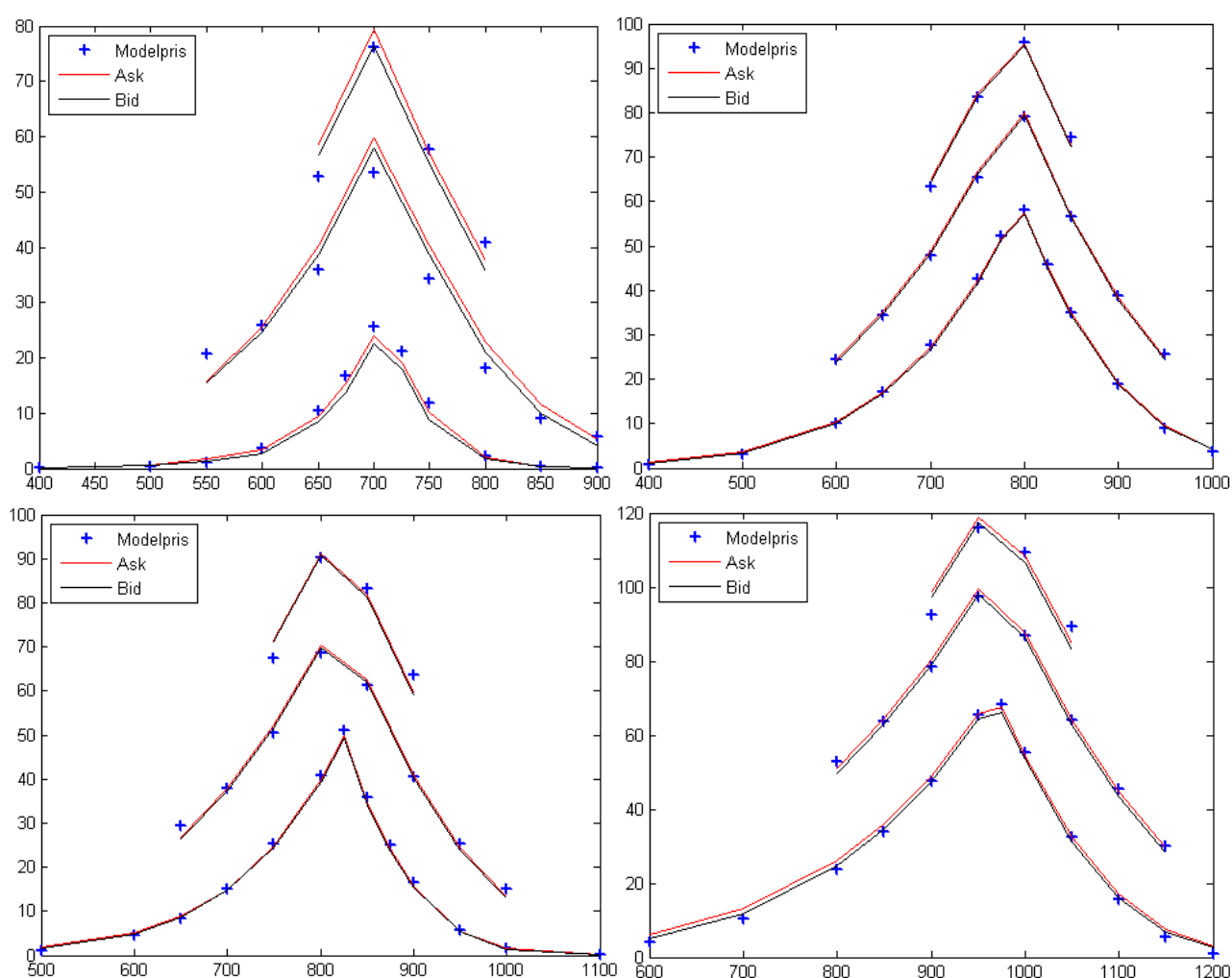
Tabel 8.7

Kalibrering med:	Score 1	Score 2	Score 3	Sum
Kriteriefunktion 1	3	2	2	7
Kriteriefunktion 2	2	3	3	8
Kriteriefunktion 3	4	3	1	8
Kriteriefunktion 4	1	1	4	6

8.4.3 Heston modellens kalibreringsresultater

Vi foretager igen en detailanalyse af de dage hvor summen af bid og ask overskridelser er størst for de 4 kalibreringer. Vores Heston model har ingen overskridelser af bid-ask spændet i nogen perioder, mens der forekommer flere overskridelser i andre perioder. Det viser sig, at kriteriefunktion 1 til 4 giver flest overskridelser henholdsvis d. 04/03/2009, d. 31/03/2009, d. 30/01/2009 og d. 31/10/2008. Figur 8.8 viser det observerede bid-ask spænd samt modelpriser som funktion af strike for de dage med flest overskridelser for de 4 kalibreringer.

Figur 8.8



Figur 8.8 viser modelpriser og bid-ask spænd som funktion af strike. Hvert plot viser det fit med flest bid-ask overskridelser for den pågældende kriteriefunktion. Øverst til venstre ses kalibrering med Kriteriefunktion 1 d. 04/03/2009. Øverst til højre ses kalibrering med Kriteriefunktion 2 31/03/2009. Nederst til venstre ses kalibrering med Kriteriefunktion 3 d. 30/01/2009. Nederst til højre ses kalibrering med Kriteriefunktion 4 d. 31/10/2008.

Det kan ligesom for NIG modellen straks konkluderes, at ingen af vores kalibreringer fitter det observerede data perfekt, da vi har op til 24 overskridelser ud af 24 optioner (en option er filtreret væk den pågældende dag). For Kriteriefunktion 1 virker det som om Heston modellen ikke kan fange dynamikken af den virkelige verden. De korte optioner (nederste serie) rammer konsekvent for højt, og de mellemlange optioner rammer for lavt. Derudover virker det som om de længste optioner burde roteres en smule mod uret. Kalibreringen med kriteriefunktion 2 har mange overskridelser, men det virker som om det skyldes nogle meget smalle bid-ask spænd og vi mener derfor, at Heston modellen klarer sig udmærket for Kriteriefunktion 2 den pågældende dag. Kalibreringen med Kriteriefunktion 3 lider ligesom Kriteriefunktion 2 af snævre bid-ask spænd, men derudover ses nogle få store overskridelser for den mellemste og den længste optionsserie, der desuden ser ud til at skulle roteres ligesom tilfældet for kriteriefunktion 1. Kalibrering med Kriteriefunktion 4 har tendens til at de korte out-of-the-money modelpriser ligger for lavt, mens de korte at-the-money modelpriser ligger for højt. De lange optioner ses igen at skulle roteres en smule mod uret.

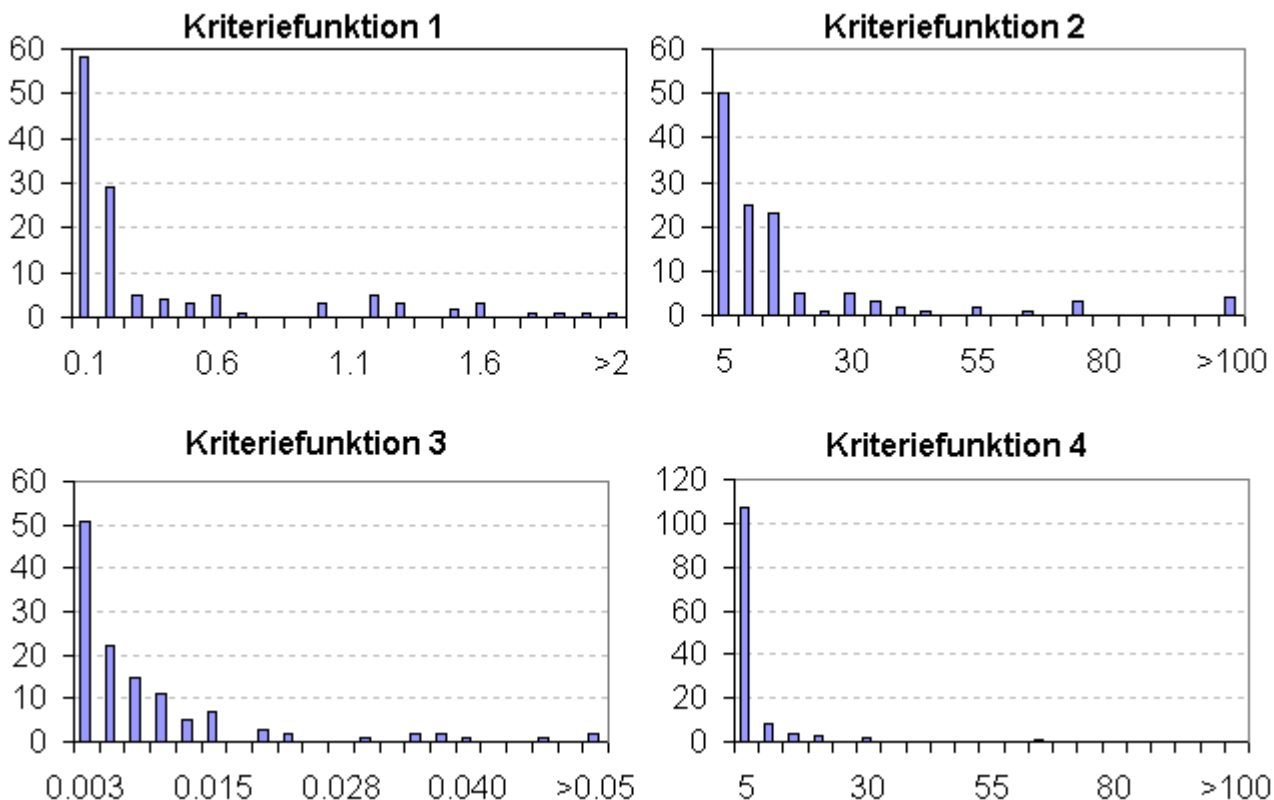
Ligesom for NIG får vi altså, at der ofte er problemer med de længste optioner. Dette skyldes som nævnt i afsnit 7.3, at de lange optioner ikke er særligt likvide, og visse dage får vores mekaniske sorterings algoritme taget altså for mange af dem med. Plottet for Kriteriefunktion 2-4 i Figur 8.8 giver ikke umiddelbart belæg for at forkaste Heston modellen, da disse ikke udviser systematiske fejl. Plottet for Kriteriefunktion 1 i Figur 8.8 afslører dog, at Heston ligesom NIG modellen også kan ramme helt ved siden af. Det viser sig, at Heston modellen ligesom NIG modellen ikke nødvendigvis klarer sig værst de dage hvor der er mange overskridelser af bid-ask spændet, men snarere når kriteriefunktionsfejlene er store. En dybere analyse af kriteriefunktionsfejlene for hver kalibrering er derfor nødvendig. Vi ser på hvilke dage der giver de største kriteriefunktionsfejl for de forskellige kalibreringer:

Tabel 8.8

Kalibrering med:	KFF 1	KFF 2	KFF 3	KFF 4
Kriteriefunktion 1	04/03/2009	28/11/2008	04/03/2009	05/03/2009
Kriteriefunktion 2	04/03/2009	28/11/2008	04/03/2009	04/03/2009
Kriteriefunktion 3	05/03/2009	28/11/2008	05/03/2009	05/03/2009
Kriteriefunktion 4	04/03/2009	24/02/2009	04/03/2009	31/10/2008

Det ses, at nogle dage går igen, såsom d. 04/03/2009 (markeret med gråt) for forskellige kalibreringer med forskellige kriteriefunktioner. Vi undersøger derfor igen hyppigheden af kriteriefunktionsfejlene af kriteriefunktionsfejlene 1-4 for de tilhørende kalibreringer i Figur 8.9.

Figur 8.9

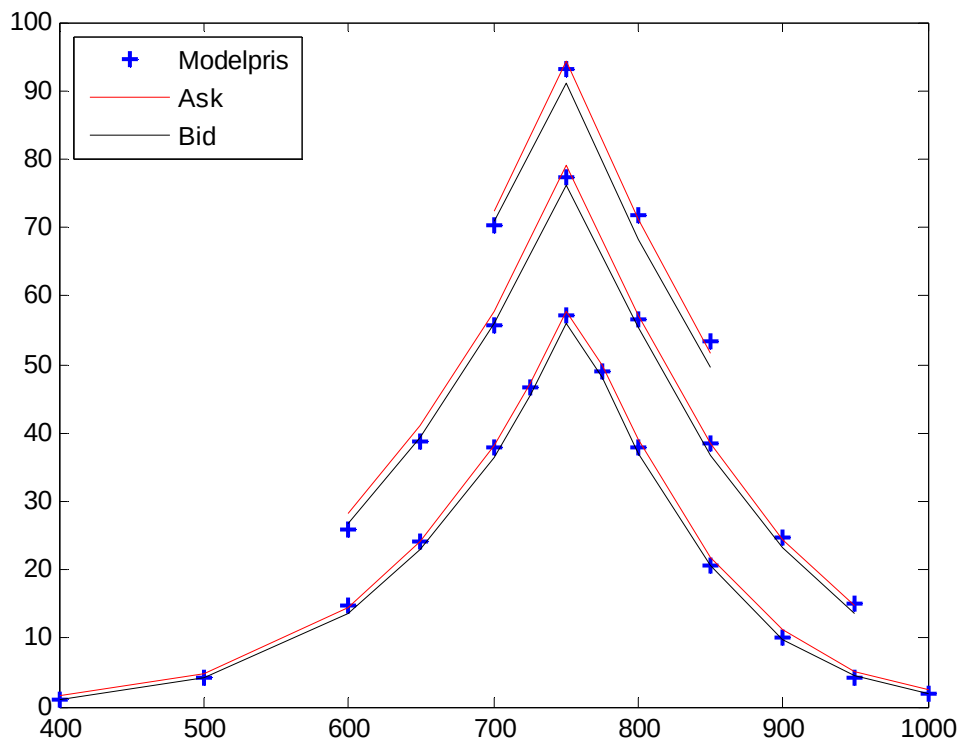


Figur 8.9 viser hyppigheden af kriteriefunktionsfejlene 1-4 for kalibrering 1-4.

Der er en tendens til, at de største kriteriefunktionsfejl udgør en lille del af de i alt 125 kriteriefunktionsfejl. Det ses ydermere, at de største kriteriefunktionsfejl generelt ligger relativt langt fra hovedparten af de resterende kriteriefunktionsfejl. Vi har anskuet grafer som dem i Figur 8.8 for flere dage med middelstore kriteriefunktionsfejl, og vi ser generelt, at Heston modellen fitter forholdsvis pænt (se f.eks. d. 31/03/2009 øverst til højre i Figur 8.8), og at modelpriserne for Heston modellen, i modsætning til NIG modellen, ikke på samme måde udviser systematiske fejl. Heston modellen har dog ligesom NIG modellen til tider svært ved at håndtere de lange optioner. Den mest plausible årsag til dette er likviditetsproblemer. I betragtning af, at vi kunne have filtreret væsentligt mere i vores data, eller lavet en mere avanceret sorteringsalgoritme⁵⁰ til valg af strikes, mener vi dog ikke det er et problem i forhold til godkendelse af modellen. Et eksempel på en typisk dag hvor alle kriteriefunktionsfejlene (1-4) er tæt ved deres median ses i Figur 8.10 nedenfor (beregnet med kriteriefunktion 2).

⁵⁰ Den mekaniske sorteringsmetode fra afsnit 7.3.3

Figur 8.10



Figur 8.10 viser modelpriser og bid-ask spænd som funktion af strike for kalibrering med Kriteriefunktion 2 d. 13/03/2009. Denne dag er valgt da kriteriefunktionsfejlen for denne dag er tæt på medianen for alle kriteriefunktionerne.

Som altid volder de lange optioner og out-of-the-money putoptionen ($K = 600$) i den mellemste optionsserie problemer, men generelt rammer Heston modellen priserne ganske pænt. Vi konkluderer på baggrund af ovenstående analyse, at Heston modellen rammer dynamikken af den virkelige verden i langt de fleste tilfælde og at de fejl der forekommer i højere grad skyldes valget af optionsdata end Heston modellen. I det efterfølgende undersøger vi kriteriefunktionernes karakteristika for Heston modellen og tildeler scores. Nødvendigheden af at undersøge kriteriefunktionernes karakteristika understreges af resultatet i Tabel 8.8, hvor vi så, at den dårligste dag afhænger af kriteriefunktionen.

Antal af overskridelser

Antallet af overskridelser af bid-ask spændet for kalibreringen med de 4 forskellige kriteriefunktioner for Heston modellen ses i Tabel 8.9. Af Score 1 ses det, at kriteriefunktion 2 er den bedste.

Tabel 8.9

Kalibrering med:	Overskridelser			Score for overskridelser			Sum	Score 1
	ASK	BID	Sum	ASK score	BID score	Sum score		
Kriteriefunktion 1	751	562	1313	1	2	1	4	1
Kriteriefunktion 2	440	529	969	3	3	4	10	4
Kriteriefunktion 3	647	447	1094	2	4	2	8	2
Kriteriefunktion 4	360	613	973	4	1	3	8	2

Kriteriefunktionsfejl

Middelværdien af kriteriefunktionsfejlene for de forskellige kalibreringer med Heston modellen ses i Tabel 8.10. Det fremgår, at kalibreringen med kriteriefunktion 2 og 3 giver de bedste resultater. Vi bemærker desuden, at der som ventet gælder, at der gives maksimal point i de tilfælde, hvor kriteriefunktion og kriteriefunktionsfejl er ens, dvs. vi får 4-taller i diagonalen i Score tabellen.

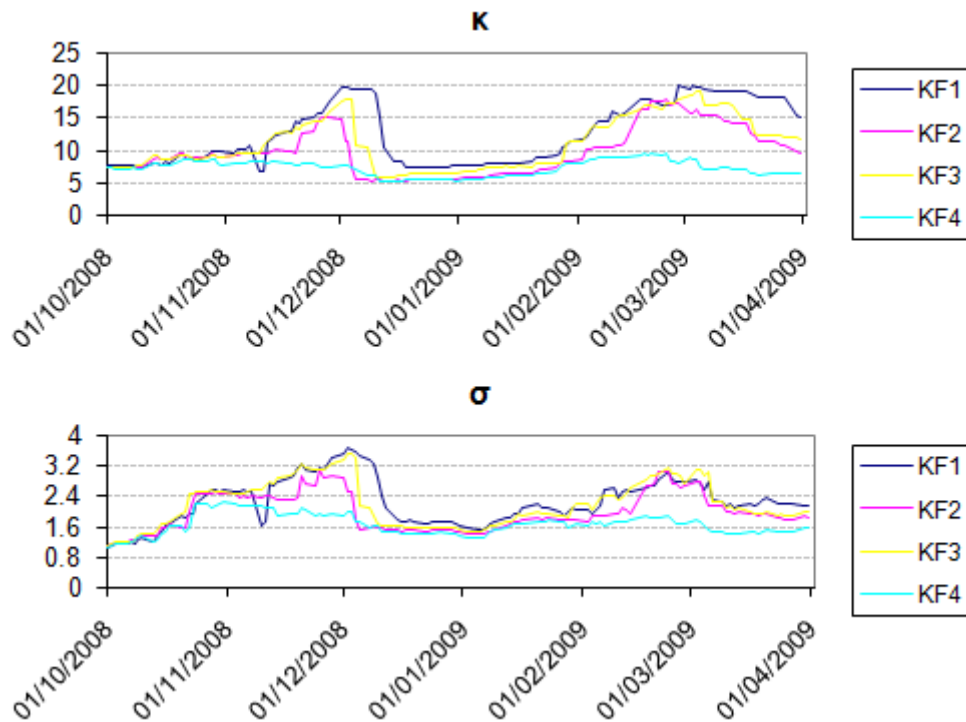
Tabel 8.10

Kalibrering med:	Kriteriefunktionsfejl (KFF)				Score for Kriteriefunktionsfejl				Sum	Score 2
	KFF1	KFF2	KFF3	KFF4	KFF1	KFF2	KFF3	KFF4		
Kriteriefunktion 1	0,139	32,0	0,0064	37,9	4	1	3	1	9	1
Kriteriefunktion 2	0,257	12,3	0,0070	11,0	2	4	2	3	11	3
Kriteriefunktion 3	0,150	19,7	0,0044	21,2	3	2	4	2	11	3
Kriteriefunktion 4	0,459	15,2	0,0095	5,1	1	3	1	4	9	1

Parameterstabilitet

Ved at se på figurer af de kalibrerede parametre for de forskellige kriteriefunktioner over tid, får vi et indtryk af, hvilke parametre der er mest fluktuerende og hvilke der er mest stabile. Det viser sig, at den største forskel imellem kriteriefunktionerne fås for parametrene κ og σ , som derfor plottes nedenfor over tid for alle 4 kriteriefunktioner.

Figur 8.11



Figur 8.11 viser plot af værdierne for parametrene κ og σ over tid.

For begge plot ses det, at Kriteriefunktion 4 giver de mest stabile parametre efterfulgt af Kriteriefunktion 2, mens Kriteriefunktion 1 og 3 er noget efter. Vi beregner standardafvigelsen for de kalibrerede parametre og finder Score 3. Det ses, at det er Kriteriefunktion 4 som klarer sig bedst.

Tabel 8.11

Kalibrering med:	Standardafvigelse for parametre					Score for parametre					Sum	Score 3
	κ^*	θ_1^*	σ	ρ	V_0	κ^*	θ_1^*	σ	ρ	V_0		
Kriteriefunktion 1	4.669	0.078	0.599	0.086	0.140	1	2	2	1	1	7	1
Kriteriefunktion 2	3.627	0.072	0.499	0.076	0.132	3	3	3	3	2	14	3
Kriteriefunktion 3	4.010	0.081	0.608	0.073	0.130	2	1	1	4	3	11	2
Kriteriefunktion 4	1.144	0.061	0.285	0.076	0.126	4	4	4	2	4	18	4

Vi medtager kun θ_1^* da vi ikke ønsker at overvægte en parameter.

I **Tabel 8.12** sammenfattes resultaterne af de 3 test. Det fremgår, at Kriteriefunktion 2 er den bedste, efterfulgt af Kriteriefunktion 3 og 4 på en delt 2. plads og med Kriteriefunktion 1 som den suverænt værste med bundkarakter i alt.

Tabel 8.12

Kalibrering med:	Score 1	Score 2	Score 3	Sum
Kriteriefunktion 1	1	1	1	3
Kriteriefunktion 2	4	3	3	10
Kriteriefunktion 3	2	3	2	7
Kriteriefunktion 4	2	1	4	7

8.5 Diskussion

Black Scholes modellen fitter som forventet alle optionspriserne perfekt, da modellen har ligeså mange parametre som optionspriser. Det ses, at vores datasæt udviser klassiske karakteristika såsom volatility smiles og smirks. NIG modellen udviser systematiske fejl og fitter således ikke data særligt godt. Vi finder, at NIG modellen fitter marginalt bedst for kriteriefunktion 2 og 3, men at man ikke kan konkludere noget ud fra resultatet. Heston modellen fitter de fleste dage tilfredsstillende og fitter således bedre end NIG modellen. For Heston modellen fås det bedste fit for kriteriefunktion 2 og det ses, at kriteriefunktion 1 taber i alle test.

Både for NIG og Heston modellen er der væsentligt forskel på, hvor godt modellerne fitter for de forskellige kriteriefunktioner. Dette skal der tages højde i sammenligningen af de 3 optionsmodeller i vores delta hedge undersøgelse.

Vi har i analysen af kriteriefunktioner ikke medtaget kørselstid, da vi vores fokus ligger på, hvor gode resultater kriteriefunktionerne giver. Vi mener dog, det er på sin plads at pointere, at Kriteriefunktion 1 og 2 er meget simple end Kriteriefunktion 3 og 4, hvilket tydeligt kommer til udtryk i kørselstider, hvor specielt Kriteriefunktion 4 er meget langsom. Dette skyldes, at Kriteriefunktion 4 kun afhænger af de modelpriser der ligger uden for bid-ask spændet. Der er altså et knæk i kriteriefunktionen når modelprisen krydser bid-ask spændet, hvilket giver vores lokale optimeringsalgoritme problemer og forårsager lange kørselstider. Kriteriefunktion 2 er derfor vores favorit, idet den både vinder på Score og kørselstid.

Hvis vores logafkast var uafhængige, burde vi kunne kalibrere vores NIG model til ét parametersæt uden at gøre nogle af parameterne tidsafhængige. I Tabel 3.4 så vi, at momenterne for vores logafkast tyder på, at logafkastene ikke er uafhængige, og NIG modellens simultane fit af de 3 løbetider er som følge heraf temmelig ringe. Problemet med at gøre kun én parameter tidsafhængig i NIG modellen er, at den rent modelteknisk ikke er tilstrækkelig til at fange forskellen på de 3 optionsserier. Det er særligt krumningerne på de 3 optionsserier NIG modellen ikke kan fange og vores forsøg med forskellige valg af tidsafhængige parametre viser, at uanset hvilken parameter vi gør tid-

safhængig i NIG modellen, parallelforskyder den blot modelpriserne og ændrer ikke deres krumning. Vi har forsøgt at fitte hver af de 3 optionsserier (optioner med samme T) for sig selv med NIG modellen og det ses tydeligt at fittet forbedres væsentligt. Ved samme undersøgelse med Heston modellen fandt vi, at θ^* kan fange noget af krumningen for de 3 løbetider, hvilket muligvis kan forklares med at Heston modellen i modsætning til NIG modellen ikke antager at logafkastene er uafhængige. Ud fra dette perspektiv er det ikke så overraskende at Heston modellen fitter optionspriserne bedre end NIG modellen og vi forventer af samme grund at Heston modellen vil være til delta hedge end NIG modellen.

9 Hedging

I dette kapitel gennemgår vi teorien bag hedging til brug for vores empiriske undersøgelser i kapitel 10. Optionspriser afhænger af tidsafhængige og stokastiske parametre såsom S, r og σ ⁵¹ mv. Laver man en Taylor approksimation over ændringen af optionsprisen $f(S_t, r_t, \sigma_t, t)$ fås:

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\Theta(\text{theta})} dt + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial S_t}}_{\Delta(\text{delta})} dS_t + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \sigma_t}}_{\nu(\text{vega})} d\sigma_t + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial r_t}}_{\rho(\text{rho})} dr_t + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}}_{\Gamma(\text{gamma})} (dS_t)^2 + \dots \quad (9.1)$$

Disse partielle afledte er kendt som "the greeks". Når en finansiell institution ønsker at afdække sine risici kan den således vælge at hedge med de greeks den finder nødvendige. Det mest anvendte er at foretage en delta hedge typisk en gang dagligt.⁵² Ved en delta hedge forsøger man at afdække/hedge den risiko der er forbundet med ændringer i det underliggende aktiv S over tid. Gamma og Vega neutrale hedges forekommer også, men dog i mindre omfang, idet det er besværligt at finde de nødvendige instrumenter i tilstrækkelig stor volumen til, at det er praktisk muligt (Hull, 2005, s. 363). Hedging i praksis beskrives nærmere i afsnit 9.3.

Haves en portefølje Π bestående af $-\Delta_S$ stk. underliggende aktiver samt 1 option fås:

$$\begin{aligned} \Pi &= f - \Delta_S S \\ d\Pi &= df - \Delta_S dS \end{aligned} \quad (9.2)$$

Vi indsætter Taylorapproksimationen (9.1) i (9.2) og får:

$$d\Pi = df - \Delta_S dS \Leftrightarrow d\Pi = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta_S \right) dS + \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 + \dots \quad (9.3)$$

Ønsker man kun at eliminere risiko som følge af bevægelser i det underliggende aktiv, S , skal man altså indgå en position på $-\Delta_S = -\frac{\partial f}{\partial S}$ enheder af S hvorved dS -leddet forsvinder og porteføljen bliver delta neutral. Ønsker man at hedge flere af de bagvedliggende risikofaktorer bliver man nødt til at øge antallet af aktiver i sin portefølje Π . For hver risikokilde man ønsker at eliminere er det nødvendigt med en position svarende til det tilhørende greek i et aktiv, der er afhængig af risikokilden. I det følgende vil vi for de 3 optionsmodeller finde, hvad delta skal sættes til, for at få en delta

⁵¹ Hvor σ er et symbol for volatilitet.

⁵² Hull (Hull, 2005, s. 363) skriver, at man under normale forhold delta hedger mindst en gang dagligt, men rykker markedet sig mere end en bestemt tærskelværdi opdaterer man sin delta hedge oftere.

neutral portefølje. Vi har valgt at koncentrere os om delta hedging, idet det er den mest anvendte type hedge i praksis.

9.1 Delta i NIG og Black Scholes modellen

For Black Scholes og NIG modellen antages det, at alt andet end det underliggende aktiv, S er konstant og alle input variable bliver således uafhængige. Man får derfor at:

$$\frac{df(S_t, \bar{\sigma}, \bar{K}, \bar{r}, \bar{T})}{dS_t} = \frac{\partial f(S)}{\partial S_t} = \Delta_S \quad (9.4)$$

De partielle afledte Δ_S for Black Scholes og NIG modellen er beregnet i afsnit 6.2. I appendiks F viser vi forholdet mellem $\Delta_S, \Delta_{\hat{S}}$ og Δ_F .

I den virkelige verden er de resterende stokastiske parametre såsom r_t, σ_t mv. ikke konstante. På trods af antagelsen om, at alt andet end S er konstant, kan man godt hedge sig mod ændringer i disse parametre. Det betyder eksempelvis, at man med udgangspunkt i Black Scholes modellen kan skabe en vega neutral portefølje ved at hedge mod ændringer i volatiliteten, selvom det er i modstrid med modellens antagelse om konstant volatilitet. Om dette skriver Hull (Hull, 2005, s. 361):

”Calculating vega from the Black Scholes model and its extensions may seem strange because one of the assumptions underlying Black Scholes is that volatility is constant. It would be more theoretically correct to calculate vega from a model in which volatility is assumed to be stochastic. However, it turns out that the vega calculated from a stochastic volatility model is very similar to the Black Scholes vega, so the practice of calculating vega from a model in which volatility is constant works reasonable well”.

Ifølge Hull er vega hedgen for Black Scholes modellen altså ikke teoretisk korrekt, men gælder approksimativt.

9.2 Delta i Heston modellen

I Heston modellen antages det i kontrast til Black Scholes og NIG modellen, at både det underliggende aktiv samt volatiliteten kan ændre sig over tid. Korrelationen imellem de to støjled W_t^1 og W_t^2 bevirker, at en ændring i S_t samtidigt følges af en ændring i volatiliteten. Vi ønsker at

immunisere porteføljen Π i forhold til ændringer i det underliggende aktiv S_t og derfor får den partielle afledte følgende form i Heston modellen:

$$\frac{df}{dS_t} = \frac{\partial f(S_t, V(S_t))}{\partial S_t} \quad (9.5)$$

Korrelationen imellem de to brownske bevægelser i Heston modellen komplicerer beregningen af df/dS_t . For stokastiske volatilitetsmodeller kan df/dS_t findes som den vægt, der minimerer variansen på ændringen i porteføljens værdi, $d\Pi = df - \delta_s^{MV} dS_t$ (Munk, Afledte aktiver, 2000, s. 27) og (Hull, 2005, s. 73). Da positionen i det underliggende aktiv ikke længere bare er den partielle afledte mht. S_t , men nu også mht. $V(S_t)$, kalder vi den δ_s^{MV} og ikke Δ_s for at undgå at forvirre den med delta beregnet for Black Scholes og NIG modellen. Vi benytter samme fremgangsmåde som i (Alexander & Nogueira, 2005) til at udlede δ_s^{MV} .

Variansen på ændringen porteføljens værdi er givet ved:⁵³

$$\text{var}(d\Pi) = \text{var}(df - \delta_s^{MV} dS) = \text{var}(df) + (\delta_s^{MV})^2 \text{var}(dS) - 2\delta_s^{MV} \text{cov}(df, dS) \quad (9.6)$$

Vi finder den vægt, δ_s^{MV} der minimerer variansen ved at sætte den 1. afledte mht. δ_s^{MV} til 0:

$$\frac{d \text{var}(d\Pi)}{d\delta_s^{MV}} = 0 \Leftrightarrow 2\delta_s^{MV} \text{var}(dS) - 2\text{cov}(df, dS) = 0 \Leftrightarrow \delta_s^{MV} = \frac{\text{cov}(df, dS)}{\text{var}(dS)} \quad (9.7)$$

Vi undersøger nu den dobbeltafledte for at kontrollere, at vi har minimeret variansen:

$$\frac{d^2}{d(\delta_s^{MV})^2} (\text{var}(df) + (\delta_s^{MV})^2 \text{var}(dS) - 2\delta_s^{MV} \text{cov}(df, dS)) = 2 \text{var}(dS) \geq 0 \quad (9.8)$$

Vi bemærker, at den dobbeltafledte er positiv og der gælder altså, at $\delta_s^{MV} = \frac{\text{cov}(df, dS)}{\text{var}(dS)}$ minimerer variansen på $d\Pi$ og δ_s^{MV} er dermed den vægt, der immuniserer porteføljen Π_t mod ændringer i S_t og $V(S_t)$.

En alternativ måde at anskue problemet er at finde den vægt, δ_s^{MV} der gør ændringen i porteføljens værdi uafhængig i forhold til ændring i det underliggende aktiv, dvs. vi skal finde den vægt, der gør, at kovariansen imellem $d\Pi$ og dS_t bliver 0:⁵⁴

⁵³ Vi benytter $\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y) + 2ab \text{cov}(X, Y)$

$$\begin{aligned} \text{cov}(d\Pi, dS) = 0 &\Leftrightarrow \text{cov}(df - \delta_S^{MV} dS, dS) = \text{cov}(df, dS) - \delta_S^{MV} \text{var}(dS, dS) = 0 \Leftrightarrow \\ \delta_S^{MV} &= \frac{\text{cov}(df, dS)}{\text{var}(dS)} \end{aligned} \quad (9.9)$$

Det ses, at vi får samme resultat som (9.7). Vi kan nu udlede porteføljens minimum varians:

$$\begin{aligned} \text{var}(d\Pi) &= \text{var}(df) + (\delta_S^{MV})^2 \text{var}(dS) - 2\delta_S^{MV} \text{cov}(df, dS) \Leftrightarrow \text{var}(d\Pi) = \text{var}(df) - \frac{\text{cov}(df, dS)^2}{\text{var}(dS)} \Leftrightarrow \\ \text{var}(d\Pi) &= \text{var}(df) \left(1 - \left(\frac{\text{cov}(df, dS)}{\sqrt{\text{var}(dS)\text{var}(df)}} \right)^2 \right) \Leftrightarrow \text{var}(d\Pi) = \text{var}(df) (1 - \rho_{df, dS_t}^2) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Ovenstående viser, at den minimerede varians afhænger af korrelation imellem optionen og det underliggende aktiv.⁵⁵ Resultatet giver intuitivt god mening, idet en perfekt korrelation, $\rho_{df, dS_t} = \pm 1$ må betyde, at der kun er en risikokilde og at man derfor kan hedge optionen perfekt med en position i det underliggende aktiv og derved få en varians på 0. En korrelation $\rho_{df, dS_t} \neq \pm 1$ betyder, at der er flere risikokilder og især for $\rho_{df, dS_t} = 0$ fås, at man ved at hedge med S_t får samme varians på porteføljen som der er på optionen.

For at beregne $\delta_S^{MV} = \frac{\text{cov}(df, dS)}{\text{var}(dS)}$ er vi nødt til at finde df . Vi har udledt df i appendiks D.2 og fundet den til:

$$df(t, S_t, V_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2 \partial V_t^2} S_t \sigma V_t \rho \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial V_t} dV_t \quad (9.11)$$

Det kan desuden vises, at uanset hvilken partiel afledt der står foran et dt -led, så bliver kovariansen mellem dette dt -led og dS_t lig med 0:

$$\begin{aligned} \text{cov}(A(S_t, V_t)dt, dS) &= \text{cov}(A(S_t, V_t)dt, rS_t dt + \sigma S_t dW_t) = \\ E[(A(S_t, V_t)dt - E[A(S_t, V_t)dt])(rS_t dt + \sigma S_t dW_t - E[rS_t dt + \sigma S_t dW_t])] &= \\ E\left[(A(S_t, V_t) - E(A(S_t, V_t))) \underbrace{\sigma S_t dW_t dt}_{=0} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (9.12)$$

⁵⁴ $\text{cov}(aX + bY, cW + dV) = ac \text{cov}(X, W) + ad \text{cov}(X, V) + bc \text{cov}(Y, W) + bd \text{cov}(Y, V)$

⁵⁵ Det bemærkes, at ρ_{df, dS_t} ikke skal forveksles med parameteren ρ i Heston modellen.

Vi viser i appendiks D.1, at $dW_t dt = 0$. Vi kan altså fjerne dt -leddet, når vi tager en kovarians mellem df og dS_t og vi finder δ_S^{MV} til at være:

$$\begin{aligned}\delta_S^{MV} &= \frac{\text{cov}(df, dS_t)}{\text{var}(dS_t)} = \frac{\text{cov}\left(\frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial V_t} dV_t, dS_t\right)}{\text{var}(dS_t)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial S_t} \text{var}(dS_t) + \frac{\partial f}{\partial V_t} \text{cov}(dV_t, dS_t)}{\text{var}(dS_t)} \Leftrightarrow \\ \delta_S^{MV} &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial S_t}}_{\text{led1}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial V_t}}_{\text{led2}} \underbrace{\frac{\text{cov}(dV_t, dS_t)}{\text{var}(dS_t)}}_{\text{led3}}\end{aligned}\quad (9.13)$$

De 2 første led i (9.13) er udledt i afsnit 6.2. Det 3. led udledes nedenfor:

$$\begin{aligned}\frac{\text{cov}(dV_t, dS_t)}{\text{var}(dS_t)} &= \frac{E[(dV_t - E[dV_t])(dS_t - E[dS_t])]}{E[(dS_t - E[dS_t])(dS_t - E[dS_t])]} = \frac{E\left[\left(\sigma\sqrt{V_t}dW_t^2\right)\left(S_t\sqrt{V_t}dW_t^1\right)\right]}{E\left[\left(S_t\sqrt{V_t}dW_t^1\right)\left(S_t\sqrt{V_t}dW_t^1\right)\right]} = \frac{\sigma V_t S_t \rho dt}{S_t^2 V_t dt} \Leftrightarrow \\ \frac{\text{cov}(dV_t, dS_t)}{\text{var}(dS_t)} &= \frac{\sigma \rho}{S_t}\end{aligned}\quad (9.14)$$

Positionen δ_S^{MV} i det underliggende aktiv, der er nødvendig for at delta hedge i Heston modellen for $t \rightarrow 0$, er således givet ved (Alexander & Nogueira, 2005, s. 20-21):

$$\delta_S^{MV} = \frac{\partial f}{\partial S_0} + \frac{\sigma \rho}{S_0} \frac{\partial f}{\partial V_0}\quad (9.15)$$

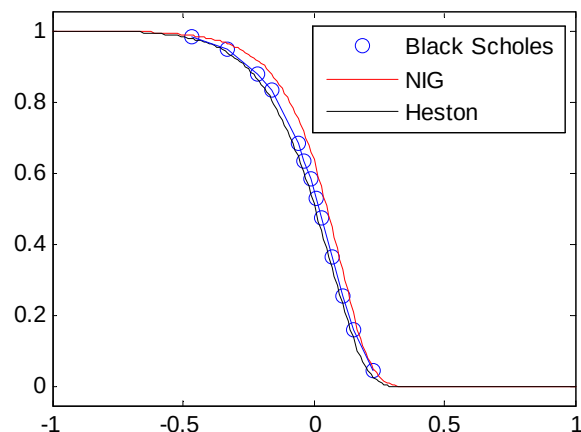
Vi bemærker, at $\delta_S^{MV} = \partial f(S_0, V(S_0))/\partial S_0$ og her er det vigtigt at pointere, at $\partial f/\partial S_0$ ikke er det samme som $\partial f(S_0, V(S_0))/\partial S_0$. For at undgå forvirring vælger vi derfor at benytte en mere stringent notation til at udtrykke δ_S^{MV} (Sydsæter, 2003, s. 407):

$$\begin{aligned}Y &= f(x_1, x_2), \quad x_1 = S_0, \quad x_2 = V_0(S_0) \\ \frac{\partial Y}{\partial S} &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial S_0} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial S_0} \Leftrightarrow \delta_S^{MV} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\sigma \rho}{S_0}\end{aligned}\quad (9.16)$$

De partielle afledte er udledt i afsnit 6.2. I appendiks F viser vi forholdet mellem δ_S^{MV} , δ_S^{MV} og δ_F^{MV} .

Vi vil nu grafisk illustrere deltaværdierne for de 3 modeller som funktion af $\ln(K/S_0)$. Vi tager udgangspunkt i data fra Figur 6.2.

Figur 9.1



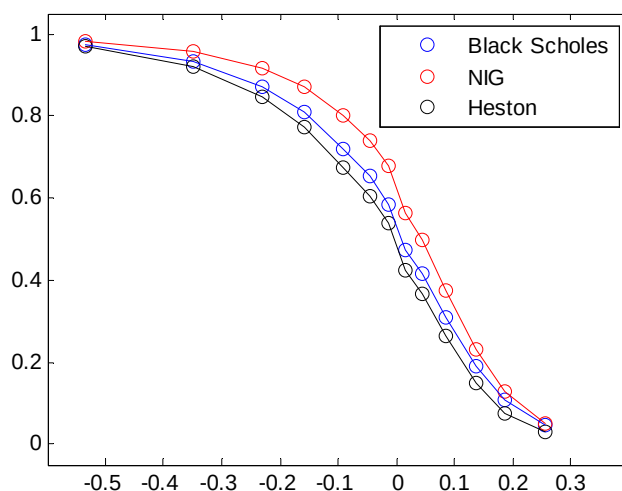
Figur 9.1 viser delta for at en calloptionen som funktion af $\ln(K/S_0)$. Da Black Scholes parameteren, σ afhænger af K , har vi kun kunne beregne 13 risikoneutrale sandsynligheder, som vi så har forbundet ved lineær interpolation.

Grafisk ses det, at der også for Heston modellen gælder, at $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} \delta_S^{MV} = 0$ og $\lim_{S_0 \rightarrow \infty} \delta_S^{MV} = 1$, hvilket

betyder, at deltapositionen altid er mellem 0 og 1 uanset om der så er stokastisk volatilitet eller ej.

Det ses her, at delta værdierne for Heston modellen og Black Scholes modellen faktisk er ret tætte på hinanden. For denne dags optionsserie må de to modellers hedging resultater altså være rimelig ens. NIG modellen fastsætter her delta en smule højere end de andre to modeller. Det bemærkes, at selvom Heston modellens sandsynligheder $P(\ln(K/S_0), \Omega_j)$ ofte ligger tættest på NIG modellens sandsynligheder (se Figur 6.2), så ligger Heston modellens delta tættere på Black Scholes modellens delta, hvilket også ses i Figur 9.2 over de gennemsnitlige empiriske deltaværdier for de 3 modeller.

Figur 9.2



Figur 9.2 viser den gennemsnitlige delta som funktion af $\ln(K/S_0)$ for de 3 optionsmodeller.

En minimumvarians (MV) hedge afdækker mod ændringer i det underliggende aktiv, men da det underliggende aktiv og volatiliteten er korrelerede, vil en MV hedge også afdække noget af volatilitetsrisikoen. Det er her vigtigt at skelne mellem en MV hedge for Heston modellen og en delta-vega hedge for Black Scholes modellen. Selvom en MV-hedge afdækker risiko fra de to risikokilder, benytter den kun en position i ét aktiv i modsætning til en delta-vega-hedge, som benytter en position i to aktiver. Man kan dog også for Heston modellen foretage en delta-vega hedge med afdækning ved hjælp af to aktiver, men på grund af korrelationen imellem processerne for det underliggende aktiv og volatiliteten, overlapper effekterne fra δ_s^{MV} og vega hinanden. Man skal altså passe på, at man ikke tager højde for volatilitetsrisikoen to gange.

Bakshi og Kapadia, (Kapadia & Bakshi, 2002) viser, at man ved en delta-vega hedge ikke skal bruge en MV-hedge, men derimod de ”originale greeks” dvs. de partielle afledte i forhold til det underliggende aktiv og volatiliteten, hvor man så ”ignorerer” korrelationen mellem det underliggende aktiv og volatiliteten. På denne måde opfanger vega effekten af ændringen i volatiliteten og delta effekten af ændringen i det underliggende aktiv.

9.3 Optionshedging i praksis

I denne opgave fokuserer vi primært på hvordan man replikerer én option ved brug af en delta hedge. I praksis hedger man typisk ikke de forskellige greeks for én option ad gangen men derimod for porteføljer. Sædvanligvis inddeles trading desks i ”vanilla risk” og ”complex risk”. Det første bord sælger optioner og deltahedger eksponeringen i det underliggende aktiv typisk på daglig basis. Den residuale risiko føres over til complex risk. I complex risk søger man at håndtere de resterende greeks, hvor fokus som nævnt ofte ligger på vega og gamma. Målet er ofte at sørge for, at vega og gamma eksponeringen ikke overskrider en prædefineret tærskel. For at gøre porteføljen vega og gamma neutral, kræver det en position i yderligere to optioner eller andre ikke-lineære derivater. Finansielle institutioner har ofte negativ vega og gamma eksponering som følge af salg af optioner, og er derfor altid interesserede i at købe optioner med positivt gamma og vega, således at deres samlede eksponering er så tæt på 0 som muligt. Det er som nævnt desværre ikke altid muligt at finde de nødvendige mængder optioner i markedet til konkurrencedygtige priser (Hull, 2005, s. 363). Givet at den finansielle institution finder de nødvendige optioner, genererer købet af disse optioner typisk en ny delta eksponering, og for at komme af med den, må der købes/sælge passende mængder af det underliggende aktiv.

I praksis er det altså urealistisk at hedge enkelte optioner hvilket følgende citat også belyser (Hull, 2005, s. 363):

"There are big economies of scale in being an options trader. As noted earlier, maintaining delta neutrality for an individual option say on the S&P 500 by trading daily would be prohibitively expensive. But it is realistic to do this for a portfolio of several hundred options on the S&P 500."

For at sammenligne de 3 modeller vælger vi alligevel i det efterfølgende replikere de enkelte optioner hver for sig, for at få et mere sigende billede af hvordan modellerne klarer sig i forhold til hinanden, end den aggregerede portefølje kan give.

9.4 Den replikerende portefølje

Vi benytter en delta hedge til at undersøge, hvor gode vores forskellige optionsmodeller er til at replikere optioner hen over tid. Vi anskuer igen porteføljen, Π bestående af $-\Delta$ stk. underliggende aktiver samt 1 option fra (9.2). Ved omrokering fås:

$$\Pi_t = f_t - \Delta_{S_t} S_t \Leftrightarrow f_t = \Pi_t + \Delta_{S_t} S_t \quad (9.17)$$

Ovenstående ligning viser, at vi kan replikere optionen f , med en position i Π og Δ_{S_t} stk. af de underliggende aktiv S_t . I kapitel 5 så vi, at det kun er Black Scholes modellen der opfylder hypotesen om komplette markeder og Black Scholes modellen er således den eneste model der opfylder, at optioner kan replikeres perfekt ved en position i det underliggende produkt og en "bankbog". I en Black Scholes repræsenterer Π altså en risikofri "bankbog" som forrentes med den risikofri rente. Vi vil i det følgende antage, at vi befinder os i en Black Scholes verden og at vi kan replikere perfekt. Udviklingen over den infinitesimale tidsperiode, dt er så givet ved:

$$df_t = d\Pi_t + \Delta_{S_t} dS_t \Leftrightarrow df_t = \Pi_t (e^{rdt} - 1) + \Delta_{S_t} dS_t \quad (9.18)$$

Jævnfør diskussionen om valg af data i afsnit 7.2 er det uhensigtsmæssigt at hedge med S , og vi benytter derfor futures i stedet. Futures prisen, $F_t = S_t e^{r(T-t)}$ er bestemt således, at futures kontrakten har en værdi på 0.⁵⁶ Vi definerer nu funktionen $V_t(F_s)$, der angiver den betalingsstrøm som in-

⁵⁶ Vi bemærker, at prisen på det tilhørende aktieindekset er givet ved $\hat{S}_t = S_t e^{q(T-t)}$, og S_t repræsenterer således aktieindeksets pris korregeret for dividendeudbetalinger. Se i øvrigt (Hull, 2005, s. 111).

dehaveren af futures kontrakten modtager i perioden fra t til s . Denne funktion må så være givet ved (Björk, 2004, s. 391):

$$V_t(F_s) = F_t - F_s \quad (9.19)$$

Der må således gælde, at funktionen for $s = t$ må have værdien 0, dvs. $V_t(F_t) = 0$. For en futures er der daily settlement, hvilket betyder, at tabet/gevinsten som futures'en har genereret som følge af udviklingen i S opgøres ved afslutningen af hver handelsdag, hvor beløbet sættes ind på en margin-konto. Til settlement tidspunkt t overføres der altså $V_t(F_{t-1}) = F_t - F_{t-1}$ til marginkontoen og der sættes en ny futures pris, så futures kontrakten igen har en værdi på 0.

Vi vil altså replikere optionen med futures kontrakten. Da ændringen i indekset og futures kontrakten ikke er ens over tid, kan vi ikke benytte den samme delta ved hedging med futures. Vi ved ikke endnu, hvad delta skal være, og angiver den ved $\Delta_{V_t(F_t)}$. Til tid t er porteføljen, der replikerer optionen givet ved den risikofri position Π_t og positionen $\Delta_{V_t(F_t)}$ i futures kontrakten, hvis værdi angives med $V_t(F_t)$:

$$f_t = \Pi_t + \Delta_{V_t(F_t)} V_t(F_t) \quad (9.20)$$

Efter den infinitesimal tidsperiode dt har vi så:

$$f_{t+dt} = \Pi_t e^{rdt} + \Delta_{V_t(F_t)} V_{t+dt}(F_t) + \Delta_{V_{t+dt}(F_{t+dt})} V_{t+dt}(F_{t+dt}) = \Pi_{t+dt} + \Delta_{V_{t+dt}(F_{t+dt})} V_{t+dt}(F_{t+dt}) \quad (9.21)$$

Det bemærkes, at den risikofri position Π_{t+dt} akkumulerer gevinsten/tabet fra positionen i futures kontrakten og værdien af den replikerende option til tid $t + dt$ svarer derfor til Π_{t+dt} , idet futures kontrakten altid har værdien 0. Ændringen over den infinitesimal tidsperiode dt er altså:

$$df_t = f_{t+dt} - f_t = \Pi_t (e^{rdt} - 1) + \Delta_{V_t(F_t)} dV_t(F_t) \quad (9.22)$$

Ændringen i $V_t(F_t)$ over en infinitesimal tidsperiode dt er givet ved:

$$dV_t(F_t) = V_{t+dt}(F_t) - V_t(F_t) = (F_{t+dt} - F_t) - 0 = dF_t \quad (9.23)$$

Da ændringen i $V_t(F_t)$ over en infinitesimal tidsperiode er den samme som ændringen i F_t , betyder det, at $\Delta_{V_t(F_t)} = \Delta_{F_t} = e^{-(r-q)(T-t)} \Delta_{S_t} = e^{-r(T-t)} \Delta_{S_t}$ jf. udledningen i appendiks F. Udviklingen i f_t over den infinitesimale tidsperiode, dt er altså givet ved:

$$df_t = \Pi_t (e^{rdt} - 1) + \Delta_{F_t} dF_t \quad (9.24)$$

I praksis er det naturligvis ikke muligt at replikere kontinuert, og som nævnt i indledningen til hedging afsnittet foretager finansielle institutioner ofte en daglig hedge. Nedenstående tabel viser hvorledes en option kan replikeres dagligt over tid. Tabellen er inspireret af tabel 15.2 i (Hull, 2005).

Tabel 9.1

Tid, t	F_t	Positionen i futures, Δ_{F_t}	Ændring i værdien af den replikerende option, G_t	Værdi af replikerende option, Π_t
0	F_0	Δ_{F_0}		f_0
1	F_1	Δ_{F_1}	$\Pi_0(e^{\bar{r}(0,1)} - 1) + \Delta_{F_0}(F_1 - F_0)$	$\Pi_0 + G_1$
2	F_2	Δ_{F_2}	$\Pi_1(e^{\bar{r}(1,2)} - 1) + \Delta_{F_1}(F_2 - F_1)$	$\Pi_1 + G_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T-1$	F_{T-1}	$\Delta_{F_{T-1}}$	$\Pi_{T-2}(e^{\bar{r}(T-2,T-1)} - 1) + \Delta_{F_{T-2}}(F_{T-1} - F_{T-2})$	$\Pi_{T-2} + G_{T-1}$
T	F_T	Δ_{F_T}	$\Pi_{T-1}(e^{\bar{r}(T-1,T)} - 1) + \Delta_{F_{T-1}}(F_T - F_{T-1})$	$\Pi_{T-1} + G_T$

I Tabel 9.1 er renten givet ved $\bar{r}(t_d, T_d) = r(t_d, T_d) \cdot (T_d - t_d) / (365 + 1_{\{\text{skudår}\}})$, hvor $r(t_d, T_d)$ er den kontinuerlige annualiserede rente gældende for tid t_d til T_d .

NIG og Heston modellerne opfylder ikke hypotesen om komplette markeder og der gælder derfor ikke, at Π er risikofri i forhold til S . Π ændres dog minimalt som følge af bevægelser i S og det kan derfor antages, at Π tilnærmelsesvis udvikler sig med den risikofrie rente over tid. For NIG og Heston modellerne replikerer vi optionen på samme måde som for Black Scholes, men vi vil aldrig kunne replikere optionen perfekt med en delta hedge. Udviklingen i den replikerende portefølje for NIG og Heston modellerne over den infinitesimale tidsperiode, dt i forhold til optionen gælder derfor kun med ”blødt lighedstegn”:

$$df_t \approx \Pi_t(e^{rdt} - 1) + \Delta_{F_t} dV_t(F_t) \text{ og } df_t \approx \Pi_t(e^{rdt} - 1) + \delta_{F_t}^{MV} dV_t(F_t) \quad (9.25)$$

Størrelsen af denne approksimationsfejl ser vi nærmere på i afsnit 10.1.

Det bemærkes, at man ved delta hedging med en af de 3 optionsmodeller skal bruge de tilhørende delta'er (Δ_{F_t} hhv. $\delta_{F_t}^{MV}$) beregnet i appendiks F ud fra (9.4) og (9.16). Som kontrol har vi undersøgt om $(\delta_{F_t}^{MV}, \Delta_{F_t})_{Put} \in [-e^{-r(T-t)}, 0]$ og $(\delta_{F_t}^{MV}, \Delta_{F_t})_{Call} \in [0, e^{-r(T-t)}]$ og om der jf. put-call pariteten gælder $f_{C_t} - f_{P_t} = e^{-r(T-t)}(F_t - K) \Leftrightarrow (\delta_{F_t}^{MV}, \Delta_{F_t})_{Call} - (\delta_{F_t}^{MV}, \Delta_{F_t})_{Put} = e^{-r(T-t)}$. Det viser sig heldigvis at være opfyldt for alle vores beregnede deltaer.⁵⁷

⁵⁷ Den numeriske integrationsmetode for Heston modellen kan dog generere approksimationsfejl, således vi rammer marginalt udenfor de nævnte grænser.

10 P&L for de 3 modeller

I de følgende 3 afsnit undersøger vi hvor gode vores 3 modeller er til at replikere optioner. I det første afsnit laver vi et simulationsstudie der viser, hvor godt de 3 modeller replikerer, givet at det underliggende aktiv udvikler sig som den aktuelle model foreskriver. I de to efterfølgende afsnit undersøger vi empirisk, hvor gode de 3 modeller er til at replikere optioner på to forskellige måde. I første tilfælde opgør vi P&L hver dag over en periode på et halvt år, hvor vi ser på optioner med samme moneyness over tid. I det andet tilfælde følger vi 20 optioner til udløb og opgør kun P&L på udløbstidspunktet.

10.1 Simulationsstudie af P&L for de 3 modeller

Vi ønsker at vide hvor stor approksimationsfejlen som følge af ”det bløde lighedstegn” i (9.25) er for NIG og Heston modellerne i forhold til Black Scholes. Vi simulerer det underliggende aktiv for de 3 modeller, og undersøger hvor godt modellerne replikerer optionen med en position i en futures kontrakt og en bankbog jf. proceduren i Tabel 9.1. I appendiks F viser vi hvordan vi simulerer det underliggende aktiv for de 3 optionsmodeller. Vi undersøger desuden hvorledes hedging resultatet afhænger af antallet af rebalanceringer. Til tid 0 tager vi en lang position i den replikerende portefølje og en kort position i enten en call eller en put option og ved tid T har vi så følgende P&L:

$$P\&L_{call} = \frac{\Pi_T - \max(S_T - K, 0)}{f_0} \text{ og } P\&L_{put} = \frac{\Pi_T - \max(K - S_T, 0)}{f_0} \quad (10.1)$$

Det bemærkes, at vi ved udløbstidspunktet T kan finde værdien af det underliggende aktiv ud fra futures kontrakten, idet $F_T = S_T$. Vi normerer i forhold til startprisen på optionen f_0 således, at det svarer til en initial investering på 1\$. Vi kunne også have lavet andre normeringer såsom f.eks. i forhold til K . Vi benytter de estimerede parametre for d. 02-10-2008, så de 3 sæt af parametre er kalibreret til samme markedstilstand, hvorved optionsmodellerne fastsætter optionen til ca. den samme pris. Vi anskuer en at-the-money calloption med følgende parametre og markededata:

Tabel 10.1

Model	Modellens parametre	Optionens pris til tid 0
Black Scholes	$\sigma = 0,361$	71,55
Heston	$\kappa = 7,114; \theta_1 = 0,096; \sigma = 1,095; \rho = -0,850; V_0 = 0,193$	72,39
NIG	$\alpha_1 = 25,082; \mu = 1,149; \delta = 0,884$	70,90
Andre data	$F_0 = 1124,4; K = 1125; T = 0,2; r = 0,042; \text{Antal simuleringer} = 1.000$	

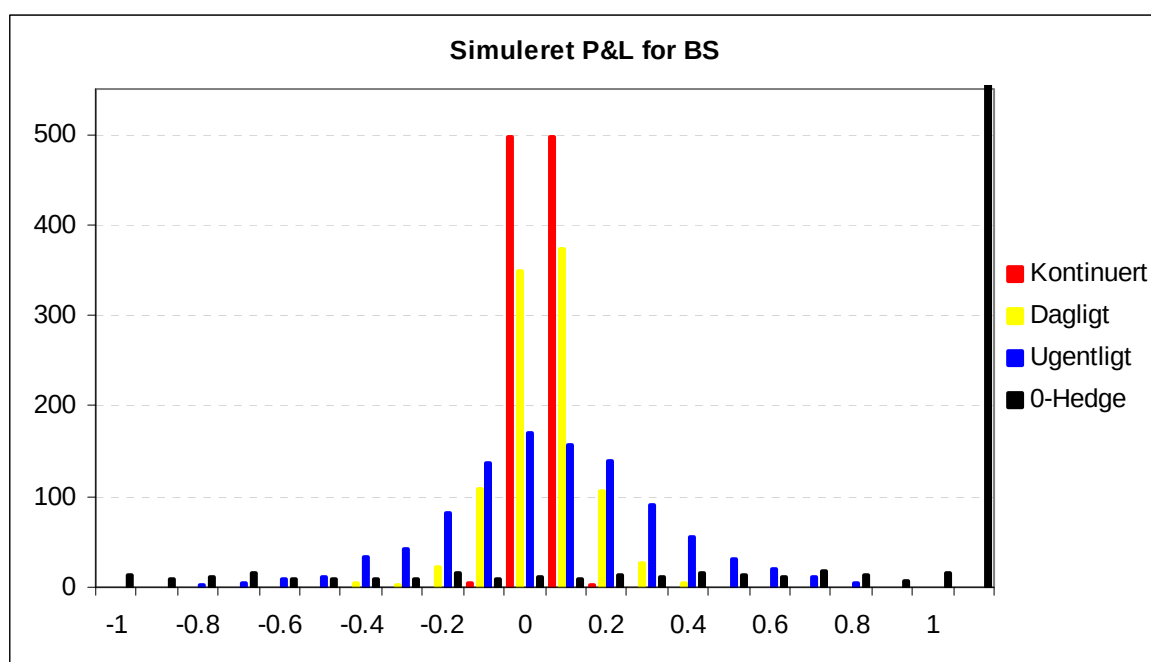
Nedenstående tabel viser P&L resultaterne for de 3 modeller afhængigt af antallet af rebalanceringer.

Tabel 10.2⁵⁸

Model	Antal rebalanceringer	Gennemsnitlig P&L (%)	Standardafvigelse for P&L (%)
Black Scholes	1.000 ("kontinuert")	0,03	2,73
	70 (dagligt)	0,10	10,46
	10 (ugentligt)	0,87	26,73
Heston	1.000 ("kontinuert")	-0,18	23,17
	70 (dagligt)	0,56	25,54
	10 (ugentligt)	0,37	36,49
NIG	1.000 ("kontinuert")	-2,06	89,80
	70 (dagligt)	2,06	87,85
	10 (ugentligt)	-5,05	93,90

I det følgende kommenterer vi tabellen samt de tilhørende figurer for de 3 modeller i de forskellige tilfælde med kontinuerne, daglige og ugentlige rebalanceringer. I Figur 10.1 ses P&L for Black Scholes modellen.

Figur 10.1

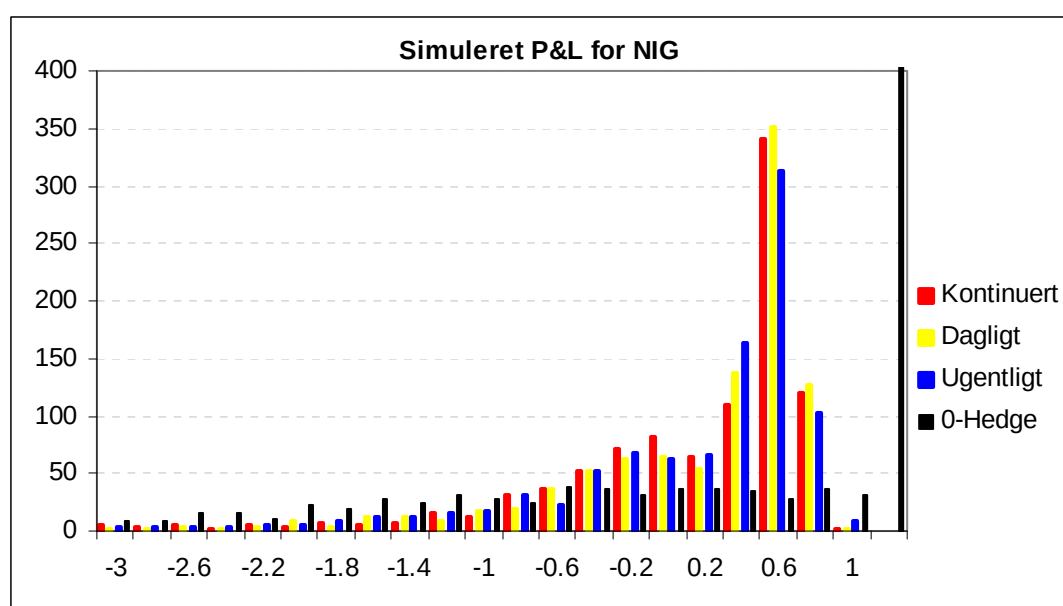


Figur 10.1 viser et histogram for P&L med kontinuerne, daglige og ugentlige rebalanceringer for Black Scholes modellen samt 0-hedgen.⁵⁸

⁵⁸ Anvendt kode ses i mappen "Simuleret P&L", der desuden indeholder Excelarket, PL ved simulering.xls med Figur 10.1, Figur 10.2 og Figur 10.3.

For Black Scholes modellen er markedet komplet og det er muligt at foretage en perfekt delta hedge. I Figur 10.1 og Tabel 10.2 ses det også, at standardafvigelsen på P&L falder når vi øger antallet af rebalanceringer. Det bemærkes, at når vi sætter antallet af rebalanceringer ekstremt højt (f.eks. 1.000.000) så bliver P&L meget tæt på 0. Når optionen ender out-of-the-money bliver 0-Hedgens $P\&L = e^{rT}$, hvilket forklarer det store antal observationer i intervallet 1 til 1,1. Det ses desuden, at der er en betragtelig risiko for store tab ved 0-Hedgen i intervallet $[-1; -0,7]$, hvilket elimineres ved at delta hedge enten kontinuert, dagligt eller ugentligt med Black Scholes modellen. I Figur 10.2 ses P&L for NIG modellen.

Figur 10.2



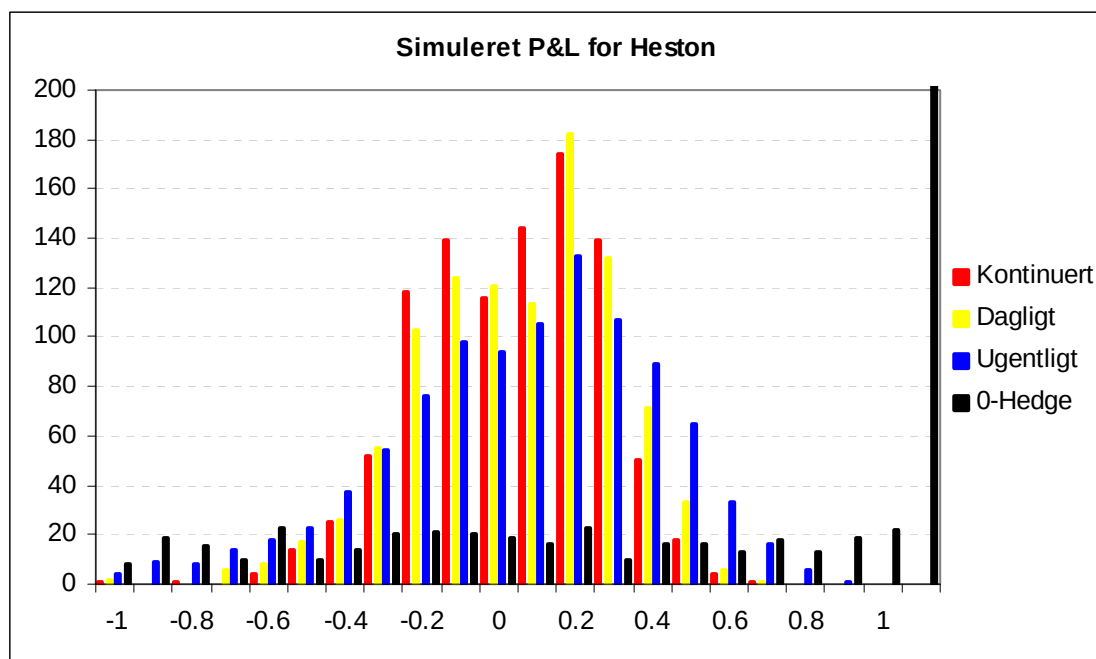
Figur 10.2 viser et histogram for P&L med kontinuerte, daglige og ugentlige rebalanceringer for NIG modellen samt 0-hedgen.⁵⁸

Når markedet følger en NIG model forekommer der spring i det underliggende aktiv. Springene i det underliggende aktiv medfører, at markedet ikke er komplet og det er derfor ikke muligt at foretage en perfekt delta hedge, hvilket ses i Figur 10.2, idet standardafvigelsen for P&L er høj. Det er dog overraskende, at standardafvigelsen for P&L næsten er ens for kontinuerte, daglige og ugentlige rebalanceringer, hvilket ses i Tabel 10.2. Dette resultat betyder altså, at en stigning i antallet af rebalanceringer ikke reducerer standardafvigelsen for P&L. Forklaringen må være, at der uanset antallet af rebalanceringer vil komme en stor afvigelse mellem den replikerende portefølje og optionen, når der forekommer et spring i det underliggende aktiv. Det bemærkes desuden, at histogrammet for P&L er venstreskævt. Det skyldes, at der med de parametre vi har benyttet forekommer

langt større spring nedad end opad.⁵⁹ Når markedet går ned, er der en tendens til P&L bliver negativt, hvilket vi forklarer nærmere i afsnit 10.3. Selvom delta hedgen med NIG modellen ikke synes at være så god, så har den dog langt færre af de store tab i intervallet -3 og -1 i forhold til 0-hedgen, der ellers opfører sig på nogenlunde samme måde som for Black Scholes modellen.

I Figur 10.3 ses P&L for Heston modellen.

Figur 10.3



Figur 10.3 viser et histogram for P&L med kontinuerne, daglige og ugentlige rebalanceringer for Heston modellen samt 0-hedgen.⁵⁸

Det ses, at effekten af ”kontinuerne” rebalanceringer i forhold til at rebalancere dagligt eller ugentligt er mindre end i Black Scholes modellen. Dette skyldes, at det ikke muligt at foretage en perfekt delta hedge, da delta hedgen ikke kan fange begge risikokilder i et marked, der følger Heston modellen. I betragtning af, at vi kun hedger med én risikokilde, synes vi at P&L resultatet for Heston modellen er pænt, især når det sammenlignes med det tilsvarende resultat for NIG modellen. Det ses, at 0-Hedgen opfører sig på nogenlunde samme måde som for Black Scholes.

⁵⁹ Den underliggende NIG-fordeling der generer støjen er venstreskæv

10.2 Empirisk undersøgelse af daglige P&L

I dette afsnit undersøger vi hvor gode vores 3 modeller er til at replikere optioner på dagsbasis givet alle kriteriefunktionerne.⁶⁰ Den bagvedliggende hedgingprocedure og det resulterende daglige P&L ses i Tabel 10.3. Vi beregner den daglige P&L ud fra, at vi investerer 1\$ i hver option.

Tabel 10.3

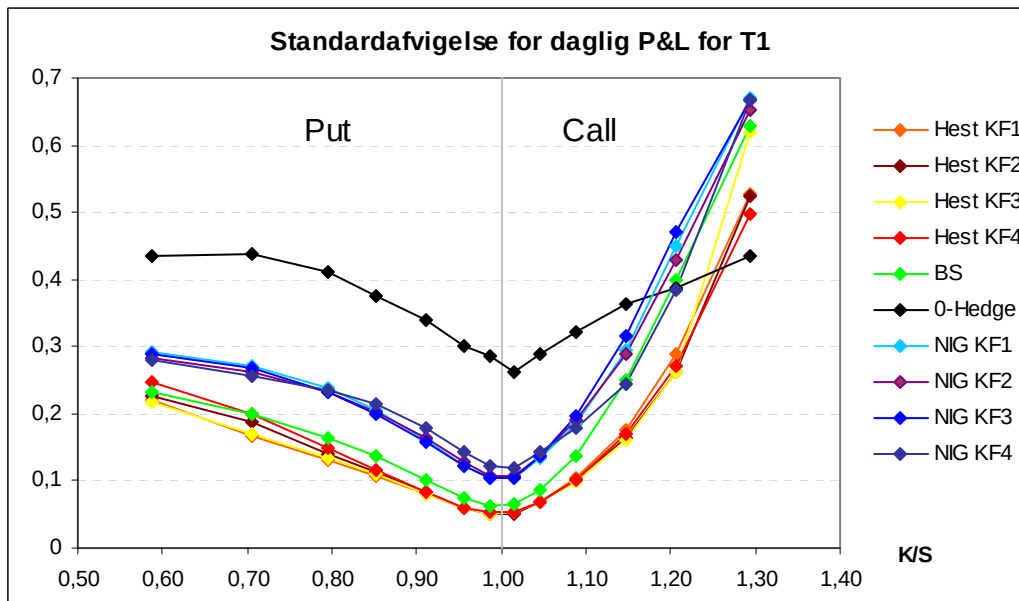
Tid t	Tid $t+1$
Sælg for 1 \$ af option: f_t/f_t	Køb option tilbage: $-f_{t+1}/f_t$
Indlån på ”bankbog”: -1	Hæv på ”bankbog”: e^r
Indgå lang futures kontrakt: $-1/f_t \cdot \Delta_{F_t} \cdot 0$	Sælg futures kontrakt: $\Delta_{F_t}(F_{t+1} - F_t)/f_t$
Sum: 0	$P\&L_{\text{dag}} = (e^r f_t - f_{t+1} + \Delta_{F_t}(F_{t+1} - F_t))/f_t$

Ideen er altså, at man hver dag går kort i en option og lang i den replikerende portefølje, samtidig med at man lukker positionerne fra den forrige dag ned. Vi beregner den daglige P&L for 13 korte, 8 mellemlange og 4 lange optioner. Hver dag vælges strikeværdierne K således at moneyness forbliver omtrent det samme for hver af de 25 optioner over tid.

Det viser sig, at middelværdierne for de daglige P&L er meget tæt på 0, hvilket betyder, at standardafvigelsen for de daglige P&L er et mål for den gennemsnitlige absolutte afvigelse fra 0. Vi beregner derfor standardafvigelsen for de daglige P&L for hver moneyness gruppe over alle dage, for at se hvilken optionsmodel der er bedst til at replikere optionerne over en halvårlig periode. Vi medtager samtidig den langt simple hedging strategi, 0-Hedge, hvor vi sætter $\Delta_F = 0$. Den daglige P&L for den korte optionsserie TI som funktion af moneyness ses i Figur 10.4.

⁶⁰ Anvendt kode og Excelark med data og grafer ses i mappen ”Kalibrering af parametre og empiriske P&L”.

Figur 10.4

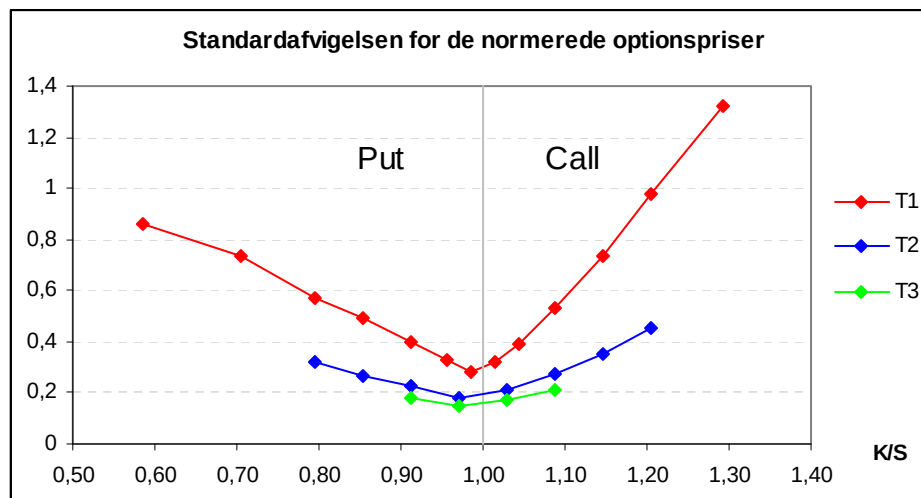


Figur 10.4 viser standardafvigelsen for de daglige PL for alle optionsmodeller og kriteriefunktioner for T1. De gule/røde farver er Heston modellen, de blå/lille er NIG modellen og den grønne er Black Scholes modellen.⁶⁰

De daglige P&L ser primært ud til at afhænge af moneyness, hvor standardafvigelsen for P&L er størst for out-of-the-money optionerne, mens at-the-money optionerne har den laveste standardafvigelse. Det ses desuden, at standardafvigelsen for P&L er større for out-of-the-money calloptionerne end for de tilsvarende out-of-the-money putoptioner. Det kan forklares ved at anskue standardafvigelsen for de normerede optionspriser⁶¹, hvilket vi har plottet for alle 3 optionsserier i følgende figur.

⁶¹ 'Standardafvigelsen for de normerede optionspriser' = $\frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{f_i - \bar{f}}{\bar{f}} \right)^2}$, hvor $\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i$

Figur 10.5



I Figur 10.5 vises standardafvigelsen for de normerede optionspriser for T1, T2 og T3.⁶²

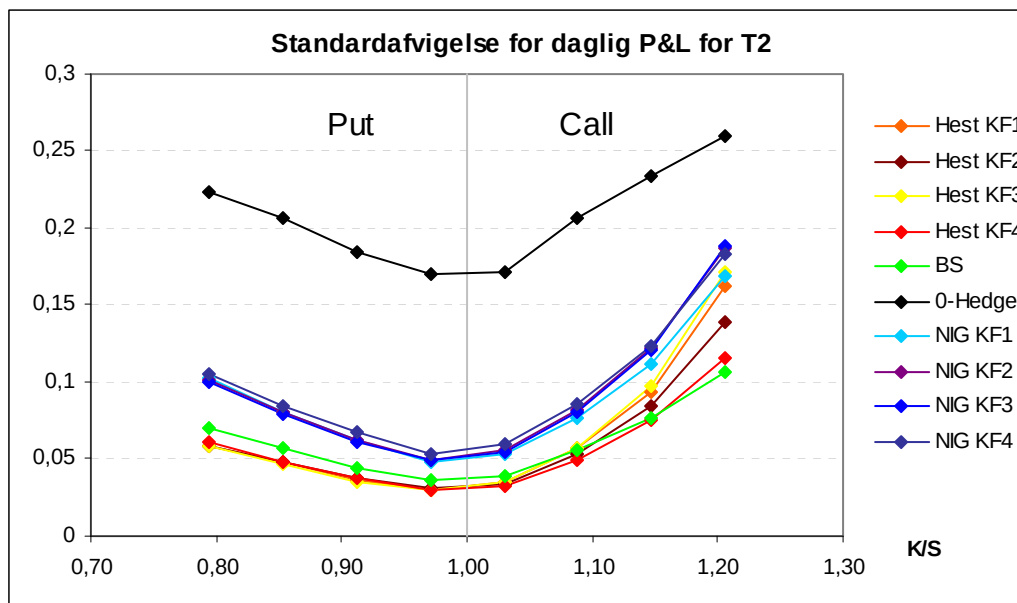
For alle 3 optionsserier ses det, at standardafvigelsen for de normerede optionspriser er større for out-of-the-money optioner end for at-the-money optioner. Standardafvigelsen er især størst for out-of-the-money calloptionerne. Det ses at være helt i overensstemmelse med standardafvigelsen for P&L for den korte optionsserie jf. Figur 10.4. Der gælder altså, at jo lavere standardafvigelsen for de normerede optionspriser er, jo lettere har optionsmodellerne ved at replikere optionen, hvilket giver en mindre standardafvigelse på P&L. Det bemærkes endvidere, at standardafvigelsen på de normerede optionspriser i Figur 10.5 ses at falde jo længere optionen har til udløb.

For den korte optionsserie er standardafvigelsen for de normerede optionspriser for de 2 længst out-of-the-money calloptioner tilsyneladende så høj, at ingen af optionsmodellerne kan hedge optionerne bedre end 0-hedgen, hvilket ses i Figur 10.4. I Figur 10.4 ses det desuden, at NIG modellen giver den højeste standardafvigelse for P&L for alle optionerne, og er altså den dårligste af alle modellerne til at hedge med. Det ses, at Heston modellen giver en lavere standardafvigelse for P&L end Black Scholes for alle optioner undtagen out-of-the-money putoptionen, hvor de giver nogenlunde samme resultat. Det bemærkes, at NIG og Heston modellernes P&L for de forskellige kriteriefunktioner er omtrent det samme, og der er ikke én af kriteriefunktionerne der er markant bedre end de andre.

Figur 10.6 viser standardafvigelsen for P&L for den mellemlange optionsserie T2 som funktion af moneyness:

⁶² Figuren ses i underarket "Options_t1" i Excelarket, "Data.xls"

Figur 10.6

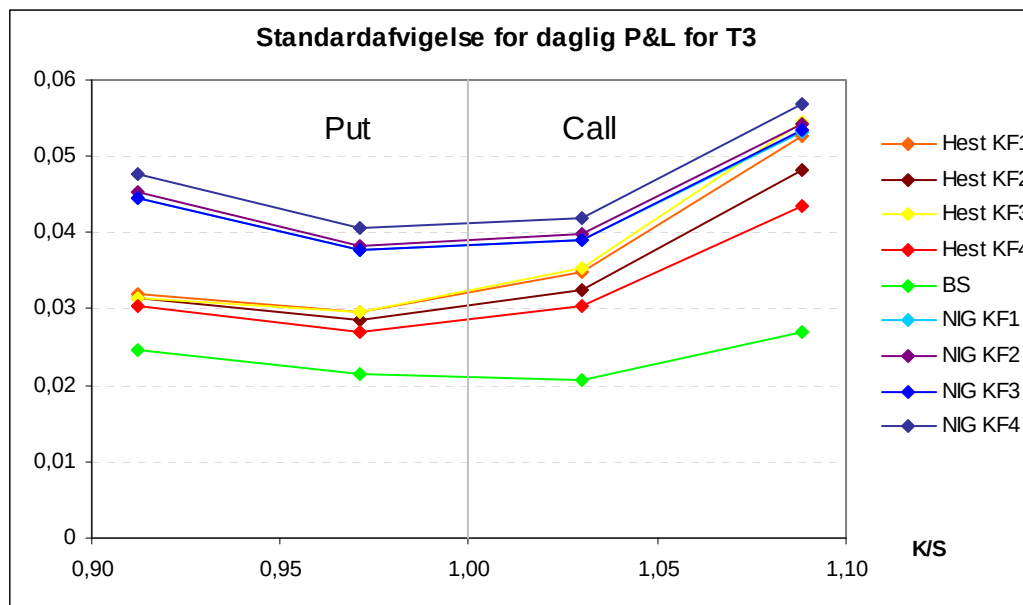


Figur 10.6 viser standardafvigelsen for den daglige PL for alle optionsmodeller og kriteriefunktioner for T2. ⁶⁰

Standardafvigelsen for P&L er generelt lavere for disse optioner, der har lidt længere løbetid end dem i Figur 10.4. Dette er i overensstemmelse med standardafvigelsen for de normerede optionspriser i Figur 10.5, der også falder når løbetiden stiger. For T2 i Figur 10.6 har optionsmodellerne altså lettere ved at replikere optionerne og de giver også et bedre P&L resultat end 0-Hedgen. For denne gruppe optioner er Heston modellen igen generelt den bedste model til at hedge med. Black Scholes modellen klarer sig dog bedre end Heston modellen for de 2 out-of-the-money calloptioner. NIG modellen er igen den model, der giver de klart dårligste resultater. Vi ser her at Kriteriefunktion 4 giver det marginalt bedste resultat for Heston modellen.

Figur 10.7 viser standardafvigelsen for P&L for den lange optionsserie T3 som funktion af money-ness:

Figur 10.7



Figur 10.6 viser standardafvigelsen for den daglige PL for alle optionsmodeller og kriteriefunktioner for T3. ⁶⁰

I Figur 10.6 har vi ikke medtaget 0-Hedgen, da dennes standardafvigelse for P&L er langt større end for optionsmodellerne. For denne gruppe optioner klarer Black Scholes modellen sig bedre end Heston modellen, mens NIG modellen igen er den dårligste. I Kalibreringsafsnittet fandt vi, at Heston modellen var bedst til at prisfastsætte de mest likvide optioner, mens den blev dårligere for optioner med lavere likviditet, hvilket er gældende for de lange optioner. Dette hænger tydeligt sammen med P&L resultaterne. Ud fra ovenstående virker det som om Heston modellen replikerer de likvide optioner bedst, mens Black Scholes modellen er bedst til at replikere de mere illikvide optioner. Vi dog ikke konkludere at dette gælder generelt, idet resultatet kan være specifikt for vores markedssituation.

Tabel 10.4 viser de gennemsnitlige standardafvigelser for P&L for alle optioner:

Tabel 10.4

Hest KF1	Hest KF2	Hest KF3	Hest KF4	NIG KF1	NIG KF2	NIG KF3	NIG KF4	BS
0,086362	0,084068	0,088178	0,082713	0,126611	0,127277	0,128819	0,128546	0,09315

Det ses generelt, at det er Kriteriefunktion 4 og Kriteriefunktion 2 for Heston modellen der giver de bedste resultater. Vi bemærker, at Kriteriefunktion 2 var den model, der opnåede den højeste Score i Kalibreringsafsnittet. Forskellene i P&L resultaterne for Kriteriefunktionerne er dog så små, at man ikke generelt kan sige, at den ene Kriteriefunktion er bedre end den anden til at hedge med. Heston

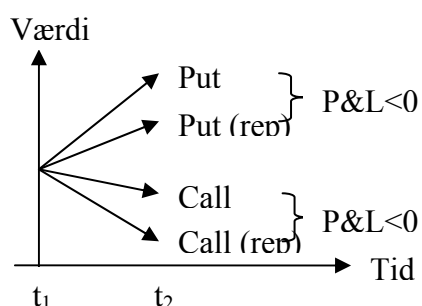
modellen vil til enhver være at foretrække frem for NIG modellen, og for langt de fleste optioner er Heston modellen også bedre end Black Scholes modellen.

10.3 Empirisk undersøgelse af P&L når optionerne holdes til udløb

I dette afsnit undersøger vi hvor godt vores 3 modeller replikerer 20 optioner fra den korte og mellemste optionsserie over hele deres løbetid T med start d. 01-10-08. Vi tager udgangspunkt i hedging proceduren i Tabel 9.1 hvor vi holder den replikerende portefølje og en option til udløbstidspunktet T og sammenligner her deres P&L jf. (10.1). Da vi kun har 6 måneders data, følger vi ikke den lange optionsserie $T3$ til udløb. I forrige afsnit så vi, at der ikke er meget forskel på, hvilken kriteriefunktion vi benytter, og vi har derfor i denne undersøgelse kun medtaget parametre, der er kalibreret med Kriteriefunktion 2.

Såfremt markedet var komplet, og vi rebalancerede kontinuert, skulle P&L være 0, da ændringen i optionsprisen og ændringen i den replikerende portefølje så var ens. Da vi kun rebalancerer dagligt, er vi altid ”bagefter” markedet og kan jævnfør simulationsstudiet ikke forvente et P&L på 0, uanset om markedet er komplet eller ej. Vores datasæt indeholder de værste fald under finanskrisen 2008/2009, og markedet er altså generelt gået markant ned i vores datasæt. I et marked der generelt går nedad må man forvente, at den replikerende portefølje altid har en for stor delta position i det underliggende aktiv til at kunne replikere perfekt. I et nedadgående marked falder værdien af calloptioner, mens værdien af putoptioner stiger, men den replikerende portefølje for calloptioner falder for meget, og den replikerende portefølje for putoptioner stiger for lidt, hvilket Figur 10.8 viser.

Figur 10.8



I et nedadgående marked vil P&L for en strategi med en lang position i den replikerende portefølje og en kort position i optionen altså blive negativ for både put- og calloptioner. Nedenstående tabel viser situationen i Figur 10.8 med et tal-eksempel.

Tabel 10.5

	Tid	S	delta	Rep pf	option	P&L
Call	0	100	0,62	14,23	14,23	0
	0,2	80	0,29	1,89		
	0,4	60	0,03	-3,91		
	0,6	80	0,17	-3,52		
	0,8	40	0,00	-10,24		
	1	10	0,00	-10,77	0,00	-10,77
Put	0	100	-0,38	9,35	9,35	
	0,2	80	-0,71	16,96		
	0,4	60	-0,97	31,47		
	0,6	80	-0,84	12,94		
	0,8	40	-1,00	46,88		
	1	10	-1,00	79,29	90,00	-10,71

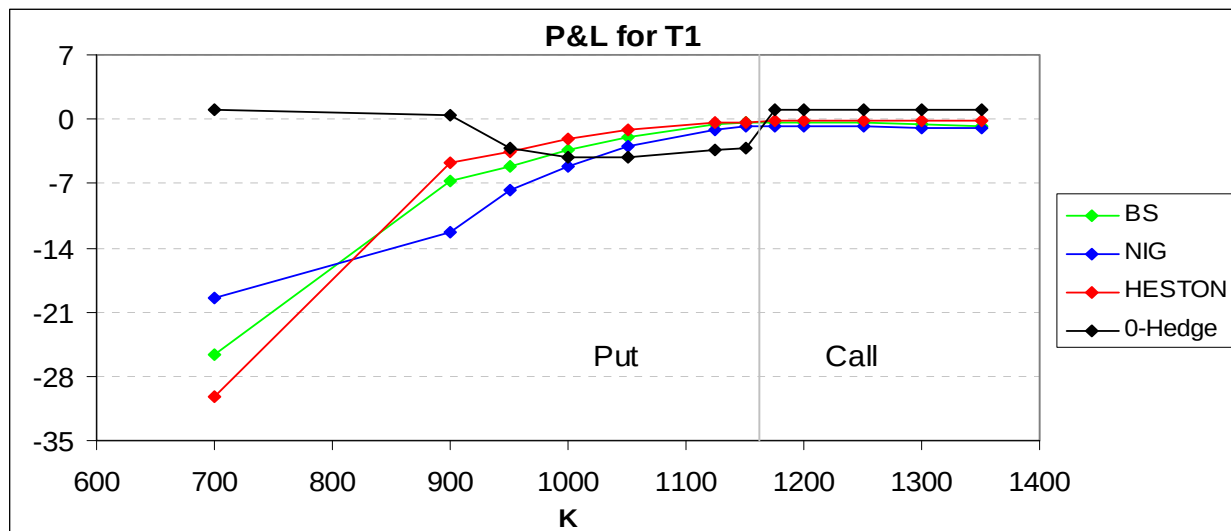
Tabellens værdier er beregnet ud fra Black Scholes modellen med $K = 100$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$.

I Figur 10.9 og Figur 10.10 plotter vi P&L ved udløbstidspunktet for de 20 korte og mellemste optioner fra d. 01-10-08. På begge plots får vi, som man kunne forvente, at modellerne udelukkende giver negative P&L. Vi tilføjer desuden 0-Hedgen, hvor man aldrig investerer noget i det underliggende aktiv. Det bemærkes at 0-Hedgen for $T1$ giver positive værdier i de tilfælde hvor optionen ender out-of-the-money, idet der her bare er tale om forrentningen, $P\&L = e^{rT}$.

Formålet med at replikere er at få et P&L så numerisk lavt som muligt, og selvom 0-Hedgen for optionsserien $T1$ giver positive værdier for $K = 1175$ til $K = 1350$ er dette altså ikke ensbetydende med at 0-Hedgen er bedst. For optionsserien $T1$ finder vi, at Heston modellen er den bedste model at hedge med for 11 af de 12 optioner i forhold til Black Scholes og NIG. Kun for put optionen $K = 700$, der starter langt out-of-the-money, taber Heston modellen til de to andre modeller. For $K > 950$ er Heston modellen bedre end 0-Hedgen, men 0-Hedgen er bedre end Heston modellen for $K < 950$. For $K = 950$ er P&L for 0-Hedgen og Heston modellen næsten ens, så samlet set er Heston modellen bedre end 0-Hedgen i 9 til 10 af de 12 tilfælde.

NIG modellen er den værste af vores 3 modeller og giver kun det bedste resultat af de 3 modeller for netop $K = 700$. I forhold til 0-Hedgen er det dog bedre at hedge med NIG modellen i 8 af de 12 tilfælde. Black Scholes placerer sig resultatmæssigt mellem Heston og NIG modellen.

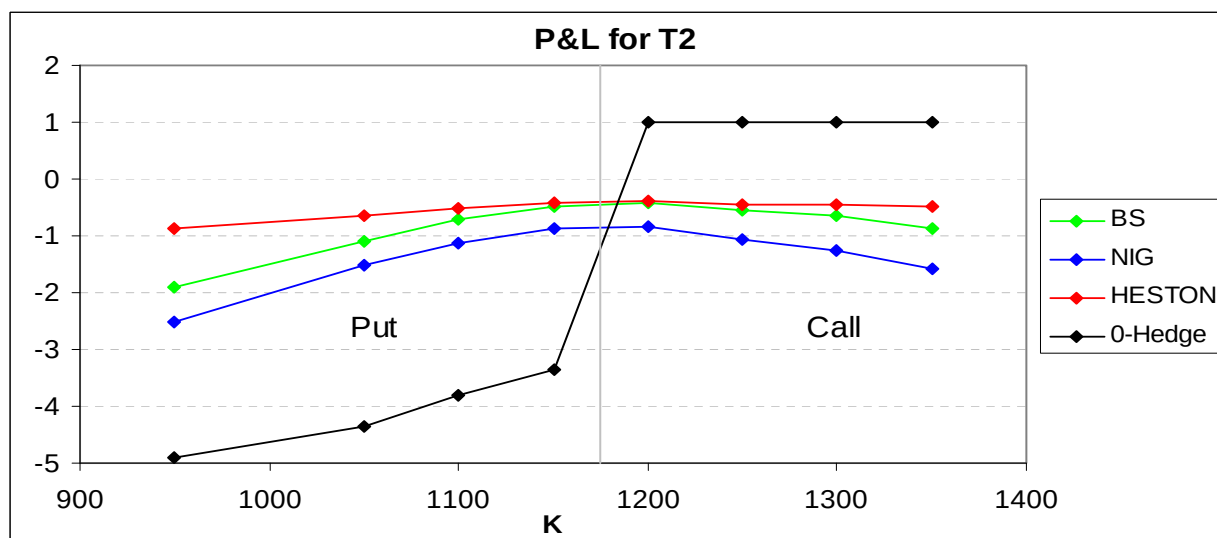
Figur 10.9



I Figur 10.9 viser P&L ved udløbstidspunktet for de 20 korte optioner (T1) fra d. 01-10-08 for Black Scholes, NIG og Heston modellen.⁶³

For den mellemlange optionsserie T2 i Figur 10.10 ses det tydeligt, at Heston modellen er suverænt den bedste efterfulgt af Black Scholes modellen. Begge modeller slår 0-Hedgen for hele serien. For denne serie ses det, at på trods af at NIG modellen igen klarer sig dårligst af de 3 modeller, klarer den sig trods alt bedre end 0-Hedge i de fleste tilfælde.

Figur 10.10



I Figur 10.10 viser P&L ved udløbstidspunktet for de 20 mellemlange optioner (T2) fra d. 01-10-08 for Black Scholes, NIG og Heston modellen.⁶³

⁶³ Anvendt kode og Excelark med data og grafer ses i mappen "Kalibrering af parametre og empiriske P&L".

10.4 Diskussion

Begge vores empiriske P&L undersøgelser viser, at Heston modellen generelt er den bedste model til at replikere en option med. Den daglige P&L undersøgelse tyder dog på, at Black Scholes modellen er at foretrække, hvis det er illikvide optioner der skal replikeres, men man skal være varsom med at generalisere dette resultat. Vores gennemgang har fokuseret på P&L for enkelte optioner. Man kunne argumentere for, at det var bedre at se på porteføljer af optioner, da det er mere realistisk, at en udsteder udbyder en portefølje af forskellige optioner jf. afsnit 9.3. Ser man på de aggregerede P&L, svarende til P&L for en portefølje, finder vi stadig, at Heston modellen er den bedste model. Vi har som nævnt valgt kun at anskue P&L for enkelte optioner for at få et mere nuanceret billede af P&L for optionerne.

Vi vurderer, at NIG modellen klarer sig så dårligt, da den ikke kan tage højde for at afkastene ikke er uafhængige jf. afsnit 3.4. Spørgsmålet er, om man kunne få bedre delta hedging resultater med NIG modellen, hvis man kalibrerede den for hver løbetid, idet vi i afsnit 8.5 bemærkede, at NIG modellen fittede de enkelte optionsserier tilnærmelsesvis perfekt. Rebonato viser (Rebonato, 2004, s. 125-129), at brugen af en enkelt volatilitet i Black Scholes modellen for en portefølje af optioner giver næsten lige så små hedging fejl, som metoden hvor man bruger de implicitte volatiliteter. Vi har derfor årsag til at tro, at de marginalt anderledes NIG parametre man får, når man fitter til en enkelt optionsserie, ikke har den store effekt på NIG modellens hedging resultater for en portefølje af optioner. Dette understøttes af vores empiriske delta hedging resultater. Da vi får samme konklusion i sammenligningen af de 3 optionsmodeller, uanset om vi benytter de stabile parametre fra Kriteriefunktion 4 eller de ustabile parametre fra Kriteriefunktion 3, tyder det på, at NIG modellens delta hedge ikke kan forbedres væsentligt ved at kalibrere parametrene ud fra en enkelt optionsserie. Da en sådan fremgangsmåde desuden er teoretisk ukorrekt, undlader vi at undersøge den nærmere.

11 Konklusion

I denne kandidatopgave har vi undersøgt effekten af at ændre Black Scholes modellens antagelse om, at det underliggende aktiv følger en geometrisk brownsk bevægelse med konstante parametre for drift og volatilitet. Til dette formål indfører vi NIG modellen og Hestons stokastiske volatilitets model. Igennem hele opgaven benytter vi Black Scholes modellen som benchmark for, hvor succesfulde de to andre modeller er. På trods af, at der er stor forskel på, hvordan man indfører en NIG og en Heston model, føler vi, at det er lykkedes os at lave en ensartet teoretisk gennemgang af de to modeller. I vores undersøgelse af hvordan de 3 modeller fitter empiriske fordelinger af logafkast viser det sig, at de aggregerede parametre for Heston modellen er suverænt de bedste til at fitte logafkast for forskellige værdier af T . Dette giver en indikation om, at Heston modellen muligvis er bedre til at delta hedge med end de to andre modeller. Den ensartede teoretiske gennemgang gør det muligt for os at formulere en generel optionsmodel, hvori alle de 3 modeller passer. Ved brug af den generelle optionsmodel viser vi, at forskellen imellem de 3 modeller, er måden hvormed de fastsætter $P(\ln(K/S_0), \Omega_j)$. NIG og Heston modellen fastsætter ofte $P(\ln(K/S_0), \Omega_j)$ meget ens og deres resultater afviger fra $P(\ln(K/S_0), \Omega_j)$ for Black Scholes modellen. På baggrund af dette kunne man fristes til at tro, at NIG og Heston modellerne ville give ensartede hedging resultater. Dette er dog ikke tilfældet. På grund af antagelsen om korrelation imellem Heston modellens to risikokilder, er vi nødt til at justere delta for Heston modellen, og indfører derfor størrelsen δ^{MV} . Da vi finder, at $\delta_{F_t}^{MV}$ for Heston modellen og Δ_{F_t} for NIG modellen ikke er ens, indikerer det, at de to modeller næppe giver ensartede hedging resultater.

For at være i stand til at sammenligne de 3 modeller benytter vi optionsdata for perioden d. 01-10-08 til d. 31-03-09 trukket i Bloomberg. Idet vi selv trækker datasættet, og ikke får det leveret fra en ekstern kilde, der kan bekræfte at deres data er korrekte, er vi nødt til at stille os kritisk til kvaliteten af vores data. Vi har filtreret datasættet i forhold til strikemonotonicity og lavet en simpel test for arbitrage for at sikre os, at data er trukket korrekt, og at data ikke er i strid med normale markedsantagelser. Det resulterende datasæt overfylder kravet om strikemonotonicity og arbitragefri markeder og er altså konsistent, hvilket tyder på at det er trukket korrekt. Fordelen ved ikke at bruge et datasæt fra en ekstern kilde er, at vi kan garantere, at der ikke er foretaget yderligere tiltag, der kan have effekt på vores efterfølgende undersøgelser. Ved kalibrering ønsker vi at se bort fra likviditetseffekter og undersøger derfor Volume samt Open Interest, med henblik på at finde de mest likvide optioner. Ud fra Volume og Open Interest kunne man argumentere for, at vi ikke burde have medtaget

den lange optionsserie $T3$. Det har vi dog alligevel valgt at gøre, da vi ønsker at vide, hvordan de 3 modeller klarer lange løbetider.

Vi har kalibreret de 3 modeller til det fundne datasæt ved brug af 4 forskellige kriteriefunktioner. Uanset valget af kriteriefunktion finder vi, at NIG modellen systematisk rammer de observerede priser dårligt, mens Heston modellen klarer sig væsentligt bedre. Problemet for NIG modellen lader igen til at være, at modellen ikke kan tage højde for forskellige løbetider T , hvilket stemmer overens med det vi fandt, da vi fittede modellen i forhold til empiriske logafkast under P-målet. Heston modellen har nogle dårlige dage, men vi får generelt pæne resultater. Vi ser, at NIG og Heston modellerne har svært ved at fange illikvide optioner, hvilket særligt ses for den lange optionsserie, der som nævnt ofte er illikvid.

I vores gennemgang af teorien for kalibrering forklarer vi, at kalibreringsproblemet er det inverse til prisfastsættelsesproblemet. Da kalibreringsproblemet er ill-posed, kalibrerer vi de 3 modellers parametrene ud fra 4 forskellige kriteriefunktioner, der hver giver et estimat for ”goodness of fit”. Vi benytter 4 forskellige kriteriefunktioner, da det er vigtigt, at vores sammenligning af de 3 optionsmodeller ikke afhænger af, hvilken kriteriefunktion vi har kalibreret med. Vores kalibrering med de forskellige kriteriefunktioner giver forskellige egenskaber for de kalibrerede parametre såsom antal overskridelser af bid ask spænd, parameterstabilitet mv. Dette giver en indikation om betydningen af at se på flere kriteriefunktioner, hvis vi skal vurdere de 3 modeller i forhold til hinanden, uden at resultatet afhænger af et arbitrært valgt kriterium for ”goodness of fit”.

Vores delta hedge simuleringstudie for hver af de 3 modeller, givet at markedet opfører sig som den tilsvarende model foreskriver, viser som forventet, at det kun er for Black Scholes modellen, at P&L går mod 0 når rebalanceringerne sættes op. Dette skyldes som nævnt, at Black Scholes modellen er den eneste af de 3 modeller, hvor markedet er komplet. Simulationsstudiet viser, at hyppigheden af rebalanceringer ikke har den store effekt på P&L for NIG modellen, hvilket formentligt skyldes, at den overdøves af effekten af store spring. For Heston modellen viser simulationsstudiet, at P&L formindskes, men at det ikke går mod 0, når hyppigheden af rebalanceringer øges.

Både den empiriske undersøgelse af de daglige P&L samt P&L når optionerne holdes til udløb viser, at Heston modellen generelt er den bedste og NIG modellen den værste, til at hedge med, uanset valget af kriteriefunktion. Den daglige P&L undersøgelse tyder dog på, at Black Scholes modellen er at foretrække, hvis det er illikvide optioner der skal replikeres, men man skal være varsom med at generalisere dette resultat. I lyset af at Black Scholes modellen er den mest simple af de 3 modeller, forstår man godt modellens popularitet, idet den giver næsten lige så gode delta hedging

resultater som Heston modellen. Uanset hvilken model man vælger, er det dog bedre at hedge end at lade være, idet alle 3 modeller generelt slår 0-Hedgen. Vi finder en klar sammenhæng mellem standardafvigelsen på P&L og standardafvigelsen på de normerede optionspriser, hvilket forklarer, hvorfor P&L er forskellig for optionerne.

Såfremt man lavede en portefølje af alle de undersøgte optioner, ville Heston modellen give det bedste resultat efterfulgt af Black Scholes modellen og med NIG modellen som den dårligste model. Det faktum, at kriteriefunktionerne ikke har nogen indflydelse på, hvilken model vi vurderer som den bedste, tyder på, at resultatet kan antages for værende generelt gældende. For perioder hvor markedet ikke er ligeså volatilt som den periode vi har behandlet, forventer vi dog at resultaterne bliver mindre udprægede.

12 Perspektivering

Vi vil i det følgende give forslag til interessante udbygninger og anvendelser, som vi grundet vores afgrænsning ikke har medtaget.

I vores opgave benytter vi en lokal optimeringsalgoritme, primært ud fra en vurdering om, at en mere sofistikeret model ikke vil have nogen indflydelse på vores sammenligning af de 3 modeller. En implementering af en global søgealgoritme såsom ASA⁶⁴ kunne sikre, at de kalibrerede parametre faktisk er optimale. I henhold til vores opgave kunne det være interessant, at have brugt en sådan global algoritme til at finde et startgæt for den lokale optimeringsalgoritme.

Eksotiske produkter, hvortil der ikke eksisterer nogle priser i markedet, ses ofte prisfastsat ud fra en model kalibreret til likvide europæiske optioner. Det kunne have været interessant at benytte vores kalibrerede modeller til sådan et formål.

Hvis vores implementering skulle bruges kommercielt, kunne vi med fordel have sat os ind i fourier transformation, der er en væsentligt hurtigere måde at beregne Heston integralet på, end den vi har implementeret.

Endeligt kunne det have været interessant at medtage endnu mere komplicerede modeller. Vores opgave slutter af med at konkludere, at udvidelsen til Hestons stokastiske volatilitetsmodel er en succes, og at NIG modellen er en fiasko. Spørgsmålet er, om man kunne lave en endnu bedre NIG model ved at tilføje stokastisk volatilitet eller en endnu bedre Heston model ved at tilføje spring. I litteraturen findes talrige eksempler på en række forskellige NIG modeller med forskellige processer for volatiliteten. Et eksempel der specielt har fanget vores interesse er implementeringen af en CIR proces for volatiliteten i en model hvor logafkastene følger en NIG fordeling, så denne model har samme proces for volatiliteten som Heston modellen. Modellen er beskrevet af Schoutens (Schoutens & Symens, 2002), og virker lovende. Tilføjelsen af spring i Heston modellen fører eksempelvis til Bates modellen (Bates, 1996), der ligesom Heston modellen er meget populær i litteraturen.

⁶⁴Adaptive Simulated Annealing

A Appendiks: Den momentgenererende funktion

A.1 Den momentgenererende funktion for normalfordelingen

Vi udleder den momentgenererende funktion for normalfordelingen:

$$\begin{aligned} M(z) &= E(\exp(zX)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xz) \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \Leftrightarrow \\ M(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + \mu^2 - 2x\mu - 2x\sigma^2 z}{2\sigma^2}\right) dx \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Vi ønsker nu $x^2 + \mu^2 - 2x\mu - 2x\sigma^2 z$ på formen $(x - G(z, \mu, \sigma))^2 + R(z, \mu, \sigma)$, således vi kan trække konstanten $\exp(-R(z, \mu, \sigma)/2\sigma^2)$ udenfor integralet. Integranden der er tilbage er så tæthedsfunktionen for en normalfordeling med middelværdi $G(z, \mu, \sigma)$ og varians σ^2 , hvor vi ved at integralet for $]-\infty, +\infty[$ giver 1. Vi finder $G(z, \mu, \sigma)$ og $R(z, \mu, \sigma)$:

$$\begin{aligned} x^2 + \mu^2 - 2x\mu - 2x\sigma^2 z &= (x - G(z, \mu, \sigma))^2 + R(z, \mu, \sigma) \Leftrightarrow \\ -2x(\mu + \sigma^2 z) + \mu^2 &= G(z, \mu, \sigma)^2 - 2xG(z, \mu, \sigma) + R(z, \mu, \sigma) \Leftrightarrow \\ (\mu + \sigma^2 z)^2 - 2x(\mu + \sigma^2 z) + \mu^2 - (\mu + \sigma^2 z)^2 &= G(z, \mu, \sigma)^2 - 2xG(z, \mu, \sigma) + R(z, \mu, \sigma) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Der må så gælde:

$$\begin{aligned} G(z, \mu, \sigma) &= \mu + \sigma^2 z \\ R(z, \mu, \sigma) &= \mu^2 - (\mu + \sigma^2 z)^2 \Leftrightarrow R(z, \mu, \sigma) = \mu^2 - \mu^2 - 2\mu\sigma^2 z - \sigma^4 z^2 \Leftrightarrow \\ R(z, \mu, \sigma) &= -2\mu\sigma^2 z - \sigma^4 z^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Vi indsætter (A.3) i den momentgenererende funktion:

$$\begin{aligned} M(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - G(z, \mu, \sigma))^2 + R(z, \mu, \sigma)}{2\sigma^2}\right) dx \Leftrightarrow \\ M(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - (\mu + \sigma^2 z))^2 - 2\mu\sigma^2 z - \sigma^4 z^2}{2\sigma^2}\right) dx \Leftrightarrow \\ M(z) &= \exp\left(\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - (\mu + \sigma^2 z))^2}{2\sigma^2}\right) dx \Leftrightarrow \\ M(z) &= \exp\left(\mu z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Den momentgenererende funktion for normalfordelingen er således givet ved (A.4).

A.2 NIG fordelingen

Vi udleder den momentgenererende funktion for NIG fordelingen:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= E(\exp(zX)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(zx) \frac{\delta\alpha \exp(\delta\gamma + \beta(x-\mu))}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right) dx \\
 M(z) &= \exp(\delta\gamma - \beta\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((\beta+z)x) \frac{\delta\alpha K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} dx
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Vi benytter nu, at integralet for tæthedsfunktionen for NIG fordelingen med parametrene $NIG(\alpha, \beta+z, \mu, \delta)$ for $]-\infty, +\infty[$ giver 1, hvor vi definerer $\gamma_z = \sqrt{\alpha^2 - (\beta+z)^2}$:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\alpha \exp(\delta\gamma_z + (\beta+z)(x-\mu))}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right) dx \Leftrightarrow \\
 1 &= \exp(\delta\gamma_z - (\beta+z)\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((\beta+z)x) \frac{\delta\alpha K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} dx \Leftrightarrow \\
 \exp((\beta+z)\mu - \delta\gamma_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((\beta+z)x) \frac{\delta\alpha K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} dx
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Vi substituerer nu (A.6) ind i den momentgenererende funktion:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= \exp(\delta\gamma - \beta\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((\beta+z)x) \frac{\delta\alpha K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} dx \Leftrightarrow \\
 M(z) &= \exp(\delta\gamma - \beta\mu) \exp((\beta+z)\mu - \delta\gamma_z) \Leftrightarrow \\
 M(z) &= \exp(\mu z + \delta(\gamma - \gamma_z))
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Den momentgenererende funktion for NIG fordelingen er således givet ved (A.7).

B Appendiks: Udledning af udtryk til Esscher transformation

Vi vil herunder vise, at der gælder $M(1, t; h) = M(1, 1; h)^t$. Først anskuer vi den stokastiske proces:

$$X_t = \left(X_t - X_{\frac{n-1}{n}t} \right) + \left(X_{\frac{n-1}{n}t} - X_{\frac{n-2}{n}t} \right) + \dots + \left(X_{\frac{t}{n}} - X_0 \right) \quad (\text{B.1})$$

Idet processen, X_t , er stationær og har uafhængige tilvækster har $X_{\frac{n+1-i}{n}t} - X_{\frac{n-i}{n}t}$ kan vi med udgangspunkt i (B.1) omskrive den tilhørende momentgenererende funktion:

$$M(z, t) = E[e^{zX_t}] = E \left[e^{z \sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{n+1-i}{n}t} - X_{\frac{n-i}{n}t} \right)} \right] = \prod_{i=1}^n E \left[e^{z \left(X_{\frac{n+1-i}{n}t} - X_{\frac{n-i}{n}t} \right)} \right] \quad (\text{B.2})$$

Da $X_{\frac{n+1-i}{n}t} - X_{\frac{n-i}{n}t}$ har samme fordeling som $X_{t/n}$, fås det, at den momentgenererende funktion kan skrives som:

$$M(z, t) = E[e^{zX_{t/n}}]^n \quad (\text{B.3})$$

Da n blot betegner antallet af inddelinger af X_t , kan vi frit sætte $n = t$, hvilket giver følgende reduktion:

$$M(z, t) = E[e^{zX_1}]^t \Leftrightarrow M(z, t) = M(z, 1)^t \quad (\text{B.4})$$

Det ses, at et tilsvarende resultat gælder for den modificerede momentgenererende funktion:

$$M(z, t; h) = \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)} \Leftrightarrow M(z, t; h) = \frac{M(z + h, 1)^t}{M(h, 1)^t} \Leftrightarrow M(z, t; h) = M(z, 1; h)^t \quad (\text{B.5})$$

Vi har så hermed vist, at $M(z, t; h) = M(z, 1; h)^t$.

C Appendiks: Volume og Open Interest

Tabel C.1a og Tabel C.1b

S&P 500 = 1003,35	Volume	Open Interest	S&P 500 = 1003,35	Volume	Open Interest
SPX 12/08 P500 Index	586	12189	SPX 03/09 C900 Index	117	4124
SPX 12/08 P525 Index	N/A	10	SPX 03/09 C925 Index	N/A	2
SPX 12/08 P550 Index	N/A	2	SPX 03/09 C950 Index	N/A	4190
SPX 12/08 P575 Index	600	1708	SPX 03/09 C975 Index	N/A	N/A
SPX 12/08 P600 Index	1612	142755	SPX 03/09 C1000 Index	3923	4833
SPX 12/08 P625 Index	N/A	5051	SPX 03/09 C1025 Index	34	340
SPX 12/08 P650 Index	4	455	SPX 03/09 C1050 Index	1142	3858
SPX 12/08 P675 Index	5002	N/A	SPX 03/09 C1075 Index	1141	2991
SPX 12/08 P700 Index	3166	54214	SPX 03/09 C1100 Index	4516	7192
SPX 12/08 P725 Index	N/A	4254	SPX 03/09 C1125 Index	45	1784
SPX 12/08 P750 Index	528	18766	SPX 03/09 C1150 Index	226	24367
SPX 12/08 P775 Index	N/A	310	SPX 03/09 C1175 Index	31	5087
SPX 12/08 P800 Index	9046	122019	SPX 03/09 C1200 Index	2267	25600
SPX 12/08 P825 Index	N/A	570	SPX 03/09 C1225 Index	N/A	8856
SPX 12/08 P850 Index	12050	59061	SPX 03/09 C1250 Index	70	18530
SPX 12/08 P875 Index	8521	27315			
SPX 12/08 P900 Index	24644	90951			
SPX 12/08 P925 Index	1000	16880			
SPX 12/08 P950 Index	56168	71190			
SPX 12/08 P975 Index	17558	15049			
SPX 12/08 P1000 Index	5068	134851			
SPX 12/08 P1025 Index	515	47354			
SPX 12/08 P1050 Index	5111	136887			
SPX 12/08 P1075 Index	2657	43293			
SPX 12/08 P1100 Index	15131	143852			

Tabel C.1a og Tabel C.1b viser Volume samt Open Interest for to optionsserier. Til venstre ses putoptioner d. 13. oktober 2008 med udløb på december 2008 svarende til en løbetid i intervallet 0,5-3,5 måneder hvor S&P500 indekset havde en værdi på 1003,35. Til højre ses calloptioner d.13. oktober 2008 med udløb marts 2009 svarende til en løbetid i intervallet 3,5-6,5 måneder hvor S&P500 indekset havde en værdi på 1003,35. De to optioner omkring at-the-money er markeret med blå.

D Appendiks: Nødvendige resultater for Heston modellen

D.1 Diffusionsled

Vi vil vise, at der gælder følgende (Munk, Fixed Income Analysis: Securities, Pricing, and management, 2003):

$$(dt)^2 = 0, dtdW_t = 0, (dW_t)^2 = dt \text{ og } dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \quad (D.1)$$

$(dt)^2$:

Da dt er en infinitesimal ændring i t er den som udgangspunkt forsvindende lille, hvilket betyder at man kan ignorere den og altså sætte $(dt)^2 = 0$.

$dtdW_t$:

Der gælder, at W_t følger en standardiseret brownsk bevægelse og har følgende fordeling:

$$W_t \sim N(0, t)$$

dW_t må så have følgende fordeling: $dW_t = W_t - W_{t-dt} \sim N(0, dt)$.

Vi udleder nu middelværdi og varians for $dtdW$:

$$E[dtdW_t] = dtE[dW_t] = 0$$

$$\text{var}(dtdW_t) = \underbrace{dt^2}_{=0} \text{var}(dW_t) = 0$$

Da $\text{var}(dtdW_t) = 0$ kan man antage, at $dtdW_t = E[dtdW_t]$ og det følger derfor at $dtdW_t = 0$.

$(dW_t)^2$:

Vi udleder nu middelværdi og varians for $(dW_t)^2$:

$$E[(dW_t)^2] = \text{var}(dW_t) - E[dW_t]^2 = dt$$

$$\text{var}((dW_t)^2) = \text{var}(\sqrt{dt}W_1 \cdot \sqrt{dt}W_1) = (dt)^2 \text{var}((W_1)^2) = (dt)^2 \text{var}(\chi_1^2) = (dt)^2 \cdot 2.$$

Da vi har, at $(dt)^2 = 0$ gælder der, at $\text{var}(dW_t^2) = 0$ og det er altså i orden at sætte:

$$dW_t^2 = E[dW_t^2] = dt.$$

$dW_t^1 dW_t^2$:

Vi anskuer sammenhængen mellem dW_t^1 og dW_t^2 : $dW_t^2 = \rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t^1$. Der gælder, at dW_t^1 og $d\hat{W}_t^1$ er uafhængige og har fordelingen, $dW_t^1 \stackrel{d}{=} d\hat{W}_t^1 \sim N(0, dt)$.

Vi kan så vise, at dW_t^2 har samme momenter som dW_t^1 og $d\hat{W}_t^1$:

$$\begin{aligned} E[dW_t^2] &= E[\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t^1] = \rho E[dW_t^1] + \sqrt{1-\rho^2} E[d\hat{W}_t^1] = 0 \\ \text{var}(dW_t^2) &= \text{var}(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t^1) = \rho^2 \text{var}(dW_t^1) + (1-\rho^2) \text{var}(d\hat{W}_t^1) = dt \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Vi finder nu momenterne for $dW_t^1 dW_t^2$:

$$\begin{aligned} E[dW_t^1 dW_t^2] &= E[dW_t^1 (\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t^1)] = \rho \text{var}(dW_t^1) + \sqrt{1-\rho^2} \text{cov}(dW_t^1, d\hat{W}_t^1) = \rho dt \\ \text{var}(dW_t^1 dW_t^2) &= \text{var}(dW_t^1 (\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\hat{W}_t^1)) = \rho^2 \text{var}((dW_t^1)^2) + (1-\rho^2) \text{var}(dW_t^1 d\hat{W}_t^1) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Vi fandt ovenfor, at $\text{var}((dW_t^1)^2) = 2(dt)^2 = 0$. Vi finder $\text{var}(dW_t^1 d\hat{W}_t^1)$:

$$\text{var}(dW_t^1 d\hat{W}_t^1) = E[(dW_t^1 d\hat{W}_t^1)^2] - E[dW_t^1 d\hat{W}_t^1]^2 = E[(dW_t^1)^2] E[(d\hat{W}_t^1)^2] = dt^2 = 0 \quad (\text{D.4})$$

Der gælder derfor:

$$\text{var}(dW_t^1 dW_t^2) = \rho^2 \cdot 0 + (1-\rho^2) \cdot 0 = 0 \quad (\text{D.5})$$

Der gælder således, at $\text{var}(dW_t^1 dW_t^2) = 0$. Man kan altså sætte $E[dW_t^1 dW_t^2] = dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$. Det bemærkes desuden, at $\text{cov}(dW_t^1, dW_t^2) = E[dW_t^1 dW_t^2]$.

For at opsummere har vi altså:

$$(dt)^2 = 0, dt dW_t = 0, (dW_t)^2 = dt \text{ og } dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \quad (\text{D.6})$$

D.2 Udledning af df for Heston modellen

Vi benytter Ito's lemma i 2 variable til at finde df ud fra processerne dS_t og dV_t jf. Heston modellen.⁶⁵

$$df(t, S_t, V_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial V_t \partial S_t} dS_t dV_t \quad (D.7)$$

For at reducere ovenstående udtryk gør vi brug af følgende vigtige størrelser, som vi udleder i appendiks D.1: $(dt)^2 = 0$, $dt dW = 0$, $(dW_t)^2 = dt$ og $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$.

Ved brug af ovenstående størrelser beregner vi 2. ordens leddene, $(dS_t)^2$ og $(dV_t)^2$ samt $dS_t dV_t$ til:

$$(dS_t)^2 = (rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1)^2 = r^2 S_t^2 \underbrace{(dt)^2}_{=0} + V_t S_t^2 \underbrace{(dW_t^1)^2}_{=dt} + 2rS_t^2 \sqrt{V_t} \underbrace{dt dW_t^1}_0 \Leftrightarrow \quad (D.8)$$

$$(dS_t)^2 = V_t S_t^2 dt$$

$$(dV_t)^2 = (\kappa^* (\theta^* - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2)^2 = \kappa^{*2} (\theta^* - V_t)^2 \underbrace{(dt)^2}_{=0} + \sigma^2 V_t \underbrace{(dW_t^2)^2}_{=dt} + 2\kappa^* (\theta^* - V_t) \sigma \sqrt{V_t} \underbrace{dt dW_t^2}_{=0} \Leftrightarrow$$

$$(dV_t)^2 = \sigma^2 V_t dt \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned} dS_t dV_t &= (rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1) (\kappa^* (\theta^* - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2) \Leftrightarrow \\ dS_t dV_t &= rS_t \kappa^* (\theta^* - V_t) \underbrace{(dt)^2}_{=0} + rS_t \sigma \sqrt{V_t} \underbrace{dt dW_t^2}_{=0} + \sqrt{V_t} S_t \kappa^* (\theta^* - V_t) \underbrace{dt dW_t^1}_{=0} + S_t \sigma V_t \underbrace{dW_t^1 dW_t^2}_{=\rho dt} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$dS_t dV_t = S \sigma V_t \rho dt \quad (D.10)$$

Ved indsættelse af ovenstående fås, at df er givet ved:

$$df(t, S_t, V_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2 \partial V_t^2} S_t \sigma V_t \rho \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial V_t} dV_t \quad (D.11)$$

⁶⁵ $X = (X_t^1, X_t^2)$, $df(X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial X_t^i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^i \partial X_t^j} dX_t^i dX_t^j$, se (Hansen, 2004, s. 36)

D.3 Udledning af PDE'en for Heston modellen

Vi vil nu finde prisen for en call og en put option, der er skrevet på det underliggende aktiv, S . Prisen på optionen afhænger således af S , og idet vi her antager, at S er givet ved Hestons stokastiske volatilitetsmodel, så er prisen på optionen bestemt ud fra processen for S samt processen for volatiliteten af logafkastet, V .

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + S \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2 \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Vi definerer en portefølje som indeholder det underliggende aktiv, S og to afledte aktiver, $f_1(S, V, t)$ og $f_2(S, V, t)$, der hver afhænger af S , V og t :

$$\Pi = f_1(S, V, t) - \Delta_1 f_2(S, V, t) - \Delta_2 S \quad (\text{D.13})$$

Ændringen i porteføljen over dt er så givet ved:

$$\begin{aligned} d\Pi &= df_1(S, V, t) - \Delta_1 df_2(S, V, t) - \Delta_2 dS \Leftrightarrow \\ d\Pi &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial V^2} \sigma^2 V_t + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V \right) dt + \frac{\partial f_1}{\partial S} dS_t + \frac{\partial f_1}{\partial V} dV_t - \\ &\quad \Delta_1 \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V \right) dt - \Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial S} dS_t - \Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial V} dV_t - \Delta_2 dS_t \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Udledningen af $df_1(S, V, t)$ og $df_2(S, V, t)$ kan ses i appendiks D.2 ligning (D.11). Vi reducerer nu udtrykket for $d\Pi$ og substituerer udtrykkene for dS og dV ind:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + \mu S \left(\frac{\partial f_1}{\partial S} - \Delta_2 \right) + \kappa(\theta - V) \frac{\partial f_1}{\partial V} \right) dt \\ &\quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2} V_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + \mu S \frac{\partial f_2}{\partial S} + \kappa(\theta - V) \frac{\partial f_2}{\partial V} \right) dt \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial S} - \Delta_2 \right)}_1 S \sqrt{V} dW_t^1 + \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial V} - \Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial V} \right)}_2 \sigma \sqrt{V} dW_t^2 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Vi ønsker, at eliminere porteføljens risiko med hensyn til dW_t^1 og dW_t^2 . Det betyder, at der skal gælde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial V} - \Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial V} &= 0 \Leftrightarrow \Delta_1 = \frac{\partial f_1}{\partial V} \bigg/ \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_1}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial f_2}{\partial S} - \Delta_2 &\Leftrightarrow \Delta_2 = \frac{\partial f_1}{\partial S} - \frac{\partial f_2}{\partial S} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial V} \bigg/ \frac{\partial f_2}{\partial V}\end{aligned}\tag{D.16}$$

Når vi indsætter vægtene må der gælde, at udviklingen i porteføljen er risikofri over tid, således $d\Pi = r\Pi dt = r(f_1(S, V, t) - \Delta_1 f_2(S, V, t) - \Delta_2 S)dt$. Det benytter vi sammen med vægtene til at reducere (D.15) og vi får:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + \kappa(\theta - V) \frac{\partial f_1}{\partial V} - r f_1 + r S \frac{\partial f_1}{\partial S}}{\frac{\partial f_1}{\partial V}} &= \\ \frac{\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f_2}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + \kappa(\theta - V) \frac{\partial f_2}{\partial V} - r f_2 + r S \frac{\partial f_2}{\partial S}}{\frac{\partial f_2}{\partial V}} &\equiv \lambda(S, V, t)\end{aligned}\tag{D.17}$$

Vi bemærker, at μ -leddet forsvinder. Det ses, at det eneste forskel der optræder på de to sider af lighedstegnet, er, at der på den ene side ansues det afledte aktiv, f_1 , mens der på den anden side ansues det afledte aktiv, f_2 . Det betyder, at uanset hvilke afledte aktiver vi havde anskuet, ville vi have fået denne sammenhæng og det betyder, at vi kan sætte hver side af ligningen lig $\lambda(S, V, t)$, der er en funktion af S, V og t . Vi kan så omskrive ligningen til at anskue et hvilken som helst afledt aktiv, $f(S, V, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} V S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2 \partial V^2} \rho S \sigma V + (\kappa(\theta - V) - \lambda(S, V, t)) \frac{\partial f}{\partial V} + r S \frac{\partial f}{\partial S} = r f \tag{D.18}$$

Der gælder altså, at PDE'en skal være opfyldt af ethvert afledt aktiv, $f(S, V, t)$, der udelukkende afhænger af S, V og t .

E Appendiks: Grænse for α i NIG modellen under Q

Fra (5.31) ved vi, at β under Q er givet ved:

$$\beta^* = -\frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha^2}{1 + \left(\frac{r-\mu}{\delta}\right)^2} - \frac{1}{4}} \quad (\text{E.1})$$

Vi foretager substitutionen $y = \frac{r-\mu}{\delta}$ og reducerer udtrykket for β til:

$$\beta^* = -\frac{1}{2} + y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} \quad (\text{E.2})$$

For at β er et reelt tal skal der gælde følgende restriktion om α :

$$\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \frac{1}{4}(1+y^2) \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2} \quad (\text{E.3})$$

Desuden ved vi fra (3.11), at der også skal gælde restriktionen $\alpha > |\beta|$, hvilket er ensbetydende med:

$$\alpha > \left| -\frac{1}{2} + y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} \right| \Leftrightarrow \underbrace{\alpha > -\frac{1}{2} + y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}}}_1 \wedge \underbrace{\alpha > -\left(-\frac{1}{2} + y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} \right)}_2 \quad (\text{E.4})$$

Vi undersøger først **1**. Restriktionen ses altid at være opfyldt for $y < 0$, så vi kan antage i nedenstående reduktion, at $y > 0$:

$$\begin{aligned} \alpha > -\frac{1}{2} + y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} &\Rightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 > \frac{y^2 \alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4} y^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} > \frac{y^2 \alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4} y^2 \Leftrightarrow \\ \alpha^2 \left(1 - \frac{y^2}{1+y^2} \right) + \alpha + \frac{1}{4} &> -\frac{1}{4} y^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \left(\frac{1}{1+y^2} \right) + \alpha + \frac{1}{4} > -\frac{1}{4} y^2 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Vi kræver, at $\alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}$, så ovenstående ulighed er altid opfyldt.

Vi undersøger nu **2**.

$$\alpha \geq -\left(-\frac{1}{2} + y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} \right) \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2} - y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} \quad (\text{E.6})$$

Restriktionen ses altid være opfyldt for $y > 0$, da vi kræver $\alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}$. Vi antager i den følgende reduktion, at $z = -y$ og $z > 0$ som følge af, at vi kan antage $y < 0$:

$$\begin{aligned} \alpha \geq \frac{1}{2} - y \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+y^2} - \frac{1}{4}} &\Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2} + z \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+z^2} - \frac{1}{4}} \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \geq z^2 \left(\frac{\alpha^2}{1+z^2} - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \\ \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} &\geq \frac{z^2 \alpha^2}{1+z^2} - \frac{1}{4} z^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \left(1 - \frac{z^2}{1+z^2}\right) - \alpha + \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} z^2 \Leftrightarrow \\ \alpha^2 \left(\frac{1}{1+z^2}\right) - \alpha + \frac{1}{4} (1+z^2) &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Vi løser 2. grads uligheden og ser diskriminanten bliver 0:

$$d = 1 - 4 \frac{1}{1+z^2} (1+z^2) \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0 \quad (\text{E.8})$$

Uligheden har altså kun en løsning som er $\alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}$.

Vi opsummerer og får:

$$a > |\beta^*| \Leftrightarrow a \geq \left| -\frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha^2}{1+\left(\frac{r-\mu}{\delta}\right)^2} - \frac{1}{4}} \right| \text{ er opfyldt når } \alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}, \text{ hvor } y = \frac{r-\mu}{\delta} \quad (\text{E.9})$$

F Appendiks: Forholdet mellem $\Delta_{S_t}, \Delta_{\hat{S}_t}$ og Δ_{F_t} samt $\delta_{S_t}^{MV}, \delta_{\hat{S}_t}^{MV}$ og $\delta_{F_t}^{MV}$

I (9.4) finder vi Δ_{S_t} for Black Scholes og NIG modellen:

$$\frac{df}{dS_t} \equiv \Delta_{S_t} \quad (\text{F.1})$$

Vi kan så finde Δ_{F_t} , da $S_t = e^{-r(T-t)}F_t \Leftrightarrow dS_t/dF_t = e^{-r(T-t)}$, og der gælder derfor jf. kædereglen:

$$\frac{df}{dF_t} = \frac{df}{dS_t} \frac{dS_t}{dF_t} \Leftrightarrow \Delta_{F_t} = \Delta_{S_t} e^{-r(T-t)} \quad (\text{F.2})$$

Ligeledes kan $\Delta_{\hat{S}_t}$ findes ved kædereglen, da der gælder $S_t = e^{-q(T-t)}\hat{S}_t \Leftrightarrow dS_t/d\hat{S}_t = e^{-q(T-t)}$:

$$\frac{df}{d\hat{S}_t} = \frac{df}{dS_t} \frac{dS_t}{d\hat{S}_t} \Leftrightarrow \Delta_{\hat{S}_t} = \Delta_{S_t} e^{-q(T-t)} \quad (\text{F.3})$$

Vi viser desuden forholdet mellem Δ_{F_t} og $\Delta_{\hat{S}_t}$ ud fra $\hat{S}_t = e^{-(r-q)(T-t)}F_t \Leftrightarrow d\hat{S}_t/dF_t = e^{-(r-q)(T-t)}$:

$$\frac{df}{dF_t} = \frac{df}{d\hat{S}_t} \frac{d\hat{S}_t}{dF_t} \Leftrightarrow \Delta_{F_t} = \Delta_{\hat{S}_t} e^{-(r-q)(T-t)} \quad (\text{F.4})$$

Der gælder altså ud fra (F.2), (F.3) og (F.4) at:

$$\Delta_{F_t} = \Delta_{S_t} e^{-r(T-t)} = \Delta_{\hat{S}_t} e^{-(r-q)(T-t)} \quad (\text{F.5})$$

For Heston modellen med stokastisk volatilitet er forholdet mellem $\delta_{S_t}^{MV}$ og $\delta_{F_t}^{MV}$ jf. (9.16):

$$\begin{aligned} Y &= f(x_1, x_2), \quad x_1 = S_t(F_t) = F_t \cdot e^{-r(T-t)}, \quad x_2 = V_t(x_1) \\ \frac{\partial Y}{\partial F_t} &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial F_t} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial F_t} \Leftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial F_t} = \frac{\partial x_1}{\partial F_t} \frac{\partial Y}{\partial S_t} \Leftrightarrow \delta_{F_t}^{MV} = e^{-r(T-t)} \delta_{S_t}^{MV} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

På samme kan det så vises, at der analogt til Black Scholes og NIG modellen gælder:

$$\begin{aligned} \delta_{\hat{S}_t}^{MV} &= \delta_{S_t}^{MV} e^{-q(T-t)} \\ \delta_{F_t}^{MV} &= \delta_{\hat{S}_t}^{MV} e^{-(r-q)(T-t)} \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Vi får så, at:

$$\delta_{F_t}^{MV} = \delta_{S_t}^{MV} e^{-r(T-t)} = \delta_{\hat{S}_t}^{MV} e^{-(r-q)(T-t)} \quad (\text{F.8})$$

G Appendiks: Monte Carlo simulering

I det følgende beskriver vi, hvilken Monte Carlo simulationsmetode vi har benyttet for de 3 optionsmodeller til at simulere det underliggende i aktiv, S . Det antages, at S ikke udbetaler dividende.

G.1 Black Scholes modellen

For Black Scholes er S givet ved den geometriske brownske bevægelse jf. (3.6):

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW_t \quad (\text{G.1})$$

Det kan så vises givet Ito lemma (Hull, 2005, s. 273), at S til tidspunkt T er givet ved:

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}W\right), \text{ hvor } W \sim N(0,1) \quad (\text{G.2})$$

Ved at generere normerede normalfordelte variable, kan vi simulere det underliggende aktiv, S , til udløbstidspunktet T .

G.2 NIG modellen

Hvis logafkastet er NIG fordelt gælder der analogt til Black Scholes modellen, at S til tidspunkt T er givet ved (Rasmus, 2006, s. 6 og s. 35):

$$S_T = S_0 \exp(X_T), \text{ hvor } X_T \sim NIG(\alpha, \beta^*, \mu T, \delta T) \quad (\text{G.3})$$

Der gælder, at β^* er defineret jf. (5.31). Den NIG fordelte variabel, $X_T \sim NIG(\alpha, \beta^*, \mu T, \delta T)$ kan så genereres ved følgende procedure (Glasserman, 2003, s. 145-147):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta^*)^2}}, \quad b = (a \cdot \delta)^2 \\ \text{Generer: } V &\sim \chi_1^2 \\ \xi &= a \cdot V \\ Y &= a \cdot \left(\delta + \frac{\xi}{2} + \sqrt{\xi \cdot \left(\delta + \frac{\xi}{4} \right)} \right) \\ p &= \frac{\delta}{\delta + Y \sqrt{\alpha^2 - (\beta^*)^2}} \\ \text{Generer: } U &\sim \text{Unif}(0,1) \\ \text{if: } U > p \text{ så } Y &= \frac{b}{Y} \\ \text{Generer: } W &\sim N(0,1) \\ X_T &= \mu + \beta^* Y + \sqrt{Y} W \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

G.3 Heston modellen

For Heston modellen er processen for S og V under Q jf. (5.35) og (5.36) givet ved:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= \kappa^* (\theta^* - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2 \end{aligned} \quad (G.5)$$

Nedenstående procedure viser hvorledes S simuleres for $i = \{0, \Delta t, \dots, T\}$, hvor vi har foretaget en simpel Euler diskretisering af processen for V (Gatheral, 2006, s. 21):

$$\begin{aligned} \text{Generer: } W_i^1 &\sim N(0,1) \\ S_{i+\Delta t} &= S_i \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} V_i \right) \Delta t + \sqrt{V_i} \sqrt{\Delta t} W_i^1 \right) \\ \text{Generer: } W_i &\sim N(0,1) \\ W_i^2 &= \rho W_i^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_i \\ V_{i+\Delta t} &= V_i + \kappa^* (\theta^* - V_i) \Delta t + \sigma \sqrt{V_i} \sqrt{\Delta t} W_i^2 \end{aligned} \quad (G.6)$$

H Appendiks: Problemer med bid-ask spænd

Størrelsen på bid-ask spændene er hverken en absolut størrelse eller en procentdel af optionsprisen. Ofte tilhører det mindste bid-ask spænd i absolutte størrelser den billigste option og det største bid-ask spænd den dyreste, men det er imidlertid ikke altid tilfældet. Nedenstående tabel illustrerer hvordan bid-ask spændet opfører sig for den korte optionsserie på udvalgte dage.

Tabel H.1

12-11-2008 PUT

ATM Call

BID	1,9	6,8	18,2	29,2	42	50,2	60,3	50,2	38,2	21	9,1	3,7	1,4
ASK	2,6	7,7	19,6	29,7	45,7	54,3	64,2	54,1	41,5	23,8	11,1	3,8	2
Spænd	0,7	0,9	1,4	0,5	3,7	4,1	3,9	3,9	3,3	2,8	2	0,1	0,6

Tabel H.1 viser bid-ask spænd for d. 12-11-2008 hvor uregelmæssigheder er markeret med rødt. Bid-ask spændene er ikke nødvendigvis forkerte, fordi de opfører sig som i Tabel H.1, og skal altså ikke filtreres bort. For at undgå udsving for de enkelte dage, kunne man vægte med det gennemsnitlige bid-ask spænd for forskellige niveauer af moneyness og på den måde få nogle statiske vægte. Det er dog ikke noget vi vil gå mere i dybden med.

Litteraturliste

- Alexander, C., & Nogueira, L. (2005). A Taxonomy of Option Pricing Models: Scale Invariant Volatility and Minimum Variance Hedging. *University of Reading* .
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling. *Board of the Foundation of the Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 24 , 1–13.
- Bates, D. (1996). Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit. *Review of Financial Studies* , 69-107.
- Bin, C. (2007). Calibration of the Heston Model with Application in Derivative Pricing and Hedging. *Thesis* .
- Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd ed. Oxford Finance.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Nr. 81 , 637-659.
- Coleman, T., Li, Y., & Verma, A. (1999). Reconstructing the unknown local volatility function. *Journal of Computational Finance* 2.3 .
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, Volume 1 , 223-236.
- Delbaen, F., & Haezendonck, J. (1989). A Martingale Approach to Premium Calculation Principles in an Arbitrage Free Market. *Insurance: Mathematics and Economics* 8 , 269-277.
- Detlefsen, K., & Härdle, W. K. (2006). Calibration Risk for Exotic Options. *Humboldt-Universität zu Berlin, Germany* .
- Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, Vol. 25, Nr. 2 , 383-417.
- Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface – A Practitioner’s Guide*. John Wiley & Sons.
- Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (1994). Option Pricing by Esscher Transforms. *Transactions of Society of Actuaries*, Volume 46 , 99-119.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.
- Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin* , 49-52.
- Hansen, F. (2004). Stokastisk integration med anvendelser. *Københavns Universitet* .
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, Volume 6, Nr. 2 , 327–343.
- Hull, J. (2005). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 6th ed. Prentice Hall.
- Ingber, L. (u.d.). Hentet fra <http://www.ingber.com/>

- Jensen, B. A. (2005). *Rentesregning, 4. udgave*. Jurist- og Økonomforbundets forlag.
- Kalemanova, A., & Wernery, R. (2006). A short note on the efficient implementation of the Normal Inverse Gaussian distribution. 1-13.
- Kapadia, N., & Bakshi, G. (2002). Delta-Hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium. *Review of Financial Studies, Forthcoming* , 527-566.
- Lai, Y. (2007). Option pricing under the Normal Inverse Gaussian Distributions.
- Lawler, G. F. (2006). *Introduction to Stochastic Processes, 2nd ed.* Chapman & Hall.
- Macbeth, J. D., & Merville, L. J. (1979). A empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model. *The Journal of Finance* 34 (5) , 1173-1186.
- MathWorks 1.* (u.d.). Hentet fra <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/curvefit/smooth.html>
- MathWorks 2.* (u.d.). Hentet fra <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/index.html?/access/helpdesk/help/techdoc/ref/quadl.html>
- Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing . *Bell Journal of Economics and Management Science*, Nr. 4 , 141-183.
- Mikhailov, S., & Nögel, U. (2003). Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions. *Wilmott magazine*, July , 74–79.
- Moodley, N. (2005). The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code. *Thesis* .
- Munk, C. (2000). Afledte aktiver. *Undervisningsnote* .
- Munk, C. (2003). *Fixed Incom Analysis: Securities, Pricing, and management*. Syddansk Universitet.
- Papapantoleon, A. (2005). An Introduction to Lévy Processes with Application in Finance. 1-35.
- Poulsen, R. (2007). Four things you might not know about the Black-Scholes Formula. *Journal of Derivatives*, Vol. 15(2), side 77-82 .
- Rasmus, S. (2006). Derivative Prices for Models using Lévy Processes and Markov Switching. *Doctoral Theses in Mathematical Sciences, Lund University* .
- Rebonato, R. (2004). *Volatility and Correlation - The Perfect Hedger and the Fox, 2nd ed.* John Wiley & Sons, Ltd.
- Rydberg, T. H. (1997). The normal inverse gaussian lévy process: simulation and approximation. *Stochastic Models, Volume 13, Issue 4* , 887 – 910.
- Schoutens, W., & Symens, S. (2002). The Pricing of Exotic Options by Monte-Carlo Simulations in a Lévy Market with Stochastic Volatility.
- Sydsæter, K. (2003). *Matematisk analyse Bind 1, 7. udgave*. Gyldendal Akademisk.

Tjur, T. (2002). *Sandsynlighedsregning*, 5. udgave. Materialesamling produceret for Handelshøjskolen i København.

Tjur, T. (2002). *Statistik*, 3. udgave. Materialesamling produceret for Handelshøjskolen i København.

Weisstein 1, E. W. (u.d.). "Moment-Generating Function." *From MathWorld - A Wolfram Web Resource*. Hentet fra <http://mathworld.wolfram.com/Moment-GeneratingFunction.html>

Weisstein 2, E. W. (u.d.). "Expectation Value", "Variance", "Skewness" and "Kurtosis." *From MathWorld - A Wolfram Web Resource*. Hentet fra <http://mathworld.wolfram.com/ExpectationValue.html>, <http://mathworld.wolfram.com/Variance.html>, <http://mathworld.wolfram.com/Skewness.html>, <http://mathworld.wolfram.com/Kurtosis.html>

Weron, R., & Wystrup, U. (2005). Heston's Model and the Smile. *Afsnit i bog: Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer , 161-181.

Yakovenko, M., & Drăgulescu, A. (2002). Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative Finance Volume 2* , 443-453.