

Copenhagen Business School  
Institut for Finansiering  
Cand.merc.(mat.)

# Credit Default Swap

Værdiansættelse af justeringen for bilateral modpartsrisiko  
(Credit Default Swap - Valuation of Bilateral Counterparty Risk Adjustment)

Kandidatafhandling  
3. maj 2012

*Forfatter:*  
Lauge Otto Kjær Jacobsen  
*Antal normalsider:*  
79

*Vejleder:*  
Mads Stenbo Nielsen

## Abstract

The objective of this thesis is to derive and implement a model for bilateral counterparty risk valuation with application to credit default swaps (CDS). The model will take it to account the possibility of wrong-way risk through correlation.

The derivation of the model consists mainly of the derivation of the formulas for the bilateral risk credit value adjustment, and the value of a CDS. Both formulas are derived as the risk neutral valuation of an expected cash flow. The two formulas are combined to give the formula the bilateral risk credit value adjustment with application to CDS (BR-CVA-CDS). A default model is also needed. The defaults are modeled with a Cox process for each of the parties in the CDS. The correlation in default between the parties of the CDS is made through the exponential trigger variables of the Cox process.

The implementation of the model is done with Monte Carlo simulation. First the defaults are simulated for the three parties. If the investor or the counterpart is the first to default, valuation of the CDS is done, given the default. Calculating the value of the CDS, requires derived copula functions and Fourier inversion. In the end the the average, of a sufficiently large simulation, will approximately give the bilateral credit value adjustment.

For the implementation of the model to be possible, approximation of the model has to be made, in order to get the computational time down to a sufficient level. But even though the time to calculate a 1000 simulations, varies from three to nineteen hours. This means, even with a faster computer and better programming, that the model will not be able to price in real time. Because of the computational difficulties, the significance of the error, made by the approximations, is not fully investigated in this thesis.

The effect correlation of the parties in the model, on the BR-CVA-CDS differs from nothing to a lot, depending on the value of the correlation, and who is correlated. The correlation can be both a positive and a negative to the BR-CVA-CDS, meaning that there is both wrong- and right-way risk.

The effect that the investor goes from being considered risk free to risky, has generally a lowering effect on the investors BR-CVA-CDS. The effect can become so great, that the BR-CVA-CDS becomes negative for the investor.

# Indhold

|          |                                                                                             |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Indledning</b>                                                                           | <b>4</b>  |
| 1.1      | Problemformulering . . . . .                                                                | 5         |
| 1.2      | Metode . . . . .                                                                            | 6         |
| <b>2</b> | <b>Introduktion til kreditderivater</b>                                                     | <b>8</b>  |
| 2.1      | Hvad er kredit derivater . . . . .                                                          | 8         |
| 2.2      | Kreditderivat markedet . . . . .                                                            | 10        |
| 2.3      | Kredit begivenhed - Fallit . . . . .                                                        | 11        |
| 2.4      | Recovery rate og loss given default . . . . .                                               | 13        |
| 2.5      | Wrong-way risk . . . . .                                                                    | 14        |
| 2.6      | Notation og definitioner . . . . .                                                          | 15        |
| <b>3</b> | <b>Bilateral modpartsrisiko</b>                                                             | <b>17</b> |
| 3.1      | Hvad er bilateral modpartsrisiko . . . . .                                                  | 17        |
| 3.2      | Cash flow ved fallit . . . . .                                                              | 18        |
| 3.3      | Den generelle formel for prisfastsættelses med bilateral modpartsrisiko .                   | 19        |
| 3.3.1    | Værdien af et produkt med bilateral modpartsrisiko . . . . .                                | 20        |
| 3.3.2    | Bevis for den generelle formel for prisfastsættelses med bilateral modpartsrisiko . . . . . | 21        |
| 3.4      | BR-CVA . . . . .                                                                            | 24        |
| <b>4</b> | <b>Credit default swap</b>                                                                  | <b>25</b> |
| 4.1      | Hvad er credit default swaps . . . . .                                                      | 25        |
| 4.2      | Cash flow . . . . .                                                                         | 28        |
| 4.3      | Risikoneutral prisfastsættelse af CDS . . . . .                                             | 29        |
| 4.3.1    | Værdien af cash flow'et . . . . .                                                           | 29        |
| 4.3.2    | Forventet værdi af cash flowet . . . . .                                                    | 30        |
| <b>5</b> | <b>Værdien af modpartsrisiko på en CDS</b>                                                  | <b>33</b> |
| <b>6</b> | <b>Fallitmodel</b>                                                                          | <b>35</b> |
| 6.1      | Intensitetsmodellen . . . . .                                                               | 35        |
| 6.1.1    | Hazard rates . . . . .                                                                      | 35        |
| 6.1.2    | Cox processen - Den dobbelt stokastiske poisson proces . . . . .                            | 37        |

|          |                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| 6.2      | CIR processen . . . . .                                | 38        |
| 6.2.1    | Den almindelige CIR . . . . .                          | 38        |
| 6.2.2    | CIR++ . . . . .                                        | 39        |
| 6.2.3    | Kalibrering til markedsdata . . . . .                  | 40        |
| 6.3      | Korrelerede fallitter . . . . .                        | 40        |
| 6.3.1    | Korrelation . . . . .                                  | 41        |
| 6.3.2    | Gaussian copula . . . . .                              | 41        |
| 6.3.3    | Cholesky dekomponering . . . . .                       | 43        |
| 6.3.4    | Fra uniform til eksponentiel . . . . .                 | 44        |
| <b>7</b> | <b>Implementering</b>                                  | <b>45</b> |
| 7.1      | Simulering af fallittidspunkter . . . . .              | 45        |
| 7.1.1    | Implementeringen . . . . .                             | 46        |
| 7.2      | Værdien af en CDS . . . . .                            | 47        |
| 7.2.1    | Implementeringen . . . . .                             | 48        |
| 7.3      | Overlevelsessandsynligheden . . . . .                  | 49        |
| 7.3.1    | Notation . . . . .                                     | 49        |
| 7.3.2    | Udledning . . . . .                                    | 49        |
| 7.4      | Den betinget fordeling . . . . .                       | 53        |
| 7.4.1    | Regneregler . . . . .                                  | 53        |
| 7.4.2    | Udledning af de betingede fordelinger . . . . .        | 55        |
| 7.4.3    | Approximation af afledte copula funktioner . . . . .   | 57        |
| 7.4.4    | Interpolation af den betingede sandsynlighed . . . . . | 60        |
| 7.5      | Fourier inversion . . . . .                            | 66        |
| 7.5.1    | Teori . . . . .                                        | 66        |
| 7.5.2    | Øvre integrationsgrænse . . . . .                      | 69        |
| 7.5.3    | Interpolation . . . . .                                | 76        |
| 7.6      | Overlevelsessandsynlighedskurven . . . . .             | 79        |
| 7.7      | Renter og diskontering . . . . .                       | 84        |
| 7.8      | Kode . . . . .                                         | 84        |
| <b>8</b> | <b>Resultater</b>                                      | <b>85</b> |
| 8.1      | Receiver og payer CDS . . . . .                        | 86        |
| 8.2      | Ny verden mod gammel . . . . .                         | 88        |
| 8.2.1    | Payer CDS . . . . .                                    | 88        |
| 8.2.2    | Receiver CDS . . . . .                                 | 90        |
| 8.3      | Beregningstid . . . . .                                | 91        |
| 8.3.1    | Fallitter . . . . .                                    | 91        |
| 8.3.2    | Værdien af CDS kontrakten . . . . .                    | 92        |
| 8.3.3    | BR-CVA-CDS . . . . .                                   | 92        |
| <b>9</b> | <b>Udvidelser/Diskussion</b>                           | <b>94</b> |

|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>10 Konklusion</b>                              | <b>97</b> |
| <b>A Appendiks</b>                                | <b>99</b> |
| A.1 Program og computer . . . . .                 | 99        |
| A.2 Eksempler på ligning 7.45 . . . . .           | 99        |
| A.3 Betinget Fordeling . . . . .                  | 100       |
| A.4 Udregning af $x_{min}$ og $x_{max}$ . . . . . | 102       |
| A.4.1 $x_{min}$ . . . . .                         | 102       |
| A.4.2 $x_{max}$ . . . . .                         | 103       |
| A.5 Diskonteringskurve . . . . .                  | 105       |

# 1 Indledning

Kreditrisiko er traditionelt blevet betragtet som lånerisiko<sup>1</sup>, det være sig banklån, obligation, kredittkort, etc.. Dvs. risikoen for at en rentebetaling, eller tilbagebetaling af hovedstolen ikke modtages<sup>2</sup>. Lånerisikoen er derfor en ensidet modpartsrisiko, da det kun er långiveren, der har mulighed for tab.

At værdifastsætte kreditrisikoen på produkter med envejsbetalinger, såsom lån og obligationer, er relativt simpelt<sup>3</sup>. Som det siges i Gregory[6]<sup>4</sup> ”*one simply needs to account for the default when discounting the cash flow and add any default payment*”.

Anderledes står det til med *over-the-counter* (OTC) derivater, hvor der ofte er tovejsbetalinger. Betalinger der både kan være faste, variable og betingede. Denne ofte større variation i betalingerne betyder, at der er stor usikkerhed i værdien af et OTC derivat, og at værdien både kan være positiv og negativ. Dette resulterer i, at det bliver sværere at værdifastsætte ens krediteksponeringen overfor den anden part i kontrakten.

Traditionelt er modpartsrisiko blevet karakteriseret som kreditrisikoen mellem derivat modparter<sup>5</sup>. Modpartsrisikoen består af to dele: Kreditrisiko og markedsrisiko<sup>6</sup>. Med kreditrisikoen menes, risikoen for at kreditkvaliteten hos en af de to parter forringes i løbet af kontraktens løbetid. Markedsrisikoen er risikoen for, at værdien af derivatet forringes i løbet af kontraktens løbetid. Hvor det er relativt enkelt at udregne modpartsrisikoen på lån og obligationer, er det noget mere komplekst når det drejer sig om at udregne modpartsrisikoen på et OTC derivat. Dette skyldes at usikkerheden, om den fremtidige værdi af et OTC derivat, er større<sup>7</sup>.

Markedet for OTC derivater er præget af få meget store finansielle institutioner<sup>8</sup>. Disse blev før krisen betragtet som *too-big-to-fail*, hvilket betyder at i tilfælde af fallit, vil fallitten have så stor en betydning for samfundsøkonomien, at en regering ville gå ind og redde den finansielle institution, og derved forhindre fallit og tab for personer og organisationer med udeståender. *Too-big-to-fail* illusion betød, at for mange

---

<sup>1</sup>Gregory[6], p. 17

<sup>2</sup>O’Kane[14], p. 31

<sup>3</sup>Gregory[6], p. 169

<sup>4</sup>p. 169

<sup>5</sup>Gregory[6], p. 9

<sup>6</sup>Gregory[6], p. 10

<sup>7</sup>Gregory[6], p. 17

<sup>8</sup>Gregory[6], p. 8

modparter, blev risikoen for fallit betragtet som værende nul, eller næsten nul<sup>9</sup>. Dette medførte at modpartsrisiko ofte blev betragtet og prisfastsat unilateralt. Metoder til at værdiansætte dette er lavet i bl.a. [2] og [3]. Efter finanskrisens start med JP Morgan Chase's overtagelse af Bear Stearns og Lehman Brothers krak i 2008, har synet på store finansielle institutioner som risikofrie dog ændret sig. Det har derfor vist sig været brug for modeller, der prisfastsatte modpartrisiko bilateralt, i stedet for unilateralt.

I dette speciale vil jeg se nærmere på justeringen bilaterale modpartsrisiko (BR-CVA) på CDS'er. CDS kontrakten er lidt speciel i fht. til modpartsrisiko. Dette skyldes at en CDS kontrakt kan bruges til at *hedge* ens modpartsrisiko, men i det at man indgår kontrakten opstår der ny modpartsrisiko overfor den part man har indgået kontrakten med<sup>10</sup>. Dette betyder også, at da CDS kontrakten har kreditrisiko som det væsentligste element i dens prisfastsættelse, så vil en afhængighed mellem en af de to parter og den underliggende reference i CDS kontrakten, kunne resultere i *wrong-way risk*, der er den negative sammenhæng mellem kreditkvalitet og eksponering[6]<sup>11</sup>. Dette betyder, at korrelationen vil have en central betydning for værdien af modpartsrisiko.

Der er lavet forskellige modeller for prisfastsættelse af BR-CVA, hvor der tages højde for *wrong-way risk*, bl.a. Brigo & Capponi[1] (2009), der opsætter og analyserer BR-CVA med ifh. til CDS'er. Den bilaterale model, de bruger, er en videreudvikling af den unilaterale model foreslået af Brigo & Chourdaki[2] (2008).

## 1.1 Problemformulering

Den finansielle krise har i høj grad har sat fokus på vigtigheden af modpartsrisiko, og især bilateral modpartsrisiko, hvor fokus tidligere har været på det unilaterale tilfælde. Det er derfor vigtigt at have en model, der kan kvantificere risikoen og derved værdiansætte den bilaterale modpartsrisiko. Da *Wrong-way risk* kan være ødeliggende, hvis den bliver ignoreret<sup>12</sup>, er det vigtigt modellen kan tage højde for eventuel korrelation mellem CDS kontraktens parter.

Mit formål med dette speciale bliver derfor er at undersøge følgende.

*Hvordan er det muligt at udlede og implementere en model til værdiansættelse af justeringen for bilateral modpartsrisiko vedrørende en CDS med et givet spread. Modellen skal inkludere mulighed for fallit hos både investor og modpart, samt indarbejde muligheden for korrelation mellem CDS kontraktens to parter og den underliggende referencen. Desuden undersøges om modellen er tilstrækkelig hurtig og tilstrækkelig præcis til at være anvendelig.*

Den implementerede model anvendes desuden til at analysere hvilken betydning korrelationen mellem CDS kontraktens to parter og den underliggende referencen, har

---

<sup>9</sup>Gregory[6], p. 24

<sup>10</sup>Gregory[6], p. 9

<sup>11</sup>p. 203

<sup>12</sup>Gregory[6], p. 203

for værdifastsættelsen af den bilaterale modpartsrisikoen, samt at analysere hvilken betydning det har for værdiansættelsen af den bilaterale modpartsrisiko, at den ene af CDS kontraktens to parter går fra at blive betragtet som risikofri til at blive betragtet som risikofyldt.

## 1.2 Metode

Der findes forskellige metoder til at modellere BR-CVA med *wrong-way risk*. En metode er at tage en model der ikke tager højde for *wrong-way risk* og så justere den ved at bruge en tommelfingerregel<sup>13</sup>. Tommelfingerreglen kunne bestå i at justere fx fallitsandsynligheden eller værdien ved fallit. Fordelen ved denne metode er at den er nem og implementere, da den bygger på en justering af en mere simpel model. Problemet er at det kun er en tilnærmelse ad det korrekte resultat. En anden og mere korrekt metode<sup>14</sup>, er at betragte eksponering til det underliggende OTC derivat, i mit tilfælde en CDS, og sandsynligheden for fallit hos en af de to parter i kontrakten, og så kvantificere en forholdet mellem dem. Denne metode er mere korrekt end den første, men den kræver også en ny udledning af modellen og den er desuden meget mere beregningstung. En sådan model er blevet foreslået af Brigo og Capponi[1] (2009). Jeg vil i denne opgave tage udgangspunkt i deres model.

En alternativ model til Brigo og Capponi[1] (2009) kunne være en metode hvor Markovkæder bliver brugt til at modellere fallitter. Dette er gjort af Crépey et al.[15] for udregning af modpartsrisiko for en CDS<sup>15</sup>. I stedet for at se på modpartsrisikoen på et enkelt produkt, er der også mulighed for at se på værdien af modpartsrisiko i en portefølje.

Det første der er nødvendigt for at kunne implementere den valgte model, er at lave en risikoneutral udledning af den generelle formel for BR-CVA, og formlen for en CDS. Begge udledninger tager deres udgangspunkt i den forventede værdi et *cash flow*. Udledningen af værdien af CDS kontrakten, vil blive lavet så den tager højde for kreditrisikoen hos de to parter der har indgået kontrakten. Til sidst skabes så et udtryk for justeringen i modpartsrisiko for hhv. en *receiver* (BR-CVA-CDS<sub>r</sub>) og *payer* CDS (BR-CVA-CDS<sub>p</sub>).

Metoden jeg vil bruge til implementeringen af modellen sker med Monte Carlo simulering. Dette betyder at jeg simulerer fallitter hos de to involverede parter og den underliggende reference. Hvis en af de to parter i kontrakten går fallit som den første i løbet af CDS kontraktens løbetid, udregnes værdien af CDS, givet fallitten. Værdien af tabet på CDS kontrakten diskonteres så tilbage til udgangstidspunktet. Gennemsnittet af et tilstrækkeligt stort antal simuleringer, vil så give den faktiske værdi af BR-CVA-CDS. Valget af Monte Carlo til implementering skyldes, at det er en enkel måde at

---

<sup>13</sup>Gregory[6], p. 208

<sup>14</sup>Gregory[6], p. 208

<sup>15</sup>Modellen er lavet til at udregne unilateral modpartsrisiko. Det er beskrevet at den ret enkelt kan udvides til at betragte bilateral modpartsrisiko



implementere modellen for udregning af BR-CVA-CDS. Det er dog vigtigt at holde for øje, at det kun er en approksimation af det "korrekte" resultat. For at få en tilstrækkelig præcist resultat, kræver Monte Carlo simulation et stort antal simuleringer, da resultatets varians ellers kan blive for stor. Det store antal simuleringer kan være meget beregningskrævende og udregningen kan derved komme til at tage lang tid, hvilket kan betyde at modellen i praksis ikke er brugbar.

Metoden til at simulere fallitter er vigtig for Monte Carlo simulationen. Der kunne bruges strukturelle modeller som fx Merton eller Black-Cox, eller en Markovkæde model. Jeg har dog valgt at bruge en Cox proces model, præsenteret af Lando[5] (1998). Valget af modellen skyldes at modellen kan bruges til at beregne et fremtidig fallit på et ukendt tidspunkt, modellen er desuden fleksibel i fht. ændringer i intensitetsprocessen, og variable som fx *recovery*. Modellen er i dag meget en meget udbredt model til modellering af fallitter og er brugt i bl.a. [1], [2], [4] og [14]. I Cox processen skal der bruges en model for intensitetsprocessen. Der kan bruges flere forskellige bl.a. Vasicek. Jeg vælger at bruge Cox-Ingersoll-Ross (CIR), da denne sikrer at intensitetsprocessen aldrig bliver negativ. Der laves en tilføjelse til CIR processen, så den mere præcist kan tilpasses markeddata. For at sikre korrelation mellem de to parter i CDS kontrakten og den underliggende reference, korreleres de eksponentialfordelte variable i Cox processen. Dette gøre ved Cholesky dekomponering, der er en enkel måde at skabe korrelerede stokastiske variable, der kan dog opstå problemer med metoden hvis korrelationsmatricen ikke er positiv semidefinit.

Det, at finde en værdi af en CDS givet fallit hos en af to parter der har indgået kontrakten, er ikke lige til at implementere. Formlen kræver både udregning af en fordelingsfunktion og udregning af en betinget overlevelsessandsynlighed. Fordelingsfunktionen udregnes ved hjælp Fourier inversion, som præsenteret af Schmelzle[24] (2010). Udregningen af de betingede overlevelsessandsynligheder, sker ved brug af afledte Gaussian Copula funktioner.

Fokus i specialet er på implementeringen af den udledte model. Dette indebære at se på de approksimationer der er nødvendige at lave, i fht. den praktiske implementering og beregningstiden.

Modellen er lavet så den kan tilpasses markedet, men der vil ikke i specialet blive lagt vægt på en empirisk undersøgelse af modellen. Der vil dog blive lavet en sammenligning, hvor der ses på betydning af at investor går fra at være blive betragtet som risikofri, til risikofyldt.

Der vil være antagelser og forsimplinger der gør at modellen ikke nødvendigvis passer overens med markedspraksis for værdifastsættelse af en CDS. Læseren vil løbende blive informeret om disse, når det er relevant. Antagelserne og forsimplingerne er nødvendige, men har ofte ikke betydning for forståelse af det som specialet prøver at afklare.

## 2 Introduktion til kreditderivater

Da CDS'en er et kreditderivat vil jeg introducere disse. Jeg vil kort definere, hvad et kreditderivat er, og vise de mest almindelige. Jeg vil beskrive udviklingen i markedet for kreditderivater. Til sidst vil jeg beskrive, hvad der menes med en kredit begivenhed, og jeg vil vise hvordan udviklingen i kredit begivenheder har været over tid og for forskellige rating.

### 2.1 Hvad er kredit derivater

Et kreditderivat er et bilateralt produkt, dvs. en aftale mellem to parter, der er afledt af kreditrisikoen på et eller flere specificerede referenceaktiver. Ved at indgå i et kreditderivat kan man overføre elementer af kreditrisikoen fra et underliggende produkt fra den ene part til den anden. Den enhed der har udstedt referenceaktivet har ikke noget med kreditderivaterne at gøre, og er derfor ikke bekendt med specifikke handler. Det vigtigste og mest kendte produkt er en *credit default swap* (CDS), som bliver beskrevet i kapitel 4.

Man kan dele kredit derivater op i to forskellige produkt typer, produkter der er *funded* og produkter der er *unfunded*. Et *unfunded* er et produkt hvor der ikke laves en upfront betaling<sup>16</sup>, før finanskrisen var CDS kontrakter typisk uden en *unpront* betaling, og var derfor *unfunded*. Et eksemplet på et produkt der er *funded*, er fx en Credit Linked Note.

Der findes mange forskellige kreditderivater, nedenunder er der en liste der viser de mest almindelige. De er her delt op i *funded* og *unfunded* produkter

---

<sup>16</sup>Lehman Brothers[20]

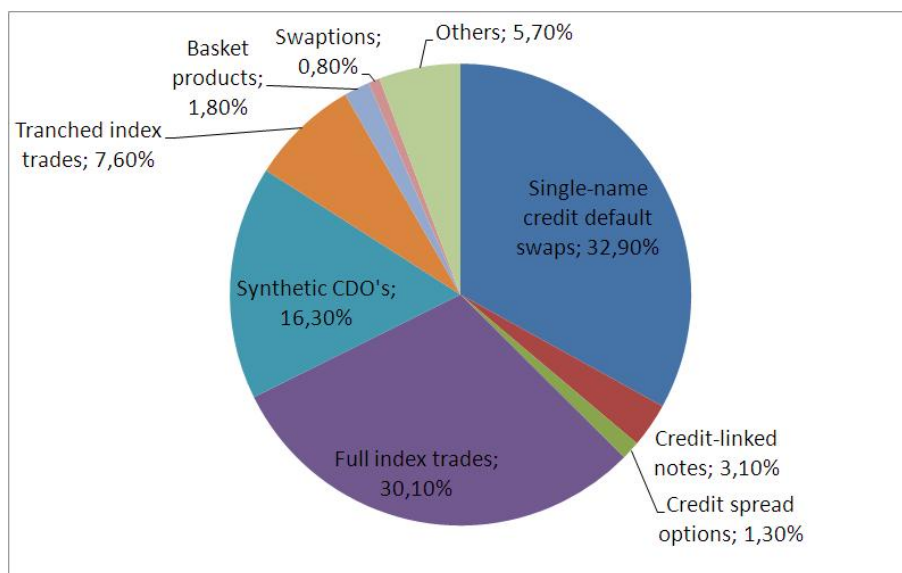
### *Funded*

- Credit linked note
- Synthetic Collateralised Debt Obligation
- Constant Proportion Debt Obligation
- Synthetic Constant Proportion Portfolio Insurance

### *Unfunded*

- Credit default swap
- Total return swap
- Constant maturity credit default swap
- First to Default Credit Default Swap
- Portfolio Credit Default Swap
- Secured Loan Credit Default Swap
- Credit Default Swap on Asset Backed Securities
- Credit default swaption
- Recovery lock transaction
- Credit Spread Option
- CDS index products

Der er stor forskel på hvor meget de enkelte produkter bliver handlet. For at illustrere dette, ses nedenunder en graf der viser fordelingen af forskellige kreditderivater i 2006<sup>17</sup>.



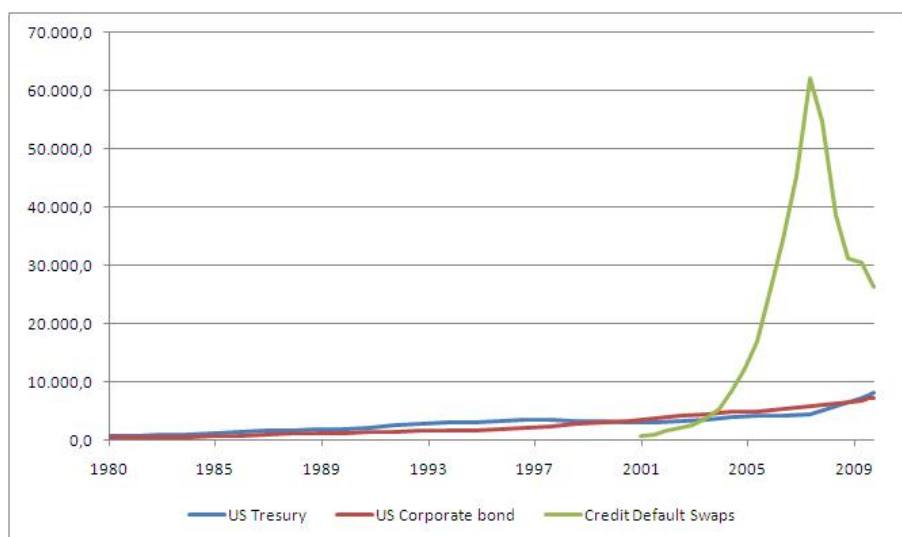
Figur 2.1: Kreditderivaters markeds andel i procent målt på hovedstolen

Som det kan ses i figuren, så er CDS kontrakten det mest almindelige kreditderivat.

<sup>17</sup>BBA Credit Derivatives Report 2006

## 2.2 Kreditderivat markedet

Siden kreditderivaterne blev introduceret i 90'erne er der sket en enorm udvikling. Ikke alene er mængden af forskellige produkter blevet stor, men markedet for kreditderivater er blevet stort. Nedenfor ses en graf hvor man kan se udviklingen af CDS markedet frem til første halvår af 2010<sup>18</sup>. Sammenlignet med markedet for US Treasuries og US corporate bond, kan man se at der er været en langt større stigning i markedet for CDS kontrakter<sup>19</sup>. Det kan ses at der frem til finanskrisens start var voldsom vækst i markedet for CDS'er. Efter finanskrisen indtraf er markedet faldet til ca. det halve, hvilket dog stadig er større end markedet for US Treasuries og US corporate bond til sammen. Grunden til faldet kan i høj grad skyldes at en meget stor del af de CDS'er der var handlet, ikke var til afdækning, men i stedet var spekulation<sup>20</sup>. Da risikovilligheden generelt er faldet kan det være grunden til faldet i CDS markedet.



Figur 2.2: Udviklingen i den totale nominelle udestående for CDS kontrakter. Tallene er mia. USD.

Da kreditderivaterne blev introduceret, var det hovedsageligt bankerne, der brugte dem til at afdække deres kreditrisiko, som de havde på deres lån og obligationer. De kunne desuden bruge kreditderivaterne til bedre at administrere deres lovpligtige kapitalkrav. I 2006 bestod markedsdeltagerne hovedsageligt af banker, forsikringsselskaber og hedgefonde, med banker som den mest betydelige markedsdeltager. Derudover er der pensionskasser, investeringsforeninger og virksomheder i mindre grad<sup>21</sup>

<sup>18</sup>ISDA Market Survey Data, 1987-2010. Lavet 30. juni 2010

<sup>19</sup>Securities Industry and Financial Markets Association Statistics, Q2 2011

<sup>20</sup><http://www.bloomberg.com/apps/news?pid=newsarchive&sid=a0W1VTiv9q2A>

<sup>21</sup>BBA Credit Derivatives Report 2006

## 2.3 Kredit begivenhed - Fallit

For at kunne forstå kreditrisiko, er det vigtigt at forstå, hvad det er, der menes, når der bliver sagt fallit. Ordet fallit bliver generelt brugt, hvor det ville være mere korrekt at kalde det for en kreditbegivenhed. En kreditbegivenhed er det juridisk korrekte ord, for en begivenhed der udløser CDS'en. For at få en ide om hvad der gælder som en kreditbegivenhed, er der her nedenunder en tabel<sup>22</sup>, der beskriver de mest almindelige kreditbegivenheder. Tabellen er delt ind i *hard* og *soft*. *Hard* betyder at det er alt gælden der forfalder. Det eneste *soft* tilfælde der er, er restrukturerings, her er det ikke sikkert at værdien af referenceaktivet bliver mindre værd.

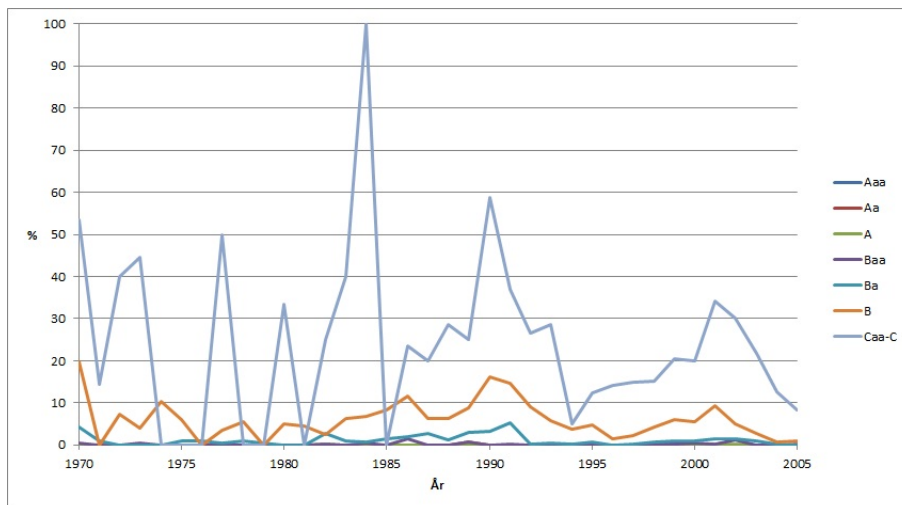
| Credit event            | Hard or soft | Description                                                                                                                                                                         |
|-------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bankruptcy              | Hard         | Corporate becomes insolvent or is unable to pay its debts. The bankruptcy event is not relevant for sovereign issuers.                                                              |
| Failure to pay          | Hard         | Failure to the reference entity to make due payments, taking into account some grace period.                                                                                        |
| Obligation acceleration | Hard         | Obligations have become due and payable earlier than they would have been due to default or other and have been accelerated. This event is used mostly in certain emerging markets. |
| Obligation default      | Hard         | Obligations have become due and payable prior to maturity. This event is hardly ever used.                                                                                          |
| Repudiation/moratorium  | Hard         | A reference entity or government authority rejects or challenges the validity of the obligations. Used in emerging market sovereign CDS.                                            |
| Restructuring           | Soft         | Changes in the debt obligations of the reference creditor but excluding those that are not associated with credit deterioration such as a renegotiation of more favourable terms.   |

Tabel 2.1: Beskrivelse af de mest almindelige og mest brugte kredit begivenheder[14]

Antallet af fallitter inden for en specifik periode kan variere rigtig meget over tid. Dette er illustreret i figur 2.3, hvor det ses, at antallet af fallitter kan være mange et år og få et andet. Det kan desuden ses af figuren, at rating, og derved kreditrisiko, hænger sammen med antallet af fallitter. For virksomheder med Moody's Caa-C rating, varierer antallet af fallitter meget fra år til år. I 1975 var der, fx ingen der gik fallit, mens det i 1984 var alle der gik fallit. Generelt kan det ses, at en dårligere rating, og derved implicit højere kreditrisiko, fører til flere fallitter. Hvis man fx kigger på et års fallitter,

<sup>22</sup>O'Kane[14], p. 87

så har der siden 1920 ikke været en eneste fallit inden for et år hos en Moody's AAA rated virksomhed. Man skal dog huske på at dette er historik og ikke er en garanti for at en virksomhed der rated AAA ikke kan gå fallit inden for et år.



Figur 2.3: Et års fallitandele efter Moody's rating klasser. Perioden 1970-2005[18]

Det er naturligt at jo længere tidshorisont des større bliver sandsynligheden for at en virksomhed går fallit. Dette kan ses i tabel 2.2 der viser den akkumulerede fallitsandsynlighed for virksomheder. Igen kan man se, at der kan være stor forskel i den akkumulerede fallitsandsynlighed alt afhængig af hvilken rating et firma har.

| Rating            | Kumulative fallit sandsynlighed (%) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                   | År 1                                | År 2  | År 3  | År 4  | År 5  | År 6  | År 7  | År 8  | År 9  | År 10 |
| Aaa               | 0.00                                | 0.00  | 0.00  | 0.04  | 0.09  | 0.14  | 0.20  | 0.21  | 0.21  | 0.21  |
| Aa                | 0.01                                | 0.02  | 0.05  | 0.13  | 0.20  | 0.26  | 0.29  | 0.33  | 0.35  | 0.41  |
| A                 | 0.02                                | 0.11  | 0.27  | 0.42  | 0.56  | 0.72  | 0.85  | 1.00  | 1.14  | 1.24  |
| Baa               | 0.21                                | 0.60  | 1.08  | 1.65  | 2.22  | 2.77  | 3.28  | 3.72  | 4.11  | 4.55  |
| Ba                | 1.31                                | 3.61  | 6.34  | 8.97  | 11.13 | 12.94 | 14.49 | 15.81 | 16.90 | 17.79 |
| B                 | 5.69                                | 12.12 | 17.59 | 21.77 | 25.12 | 27.68 | 29.56 | 30.78 | 31.56 | 32.09 |
| Caa-C             | 20.98                               | 30.27 | 36.12 | 39.50 | 41.23 | 42.15 | 42.59 | 42.88 | 43.08 | 43.26 |
| Investment-Grade  | 0.08                                | 0.23  | 0.44  | 0.69  | 0.93  | 1.16  | 1.37  | 1.55  | 1.72  | 1.88  |
| Speculative-Grade | 5.15                                | 10.11 | 14.48 | 17.94 | 20.63 | 22.70 | 24.28 | 25.43 | 26.26 | 26.87 |
| All Corporates    | 1.74                                | 3.48  | 5.06  | 6.37  | 7.43  | 8.29  | 8.97  | 9.50  | 9.91  | 10.26 |

Tabel 2.2: Gennemsnitlig kumulative fallit sandsynligheder. Beregnet månedligt i perioden 1983-2005[18]

## 2.4 Recovery rate og loss given default

Når der opstår en kreditbegivenhed hos en virksomhed, så betyder det ikke, at alt, hvad man har haft af udestående hos den virksomhed, går tabt. Afhængig af forskellige faktorer, bla. hvilken kredit begivenhed det drejer sig om, får man mellem 0% og 100% af sit udestående tilbage. Den andel man får tilbage kaldes for *recovery rate* og vil i denne opgave blive betegnet med  $R$ .

Der findes flere måder at opgøre *recovery* på. To måder at gøre det på, er *recovery* af markedsværdi og af pålydende værdi<sup>23</sup>. Ved *recovery* af markedsværdi ser man på, værdien af aktivet inden fallit og hvad det er bagefter. På den måde kan man se hvor meget *recovery* der er. Ved *recovery* af pålydende værdi ser man på, hvordan en obligation priser efter en fallit i fht. til den pålydende værdi. Dette giver dog kun det reelle tab, hvis obligationen inden handlede til kurs pari, men fordelene er, at man kun behøver at kende værdien af obligationen efter fallitten.

For at få et overblik over hvordan *recovery* kan varierer, er der herunder en tabel der viser empirisk *recovery* data i fht. lån og obligationer.

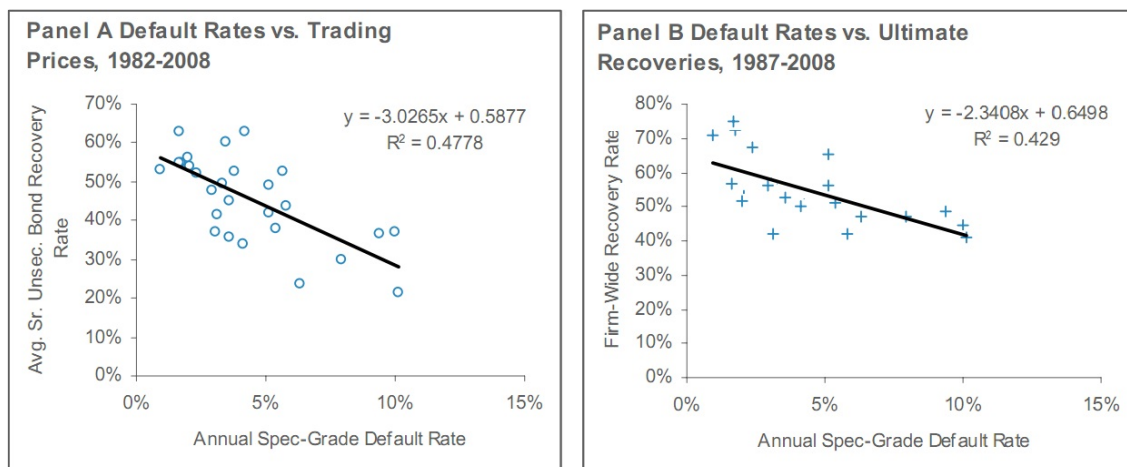
| Seniority of Debt   | Debt type | Number of issues | Median recovery (%) | Mean recovery (%) | Standard deviation (%) |
|---------------------|-----------|------------------|---------------------|-------------------|------------------------|
| Senior secured      | Loans     | 155              | 73.00               | 68.50             | 24.4                   |
| Senior unsecured    | Loans     | 28               | 50.50               | 55.00             | 28.4                   |
| Senior secured      | Bonds     | 220              | 54.49               | 52.84             | 23.1                   |
| Senior unsecured    | Bonds     | 910              | 42.27               | 34.89             | 26.6                   |
| Senior subordinated | Bonds     | 395              | 32.35               | 30.17             | 25.0                   |
| Subordinated        | Bonds     | 248              | 31.96               | 29.03             | 22.5                   |
| All bonds and loans |           | 1909             | 40.05               | 34.31             | 24.9                   |

Tabel 2.3: Empirisk estimerede *recovery rates*, Altman[22]

*Recovery* er ikke alene påvirket af typen af gæld og fallit, *recovery* kan også være korreleret med det generelle niveau i antal af fallitter. Rent intuitivt er tanken, at hvis det generelt går dårligt i økonomien, så er der generelt mindre købekraft og derfor vil *recovery* være mindre når et firma går fallit. Samtidig er tanken at når det generelt går dårligt i økonomien, så er der flere der går fallit. Dette underbygges empirisk fra flere steder bl.a. Altman[22] og Moody's, som jeg herunder har to grafer fra. De viser, at der er en negativ sammenhængen mellem fallitter og *recovery*.

---

<sup>23</sup>Lando[4]



Figur 2.4: Korrelation mellem fallit og *recovery*[23]

Det er ikke alt tid at man ser på hvad *recovery* er. I denne opgave vil det oftest blive set på værdien der bliver tabt, som betegnes som *loss given default* (LGD), som angiver den del der bliver tabt i tilfælde af en fallit. Sammenhængen mellem *recovery* og LGD er

$$LGD = 1 - R$$

## 2.5 Wrong-way risk

Jeg vil i denne sektion, se på hvad *wrong-way risk* er, og hvorfor det er et vigtigt begreb, når det drejer sig om modpartsrisiko.

*Wrong-way risk* er det udtryk, man bruger til at indikere den uønskede afhængighed mellem ens mulige tab og ens modparts kreditkvalitet<sup>24</sup>. Når det drejer sig om BR-CVA-CDS, så vil det for investors side betyde, at fx en forringelse af kreditkvaliteten hos modparten medfører en lavere værdi for CDS kontrakten. Så ikke alene siger sandsynligheden for at investor ikke modtager den fulde værdi fra sin modpart i tilfælde af hans fallit. Ses dette i fht. at han så skal ud og indgå i den samme kontrakt med en ny modpart, vil det være dyrere. Et eksempel på dette kunne være at en systemisk vigtig bank i et land, har indgået i en CDS kontrakt, hvor referencen er meget eksponeret i det pågældende land. Hvis den systemisk vigtige bank får forringet sin kredit kvalitet, kan dette have negativ indflydelse på værdien af CDS, og dermed være med til at øge krediteksponeringen.

På samme måde som der eksisterer *wrong-way risk*, må der også eksisterer *right-way risk*, hvor afhængigheden mellem det mulige tab og kreditkvaliteten er favorabelt<sup>25</sup>.

<sup>24</sup>[6], p. 203

<sup>25</sup>[6], p. 203



## 2.6 Notation og definitioner

Som afslutningen på introduktionen til kreditderivater, vil jeg i dette afsnit komme gennemgå de indledende definitioner og den notation, som jeg vil bruge igennem opgaven.

Til at starte med skal jeg have styr på de forskellige parter, som indgår i en aftale. I en CDS kontrakt, som jeg vil beskæftige mig med i denne opgave, er der tre parter. En investor, en reference enhed og en modpart. Et eksempel på dette kunne være rederiet J. Lauritzen (investor) der gerne vil beskytte sig mod et fallit af Royal Dutch Shell (reference enhed) og derfor køber en CDS på Royal Dutch Shell hos Danske Markets (modpart). For at gøre det overskueligt i formlerne gennem opgaven, vil jeg betegne de tre parter med et fodnote tal, som beskrevet nedenunder.

$$\begin{aligned} \textit{Investor} &= "0" \\ \textit{Reference} &= "1" \\ \textit{Modpart} &= "2" \end{aligned}$$

Hele opgaven igennem, ser jeg ud fra investorens synsvinkel.

Udover at finde ud af hvem de enkelte parter i aftalen er, er det også nødvendigt at holde styr på fallittidspunkterne for parterne. For de tre parter, investoren, reference enheden og modparten, vil det være hhv.  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  og  $\tau_2$ . Dvs. at tidspunktet for et fallit hos fx investor bliver betegnet  $\tau_0$ . Tidspunktet  $T$ , er det tidspunkt hvor den underliggende kontrakt udløber, og derfor også det sidste tidspunkt det er nødvendigt at kigge på.

For sandsynligheden for en fallit på tidspunkt  $t$  givet at der ikke har været fallit på tidspunkt  $t'$ , hvor  $t \geq t'$ , er notationen

$$\mathbb{Q}(\tau_i > t | \tau_i > t') = \mathbb{Q}(t', t)$$

og for specialtilfældet hvor  $t' = 0$  er

$$\mathbb{Q}(0, t) = \mathbb{Q}(\tau_i > t)$$

Prisfastsættelsen i denne opgave sker i sandsynlighedsrummet  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{Q})$ .  $\mathcal{G}_t$  er filtreringen af informationen fra hele markedet inklusiv det risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$  og fallitter.  $\mathcal{F}_t$  og  $\mathcal{H}_t$  er underfiltreringer af  $\mathcal{G}_t$ .  $\mathcal{F}_t$  beskriver al information i markedet uden kredit begivenheder og  $\mathcal{H}_t$  er filtreringen genereret af fallitter.  $\mathcal{H}_t = (\{\tau_0 \leq u\} \vee \{\tau_0 \leq u\} \vee \{\tau_0 \leq u\} : u \leq t)$ .

Jeg vil igennem opgaven bruge følgende notation  $\mathbb{E}_u(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{G}_u)$

$NV(\cdot)$  er nutidsværdien af de fremtidige forpligtigelser/betalingsstrømme.

$D(u, s)$  er prisen for en nulkupon obligation på tidspunkt  $u$ , med udløb på tidspunkt  $s$ .

$C_f(u, s)$  er værdien af betalinger mellem  $u$  og  $s$  diskonteret tilbage til tidspunkt  $u$ . Jeg vil i opgaven bruge  $C_f$ , når der er tale om egentlige betalinger/*cash flow*. Når det

i højere grad handler om et produkt, som jo bare er værdien af en betaling, vil jeg bruge  $\Pi(u, s)$  der også er værdien af betaling mellem  $u$  og  $s$  diskonteret tilbage til tidspunkt  $u$ . Den tilsvarende tilbagediskonterede værdi hvor der er taget højde for at de to parter der har indgået handlen kan gå fallit, betegner jeg med  $\Pi^D(u, s)$

## 3 Bilateral modpartsrisiko

Formålet med dette afsnit er, at komme frem til et generelt udtryk for værdien af bilateral modpartsrisiko. Først vil der være en introduktion til bilateral modpartsrisiko. Der vil så blive set nærmere på det *cash flow* der er, for et bilateralt produkt i tilfælde af en fallit. Ud fra dette vil der blive udledt den generelle formel for prisfasættelse med bilateral modpartsrisiko. Dette vil til sidst blive brugt til at udlede den generelle formel for værdien af bilateral modpartsrisiko.

### 3.1 Hvad er bilateral modpartsrisiko

For at forstå hvad der menes med bilateral modpartsrisiko, er det først nødvendigt at forstå, hvad der menes med modpartsrisiko. Modpartsrisiko er risikoen for at en part i en kontrakt ikke modtager, det den anden part har lovet at betale. Dette kendes fx fra obligationer, hvor køberen af en obligation har risikoen for at udstederen af en obligation ikke betaler. I dette tilfælde er der unilateral modpartsrisiko, da det kun er ejeren af obligationen og ikke udsteder, der risikerer at miste sine penge. Når det handler om bilateral modpartsrisiko, så handler det om kontrakter, hvor begge parter risikerer tab, hvis modparten går fallit. Eksempler på sådanne produkter er CDS kontrakter, renteswaps, swaptioner, etc.. Hvis man ser på fx CDS kontrakten, så kan værdien af kontrakten bliver både positiv og negativ for investor og modpart i løbet af kontraktens løbetid. Værdien af CDS kontrakten afhænger af sandsynligheden for at referencen går fallit. Dette betyder, at kontrakten kan have positiv værdi for en af parterne på tidspunktet, hvor den anden part går fallit, hvilket kan have betydning for værdien af kontrakten.

For en mere officiel definition er her ifølge Basel II<sup>26</sup>, Annex IV, 2/A definition af modpartsrisiko

Counterparty Credit Risk (CCR) is the risk that the counterparty to a transaction could default before the final settlement of the transaction's cash flows. An economic loss would occur if the transactions or portfolio of transactions with the counterparty has a positive economic value at the

---

<sup>26</sup>Basel II er den anden af Basel aftalerne, der er anbefalinger lovgivning og regulering af banksektoren, lavet af Basel komiteen

time of default.

Den forventede værdi af et produkt på tidspunkt  $t$ , er den forventede værdi af produktet, hvor der ikke tages højde for modpartsrisiko, minus en justering for modpartsrisikoen, hvilket kaldes *credit value adjustment* (CVA), begge på tidspunkt  $t$ . Når CVA bliver brugt bilateralt, bliver det kaldt *bilateral risk credit value adjustment* (BR-CVA). Notationen bliver derfor

$$\mathbb{E}_t(\Pi^D(t, T)) = \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) - BR - CVA$$

Udtrykket for BR-CVA bliver derfor

$$BR - CVA = \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) - \mathbb{E}_t(\Pi^D(t, T)) \quad (3.1)$$

Man kan sige, at BR-CVA er den værdi en handel, hvor der ikke bliver taget højde for modpartsrisiko, skal have for netop at tage højde for modpartsrisiko.

Før finanskrisen blev CVA betragtet unilateralt<sup>27</sup>, dvs. at man betragtede sig selv som værende risikofri. Dette betyder dog, at der opstår et problem, når priserne hos de to parter ikke vil blive ens, da begge partnere i så fald ville kræve et tillæg til den risikofrie pris, og man ville derfor få en forskel i de to priser der var  $CVA_0 + CVA_2$ . Dette er tilfældet med BR-CVA. Hvis BR-CVA har værdien  $X$  for den ene part vil værdien for den anden part være  $-X$ . BR-CVA er ikke noget, der først er blevet set på efter finanskrisen, som det kan ses i nedenstående citat, er det bl.a. nævnt i Basel II, Annex IV, 2/A.

Unlike a firm's exposure to credit risk through a loan, where the exposure to credit risk is unilateral and only the lending bank faces the risk of loss, CCR creates a bilateral risk of loss: the market value of the transaction can be positive or negative to either counterparty to the transaction. The market value is uncertain and can vary over time with the movement of underlying market factors.

## 3.2 Cash flow ved fallit

Når der ses på bilateral modpartsrisiko, ses der på betydningen af, at enten investoren eller modparten går fallit inden den underliggende kontrakts udløb, dvs.  $\tau_0 \leq T$  eller  $\tau_2 \leq T$ . Derfor definere jeg

$$\tau = \min(\tau_0, \tau_2) \quad (3.2)$$

Hvis  $\tau \leq T$  så er der en fallit hos enten investoren eller modparten før den underliggende kontrakt er udløbet.

---

<sup>27</sup>Brigo lecture notes[21]

Hvis  $\tau > T$  betyder det at hverken investor eller modpart er gået fallit i kontraktens løbetid, og at de derfor begge kan opfylde deres forpligtigelser ift. den underliggende kontrakt. Det ændrer sig i det tilfælde hvor  $\tau \leq T$ . I dette tilfælde vil enten investoren eller modparten ikke kunne være i stand til at opfylde sine forpligtigelser. Det er vigtigt, at have styr på hvem, der først går fallit og om  $NV(\cdot)$  er positiv eller negativ. Dvs. at

$$NV(\tau_i) = \mathbb{E}_{\tau_i}(C_f(\tau_i, T)), \quad i = 0, 2$$

Et eksempel kunne være, at investor har positiv værdi på sin CDS. Hvis investor går fallit, så vil han modtage den fulde værdi fra sin modpart, men hvis det er modparten der går fallit, så vil investor kun modtage *recovery* fraktionen af værdien af CDS kontrakten. I nedenstående tabel kan man se de fire muligheder der opstår.

|                    | $\tau_0 = \tau < T$                                           | $\tau_2 = \tau < T$                                          |
|--------------------|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $NV(\cdot) \leq 0$ | Investors <i>cash flow</i> er $-R_0 NV(\tau_0)$ til modparten | investors <i>cash flow</i> er $-NV(\tau_2)$ til modparten    |
| $NV(\cdot) > 0$    | Investors <i>cash flow</i> er $NV(\tau_0)$ fra modparten      | investors <i>cash flow</i> er $R_2 NV(\tau_2)$ fra modparten |

Her skal man lige lægge mærke til, at der ikke tages højde for en *cure* periode. En *cure* periode er perioden mellem fallit og tidspunktet en betalingen falder. I det tilfælde at der er en *cure* periode, kan det betyde, at den part der ikke går fallit til som den første, går fallit i løbet af *cure* perioden, hvilket der i så fald også skal tages højde for i beregningerne.

Det er desuden værd at lægge mærke til, at i tilfældet med en CDS hvor  $\tau_1 < \min\{\tau, T\}$  så betyder det at  $NV(t) = 0, \forall t > \tau_1$

Jeg vil nu definere de seks tilfælde der er af kombinationer af fallitter hos investoren og modparten og udløb af den underliggende kontrakt

$$\begin{aligned} A &= \{\tau_0 \leq \tau_2 \leq T\} & C &= \{\tau_2 \leq \tau_0 \leq T\} & E &= \{T \leq \tau_0 \leq \tau_2\} \\ B &= \{\tau_0 \leq T \leq \tau_2\} & D &= \{\tau_2 \leq T \leq \tau_0\} & F &= \{T \leq \tau_2 \leq \tau_0\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Her er det vigtigt at bemærke at mængderne  $A, \dots, F$  er disjunkte og tilsammen udgør de hele udfaldsrummet.

### 3.3 Den generelle formel for prisfastsættelses med bilateral modpartsrisiko

Jeg vil i denne sektion udlede en den generelle formel for prisfastsættelse givet bilateral modpartsrisiko. Hvilket jeg så sammen med ligning (3.1), kan bruge til at finde BR-CVA.

### 3.3.1 Værdien af et produkt med bilateral modpartsrisiko

Produktets *cash flowet* kan deles op i fem tilfælde.

1. Det første tilfælde er når der ikke er nogen fallit hos investor eller hos modpart, hvilket vil sige i tilfældene  $E$  og  $F$ . Værdien af kontrakten på tidspunkt  $t$  er da den tilbage diskonterede værdi af betalingerne, dvs.  $C_f(t, T)$
2. Andet og tredje tilfælde er når modparten går fallit som den første, dvs. tilfældene  $C$  og  $D$ . Værdien af kontrakten på tidspunkt  $t$  er da betalinger op til fallitten,  $C_f(t, \tau_2)$  og betalingerne ved fallitten diskonteret tilbage til  $t$ . Værdien af betalinger ved fallitten afhænger af om  $NV(\tau_2)$  er positiv eller negativ
  - (a) Hvis  $NV(\tau_2) > 0$  modtager investor kun *recovery* værdien af  $NV(\tau_2)$ , dvs.  $R_2 NV(\tau_2)$
  - (b) Hvis  $NV(\tau_2) \leq 0$  betaler investor  $NV(\tau_2)$
3. Fjerde og femte tilfælde er, når investor går fallit som den første, dvs. tilfældene  $A$  og  $B$ . Værdien af kontrakten på tidspunkt  $t$  er da betalinger op til fallitten  $C_f(t, \tau_0)$ , og værdien af betalingerne ved fallitten diskonteret tilbage til  $t$ . Værdien af betalingerne ved fallitten, afhænger af om  $NV(\tau_0)$  er positiv eller negativ
  - (a) Hvis  $NV(\tau_0) > 0$  modtager investor  $NV(\tau_0)$
  - (b) Hvis  $NV(\tau_0) \leq 0$  betaler investor kun *recovery* værdien af  $NV(\tau_0)$ , dvs.  $R_0 NV(\tau_0)$

Jeg får derfor at den tilbagediskonterede værdi af alle fremtidige betalinger bliver givet ved følgende ligning

$$\begin{aligned} \Pi^D(t, T) = & 1_{E \cup F} C_f(t, T) \\ & + 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) (R_2 (NV(\tau_2))^+ - (-NV(\tau_2))^+)) \\ & + 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) ((NV(\tau_0))^+ - R_0 (-NV(\tau_0))^+)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Det ses nemt at den forventede værdi af (3.4) giver

$$\mathbb{E}_t(\Pi^D(t, T)) = \mathbb{E}_t(1_{E \cup F} C_f(t, T)) \quad (3.5a)$$

$$+ \mathbb{E}_t(1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) (R_2 (NV(\tau_2))^+ - (-NV(\tau_2))^+))) \quad (3.5b)$$

$$+ \mathbb{E}_t(1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) ((NV(\tau_0))^+ - R_0 (-NV(\tau_0))^+))) \quad (3.5c)$$

Ligning (3.5) kan omskrives til den generelle formel for prisfastsættelses med bilateral modpartsrisiko givet, at der på tidspunkt  $t$  endnu ikke har været et fallit.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(\Pi^D(t, T)) = & \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) \\ & + \mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+) \\ & - \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \end{aligned} \quad (3.6)$$

At ligning (3.5) er det samme som (3.6) er ikke helt intuitivt. Dette skal selvfølgelig bevises, hvilket sker i næste undersektion.

### 3.3.2 Bevis for den generelle formel for prisfastsættelses med bilateral modpartsrisiko

For at bevise at ligning (3.5) og (3.6) er de samme, tages der udgangspunkt i ligning (3.6).

Først bruges en omskrivning af  $\Pi(t, T)$ . Da det vides at ligningerne (3.3) dækker alle de mulige scenarier der kan ske ift. fallitter, vides der også følgende

$$\begin{aligned}\Pi(t, T) &= C_f(t, T) \\ &= 1_{A \cup B} C_f(t, T) + 1_{C \cup D} C_f(t, T) + 1_{E \cup F} C_f(t, T)\end{aligned}\quad (3.7)$$

Ligning (3.6) kan omskrives så

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t(\Pi^D(t, T)) &= \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) + \mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+) \\ &\quad - \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \\ &= \mathbb{E}_t(\Pi(t, T) + LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+ \\ &\quad - LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Her indsætter så ligning (3.7). Der laves en omskrivning hvor de dele, der hver især har med  $A \cup B$ ,  $C \cup D$  og  $E \cup F$  at gøre jeg samles hver for sig.

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}_t(1_{A \cup B} C_f(t, T) + 1_{C \cup D} C_f(t, T) + 1_{E \cup F} C_f(t, T) \\ &\quad + LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+ \\ &\quad - LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \\ &= \mathbb{E}_t(1_{E \cup F} C_f(t, T) \\ &\quad + 1_{A \cup B} C_f(t, T) + LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+ \\ &\quad + 1_{C \cup D} C_f(t, T) - LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \\ &= \mathbb{E}_t(1_{E \cup F} C_f(t, T))\end{aligned}\quad (3.9a)$$

$$+ \mathbb{E}_t(1_{A \cup B} C_f(t, T) + LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+) \quad (3.9b)$$

$$+ \mathbb{E}_t(1_{C \cup D} C_f(t, T) - LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \quad (3.9c)$$

For lettere at kunne overskue beviset, kigges nu individuelt på de enkelte dele af ligning (3.9). Jeg starter med situationen  $A \cup B$ . Det vides derfor, at  $\tau_0 < T$ . Det følger derfor at

$$1_{A \cup B} C_f(t, T) = 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) C_f(\tau_0, T)) \quad (3.10)$$

Først ses der på det, der står inden for forventningstegnet i (3.9b), men betinger med den information, der er til rådighed på tidspunkt  $\tau_0$

$$\mathbb{E}_{\tau_0}(1_{A \cup B} C_f(t, T) + LGD_0 1_{A \cup B} D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+)$$

Her indsættes (3.10). Desuden skal det huskes at  $LG D_i = 1 - R_i$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\tau_0} (1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) C_f(\tau_0, T)) + (1 - R_0) 1_{A \cup B} D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+) \\ &= \mathbb{E}_{\tau_0} (1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) C_f(\tau_0, T))) + \mathbb{E}_{\tau_0} ((1 - R_0) 1_{A \cup B} D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+) \end{aligned}$$

Da der er betinget med informationen på tidspunkt  $\tau_0$ , ved jeg at  $[-NV(\tau_0)]^+ = [-\mathbb{E}_{\tau_0}(C_f(\tau_0, T))]^+$  er en kendt værdi, det samme er  $1_{A \cup B}$ ,  $D(t, \tau_0)$  og  $R_0$ , hvilket igen betyder, at den eneste del som  $\mathbb{E}_{\tau_0}$  har betydning for er  $C(\tau_0, T)$ , hvilket igen betyder at

$$= 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) \mathbb{E}_{\tau_0}(C_f(\tau_0, T))) + (1 - R_0) 1_{A \cup B} D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+$$

Da  $1_{A \cup B}$  indgår i alle led, kan denne sættes uden for parentes. Desuden er  $\mathbb{E}_{\tau_0}(C_f(\tau_0, T)) = NV(\tau_0)$ , så

$$\begin{aligned} &= 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) NV(\tau_0) + D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+ - R_0 D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+) \\ &= 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) (NV(\tau_0) + [-NV(\tau_0)]^+) - R_0 D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+) \end{aligned}$$

Det er her nødvendigt at se på de to led  $NV(\tau_0) + [-NV(\tau_0)]^+$ . Hvis

$$NV(\tau_0) \leq 0 \Rightarrow \underbrace{NV(\tau_0)}_{-} + \underbrace{[-NV(\tau_0)]^+}_{+} = 0$$

Hvis

$$NV(\tau_0) > 0 \Rightarrow \underbrace{NV(\tau_0)}_{+} + \underbrace{[-NV(\tau_0)]^+}_0 = NV(\tau_0)$$

Dvs. at

$$NV(\tau_0) + [-NV(\tau_0)]^+ = [NV(\tau_0)]^+$$

Derfor er

$$\begin{aligned} &= 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) [NV(\tau_0)]^+ - R_0 D(t, \tau_0) [-NV(\tau_0)]^+) \\ &= 1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) ([NV(\tau_0)]^+ - R_0 [-NV(\tau_0)]^+)) \end{aligned}$$

Da  $t < \tau_0$  gælder det at  $\mathbb{E}_t(\mathbb{E}_{\tau_0}(\cdot)) = \mathbb{E}_t(\cdot)$ , så (3.9b) udtrykkes som

$$\mathbb{E}_t(1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) ([NV(\tau_0)]^+ - R_0 [-NV(\tau_0)]^+))) \quad (3.11)$$

Der ses nu på situationen for  $C \cup D$ . Det vides derfor at  $\tau_2 < T$ . Det følger derfor ligesom med (3.9b) at

$$1_{C \cup D} C_f(t, T) = 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) C_f(\tau_2, T)) \quad (3.12)$$



Der ses nu på det, der står inden for forventet tegnet i (3.9c). Det er stort set de samme argumenter, som blev brugt for (3.9b) bortset fra, at der nu betinges med den information, der findes på tidspunkt  $\tau_2$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\tau_2}(1_{C \cup D} C_f(t, T) - LGD_2 1_{C \cup D} D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+) \\
&= \mathbb{E}_{\tau_2}(1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) C_f(\tau_2, T)) - (1 - R_2) 1_{C \cup D} D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+) \\
&= 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) \mathbb{E}_{\tau_2}(C_f(\tau_2, T)) + (R_2 - 1) D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+) \\
&= 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) NV(\tau_2) - D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+ + R_2 D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+) \\
&= 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) (NV(\tau_2) - [NV(\tau_2)]^+) + R_2 D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+)
\end{aligned}$$

Det er her nødvendigt at se på de to led  $NV(\tau_2) - [NV(\tau_2)]^+$ . Hvis

$$NV(\tau_2) \leq 0 \Rightarrow \underbrace{NV(\tau_2)}_{-} - \underbrace{[NV(\tau_2)]^+}_0 = NV(\tau_2)$$

Hvis

$$NV(\tau_2) > 0 \Rightarrow \underbrace{NV(\tau_2)}_{+} - \underbrace{[NV(\tau_2)]^+}_{-} = 0$$

Dvs. at

$$NV(\tau_2) - [NV(\tau_2)]^+ = [NV(\tau_2)]^- = -[-NV(\tau_2)]^+$$

Derfor fås at

$$\begin{aligned}
&= 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) + D(t, \tau_2) (-[-NV(\tau_2)]^+) + R_2 D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+) \\
&= 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) - D(t, \tau_2) [-NV(\tau_2)]^+ + R_2 D(t, \tau_2) [NV(\tau_2)]^+) \\
&= 1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) - D(t, \tau_2) ([-NV(\tau_2)]^+ + R_2 [NV(\tau_2)]^+))
\end{aligned}$$

På samme måde som ovenfor har jeg at  $t < \tau_2$  og derfor gælder det at  $\mathbb{E}_t(\mathbb{E}_{\tau_0}(\cdot)) = \mathbb{E}_t(\cdot)$ , kan jeg udtrykke (3.9c) som

$$\mathbb{E}_t(1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) - D(t, \tau_2) ([-NV(\tau_2)]^+ + R_2 [NV(\tau_2)]^+))) \quad (3.13)$$

Ligning (3.9) kan nu omskrives som

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t(1_{E \cup F} C_f(t, T)) \\
&+ \mathbb{E}_t(1_{C \cup D} (C_f(t, \tau_2) - D(t, \tau_2) ([-NV(\tau_2)]^+ + R_2 [NV(\tau_2)]^+))) \\
&+ \mathbb{E}_t(1_{A \cup B} (C_f(t, \tau_0) + D(t, \tau_0) ([NV(\tau_0)]^+ - R_0 [-NV(\tau_0)]^+))) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Da dette udtryk er det samme som ligning (3.5), er den generelle formel for prisfastsættelse med bilateral modpartsrisiko bevist.

### 3.4 BR-CVA

Jeg har nu de dele, der skal bruge for at udregne BR-CVA. Ved at indsætte den generelle formel for prisfastsættelses med bilateral modpartsrisiko (3.6) i ligning (3.1), får jeg at

$$\begin{aligned}
BR - CVA(t, T) &= \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) - \mathbb{E}_t(\Pi^D(t, T)) \\
&= \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) - \left( \mathbb{E}_t(\Pi(t, T)) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+) \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \right) \\
&= - \mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+) \\
&\quad + \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Tidspunktet for udløbet af den underliggende kontrakt  $T$ , indgår ikke direkte, men indgår derimod inddirekte via  $A \cup B$  og  $C \cup D$ , og  $NV(\cdot)$  hvis  $T$  har indflydelse på denne.  $LGD_i$  kan både være stokastisk og deterministisk. I tilfældet hvor  $LGD_i$  er deterministisk, kan den selvfølgelig sættes uden for forventningstegnet.

Værdien af (3.15) kan både være positiv og negativ, det afhænger i højgrad af kredit kvaliteten af de to parter, og værdien af den underliggende kontrakt. Værdien er også ens for de parter, modsat ved unilateral modpartsrisiko, hvor begge parter har hver deres tillæg for at handle med den anden part. Det betyder, at der ikke er symmetri for unilateral modpartsrisiko, men der er symmetri for bilateral modpartrisiko.

## 4 Credit default swap

I dette afsnit vil der blive fundet en formel for værdien af en CDS kontrakt. Desuden beskrives udviklingen i markedet for CDS kontrakter, *cash flowet* og den risikoneutrale prisfastsættelse af CDS kontrakten.

### 4.1 Hvad er credit default swaps

En CDS er et kreditderivat og kan betragtes som en slags forsikring<sup>28</sup> mod, at et firma går fallit. En CDS kontrakt er en bilateral kontrakt, der typisk bliver solgt over-the-counter (OTC), hvilket vil sige, at den ikke bliver handlet på en børs, men derimod bliver handlet direkte mellem to parter, som i dette speciale vil blive betegnet som investor og modpart. I tilfældet hvor investor køber en CDS kontrakt, så overføres der kreditrisiko, fra investor til modparten. Investor betegnes her som *protection buyer* og modpart som *protection seller*. Der bruges desuden betegnelsen *payer* CDS om CDS kontrakten set fra *protection buyers* side. Mens en *receiver* CDS, er CDS kontrakten set fra *protection sellers* side.

Prisen for den overførelse af risiko, sker ved, at køberen betaler en præmie, denne kan både være i form af et *upfront* beløb, en løbende præmie eller begge dele. I denne opgav bruges en løbende betaling. Det, som køberen modtager for sin præmie er, at i tilfælde af en fallit hos referencen modtager køberen tabet af værdien på den underliggende reference. Referencen kan både være en virksomhed eller en stat, og referenceaktivet kan enten være obligationer eller lån.

Pga. af forskellene i betalingsstrømmene mellem en CDS kontrakts to parter, den ene betalingsstrøm en løbende betaling og den anden en betaling ved fallit, siger man at en CDS kontrakt har to ben, et præmieben og et beskyttelsesben.

Da en CDS kontrakt er et OTC produkt kan der være store forskelle i specifikationerne fra en CDS kontrakt til en anden. Størstedelen af alle CDS kontrakter følger dog definitioner fra International Swaps and Derivatives Association (ISDA), der løbende overvåger og udvikler definitionerne. Fordelen ved at følge ISDAs definitioner er, at de med deres standarder har været med til at skabe den likviditet, der i dag er i markedet for CDS kontrakter<sup>29</sup>. Jeg vil i denne opgave beskrive en standard CDS kontrakt. Med

---

<sup>28</sup>Det er dog ikke en forsikring. Forklaring følger senere.

<sup>29</sup>O’Kane[14], p. 81

standard kontrakt menes der en kontrakt med bestemte specifikationer, der er den mest likvide i markedet.

I dette speciale tages der udgangspunkt i en standard CDS kontrakt som beskrevet i O’Kane[14]<sup>30</sup>. Standard kontrakten dækker over en række definitioner lavet af ISDA. Nedenfor er en liste over handelsoplysninger der skal optræde i en CDS kontrakt.

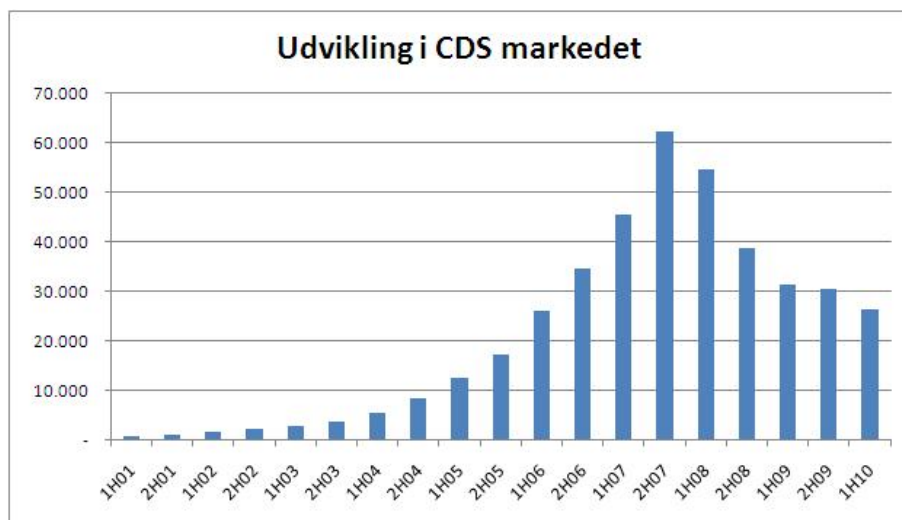
- Nominelt beløb
- Løbetid
- Præmiebetaling
- Betalingsfrekvens (kvartårige, halvårige, etc. betalinger)
- Referenceaktiv (fx en 3% dansk stats obligation med udløb november 2021)
- Kreditbegivenheder (Hvilke kreditbegivenheder udløser CDS kontraktens beskyttelsesben)
- Fordringer og fordringskarakteristika
- Afregningsmetoder
- Leverbare obligationskategorier og leverbare obligationskarakteristika (type og karakteristika for passende gældspapir ved fysisk settlement)

CDS kontrakten, der blev introduceret i løbet af 90’erne, er i dag det mest almindelige kredit derivat. Udvikling af CDS kontrakten krediteres i dag hovedsageligt J.P. Morgan. Nedenfor ses en graf, hvor man kan se udviklingen af CDS markedet frem til første halvår 2010<sup>31</sup>. Det kan ses, at der frem til finanskrisens start var en voldsom vækst, hvor efter at den er faldet til det halve af, hvad den var på sit højeste.

---

<sup>30</sup>Efter O’Kane’s bog er skrevet, er der kommet en ny standard hvordan man laver CDS kontrakter. Man har løbende kontrakter hvor der betales 25, 100, 500 eller 1000[6] basispunkter, for at CDS kontraktens værdi skal blive nul ved start, laves der i en *upfront* betaling der korrigerer værdien.

<sup>31</sup>ISDA Market Survey Data, 1987-2010. Lavet 30. juni 2010



Figur 4.1: Figuren viser udviklingen i den totale udenstående for CDS kontrakter. Tallene er mia. USD.

Som nævnt i sektion 2.2, så kan faldet i høj grad skyldes, at en meget stor del af de CDS kontrakter, der blev handlet, ikke var til afdækning, men i stedet var spekulation. Da risikovilligheden generelt er faldet kan det være grunden til faldet i CDS markedet.

CDS kontrakten bliver ofte set som en forsikring mod fallit, dette er dog ikke helt rigtigt. Der er flere forskellige årsager til, at en CDS kontrakten ikke er en forsikring. Hvis man har tegnet en forsikring, så giver den en erstatning for det reelle tab, som man måtte have lidt. En CDS kontrakt derimod giver en ens betaling til alle, der ejer en CDS kontrakt med samme specifikation. Man behøver ikke at eje den beskyttede obligationen for at kunne købe en CDS kontrakt, hvilket betyder, at man ikke nødvendigvis behøver at have noget tab i tilfælde af en fallit. En CDS kontrakt, hvor køberen ikke ejer referenceaktivet, betegnes som en Naked Credit Default Swap. Eric Dinallo, tidligere superintendent of the New York State Insurance Department, estimerede i januar 2009 at op til 80% af alle CDS er Naked credit default swaps<sup>32</sup>. Desuden kan en forsikring opsiges løbende, mens en CDS er indgået for en bestemt periode, og hvis den skal lukkes før tid, risikerer man at skulle betale for nedlukningen. Grunden til, at man kan komme til at betale for en nedlukning skyldes, at hvis CDS kontrakten har negativ markedsværdi, for en part der gerne vil lukke kontrakten, vil den anden part gerne have kompensation for den negative markedsværdi. En nedlukning kan dog også betyde, at køber skal modtage penge fra sælger, dette sker, hvis CDS kontrakten har en positiv værdi.

<sup>32</sup><http://www.bloomberg.com/apps/news?pid=newsarchive&sid=a0W1VTiv9q2A>

## 4.2 Cash flow

En CDS kontrakt består som sagt af to ben, beskyttelsesbenet og præmiebenet. I denne sektion vil begge bens *cash flow* blive beskrevet og illustreret.

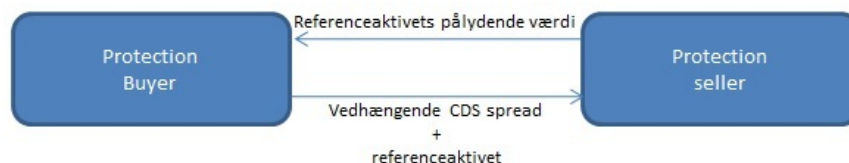
Beskyttelsesbenet består kun af én betaling, og betalingen er betinget af at referencen er gået fallit. Hvis der ikke har været en fallit, er der ikke nogen betaling på beskyttelsesbenet. I tilfældet af at der er en fallit, er der forskellige måder at opgøre betalingen på. Generelt, kan det siges, at betalingen er faldet referenceaktivets værdi.

Præmiebenet består af en række betalinger fra køberen af CDS kontrakten til sælgeren, som typisk vil falde kvartalsvis<sup>33</sup> indtil enten CDS kontraktens udløb eller indtil en fallit i den underliggende reference. *Spread'et* er af en størrelse, så den samlede værdi af CDS kontrakten ved indgåelse har en værdi på nul, hvilket vil sige at begge ben har den samme værdi. Nedenunder ses en figur over betalinger i tilfældet hvor der ikke er en fallit



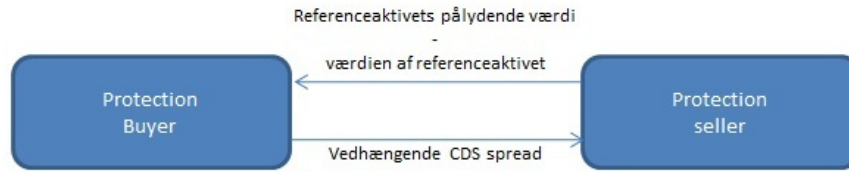
Figur 4.2: Betalingerne mellem køber og sælger af CDS kontrakten, givet at der ikke er et fallit

Hvis der sker en fallit udløses beskyttelsesbenet, dette betyder, at køberen skal modtage den tabte værdi på reference aktivet. Det kan enten være ved fysisk eller kontant afregning. Ved fysisk afregning afleverer køber referenceaktivet til sælger, og sælger giver køber referenceaktivets nominelle værdi. Ved Kontant afregning betaler sælger forskellen mellem den nominelle værdi og værdien på referenceaktivet til køber. I begge tilfælde betaler køber det vedhængende CDS spread til sælger, som er akkumuleret siden den sidste betaling. Herunder kan man se *cash flowet* for en CDS når der er en fallit, hvor afregningen sker med fysisk og kontant afregning.



Figur 4.3: Betalingerne mellem køber og sælger af CDS kontrakten i tilfælde af fallit, her med fysisk afregning

<sup>33</sup>Hvis CDS kontrakten handles som et OTC produkt, kan dette dog vælges som man har lyst til.



Figur 4.4: Betalingerne mellem køber og sælger af CDS kontrakten i tilfælde af fallit, her med kontant afregning

### 4.3 Risikoneutral prisfastsættelse af CDS

Det er nu forklaret, hvad en CDS kontrakt er, samt lidt omkring markedet for CDS kontrakter, og hvordan cash flowet er på en CDS kontrakt. I denne sektion vil der blive udledt en formel for værdien af en CDS kontrakt under det risikoneutral risikomål. Værdien af CDS kontrakten udregnes i det klassiske eksempel, hvor det ikke kigges på modpartrisiko, men alene kigges på referencen. Sektionen vil bestå af to dele, først ses på hvad *cash flow*'et består af, og så ses der på den forventede værdi af *cash flow*et, dvs værdien af CDS kontrakten.

Men først er der her lidt indledende termer til brug i opgaven

- $S_1$  er den løbende betaling fra investoren til modparten
- Betalingerne forekommer på tidspunkterne  $\mathcal{T} = \{T_a, \dots, T_b\}$
- Længden mellem to betalinger er  $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$ .  $\alpha_i$  vil oftest være næsten konstant for alle  $i$ . Det kunne fx være 3 måneder, hvilket vil være 0.25 år. Perioderne  $\alpha_i$  varierer alt efter hvilken dagskonvention der bliver brugt.
- $\beta(t)$  er tidspunktet for den næste betaling efter  $t$ . Fx betalingerne falder på  $\{1, 2, \dots, 10\}$  og  $t = 2, 3$ , så betyder det at  $\beta(t) = 3$

#### 4.3.1 Værdien af cash flow'et

Til at starte med at nemmeste at se på hvordan CDS kontraktens cash flow er på tidspunkt  $t$ . På præmiebenet falder der på hvert tidspunkt  $T_i$  en betaling af størrelsen

$$S_1 \alpha_i$$

Værdien af betalingen på tidspunkt  $t$  er selvfølgelig den tilbagediskonterede værdi af udtrykket, og da betalingen kun falder, givet at der ikke har været en fallit, er værdien af de enkelte betalinger

$$D(t, T_i) \alpha_i S_1 1_{\tau_1 > T_i}$$

For at finde den samlede værdi summerer jeg alle betalingerne

$$\sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i) \alpha_i S 1_{\tau_1 > T_i}$$

I tilfælde af at  $T_a < \tau_1 < T_b$  skal der betales for CDS kontrakten i perioden mellem den sidste betaling og tidspunktet for fallitten. Længden af perioden er

$$\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1}$$

og værdien af betalingen på tidspunkt  $t$  er derfor

$$D(t, \tau_1)(\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1}) S 1_{T_a < \tau_1 < T_b}$$

På beskyttelsesbenet sker der som tidligere nævnt kun en betaling, og kun hvis der har været en fallit. Betalingen vil da være  $LGD_1$ . Jeg antager at  $LGD_1$  er uafhængig af  $\tau_1$ . Værdien af betalingen på tidspunkt  $t$  er derfor

$$D(t, \tau_1) LGD_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b}$$

Hvis en investor indgår i en *receiver* CDS kontrakt, så vil det samlede *cash flow* være

$$1_{\tau_1 > t} \left( - D(t, \tau_1)(\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1}) S 1_{T_a < \tau_1 < T_b} - \sum_{i=\beta(t)}^n D(t, T_i) \alpha_i S 1_{\tau_1 > T_i} + D(t, \tau_1) LGD_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b} \right) \quad (4.1)$$

### 4.3.2 Forventet værdi af cash flowet

Inden der tages den forventede værdi af CDS kontraktens *cash flow*, genopfriskes her et par formler om sandsynlighedsregning[8]. Da  $\tau_1$  er en stokastisk variabel der er større end  $t$  har jeg at

- $q(u)$  er tæthedsfunktionen for  $\tau_1$  til tidspunkt  $u$
- Fordelingsfunktionen for  $\tau_1$  er  $F$ , dvs.  $F(a) = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq a) = \int_t^a q(u) du = \int_t^a d\mathbb{Q}(\tau_1 \leq u)$
- $d\mathbb{Q}(\tau_1 \leq u) = -d\mathbb{Q}(\tau_1 > u)$
- $\mathbb{E}_t(g(\tau_1)) = \int_t^\infty g(u) q(u) du$
- $\int_{-\infty}^\infty 1_A du = \int_A du$ , hvor  $A \subseteq ]-\infty; \infty[$
- $\mathbb{E}(a + b\tau_1) = a + b\mathbb{E}(\tau_1)$ , hvor  $a$  og  $b$  er konstanter



- $\mathbb{Q}(\tau_1 > a) = 1 - \mathbb{Q}(\tau_1 \leq a) = 1 - \int_t^a q(u)du = \int_a^\infty q(u)du$

For at udlede værdien af en CDS på tidspunkt  $t$ , tages den forventede værdi af *cash flowet* på tidspunkt  $t$ . Desuden antages det at  $\tau_1 > t$ , så står den ikke i ligningen.

$$CDS(t, \mathcal{T}, S_1, LGD_1) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t \left( -D(t, \tau_1)(\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1})S_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b} - \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 1_{\tau_1 > T_i} \right. \\
& \quad \left. + D(t, \tau_1)LGD_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b} \right) \\
&= \mathbb{E}_t \left( -D(t, \tau_1)(\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1})S_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b} \right) - \mathbb{E}_t \left( \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 1_{\tau_1 > T_i} \right) \\
& \quad + \mathbb{E}_t \left( D(t, \tau_1)LGD_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b} \right) \\
&= S_1 \mathbb{E}_t \left( -D(t, \tau_1)(\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1}) 1_{T_a < \tau_1 < T_b} \right) - \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{E}_t(1_{\tau_1 > T_i}) \\
& \quad + \mathbb{E}_t \left( D(t, \tau_1)LGD_1 1_{T_a < \tau_1 < T_b} \right) \\
&= -S_1 \int_t^\infty D(t, u)(u - T_{\beta(u)-1}) 1_{T_a \leq u \leq T_b} q(u)du - \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 \int_t^\infty 1_{u > T_i} q(u)du \\
& \quad + \int_t^\infty D(t, u)LGD_1 1_{T_a < u < T_b} q(u)du \\
&= -S_1 \int_{T_a}^{T_b} D(t, u)(u - T_{\beta(u)-1})q(u)du - \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 \int_{T_i}^\infty q(u)du \\
& \quad + \int_{T_a}^{T_b} D(t, u)LGD_1 q(u)du \\
&= -S_1 \int_{T_a}^{T_b} D(t, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 \leq u | \mathcal{G}_t) - \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{Q}(\tau_1 > T_i | \mathcal{G}_t) \\
& \quad + \int_{T_a}^{T_b} D(t, u)LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 \leq u | \mathcal{G}_t) \\
&= S_1 \int_{T_a}^{T_b} D(t, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 > u | \mathcal{G}_t) - \sum_{i=\beta(t)}^b D(t, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{Q}(\tau_1 > T_i | \mathcal{G}_t) \\
& \quad - \int_{T_a}^{T_b} D(t, u)LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 > u | \mathcal{G}_t) \tag{4.2}
\end{aligned}$$

For en CDS kontrakt der starter med det samme vil formelen være

$$\begin{aligned}
CDS(0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1) = & \\
& S_1 \int_0^{T_b} D(0, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 > u) - \sum_{i=\alpha_1}^b D(0, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{Q}(\tau_1 > T_i) \\
& - \int_0^{T_b} D(0, u)LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 > u)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Jeg skal også kunne finde værdien af CDS efter tidspunkt nul. Mere præcist på tidspunktet hvor enten investoren eller modparten går fallit, dvs  $\tau_i$ ,  $i = 0, 2$

For værdien af en CDS kontrakt på tidspunktet hvor enten investoren eller modparten går fallit, dvs  $\tau_i$ ,  $i = 0, 2$ , bruges følgende formel

$$\begin{aligned}
CDS(\tau_i, \mathcal{T}, S_1, LGD_1) & \\
= 1_{\tau_1 > \tau_i} \overline{CDS}(\tau_i, \mathcal{T}, S_1, LGD_1) & \\
= 1_{\tau_1 > \tau_i} \left( S_1 \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 > u | \mathcal{G}_{\tau_i}) - \sum_{i=\beta(\tau_i)}^b D(\tau_i, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{Q}(\tau_1 > T_i | \mathcal{G}_{\tau_i}) \right. & \\
\left. - \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 > u | \mathcal{G}_{\tau_i}) \right) &
\end{aligned} \tag{4.4}$$

## 5 Værdien af modpartsrisiko på en CDS

I dette afsnit vil jeg udlede formlerne for BR-CVA for hhv. en *receiver* og *payer* CDS. Fra ligning (3.15) har jeg værdien for den generelle BR-CVA

$$\begin{aligned} BR - CVA(t, T) = & -\mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-NV(\tau_0)]^+) \\ & + \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [NV(\tau_2)]^+) \end{aligned}$$

Der skal tilpasses en CDS kontrakt.

Da værdien af en CDS kontrakt i ligning (4.4) er regnet for en *receiver* CDS, kan formelen sætte direkte ind i ligning (3.15), når værdien af modpartsrisikoen for en *receiver* CDS kontrakt skal udregnes

$$\begin{aligned} BR - CVA - CDS_r(t, T) &= -\mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-CDS(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\ &\quad + \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [CDS(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\ &= -\mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-1_{\tau_1 > \tau_0} \overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\ &\quad + \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [1_{\tau_1 > \tau_2} \overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \quad (5.1) \end{aligned}$$

Når det drejer sig om en *payer* CDS kontrakt, så er værdien af CDS kontrakten igen for investors side, den modsatte af i ligning (4.4), dvs  $-CDS(\tau_i, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)$ . Derfor bliver værdien af modpartsrisikoen for en *payer* CDS ( $BR - CVA - CDS_p$ )

$$\begin{aligned} BR - CVA - CDS_p(t, T) &= -\mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [CDS(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\ &\quad + \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [-CDS(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\ &= -\mathbb{E}_t(LGD_0 \cdot 1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [1_{\tau_1 > \tau_0} \overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\ &\quad + \mathbb{E}_t(LGD_2 \cdot 1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [-1_{\tau_1 > \tau_2} \overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \quad (5.2) \end{aligned}$$

Variablene  $LGD_0$  og  $LGD_2$  kan være stokastiske variable, så længe at de er uafhængige af resten af modellen. Jeg vil dog i denne opgave betragte dem begge som

konstanter. Dette betyder at (5.1) og (5.2), kan omskrives til

$$\begin{aligned}
BR - CVA - CDS_r(t, T) = & \\
& - LGD_0 \mathbb{E}_t(1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-1_{\tau_1 > \tau_0} \overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\
& + LGD_2 \mathbb{E}_t(1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [1_{\tau_1 > \tau_2} \overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \quad (5.3)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
BR - CVA - CDS_p(t, T) = & \\
& - LGD_0 \mathbb{E}_t(1_{A \cup B} \cdot D(t, \tau_0) \cdot [1_{\tau_1 > \tau_0} \overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \\
& + LGD_2 \mathbb{E}_t(1_{C \cup D} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [-1_{\tau_1 > \tau_2} \overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

## 6 Fallitmodel

Der er nu blevet udledt de risikoneutrale formler BR-CVA og værdien af en CDS kontrakt. I afsnit 5 blev det så samlet til formlerne for BR-CVA-CDS for hhv. en *receiver* og *payer* CDS. I dette afsnit laves et model setup for korrelerede fallittidspunkter for hver af de tre parter, investor, modpart og referencen. Setup'et er en dobbelt stokastisk Poissonproces og med en CIR proces som intensitetsproces.

Grunden til at der laves en fallitmodel med korrelerede fallitter, er fordi det er en metode til at inkorporere *wrong-way risk* i modellen.

### 6.1 Intensitetsmodellen

I denne sektion præsenteres den dobbelt stokastiske Poissonproces, som også kaldes cox processen. Den blev første gang præsenteret af Lando[4].

#### 6.1.1 Hazard rates

$\tau$  er tidspunktet for en virksomheds fallit.  $\tau$  er en ikke negativ stokastisk variabel, og det antages, at den har tæthedsfunktionen  $f$  og derfor, at den har fordelingsfunktionen  $F$ . Det gælder derfor at

$$\mathbb{Q}(\tau \leq t) = F(t) = 1 - S(t) = \int_0^t f(s)ds$$

hvor  $S$  betegnes overlevelsesfunktionen.

*Hazard rates*  $h$  er defineret som

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{d(1-S(t))}{dt}}{S(t)} = \frac{-\frac{dS(t)}{dt}}{S(t)} = -\frac{d \ln(S(t))}{dt}$$

Ved at rykke rundt på ligningen få overlevelsesfunktionen, som en funktion af  $h$

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(s)ds} = \mathbb{Q}(\tau > t) \quad (6.1)$$

Spot fallit sandsynligheden givet at der ikke har været en fallit på tidspunkt  $t$  er

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\tau \leq x + \Delta t | \tau > x) &= \frac{\mathbb{Q}(\tau \leq x + \Delta t, \tau > x)}{\mathbb{Q}(\tau > x)} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(\tau > x) - \mathbb{Q}(\tau > x + \Delta t)}{\mathbb{Q}(\tau > x)} \\ &= 1 - \frac{e^{-\int_0^{t+\Delta t} h(s)ds}}{e^{-\int_0^t h(s)ds}} \\ &= 1 - e^{-\int_t^{t+\Delta t} h(s)ds}\end{aligned}$$

Derfor fås at

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{Q}(\tau \leq x + \Delta t | \tau > x)}{\Delta t} = h(t)$$

$h(t)$  er den betingede spot fallitsandsynlighed, dvs. givet at der ikke har været et fallit på tidspunkt  $t$ , så er spot sandsynligheden for at gå fallit  $h(t)$ .  $h(t)\Delta t$  er ca. den betingede sandsynlighed for at gå fallit i det lille interval efter  $t$ .

Gennemgangen af teorien om *hazard rates* skyldes, at det er det samme som intensitets raten eller intensiteten, som vil blive brugt, videre frem i specialet.

## Den inhomogene poisson proces

Hvis man ser på, om et firma er gået fallit eller ikke er gået fallit, kan man se det som en funktion, der enten er 1, hvis den ikke er gået fallit, og 0 hvis den er gået fallit. Firmaet går da fallit i det øjeblik funktionen springer fra at være 1 til den er 0. Derfor bruges en stokastisk proces med et sådan spring til at simulere fallitter. En Poissonproces er en sådan proces.

Den inhomogene Poissonproces er en Poissonproces hvor intensiteten  $l(t)$ , modsat den homogene ikke er konstant, og derfor kan variere over tid. Det er vigtigt at huske, at intensitet funktionen skal være ikke negativ på alle tidspunkter, dvs  $l(t) \geq 0$ .

$N(t)$ ,  $t \geq 0$  er en inhomogen poisson proces med intensitetsfunktion  $l(t)$ ,  $t \geq 0$ , hvis

1.  $N(0) = 0$
2. Antallet af spring i disjunkte tidsintervaller er uafhængige
3.  $\mathbb{Q}(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = l(t) + o(\Delta t)$
4.  $\mathbb{Q}(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 1) = o(\Delta t)$

Her skal det huskes at funktion  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$

Den inhomogene poisson proces  $N(\cdot)$  tilfredsstiller

$$\mathbb{Q}(N(t) - N(s) = k) = \frac{\left(\int_s^t l(u)du\right)^k e^{-\int_s^t l(u)du}}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Sandsynligheden for at der ikke er nogen spring i processen i perioden mellem  $s$  og  $t$ , er derfor

$$\mathbb{Q}(N(t) - N(s) = 0) = e^{\int_s^t l(u) du} \quad (6.2)$$

Hvis jeg yderligere specificere at  $s = 0$  og at  $N(0) = 0$  så er

$$\mathbb{Q}(N(t) = 0) = e^{-\int_0^t l(u) du}$$

Det interessante, er for hvilket  $t$   $N(t) \geq 0$ , altså for hvornår processen springer. Tidspunkt for springet kaldes  $\tau$ , også kaldet fallittidspunktet. En måde at simulere det på er ved at finde det mindste  $t$  hvor

$$\mathbb{Q}(N(t) \geq 1) \geq U$$

Hvor  $U$  er en standard uniform variabel. Ved at rykke rundt på ligningen fås

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(N(t) \geq 1) &\geq U \\ \Leftrightarrow 1 - \mathbb{Q}(N(t) = 0) &\geq U \\ \Leftrightarrow 1 - \mathbb{Q}(N(t) = 0) &\geq U \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-\int_0^t l(u) du} &\geq U \\ \Leftrightarrow \int_0^t l(u) du &\geq -\ln(1 - U) = E \end{aligned}$$

Hvor  $E$  er stokastisk eksponentiel variabel med parameter 1. Udtrykket for  $\tau$  bliver derfor således

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t l(u) du \geq E \right\} \quad (6.3)$$

### 6.1.2 Cox processen - Den dobbelt stokastiske poisson proces

I ligning (6.3) er det værd, at lægge mærke til, at  $l(t)$  kun er en funktion af tiden  $t$  og ikke tager højde for andet end  $t$ . Dette er ikke en realistisk antagelse, da der er meget andet end, at tiden går, der har indflydelse på om et firma går fallit. Det er derfor nødvendigt at betinge med den information, man står med på et givent tidspunkt, og det er her, at Cox processen kommer ind i billedet.

Cox processen er en generalisering af Poissonprocessen, hvor intensitetsfunktionen er stokastisk. Den er dog stokastisk på en måde, så når man betinger med en bestemt realisation  $l(\cdot, \omega)$ , så er intensitetsfunktionen  $l(s, \omega)$  en inhomogen poisson proces. Fremover i denne opgave skrives det som følger

$$l(t, \omega) = \lambda(t)$$

$\lambda(t)$  er en  $R^d$  stokastisk proces og  $\lambda(t) : R^d \rightarrow [0, \infty[$  er en ikke negativ kontinuert funktion.

$\tau$  som defineret i ligning (6.3), skrives derfor nu som

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda(s) ds \geq E \right\} \Rightarrow \int_0^\tau \lambda(s) ds = E \quad (6.4)$$

Cox processen kaldes også en dobbelt stokastisk Poissonproces, fordi der er to dele hvor der indgår stokastik,  $\lambda(s)$  og den eksponentielle variabel  $E$ .

## 6.2 CIR processen

En vigtig del af simuleringen af fallitter med Cox processen, er simuleringen af den stokastisk intensitetsproces  $\lambda$ , den betingede spot sandsynlighed for fallit. I dette afsnit laves en model der kan simulere  $\lambda$ . Der er flere forskellige processer, som kan bruges til, at simulere intensitetsprocessen, fx Vasicek og Hull-White. Mit valg er faldet på CIR processen, pga. følgende egenskaber

- Der er mean reversion.
- Det er ikke muligt for intensiteten at blive negativ, og givet de rette betingelser vil intensiteten altid være positiv.
- Volatiliteten vokser og falder med niveauet af intensiteten.

### 6.2.1 Den almindelige CIR

CIR er en tidshomogen stokastisk proces, hvor driften har mean reversion og volatiliteten er proportionel til kvadratroden af intensiteten. Dynamikken ser ud som følger

$$dx_i^\beta(t) = k(\theta - x_i^\beta(t))dt + \sigma\sqrt{x_i^\beta(t)}dW_t, \quad (6.5)$$

hvor vektoren  $\beta = (k, \theta, \sigma)$ .  $k$ ,  $\theta$  og  $\sigma$  er alle positive konstanter. Processen er bygget til at  $x_i^\beta$  ikke kan blive negativ, den kan dog blive 0, hvis ikke det gælder at  $2k\theta > \sigma^2$ . At  $x_i^\beta = 0$  vil betyde at i et lille tidsinterval, kan det forekomme at sandsynligheden for fallit ikke stiger. Dette vil dog blive accepteret, da  $2k\theta > \sigma^2$  kan være meget begrænsende for valget af variable  $k$ ,  $\theta$  og  $\sigma$ .

Hvis det havde været en rentemodell hvor dynamikken var blevet beskrevet i ligning (6.5), havde man analytisk kunne finde nulkupon obligationen, da randbetingelsen  $P(T, T) = 1$  er kendt. Dette gør sig dog også gældende, når ligning (6.5) er udviklingen for en fallit intensitet. Hvor rentemodellen analytisk kunne give nulkupon obligationen giver intensitetsmodellen overlevelsessandsynligheden. Ligning (6.1) kan nemt udvides til overlevelsessandsynligheden er

$$\mathbb{Q}^x(t, T) = e^{-\int_t^T h(s) ds}$$



og her ses det, at se at ligesom randbetingelsen for rentemodell at

$$\mathbb{Q}^x(T, T) = e^{-\int_T^T h(s)ds} = 1$$

Den analytiske løsning til (6.5) bliver derfor

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^x(t, T) &= \mathbb{E}^x \left\{ e^{-\int_t^T x_i^\beta(s)ds} | \mathcal{G}_t^x \right\} \\ &= A(t, T) e^{-B(t, T)x_t^\beta}\end{aligned}\tag{6.6}$$

hvor

$$\begin{aligned}A(t, T) &= \left( \frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T-t)}{2}}}{2\gamma + (k + \gamma)(e^{(T-t)\gamma} - 1)} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \\ B(t, T) &= \frac{2e^{(T-t)\gamma} - 1}{2\gamma + (k + \gamma)(e^{(T-t)\gamma} - 1)}\end{aligned}$$

hvor

$$\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

### 6.2.2 CIR++

CIR er begrænset af sine faste konstanter, når det drejer sig om at få modellen til at passe til empiriske overlevelsessandsynligheder. Det kan derfor være smart at udvide modellen, så der er mulighed for større tilpasning. Dette gøres ved at definere intensiteten som

$$\lambda_i(t) = x_i(t) + \varphi_i(t, \beta)\tag{6.7}$$

Den nye del af funktionen  $\varphi$  er en deterministisk funktion, der er integrabel på lukkede intervaller.  $x_t$  er den samme funktion som  $x_t^\beta$ ,  $\beta$ 'et er droppet for at lette notationen. I forhold til den tidligere model kommer der en ekstra frihedsgrad i den forstand, at på tidspunkt nul skal det være opfyldt at

$$\varphi_i(0; \beta) = \lambda_i(0) - x_i(0)$$

For at simplificere udtrykkene igennem opgaven, vil jeg gerne have udtryk for det integrerede på begge sider af (6.7)

$$\int_0^t \lambda_i(X_s)ds = \int_0^t x_i(t) + \varphi_i(t, \beta)ds = \int_0^t x_i(t)ds + \int_0^t \varphi_i(s, \beta)ds$$

Igennem opgaven skal der ofte bruges de integrerede udtryk, derfor defineres

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(X_s)ds, \quad X_i(t) = \int_0^t x_i(s)ds, \quad \Psi_i(t) = \int_0^t \varphi_i(s, \beta)ds\tag{6.8}$$

Dette betyder at

$$\Lambda_i(t) = X_i(t) + \Psi_i(t, \beta)$$

Den tilhørende nul kupon obligation for denne udgave er givet ved

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(t, T) &= \mathbb{E}_t \left( e^{-\int_t^T \lambda_i(s) ds} \right) \\ &= \mathbb{E}_t \left( e^{-\int_t^T x_i(s) + \varphi_i(s, \beta) ds} \right) \\ &= \mathbb{E}_t \left( e^{-\int_t^T x_i(s) ds - \int_t^T \varphi_i(s, \beta) ds} \right) \\ &= \mathbb{E}_t \left( e^{-\int_t^T x_i(s) ds} \right) \mathbb{E}_t \left( e^{-\int_t^T \varphi_i(s, \beta) ds} \right) \\ &= \mathbb{Q}^x(t, T) e^{-\int_t^T \varphi_i(s, \beta) ds} \\ &= \mathbb{Q}^x(t, T) e^{-\Psi_i(t, \beta)} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Det næstesidste skridt fås fra ligning (6.6), som udtrykker den første del af ligningen, og da  $\varphi_i(s, \beta)$  er deterministisk kan forventet tegnet fjernes.

### 6.2.3 Kalibrering til markedssdata

Ved kalibrering til markedet vil det sige, at der skal udledes  $\Psi_i(t)$ , sådan at de overlevelsessandsynligheder som fås fra modellen, passer overens med overlevelsessandsynlighederne, som kan ekstrapoleres fra markedet, dvs.

$$\mathbb{Q}(\tau_i > t) = \mathbb{Q}(\tau_i > t)_M \tag{6.10}$$

Hvor  $\mathbb{Q}(\tau_i > t)$  er model sandsynligheden og  $\mathbb{Q}(\tau_i > t)_M$  er markedssandsynligheden. Udtrykket for  $\mathbb{Q}(\tau_i > t)$  fra ligning (6.9), indsættes og der kan derved findes frem til et udtryk for den deterministiske funktion  $\Psi_i(s, \beta)$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_i^x(t, T) e^{-\int_t^T \varphi_i(s, \beta) ds} &= \mathbb{Q}_i^x(t, T) e^{-\Psi_i(s, \beta)} = \mathbb{Q}_i(\tau_i > t)_M \\ \Leftrightarrow e^{\Psi_i(s, \beta)} &= \frac{\mathbb{Q}_i^x(t, T)}{\mathbb{Q}_i(\tau_i > t)_M} \\ \Leftrightarrow \Psi_i(s, \beta) &= \ln \left( \frac{\mathbb{Q}_i^x(t, T)}{\mathbb{Q}_i(\tau_i > t)_M} \right) \end{aligned}$$

## 6.3 Korrelerede fallitter

Indtil nu har der ikke været nævnt, hvordan der skal inkorporeres *wrong-way risk* i fallitmodellen. Hver af de tre parter i CDS kontrakten har hver der Cox proces til simulering af fallitter, og der skal derfor laves en måde hvorpå de tre processer korreleres, så der kan indarbejdes *wrong-way risk*. Da Cox processen, fra ligning (6.4), er en dobbelt

stokastisk proces, er der to dele, der kan blive korrelerede, nemlig intensitetsprocesserne  $\lambda_i(X_s)$  eller de eksponentielt fordelte variable  $E_i$ , begge for  $i = 0, 1, 2$ . Valget falder på  $E_i$ 'erne, da der kun behøves at lave korreleringen en gang, modsat  $\lambda(X_s)$  hvor det ville være nødvendigt at sikre koalitionen gennem hele stien. I dette afsnit vises, hvordan man skaber korrelation mellem  $E$ 'erne.

### 6.3.1 Korrelation

Som udgangspunkt er definitionen for korrelation mellem to firmaer  $i$  og  $j$ , hvor  $\tau_i$  og  $\tau_j$  er deres respektive falltidspunkter

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov(\tau_i, \tau_j)}{\sqrt{Var(\tau_i)Var(\tau_j)}} = \frac{\mathbb{E}(\tau_i, \tau_j) - \mathbb{E}(\tau_i)\mathbb{E}(\tau_j)}{\sqrt{Var(\tau_i)Var(\tau_j)}}$$

Sammenhængen mellem flere firmaer beskrives via korrelationsmatricen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho_{12} & & \\ \rho_{12} & \sigma_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{1n} & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

### 6.3.2 Gaussian copula

Copula funktioner kan siges, at være funktioner, der beskriver sammenhængen mellem stokastiske variable der er afhængige af hinanden. Marginale fordelinger og en copulafunktion kan tilsammen beskrive fordelingsfunktionen til en tilfældig vektor. De marginale fordelinger beskriver fordelingerne af hvert enkelt komponent i vektoren og copulafunktionen hvordan de afhænger af hinanden.

En flerdimensional fordeling for et set af stokastiske variable  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  er defineret som

$$F(x_1, \dots, x_m) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m)$$

Den flerdimensionale fordeling har følgende egenskaber

1.  $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_m) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$
2.  $\lim_{x_i \rightarrow \infty, \forall i} F(x_1, \dots, x_m) = 1$
3.  $F$  skal være m-stigende, hvilket vil sige at der skal være positiv masse i alle rektangler. For 2 dimensioner betyder det at for alle  $[x_1, y_1]$  og  $[x_2, y_2]$ , hvor  $x_1 \leq x_2$  og  $y_1 \leq y_2$  at  $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$ . Det samme udtrykkes i flere dimensioner, men er sværere at overskue.

De enkelte marginalfordelinger kan findes ved at lade alle de andre variable gå mod uendelig, dvs

$$F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$$

Sammenhængen mellem copula funktionen og en flerdimensional fordeling er som følger

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_m) &= \mathbb{Q}(U_1 \leq u_1, \dots, U_m \leq u_m) \\ &= \mathbb{Q}(F^{-1}(U_1) \leq F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(U_m) \leq F^{-1}(u_m)) \\ &= \mathbb{Q}(X_1 \leq F^{-1}(u_1), \dots, X_m \leq F^{-1}(u_m)) \\ &= F(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_m)) \\ &= F(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Nu haves koblingen mellem copulafunktionen og en flerdimensional fordeling. Herefter vises det, hvordan man får den flerdimensionale fordeling til at være normalfordelingen.

$X$  er en normalfordelt variable med middelværdi  $\mu$  og standard afvigelse  $\sigma$ .  $X$  har tæthedsfunktionen

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

For det simple tilfælde hvor middelværdien er 0 og standardafvigelsen 1, er

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

I begge tilfælde er fordelingen

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(x) dx$$

Med en given korrelationsmatrix  $\Sigma$  af størrelsen  $m \times m$  er den m-dimensionelle normalfordeling

$$\Phi_{m,\Sigma}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} e^{-\frac{1}{2} \bar{y}^T \Sigma^{-1} \bar{y}} dy_1 \dots dy_m$$

Med dette kan den gausiske copula funktion angives som

$$\begin{aligned} C_{n,\Sigma}^{GC}(u_1, \dots, u_m) &= \Phi_{n,\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_m)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_m)} e^{-\frac{1}{2} \bar{y}^T \Sigma^{-1} \bar{y}} dy_1 \dots dy_m \end{aligned}$$

### 6.3.3 Cholesky dekomponering

Metoden, der bruges til at lave korrelerede variable på, er Cholesky dekomponering. Cholesky dekomponering kan ved hjælp af korrelationsmatricen gøre uafhængige normalfordelte tal korrelerede.

Cholesky dekomponering er en dekomponering af en positiv definit matrix  $\Sigma$  til produktet af en nedre trekantsmatrix  $C$  og dennes transponerede

$$CC^t = \Sigma$$

$\Sigma$  korrelationsmatricen.

Efter at have fundet frem til  $C$  kan der skabes korrelerede ligefordelte variable. Hvis  $v$  er en vektor uafhængige ligefordelte tilfældige variable så er vektoren

$$u = Cv$$

en vektor med korrelerede ligefordelte tilfældige variable.

Hvor  $C$  er den nedre trekantsmatrix, og  $\Sigma$  er korrelationsmatricen. Det giver for en  $d$  gange  $d$  matrix

$$\begin{pmatrix} C_{11} & & & \\ C_{21} & C_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{d1} & & & C_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{d1} \\ & C_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{dd} \end{pmatrix} = \Sigma$$

$$\begin{pmatrix} C_{11}^2 & C_{21}C_{11} & \dots & C_{d1}C_{11} \\ C_{21}C_{11} & C_{21}^2 + C_{22}^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{d1}C_{11} & \dots & & \sum_{k=1}^d C_{dk}^2 \end{pmatrix} = \Sigma$$

Da  $\Sigma$  er symmetrisk behøves der kun den nedre trekantsdel af matricen for, at finde en løsning til ligningen. Det betyder samtidig, at ligningen kan skrives ved hjælp af to ligninger, der ser på hhv. diagonal elementer og resten af  $\Sigma$ . For diagonal elementerne gælder det at

$$C_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} C_{ik}^2}$$

For de elementer, der ikke er diagonal elementer, kan de skrives på formen

$$C_{ij} = \frac{1}{C_{jj}} \left( \Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} C_{ik}C_{jk} \right)$$

### 6.3.4 Fra uniform til eksponentiel

Det sidste der mangler, at blive gjort, er at vise sammenhængen mellem de korrelerede  $U$ 'er og  $E$ 'er.

Fra sandsynlighedsregning vides et, at  $P(E_i \leq x) \in [0; 1[, \forall x \in [0; \infty[$ . For en tilfældig eksponentielt fordelt variabel med parameter 1 gælder det at sammenhængen med ligefordelingen fra 0 til 1 er

$$U_i = 1 - e^{-E_i} \quad (6.12)$$

Ved at isolere  $U_i$  fås en formel, for de eksponentielt fordelte variable ud fra ligefordelingen

$$\begin{aligned} E_i &= -\ln(1 - U_i) \\ &= -\ln(U_i) \end{aligned}$$

Det sidste skridt gælder på grund af symmetrien i uniformfordelingen, hvilket vil sige  $1 - U$  er en ny standard ligefordelt stokastisk variabel  $U$

## 7 Implementering

I dette afsnit gennemgås implementeringen af den teori, som er gennemgået indtil nu. Teorien implementeres i Mathematica<sup>34</sup>.

Modellen er bygget op som en Monte Carlo simulation, til beregning af BR-CVA-CDS<sub>r</sub> og BR-CVA-CDS<sub>p</sub> fra ligningerne (5.3) og (5.4)

Simulationen er bygget op af tre dele:

1. Simulering af fallitter
2. Udregning af en overlevelsessandsynlighedskurve givet fallit, til prisning af CDS kontrakten
3. Udregning af værdien af en CDS

Først simuleres fallitterne hos investor, modpart og referencen. Hvis investor eller modpart går fallit som den første, så udregnes værdien af CDS kontrakten på det givne fallittidspunkt. Dette gøres med implementeringen af ligning (5.3). Hvis det er investor, der er gået fallit som den første, udregnes

$$LGD_0 \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-\overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+ \quad (7.1)$$

og hvis det er modparten, der går fallit som den første, udregnes

$$LGD_2 \cdot D(t, \tau_2) \cdot [\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+ \quad (7.2)$$

Alle udregninger af (7.1) og (7.2) summeres og divideres med antallet af gange, der er simuleret fallitter, dvs. både de gange hvor investor eller modpart er gået fallit som den første, hvor referencen er gået fallit som den første, og de gange, der ikke er nogen der er gået fallit. Ved tilpas mange simuleringer konvergerer resultatet mod den rigtige værdi af modpartsrisikoen.

### 7.1 Simulering af fallittidspunkter

Et fallittidspunkt er givet ved ligning (6.4), der siger at

$$\tau_i = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_i(s) ds \geq E_i \right\} \Rightarrow \int_0^{\tau_i} \lambda_i(s) ds = E_i$$

---

<sup>34</sup>For mere info om program version og computer se da appendiks A.1

hvor

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds$$

Med CIR-processen, der er beskrevet i sektion 6.2, simuleres  $\lambda_i(s)$  for hver af de tre parter. Korreleringen af de tre fallitter sker med Cholesky dekomposition af uniform fordelte stokastiske variable, der så omformes til eksponentielt fordelte variable.

### 7.1.1 Implementeringen

Implementeringen af simuleringen af fallittidspunkter, består af tre trin. Først skabes de korrelerede eksponentielt fordelte variable.

Andet trin består i at udregne

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds = \int_0^t x_i(s) ds + \Psi_i(t)$$

for hver af de tre parter

$\Psi_i(t)$  er deterministisk, men integralet

$$\int_0^t x_i(s) ds$$

regnes som et Riemann integrale. Intervallet  $[0, t]$  inddeles i underdelene  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ , hvor  $dt_i = t_{i+1} - t_i$ . Der bruges, at  $dt$  er konstant.  $\hat{t}_0, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_{n-1}$  defineres så  $\hat{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . Det gælder så at

$$\int_0^t x_i(s) ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\hat{t}_i) dt$$

hvor, hvis  $\hat{t}_i = t_i$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i(t_i) dt = x_i(0) dt + x_i(dt) dt + x(2dt)_i dt + \dots + x_i((t - dt) dt) dt$$

For  $n \rightarrow \infty$  bliver integralet regnet helt præcist, dvs.

$$\int_0^t x_i(s) ds = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(\hat{t}_i) dt$$

$n$  kan selvfølgelig ikke være uendelig. Det handler derfor om at vælge  $n$  så tilstrækkeligt højt, at det ikke får betydning, hvor i intervallet  $[t_i, t_{i+1}]$  et givent  $\hat{t}_i$  vælges. Dvs., at der ikke er forskel på om  $\hat{t}_i = t_i$  eller  $\hat{t}_i = t_{i+1}$ . Flere inddelinger betyder, at beregninger vil tage længere tid, det er derfor nødvendigt at lave en afvejning af præcision



og udregningstid. Jeg vælger derfor at  $\hat{t}_i = t_i$  med  $n = 10.000$ . Ved valg af et mindre  $n$  er det min erfaring, at forskellen mellem valget af  $\hat{t}_i = t_i$  og  $\hat{t}_i = t_{i+1}$ , bliver for stort. Mens det for større  $n$  kommer til, at tage for lang tid. Integralet bliver så regnet som følgende approksimerende sum

$$\int_0^t x_i(s)ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} x_i(t_i)dt$$

hvor

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i(t_i)dt = x_i(0)dt + x_i(dt)dt + x(2dt)_i dt + \dots + x_i((t - dt)dt)dt$$

$$\Lambda_i(t) = \Lambda_i(t - dt) + x_i(t - dt)dt + \Psi_i(t)$$

hvor

$$\Lambda_i(0) = \Psi_i(0)$$

Det tredje trin består i, at for hvert trin  $dt$  tjekkes om der er fallit, ved at se om

$$\Lambda_i(t) \geq E_i$$

Når man i en beregning af fallitterne, kommer til et punkt, hvor der er fallit, stopper den videre beregning. Hvis det er referencen, der er den første der går fallit, starter beregningen forfra igen. Hvis det derimod er investoren eller modparten der går fallit som den første, skal man regne værdien af CDS kontrakten på tidspunktet for fallitten.

## 7.2 Værdien af en CDS

I denne sektion ses på, hvordan værdien af CDS kontrakten udregnes, givet at der har været en fallit hos enten investor eller modpart.

Formlen for værdien af en CDS kontrakt blev udledt i sektion 4.3. Den CDS kontrakt, der ses på i dette speciale, er lidt anderledes end den generelle formel. Idet der ses på en CDS kontrakt, der starter med det samme. Værdien af CDS kontrakten udregnes kun tilfælde af fallit hos investor eller modpart, dvs. på tidspunkt  $\tau_i \in ]0, T_b]$ ,  $i = 0, 2$ . Derfor bruges ligningen (4.4) til udregning, af værdien for en CDS kontrakt

$$\begin{aligned} CDS(\tau_i, \mathcal{T}, S_1, LGD_1) = & \\ 1_{\tau_1 > \tau_i} & \left( S_1 \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 > u | \mathcal{G}_{\tau_i}) - \sum_{i=\beta(\tau_i)}^b D(\tau_i, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{Q}(\tau_1 > T_i | \mathcal{G}_{\tau_i}) \right. \\ & \left. - \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u) LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 > u | \mathcal{G}_{\tau_i}) \right) \end{aligned}$$

Når værdien af CDS kontrakten skal udregnes, er det givet, at referencen ikke er gået fallit, og derfor er  $1_{\tau_1 > \tau_i} = 1$ , dvs.

$$\begin{aligned} CDS(\tau_i, \mathcal{T}, S_1, LGD_1) &= \\ &= S_1 \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 > u|\mathcal{G}_{\tau_i}) \end{aligned} \quad (7.3a)$$

$$- \sum_{i=\beta(\tau_i)}^b D(\tau_i, T_i)\alpha_i S_1 \mathbb{Q}(\tau_1 > T_i|\mathcal{G}_{\tau_i}) \quad (7.3b)$$

$$- \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 > u|\mathcal{G}_{\tau_i}) \quad (7.3c)$$

For at regne værdien af CDS kontrakten, skal alle tre dele af ligning (7.3) udregnes.

### 7.2.1 Implementeringen

Den faktisk implementering afhænger af typen af led i ligning (7.3). Ledet (7.3b), kræver ikke nogen videre forklaring, da den kan regnes som den sum der står for en given sandsynlighed. Men ledende (7.3a) og (7.3c) derimod skal udregnes som Riemann integraler, da der skal bruges ændringen i sandsynligheden. Dvs. at for (7.3a) gælder det at

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)(u - T_{\beta(u)-1})d\mathbb{Q}(\tau_1 > u|\mathcal{G}_{\tau_i}) &\approx \\ \sum_{t=\tau_i+du}^{T_b} D(0, u)(u - T_{\beta(u)-1})(\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) - \mathbb{Q}(\tau_1 > t - du|\mathcal{G}_{\tau_i})) \end{aligned}$$

og for (7.3c) gælder det at

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{T_b} D(0, u)LGD_1 d\mathbb{Q}(\tau_1 > u|\mathcal{G}_{\tau_i}) &\approx \\ \sum_{t=\tau_i+du}^{T_b} D(0, u)LGD_1(\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) - \mathbb{Q}(\tau_1 > t - du|\mathcal{G}_{\tau_i})) \end{aligned}$$

Jeg har her valgt at lave Riemann integralet som en oversum. Med inddelinger er der igen et tidsmæssigt perspektiv. Jeg vælger derfor at bruge 10.000 inddelinger. Som i undersektion 7.1.1, af valget af 10.000 inddelinger lavet ud fra mine erfaringer af omkring præcision og beregningstid.

For nu at kunne værdien af CDS kontrakten mangler blot at kunne regne overlevelsessandsynligheden  $\mathbb{Q}(\tau_1 > u)$

## 7.3 Overlevelsessandsynligheden

I denne sektion udledes formelen for overlevelsessandsynligheden, der skal bruges til at udregne værdien af CDS kontrakten, givet at der har været fallit hos enten investor eller modpart.

### 7.3.1 Notation

Før udregningerne af overlevelsessandsynlighederne er der først lidt notation.

Forholdet mellem en uniform variabel og en eksponentiel variabel, fås fra ligning (6.12) og er

$$U_i = 1 - e^{-E_i} \Leftrightarrow E_i = -\ln(1 - U_i) \quad (7.4)$$

Fra ligning (6.4) og (6.8) fås at

$$E_i = \Lambda_i(\tau_i), \quad i = 0, 1, 2 \quad (7.5)$$

For notationens skyld indføres variabelen  $\bar{U}_{i,j}$ , som defineres på følgende måde

$$\bar{U}_{i,j} = 1 - e^{-\Lambda_i(\tau_j)} \quad (7.6)$$

### 7.3.2 Udledning

Værdien af CDS kontrakten, og derved også overlevelsessandsynlighederne, beregnes på tidspunktet, hvor investor eller modpart er gået fallit som den første, og man skal derfor se de to, som hvert sit tilfælde. Jeg starter med at se på tilfældet hvor modparten går fallit som den første. Dvs. på tidspunkt  $\tau_2$ , hvilket betyder, at der ses på situationen hvor  $1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2}$  og derfor skal udregne

$$1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) \quad (7.7)$$

Til at begynde med ses på  $1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2}$ . Der bruges at  $1_X 1_Y = 1_{X \cap Y}$ , og derfor er

$$\begin{aligned} & (C \cup D) \cap (\tau_1 > \tau_2) \\ &= ((\tau_2 \leq \tau_0 \leq T) \cup (\tau_2 \leq T \leq \tau_0)) \cap (\tau_1 > \tau_2) \\ &= ((\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T, \tau_0 \leq T) \cup (\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T, T \leq \tau_0)) \cap (\tau_1 > \tau_2) \\ &= (((\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T) \cap (\tau_0 \leq T)) \cup ((\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T) \cap (T \leq \tau_0))) \cap (\tau_1 > \tau_2) \end{aligned}$$

Ved at isolere  $(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)$  reduceres det til

$$= (\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T) \cap ((\tau_0 \leq T) \cup (T \leq \tau_0)) \cap (\tau_1 > \tau_2)$$

Her er foreningsmængden  $(\tau_0 \leq T) \cup (T \leq \tau_0)$  altid opfyldt.

$$= (\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T) \cap (\tau_1 > \tau_2)$$

Dvs. at

$$1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2} = 1_{(C \cup D) \cap \tau_1 > \tau_2} = 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T) \cap (\tau_1 > \tau_2)} = 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)} 1_{(\tau_1 > \tau_2)} \quad (7.8)$$

Der skal bruges at

$$\begin{aligned} 1_{\tau_1 > \tau_2} &= 1_{\tau_1 > \tau_2} \underbrace{(1_{\tau_2 > t} + 1_{\tau_2 \leq t})}_{=1} \\ &= 1_{\tau_1 > \tau_2} 1_{\tau_2 > t} + 1_{\tau_1 > \tau_2} 1_{\tau_2 \leq t} \\ &= 1_{\tau_1 > \tau_2 \cap \tau_2 > t} + 1_{\tau_1 > \tau_2 \cap \tau_2 \leq t} \\ &= 1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 > t} + 1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 \leq t} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ligning (7.7) giver sammen med ligning (7.8) at

$$1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) = 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)} 1_{(\tau_1 > \tau_2)} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2})$$

og med ligning (7.9) fås

$$= 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)} (1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 > t} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) + 1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 \leq t} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}))$$

i tilfældet hvor  $1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 > t} = 1$  er  $\mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) = 1$ . Dette betyder at  $\mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2})$  ikke har nogen betydning, derfor fås at

$$= 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)} (1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 > t} + 1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 \leq t} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2})) \quad (7.10)$$

Nu skal der findes en formel for at udregne overlevelsessandsynligheden på

$$\mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) = \mathbb{E}_{\tau_2}^{\mathbb{Q}}(1_{\tau_1 > t})$$

Der betinges med  $\mathcal{G}_{\tau_2}$  og  $E_1$ .

$$= \mathbb{E}_{\tau_2}^{\mathbb{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(1_{\tau_1 > t} | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1))$$

og bruger ligning (7.5) der siger at  $\Lambda_1(E_1)^{-1} = \tau_1$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\tau_2}^{\mathbb{Q}} \left( \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(1_{\Lambda_1^{-1}(E_1) > t} | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1) \right) \\ &= \mathbb{E}_{\tau_2}^{\mathbb{Q}} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(1_{E_1 > \Lambda_1(t)} | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1)) \\ &= \mathbb{E}_{\tau_2}^{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}(E_1 > \Lambda_1(t) | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1)) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Når der ikke er betinget med  $\mathcal{G}_{\tau_2}$

$$\Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

stokastisk, men når der betinges med  $\mathcal{G}_{\tau_2}$  er den første del af integralet

$$\Lambda_1(\tau_2) = \int_0^{\tau_2} \lambda(s) ds$$

kendt. Dvs. når der er betinget med  $\mathcal{G}_{\tau_2}$  er det

$$\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2) = \int_{\tau_2}^t \lambda(s) ds$$

der er stokastisk.

Derfor trækkes  $\Lambda_1(\tau_2)$  fra på begge sider af uligheden i ligning (7.11), hvilket betyder at

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) &= \mathbb{E}_{\tau_2}^{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}(E_1 - \Lambda_1(\tau_2) > \Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2) | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1)) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)}(E_1 - \Lambda_1(\tau_2)) | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Hvor fordelingen  $F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)}(x)$  er fordelingen for den stokastiske variabel  $\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)$ , dvs

$$F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)}(x) := \mathbb{Q}(\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2) < x)$$

Ved at indsætte ligning (7.12) i ligning (7.10) fås at

$$\begin{aligned} 1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) &= \\ 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)} (1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 > t} + 1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 \leq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)}(E_1 - \Lambda_1(\tau_2)) | \mathcal{G}_{\tau_2}, E_1)) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Fra ovenstående ligning vides det, at man befinder sig på delmængde af mulige udfald hvor  $\tau_0 > \tau_2, \tau_1 > \tau_2$ . Her svarer informationen  $(\mathcal{G}_{\tau_2}, E_1)$  til den samme information som  $(\mathcal{G}_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2, \tau_0 > \tau_2)$ . Ligning (7.13) kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} 1_{C \cup D} 1_{\tau_1 > \tau_2} \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_2}) &= \\ 1_{(\tau_2 \leq \tau_0, \tau_2 \leq T)} (1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 > t} + 1_{\tau_1 > \tau_2, \tau_2 \leq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)}(E_1 - \Lambda_1(\tau_2)) | \mathcal{G}_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2, \tau_0 > \tau_2)) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Pga. af overskueligheden ses herefter kun på

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_2)}(E_1 - \Lambda_1(\tau_2)) | \mathcal{G}_{\tau_2}, \tau_1 > \tau_2, \tau_0 > \tau_2) \quad (7.15)$$

fra ligning (7.14).

Ved at bruge ligning (7.5) kan der laves følgende omskrivning

$$\begin{aligned} \tau_1 > \tau_2 &\Leftrightarrow \Lambda_1^{-1}(E_1) > \tau_2 \\ &\Leftrightarrow E_1 > \Lambda_1(\tau_2) \\ &\Leftrightarrow -\ln(1 - U_1) > \Lambda_1(\tau_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow U_1 > 1 - e^{-\Lambda_1(\tau_2)} \\ &\Leftrightarrow U_1 > \bar{U}_{1,2} \end{aligned}$$

Et tilsvarende argument gælder for  $\tau_0 > \tau_2$ . Sammen med ligning (7.4) betyder at ligning (7.15) kan omskrives til

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_2)}(-\ln(1-U_1)-\Lambda_1(\tau_2))|\mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$$

Ved at bruge sandsynlighedsregnereglerne fra sektion 4.3 fås at

$$= \int_0^1 F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_2)}(-\ln(1-u_1)-\Lambda_1(\tau_2))d\mathbb{Q}(U_1 < u_1|\mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$$

Da det er givet at  $U_1 > \bar{U}_{1,2}$ , kan den nedre integrationsgrænse flyttes fra 0 til  $\bar{U}_{1,2}$

$$= \int_{\bar{U}_{1,2}}^1 F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_2)}(-\ln(1-u_1)-\Lambda_1(\tau_2))d\mathbb{Q}(U_1 < u_1|\mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2}) \quad (7.16)$$

Tilsvarende udledning kan laves, hvis det er investor der går fallit som den første. I så fald er fallitten på tidspunkt  $\tau_0$ , og overlevelsessandsynligheden bliver

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_0}) \\ &= \int_{\bar{U}_{1,0}}^1 F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_0)}(-\ln(1-u_1)-\Lambda_1(\tau_0))d\mathbb{Q}(U_1 < u_1|\mathcal{G}_{\tau_0}, U_1 > \bar{U}_{1,0}, U_0 > \bar{U}_{2,0}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der er nu fundet en formel til at udregne overlevelses sandsynligheden. Men for at kunne udregne denne, skal der findes en metode til at udregne fordelingsfunktionerne

$$F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_0)}(-\ln(1-u_1)-\Lambda_1(\tau_0))$$

og

$$F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_0)}(-\ln(1-u_1)-\Lambda_1(\tau_0))$$

Og de betingede sandsynligheder

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1|\mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$$

og

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1|\mathcal{G}_{\tau_0}, U_1 > \bar{U}_{1,0}, U_0 > \bar{U}_{2,0})$$

## 7.4 Den betinget fordeling

I denne sektion findes der en metode til at udregne de betingede sandsynligheder

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2}) \quad (7.18)$$

og

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_0}, U_1 > \bar{U}_{1,0}, U_0 > \bar{U}_{2,0}) \quad (7.19)$$

### 7.4.1 Regneregler

Inden selve udregningen af den betingede fordeling er der tre regneregler, som skal bruges gennem denne undersektion. Den første er

$$\mathbb{Q}(X < x_1, X > x_2) = \mathbb{Q}(X < x_1) - \mathbb{Q}(X < x_2), \quad \forall x_1 \geq x_2 \quad (7.20)$$

Den anden regneregler er at

$$\mathbb{Q}(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2) = \left. \frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right|_{u_2=U_2} \quad (7.21)$$

for at komme frem til dette skal der bruges to regler for afledte normalfordelinger

$$\frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbb{Q}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \mathbb{Q}(X_1 \leq x_1, X_2 = x_2) \quad (7.22)$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \mathbb{Q}(X \leq x) = \mathbb{Q}(X = x) \quad (7.23)$$

Desuden skal der bruges kernereglen, der siger, at hvis  $y$  er en funktion af  $u$ , og  $u$  er en funktion af  $x$  så har man at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (7.24)$$

og en regel for differentiation af inverse funktioner, der siger at

$$\frac{dy^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(y^{-1}(x))} \quad (7.25)$$

Fra ligning (6.11) har jeg at

$$C(u_1, \dots, u_m) = \mathbb{Q}(X_1 \leq F^{-1}(u_1), \dots, X_m \leq F^{-1}(u_m))$$

Så det fås at den afledte copula er

$$\frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbb{Q}(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), X_2 \leq \Phi^{-1}(u_2))}{\partial u_2}$$

her bruges kernereglen fra ligning (7.24) og får

$$= \frac{\partial \mathbb{Q}(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), X_2 \leq \Phi^{-1}(u_2))}{\partial \Phi^{-1}(u_2)} \cdot \frac{d\Phi^{-1}(u_2)}{du_2} \quad (7.26)$$

Den første del af ligning (7.26), bliver med ligning (7.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{Q}(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), X_2 \leq \Phi^{-1}(u_2))}{\partial \Phi^{-1}(u_2)} &= \mathbb{Q}(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), X_2 = \Phi^{-1}(u_2)) \\ &= \mathbb{Q}(\Phi(X_1) \leq u_1, \Phi(X_2) = u_2) \\ &= \mathbb{Q}(U_1 \leq u_1, U_2 = u_2) \end{aligned}$$

Den anden del af ligning (7.26) bliver med ligning (7.25)

$$\frac{d\Phi^{-1}(u_2)}{du_2} = \frac{1}{\frac{d\Phi}{du_2}(\Phi^{-1}(u_2))}$$

hvilket med ligning (7.23) bliver

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mathbb{Q}(X_2 = \Phi^{-1}(u_2))} \\ &= \frac{1}{\mathbb{Q}(U_2 = u_2)} \end{aligned}$$

Den afledte copula fra ligning (7.26) bliver derfor

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathbb{Q}(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), X_2 \leq \Phi^{-1}(u_2))}{\partial \Phi^{-1}(u_2)} \cdot \frac{d\Phi^{-1}(u_2)}{du_2} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(U_1 \leq u_1, U_2 = u_2)}{\mathbb{Q}(U_2 = u_2)} \\ &= \mathbb{Q}(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Den tredje regneregler handler om betingede fordelinger. Den generelle regel for betingede fordelinger er

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \quad (7.28)$$

Hvis der er fire hændelser  $X, Y, Z$  og  $V$  som fx  $X = (U_1 < u_1)$ ,  $U_2, Z = (U_1 > \bar{U}_{1,2})$  og  $V = (U_0 > \bar{U}_{0,2})$ , så fås med ligning (7.28) at

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(X|Y \cap Z \cap V) &= \frac{\mathbb{Q}(X \cap Y \cap Z \cap V)}{\mathbb{Q}(Y \cap Z \cap V)} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(X \cap Y \cap Z \cap V)}{\mathbb{Q}(Y \cap Z \cap V)} \frac{\mathbb{Q}(Y \cap V)}{\mathbb{Q}(Y \cap V)} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(X \cap Y \cap Z \cap V)}{\mathbb{Q}(Y \cap V)} \frac{\mathbb{Q}(Y \cap V)}{\mathbb{Q}(Y \cap Z \cap V)} \end{aligned}$$



Her brug jeg igen (7.28)

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{Q}(X \cap Z | Y \cap V) \frac{1}{\mathbb{Q}(Z | Y \cap V)} \\
&= \frac{\mathbb{Q}(X \cap Z | Y \cap V)}{\mathbb{Q}(Z | Y \cap V)}
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Reglen kan kombineres på forskellige måde med forskellige dele før og efter  $|\cdot$ -tegnet.

## 7.4.2 Udledning af de betingede fordelinger

Efter at have gennemgået de tre regneregler vil der her blive vist, hvordan den betingede fordeling udregnes. Der begyndes med tilfældet hvor modparten går fallit som den første.

$$C_{1|0,2}(u_1; U_2) := \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2}) \tag{7.30}$$

Den information som findes i  $\mathcal{G}_{\tau_2}$ , der er relevant i fht til at finde fordelingen af  $U_1$ , er at  $U_2$  er kendt. Derfor bliver ligning (7.30) til

$$C_{1|0,2}(u_1; U_2) = \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | U_2, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$$

her bruges så ligning (7.29)

$$= \frac{\mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_1 > \bar{U}_{1,2} | U_2, U_0 > \bar{U}_{0,2})}{\mathbb{Q}(U_1 > \bar{U}_{1,2} | U_2, U_0 > \bar{U}_{0,2})} \tag{7.31}$$

Pga. af overskueligheden udregnes tælleren og nævneren i ligning (7.31) hver for sig. Først tælleren.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_1 > \bar{U}_{1,2} | U_2, U_0 > \bar{U}_{0,2}) \\
&= \frac{\mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2)}{\mathbb{Q}(U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2)}
\end{aligned}$$

Der bruges nu sandsynlighedsregnereglen fra ligning (7.20)

$$= \frac{\mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2) - \mathbb{Q}(U_1 < \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2)}{\mathbb{Q}(U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2)} \tag{7.32}$$

Ved at rykke rundt på denne ligning

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | U_1) = \mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_1) + \mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_0 < \bar{U}_{0,2} | U_1)$$

fås at første led i tælleren i ligning (7.32) bliver

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2) = \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | U_2) - \mathbb{Q}(U_1 < u_1, U_0 < \bar{U}_{0,2} | U_2)$$

og med ligning (7.21) fås at

$$= \frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} - \frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, u_1, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2}$$

I ligning (7.32) fås fra tællerens andet led at

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(U_1 < \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2) &= \mathbb{Q}(U_1 < \bar{U}_{1,2} | U_2) - \mathbb{Q}(U_0 < \bar{U}_{0,2}, U_1 < \bar{U}_{1,2} | U_2) \\ &= \frac{\partial C_{1,2}(\bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} - \frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, \bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} \end{aligned}$$

Nu ses på nævneren i ligning (7.31), her fås at

$$\mathbb{Q}(U_1 > \bar{U}_{1,2} | U_2, U_0 > \bar{U}_{0,2}) = \frac{\mathbb{Q}(U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2)}{\mathbb{Q}(U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2)} \quad (7.33)$$

Tælleren i ligning (7.33) kan med samme argumenter, som de tidligere udregninger i denne undersektion, skrives som

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2) \\ &= \mathbb{Q}(U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2) - \mathbb{Q}(U_1 < \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2} | U_2) \\ &= 1 - \frac{\partial C_{0,2}(\bar{U}_{0,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} - \frac{\partial C_{1,2}(\bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} + \frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, \bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Nævnerne i ligning (7.32) og (7.34) går ud med hinanden, når de sættes ind i ligning (7.31), dvs

$$\begin{aligned} C_{1|0,2}(u_1; U_2) &= \\ &\frac{\frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} - \frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, u_1, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} - \frac{\partial C_{1,2}(\bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} + \frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, \bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2}}{1 - \frac{\partial C_{0,2}(\bar{U}_{0,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} - \frac{\partial C_{1,2}(\bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2} + \frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, \bar{U}_{1,2}, u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2=U_2}} \end{aligned} \quad (7.35)$$

På tilsvarende måde udregnes den betingede fordeling i tilfældet, hvor investor går fallit som den første.

$$C_{1|2,0}(u_1; U_0) := \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_0}, U_1 > \bar{U}_{1,0}, U_2 > \bar{U}_{2,0})$$

hvilket giver at

$$\begin{aligned} C_{1|0,2}(u_1; U_0) &= \\ &\frac{\frac{\partial C_{0,1}(u_0, u_1)}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0} - \frac{\partial C(u_0, u_1, \bar{U}_{2,0})}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0} - \frac{\partial C_{0,1}(u_0, \bar{U}_{1,0})}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0} + \frac{\partial C(u_0, \bar{U}_{1,0}, \bar{U}_{2,0})}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0}}{1 - \frac{\partial C_{0,2}(u_0, \bar{U}_{2,0})}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0} - \frac{\partial C_{0,1}(u_0, \bar{U}_{1,0})}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0} + \frac{\partial C(u_0, \bar{U}_{1,0}, \bar{U}_{2,0})}{\partial u_0} \Big|_{u_0=U_0}} \end{aligned} \quad (7.36)$$

### 7.4.3 Approksimation af afledte copula funktioner

De to ligninger (7.35) og (7.36), der er blevet udledt, til udregning af de betingede sandsynligheder, består i at regne en fem afledte copula funktioner. Dette kan være meget tidskrævende, som det kan ses nedenunder i tabellen. Der viser den tid det tager, at udregne et antal afledte copulaer eksakt.

|                   |    |     |     |
|-------------------|----|-----|-----|
| Antal beregninger | 10 | 100 | 250 |
| Tid (sek.)        | 11 | 118 | 295 |

Tabel 7.1:  $\frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2}$  udregnet for x værdier af  $u_1$

Da den betingede sandsynlighed skal udregnes mange gange for at udregne værdien af en CDS kontrakt, kan det ses af ovenstående tabel, at det vil betyde meget lang beregningstid, at udregne det eksakt. Det er derfor nødvendigt, at tage approksimationer i brug, for at forkorte beregningstiden.

Der ses her på tre forskellige metoder til approksimation af de afledte copula funktioner. For at simplificere det, ses på tilfældet hvor copulaen kun afhænger af de to variable  $u_1$  og  $u_2$ , men det er det samme princip i tilfældet med andre, eller flere variable.

Der gælder at

$$\left. \frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right|_{u_2=U_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_{1,2}(u_1, u_2 + h) - C_{1,2}(u_1, u_2)}{h} \quad (7.37a)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_{1,2}(u_1, u_2 + \frac{h}{2}) - C_{1,2}(u_1, u_2 - \frac{h}{2})}{h} \quad (7.37b)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_{1,2}(u_1, u_2) - C_{1,2}(u_1, u_2 - h)}{h} \quad (7.37c)$$

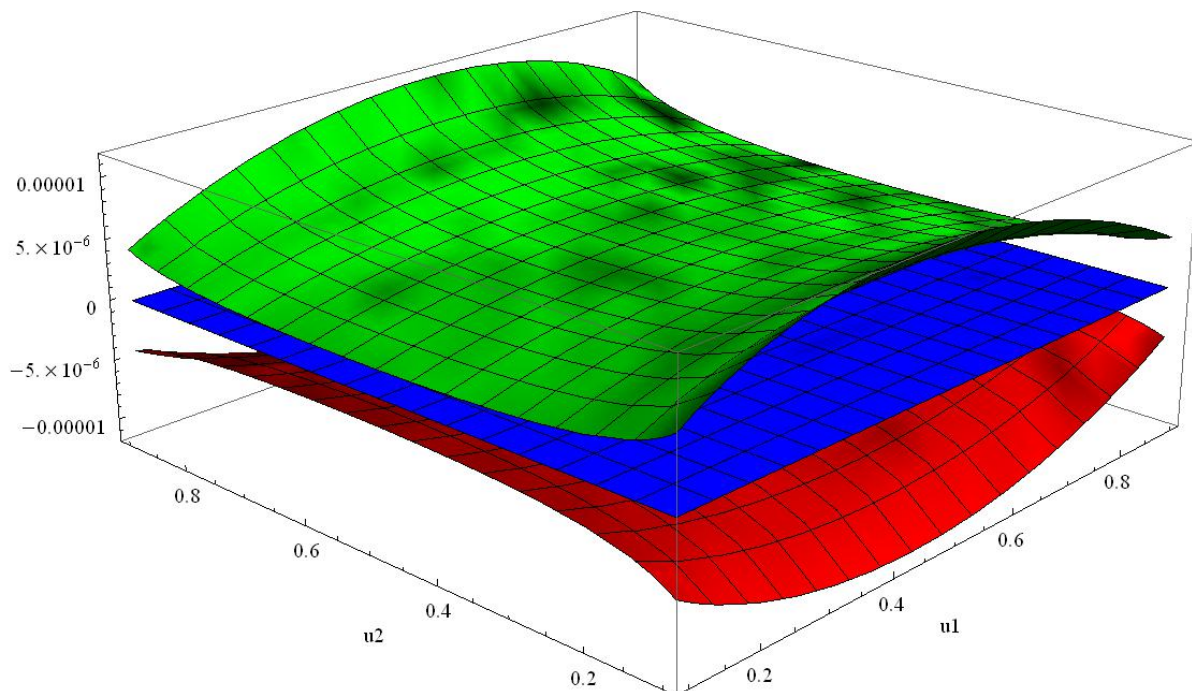
og approksimationen kan derfor laves på tre forskellige måder med et tilpas lille  $h$

$$\left. \frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right|_{u_2=U_2} \approx \frac{C_{1,2}(u_1, u_2 + h) - C_{1,2}(u_1, u_2)}{h} \quad (7.38a)$$

$$\approx \frac{C_{1,2}(u_1, u_2 + \frac{h}{2}) - C_{1,2}(u_1, u_2 - \frac{h}{2})}{h} \quad (7.38b)$$

$$\approx \frac{C_{1,2}(u_1, u_2) - C_{1,2}(u_1, u_2 - h)}{h} \quad (7.38c)$$

For at få en idé om hvilken en af metoderne, der er bedst, holdes beregningerne af de tre approksimationer op mod den præcise udregning af den afledte copula funktion. Herunder kan der ses en graf der viser differencen mellem den præcise udregning og de tre approksimationer.

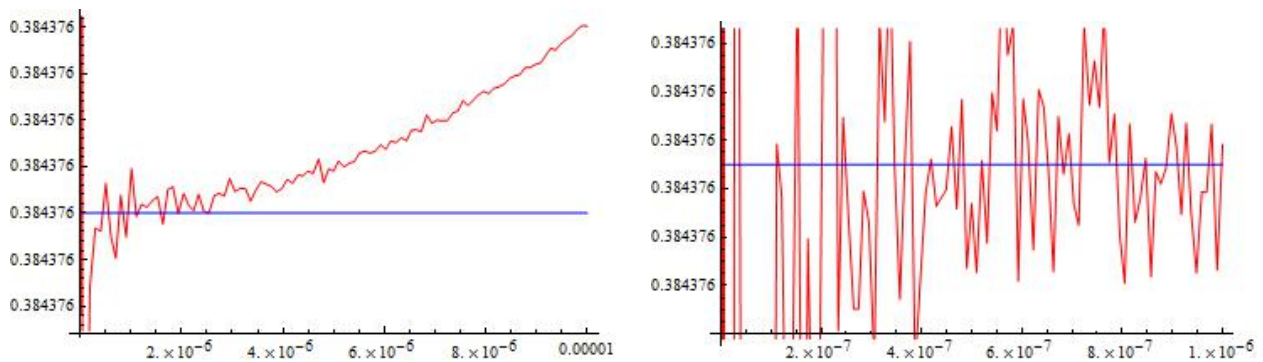


Figur 7.1: Grafen viser forskellen mellem den approksimerede afledte copula og den præcist udregnede. Der ses på udsnittet hvor  $u_1 \in [0, 1; 0, 9]$  og  $u_2 \in [0, 1; 0, 9]$ , og korrelationen mellem  $u_1$  og  $u_2$  er 0,1. Den røde, den blå og den grønne svarer til hhv. approksimationerne (7.38a), (7.38b) og (7.38c), alle regnet med  $h = 0,0001$ .

På grafen ses, at approksimationen (7.38a) underestimerer og (7.38c) overestimerer værdien af copula funktion, og at (7.38b) derfor er den bedste af de tre approksimations metoder. Resultatet er det samme for andre afledte copula funktioner og med andre korrelationer end den der er brugt i grafen.

Der skal dog lægges mærke til, at approksimationen med metoden fra ligning (7.38b) kun kan bruges i intervallet  $u_2 \in [\frac{h}{2}; 1 - \frac{h}{2}]$ , da der uden for intervallet vil skulle bruges beregninger af copulaen for tal, der er mindre end nul eller større end en, hvilket ikke er muligt. Det er derfor nødvendigt, at tage de to andre approksimation metoder i brug for de dele approksimationen. For  $u_2 \in [0; \frac{h}{2}]$  bruges approksimationen fra ligning (7.38a), og for  $u_2 \in [1 - \frac{h}{2}; 1]$  bruges approksimationen fra ligning (7.38c).

Der skal findes et passende  $h$  til approksimationen. Fra ligning (7.37) vides det, at et uendeligt lille  $h$  giver det "rigtige" resultat, og det vil derfor umiddelbart give bedst mening at vælge  $h$  så småt som muligt. Problemet opstår dog i den numeriske implementeringen i Mathematica, da et meget lille  $h$  kan medføre beregningsmæssige problemer. For at illustrere dette kan man her se to grafer, hvor det illustreres hvordan ligning (7.38b) opfører sig mht.  $h$ .



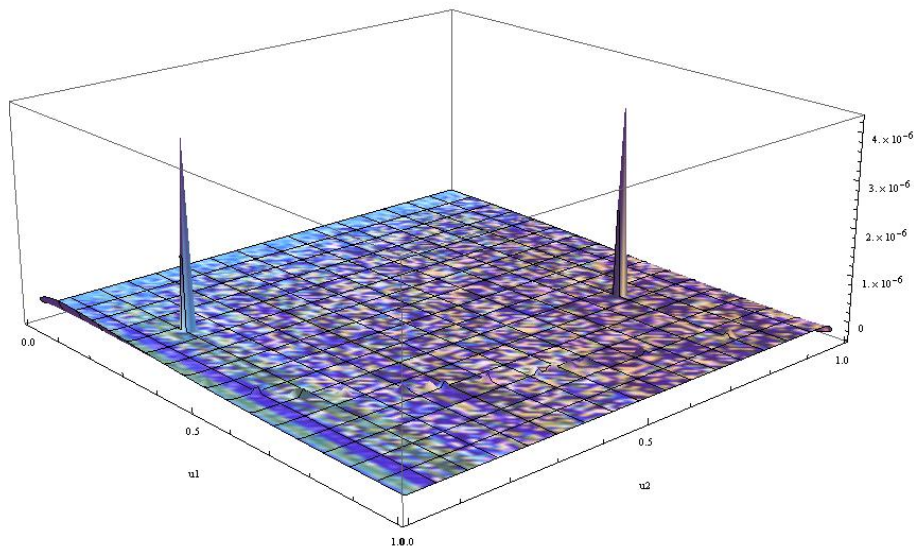
Figur 7.2: I de to grafer er den røde approksimationen der afhænger af  $h$  og den blå er den præcist udregnede. Graferne er begge regnet med  $u_1 = u_2 = 0,1$  og en korrelation på 0,9.

På graferne ses det, at når  $h$  bliver tilstrækkelig lille opstår beregningsproblemer i Mathematica. Det kan variere en del for forskellige afledte copula funktioner, og med andre korrelationer end den, der er brugt i grafen. Da ligningerne med forskellige korrelationer, kræver forskellige  $h$ , er det ikke nemt at finde et  $h$  der passer til alle situationer. Jeg vælger derfor at bruge  $h = 0,001$ , da det er for alle de mulige kombinationer af  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  og korrelationer, ikke bliver for småt, men stadig tilpas lille til at afvigelseerne ikke er nævneværdige.

Til sidst er her en graf der viser en udregning, af approksimationen af

$$\frac{\partial C_{1,2}(u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

ved brug af den metode, som i denne undersektion er blevet beskrevet, i fht. den præcist udregnede afledte.



Figur 7.3: Grafen viser forskellen mellem den approksimerede afledte copula og den præcist udregnede. Der ses på udsnittet hvor  $u_1 \in [0; 1]$  og  $u_2 \in [0; 1]$ , og korrelationen mellem  $u_1$  og  $u_2$  er 0, 1, regnet med  $h = 0,001$ .

Som man kan se på grafen, så er der godt nok afvigelser, men de er igen så tilpas små, at de må betragtes som ubetydelige.

#### 7.4.4 Interpolation af den betingede sandsynlighed

Når overlevelsessandsynlighederne fra ligning (7.35) og (7.36) med de approksimerede afledte copulafunktioner skal udregnes, er det en udregning af sandsynligheden for fallit på et givet tidspunkt  $t$  efter fallittidspunktet for enten investor eller modpart. De betingede sandsynligheder fra ligning (7.18) og (7.19), der indgår i beregningen af overlevelsessandsynlighederne, er dog ikke afhængig af  $t$ . Selvom det ikke er voldsomt tidskrævende at beregne, så løber det stadig op, når den beregnes igen og igen. Det er derfor praktisk, at have en funktion som laves via interpolation ved hjælp af et passende antal beregninger af den betingede sandsynlighed.

Inden selve interpolationen af de betingede sandsynligheder er det praktisk, at lave nogle betragtninger om den betingede sandsynlighed for at optimere interpolationen og derved skabe færre og mindre afvigelser. Af praktiske årsager, ses kun på den ene af de to formler for den betingede sandsynlighed, men resultatet er også gældende for den anden. Der ses på den betingede sandsynlighed, hvor det er modparten, der går fallit

som den første, dvs.

$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$$

Da  $U_1 \in [\bar{U}_{1,2}; 1]$ , betyder det at der er følgende grænser

$$\lim_{u_1 \rightarrow \bar{U}_{1,2}} \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2}) = 0$$

og at

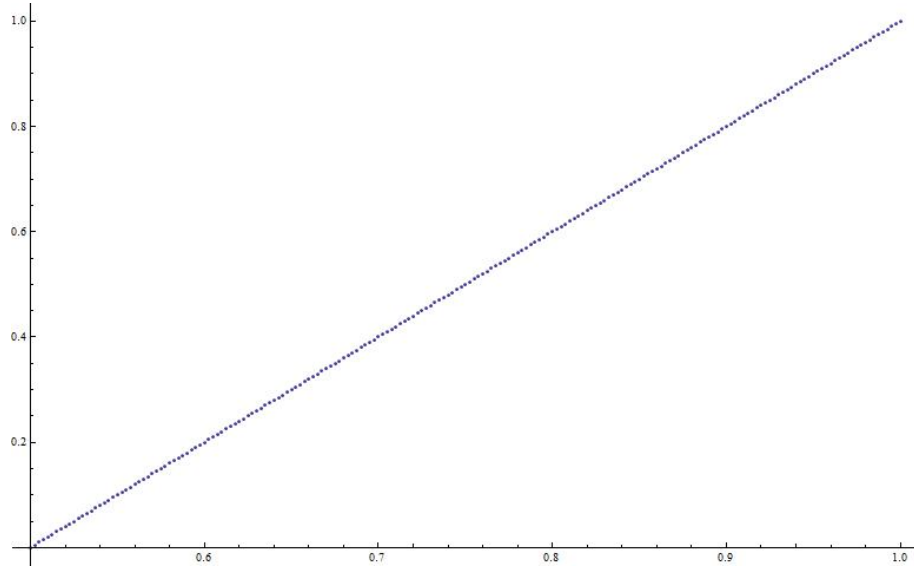
$$\lim_{u_1 \rightarrow 1} \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2}) = 1$$

Hvilket altid vil gøre sig gældende.

Desuden vides det, at hvis referencen ikke er korreleret med hverken investor eller modparten, dvs.

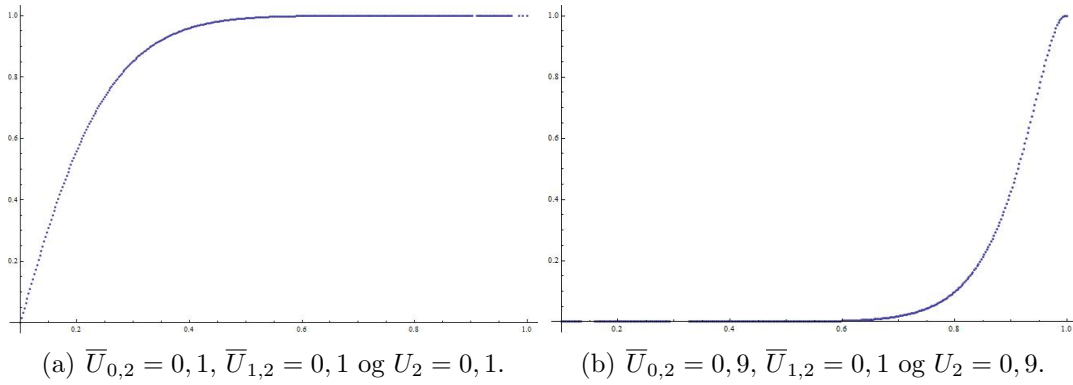
$$\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2}) = \mathbb{Q}(U_1 < u_1 | U_1 > \bar{U}_{1,2})$$

Hvilket betyder, at den betingede sandsynlighed som en funktion af  $u_1$  bliver lineær i intervallet  $u_1 \in [\bar{U}_{1,2}; 1]$ . Hvilket også kan ses i nedenstående graf.



Figur 7.4:  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  udregnet med ingen korrelation og  $\bar{U}_{1,2} = 0,5$

Da sandsynlighederne er en lineær funktion af  $u_1$ , når korrelationen er nul, er det nemt at interpolere, da der kun behøves to punkter, som ikke engang behøves at beregne, da de kendes på forhånd. Men jo tættere korrelationen kommer tættere på enten en, eller minus en, så bliver det svære at lave interpolationen. Nedunder er vist to grafer der viser den betingede fordeling regnet med høj korrelation mellem de tre parter.

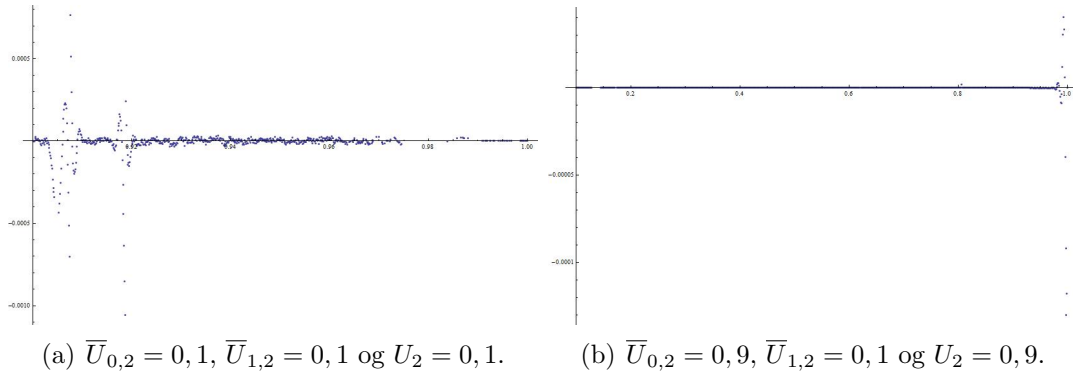


Figur 7.5:  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$ . Alle korrelationer er 0,9.

På figur 7.5(a) kan det ses at en høj korrelation og med lave  $\bar{U}_{0,2}$  og  $U_2$ , så betyder det, at den betingede sandsynlighed hurtigt stiger mod et. Dette giver intuitivt god mening, da de lave  $\bar{U}_{0,2}$  og  $U_2$  med høj korrelation til  $U_1$ , betyder at  $U_1$  også burde være lav.

På figur 7.5(b) kan det ses at en høj korrelation, og hvis  $\bar{U}_{0,2}$  og  $U_2$  er høje, så betyder det at den betingede sandsynlighed er meget tæt på nul og først stiger mod et til sidst. Dette giver også intuitivt god mening, da de høje  $\bar{U}_{0,2}$  og  $U_2$  med høj korrelation til  $U_1$ , betyder at  $U_1$  også burde være høj.

Det svære i interpolationen er derfor at fange en evt. skarp stigning i starten, eller en hurtig skarp stigning til sidst. Dette kan observeres i de nedenstående to grafer, hvor der i den første graf er store fejl i begyndelsen, og i den anden graf, store fejl til slut.



Figur 7.6:  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  udregnet præcist, fratrasket interpolationen. Alle korrelationer er 0,9.

Fejlene i interpolationen opstår i enderne af de to grafer, mens den midterste del viser sig ret præcis. Dette betyder, at der til interpolationen af den midterste del ikke er brug for så mange punkter til interpolationen, som det er nødvendigt i enderne, for at få et tilstrækkelig præcis interpolation.



Et andet aspekt er den tid det tager at danne kurven. Det er nødvendigt, at beregningstiden er tilstrækkelig lav for at sikre, at det er muligt at køre programmet inden for en overskuelig tidshorisont.

Her kommer et eksempel på udregningen af en kurve. En kurve med  $\bar{U}_{1,2} = 0,5$ , lige store skridt af størrelsen 0,001 og med alle korrelationer på 0,5 tager små 17 sekunder at lave. Det tal varierer selvfølgelig, men bruges her som et hurtigt gæt på, hvad en mulig gennemsnits beregningstid kan være. Ud fra en tid på ca. 17 sekunder, vil det at regne en CDS pris tusind gange, og derved danne kurven tusind gange, betyde, at det ville tage i alt ca. 4,7 timer, alene for beregningen af kurven for den betingede sandsynlighed.

For at sikre at der er udregnet punkter nok til at lave interpolationen, uden at det tager for lang tid, deles udregningerne af punkterne op i to tilfælde.

Det første tilfælde er hvor  $\bar{U}_{1,2} \geq 0,925$ . Da det er så småt et interval, bruges der tredive punkter, der er fordelt med lige store intervaller mellem  $\bar{U}_{1,2}$  og 1. Dette er med til at sikre tilpas små fejl, som det kan ses senere i figur 7.9(c).

I det andet tilfælde er det ikke helt så enkelt, da den deles op i tre dele. Det første delinterval går fra  $\bar{U}_{1,2}$  til  $\bar{U}_{1,2} + 0,025$ . I dette interval udregnes punkterne med mellemrum af størrelsen 0,0015<sup>35</sup>. Dette sikre, at der er nok punkter i tilfælde af en skarp stigning i starten. Det andet delinterval går fra  $\bar{U}_{1,2} + 0,025$  til 0,9. I dette interval udregnes punkterne med mellemrum af størrelsen 0,025<sup>36</sup>. Det sidste delinterval går fra 0,9 op til 1 er lavet til at fange en skarp stigning til slut, idet der i intervallet udregnes punkter med mellemrum af størrelsen 0,004. De fejl der måtte opstå, kan ses senere i figur 7.9(b) og 7.9(a). For større overblik er inddelingerne vist herunder i en tabel.

| Interval                                 | Størrelsen af mellemrumet |
|------------------------------------------|---------------------------|
| $[\bar{U}_{1,2}; \bar{U}_{1,2} + 0,025]$ | 0,0015                    |
| $[\bar{U}_{1,2} + 0,025; 0,9]$           | 0,025                     |
| $[0,9; 1]$                               | 0,004                     |

Tabel 7.2: Størrelsen af mellemrummet mellem punkterne, for forskellige intervaller i udregningen af den interpolerede kurve for betingede sandsynligheder.

Der er desværre numerisk ustabilitet, som i større og mindre grad påvirker udregningerne af sandsynlighederne. For at sikre at kurven bliver ”pæn”, laves der derfor en sortering af data. For mere info se appendiks A.3. Som det kan ses i tabellen nedenunder opstår der små regnefejl, som bliver korrigeret af data sorteringen

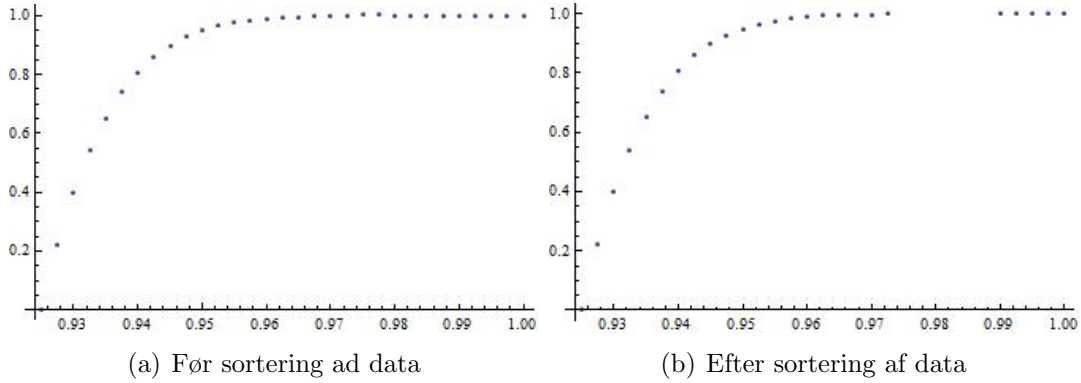
<sup>35</sup>Hvis  $\bar{U}_{1,2} \geq 0,9$ , udelades denne udregning

<sup>36</sup>Hvis  $\bar{U}_{1,2} \geq 0,875$ , udelades denne udregning

| $u_1$  | $\mathbb{Q}(U_1 < u_1   \mathcal{G}_{\tau_2}, \dots)$ | $u_1$  | $\mathbb{Q}(U_1 < u_1   \mathcal{G}_{\tau_2}, \dots)$ |
|--------|-------------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------|
| 0,9575 | 0,983817                                              | 0,9800 | 1,001560                                              |
| 0,9600 | 0,989253                                              | 0,9825 | 1,000640                                              |
| 0,9625 | 0,993150                                              | 0,9850 | 0,999406                                              |
| 0,9650 | 0,995611                                              | 0,9875 | 0,999303                                              |
| 0,9675 | 0,997047                                              | 0,9900 | 0,999201                                              |
| 0,9700 | 0,997970                                              | 0,9925 | 0,999303                                              |
| 0,9725 | 0,998688                                              | 0,9950 | 0,999303                                              |
| 0,9750 | 1,003100                                              | 0,9975 | 0,999303                                              |
| 0,9775 | 1,002480                                              | 1,0000 | 0,999303                                              |

Tabel 7.3:  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  udregnet med alle korrelationer på 0,9,  $\bar{U}_{0,2} = 0,1$ ,  $\bar{U}_{1,2} = 0,92$  og  $U_2 = 0,1$ .

I de to nedenstående grafer er det muligt at se at data sorteringen tager punkter. Det sker i dette tilfælde fordi de er større end 1, hvilket ikke kan passe



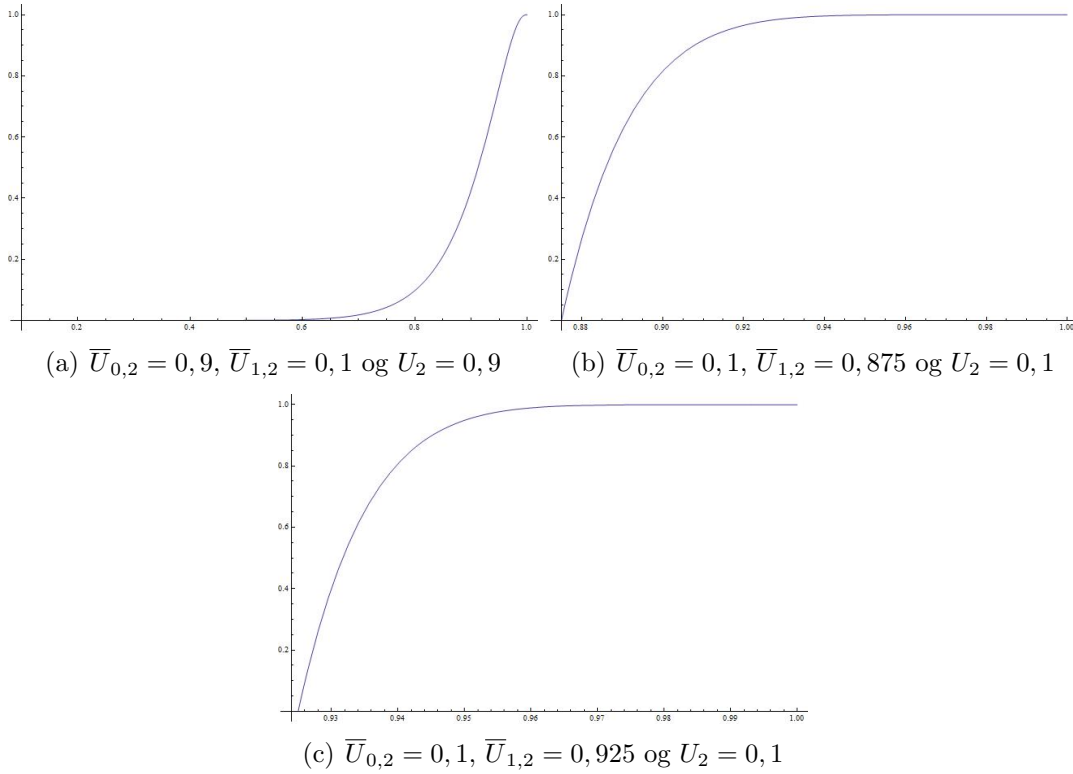
Figur 7.7: De to grafer viser  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  udregnet med alle korrelationer på 0,9,  $\bar{U}_{0,2} = 0,9$ ,  $\bar{U}_{1,2} = 0,925$  og  $U_2 = 0,1$ .

De huller, der opstår i data, som fx kan ses i grafen i figur 7.7, får ikke betydning, da der interpoleres mellem punkterne.

Den interpolation, der bliver brugt, er tredjegrads *spline* interpolation. Hvor lineær interpolation bruger en lineær funktion mellem to på hinanden følgende punkter, bruger tredjegrads *spline* interpolation et tredjegrads polynomium mellem to punkter. Polynomierne vælges så de to gange differentialbel. I endepunkterne dvs. det første og det sidste punkt bliver den anden afledte sat til nul, da dette er med til at sikre at systemet af polynomier kan løses. Dette er også med til, at sikre, at kurven bliver ”pænere”, hvilket er med til at reducere de fejl, der opstår ved brug af interpolation<sup>37</sup>.

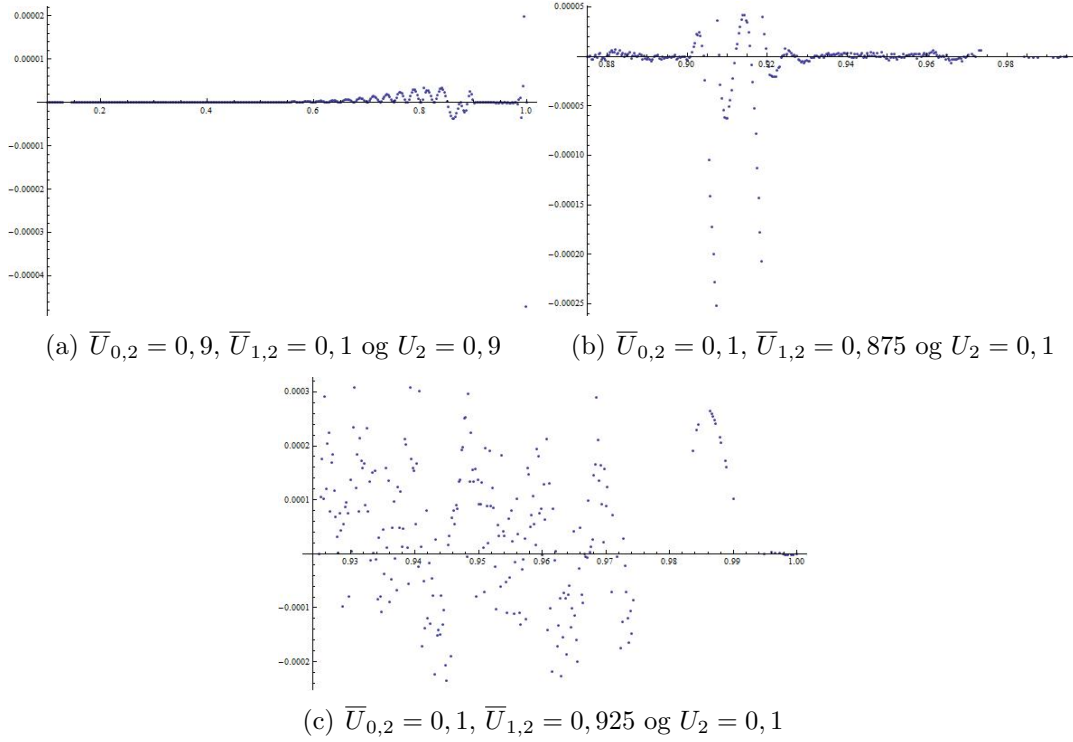
<sup>37</sup>Selve interpolationen laves med Mathematica funktionen `Interpolation[·, Method→"Spline"]`

Her under ses tre eksempler på fordelinger lavet med interpoaltionen. Udregningerne tager for de tre 1,0 til 2,4 sekunder, hvilket betyder at beregningerne er kommet ned i et tidsleje der er overkommeligt.



Figur 7.8: De tre grafer viser  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  udregnet og interpoleret med tredje grads *spline* interpolation. Alle grafer er udregnet korrelationer på 0,9

Approximationen af  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  med interpolation sker dog ikke uden fejl, men fejlene er kommet ned på et niveau jeg vælger at acceptere. Nedenstående tre grafer viser fejlene i interpolationen i forhold til de faktisk udregnede værdier af de tre grafer i figur 7.8.



Figur 7.9: De tre grafer viser  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_2}, U_1 > \bar{U}_{1,2}, U_0 > \bar{U}_{0,2})$  udregnet i 353 punkter, set i fht. de interpolerede grafer fra figur 7.8

Der er nu fundet en metode til at udregne de betingede sandsynligheder, hvor beregningstiden er blevet tilstrækkelig lav. Dette har dog været på bekostning af præcision i udregningen af de betingede sandsynligheder. Hvis modellen skulle bruges til at regne på handlebare priser, er det nødvendigt med en mere omfangsrig test af betydningen af, at der opstår fejl i interpolationen og fejl i approksimationen af den afledte copula funktioner.

## 7.5 Fourier inversion

For at kunne udregne overlevelsessandsynlighederne fra ligning (7.16) og (7.17), skal der findes en metode til udregning af fordelingen

$$F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(-\ln(1 - u_1) - \Lambda_1(\tau_i)), \quad i = 0, 2 \quad (7.39)$$

Det vil der blive gjort i denne sektion. Der vil blive gjort brug af Fourier inversion.

### 7.5.1 Teori

Først ses på teorien der ligger til grund for Fourier inversion.

Da  $-\ln(1 - u_1) - \Lambda_1(\tau_i)$  her er en konstant, vælges pga. overskueligheden, i udledningen at se på fordelingen af  $x$ , dvs.

$$F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(x), \quad i = 0, 2 \quad (7.40)$$

Det første spørgsmål må naturligvis være om fordelingen overhoved findes. Det gør den, for uanset om der er en analytisk udtryk for fordelingen eller ej, så vil en stokastiske variabel altid have en fordeling<sup>38</sup>.

For at gøre det mere overskueligt, til at begynde med skiftes den stokastiske variabel  $\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_0)$  ud med  $X$ .

For at finde fordelingen for en stokastisk variabel  $X$ , skal jeg bruge  $X$ 's karakteristiske funktion  $\phi_X(u)$ . Den karakteristiske funktion kan ses som en alternativ metode til at beskrive en stokastisk variabel. For fordelingsfunktion har man at

$$F_X(x) = \mathbb{E}(1_{X \leq x})$$

derfor har man for den karakteristiske funktion at

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX}), \quad \text{hvor } i = \sqrt{-1} \text{ og } u \in \mathbb{R} \quad (7.41)$$

Der er en-til-en forhold mellem fordelingen og den karakteristiske funktion. Dette betyder, at hvis den ene kendes, er det også muligt at finde den anden. Sammenhængen mellem fordelingen og den karakteristiske funktion er givet ud fra inversions teoremet, der er givet som

$$F_X(x) = \mathbb{Q}(X \leq x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu} \phi_X(u)}{iu} du$$

Schmelzle[24] laver dog følgende omskrivning, så udtrykket for fordelingen bliver

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{-iux} \phi_X(u)}{u} \right) du$$

hvor funktionen  $\operatorname{Im}(\cdot)$  er den imaginære del af et tal, dvs.  $\operatorname{Im}(a + bi) = b$

For at kunne udregne fordelingen fra ligning (7.40) er det nødvendigt at kende den karakteristiske funktion for  $\phi_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(u)$ . Fra ligning (7.41) vides det, at den kan skrives som

$$\phi_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(u) = \mathbb{E}(e^{iu(\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i))})$$

For at lave udregningen, skal man først genkalde to ligninger fra afsnit 6.2. Den første er

$$\int_0^t \lambda_1(s) ds = \int_0^t x_1(t) ds + \int_0^t \varphi_1(s, \beta) ds$$

---

<sup>38</sup>Schmelzle[24], p.7

og den anden er

$$\Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_1(s)ds, \quad X_1(t) = \int_0^t x_1(s)ds, \quad \Psi_1(t) = \int_0^t \varphi_1(s, \beta)ds$$

Desuden skal der bruges at

$$\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i) = \int_0^t \lambda_1(s)ds - \int_0^{\tau_i} \lambda_1(X_s)ds = \int_{\tau_i}^t \lambda_1(X_s)ds$$

Det fås nu, at den karakteristiske funktion bliver

$$\begin{aligned} \phi_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(u) &= \mathbb{E} \left( e^{iu(\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i))} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{iu \int_{\tau_i}^t \lambda_1(s)ds} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{iu \left( \int_{\tau_i}^t x_1(s)ds + \int_{\tau_i}^t \varphi_1(s, \beta)ds \right)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{iu \int_{\tau_i}^t x_1(s)ds} e^{iu \int_{\tau_i}^t \varphi_1(s, \beta)ds} \right) \end{aligned}$$

Da  $x(s)$  og  $\varphi(s, \beta)$  er uafhængige, så fås det at

$$= \mathbb{E} \left( e^{iu \int_{\tau_i}^t x_1(s)ds} \right) \mathbb{E} \left( e^{iu \int_{\tau_i}^t \varphi_1(s, \beta)ds} \right)$$

og da  $\varphi_1(s, \beta)$  er deterministisk, kan forventningstegnet fjernes, så

$$= \mathbb{E} \left( e^{iu \int_{\tau_i}^t x_1(s)ds} \right) e^{iu \int_{\tau_i}^t \varphi_1(s, \beta)ds} \quad (7.42)$$

Den anden del af ligning (7.42) kan let omskrives, så

$$\begin{aligned} e^{iu \int_{\tau_i}^t \varphi_1(s, \beta)ds} &= e^{iu \left( \int_0^t \varphi_1(s, \beta)ds - \int_0^{\tau_i} \varphi_1(s, \beta)ds \right)} \\ &= e^{iu(\Psi_1(t) - \Psi_1(\tau_i))} \end{aligned}$$

Den første del af ligning (7.42) er en lidt større udfordring. Fra Andreas Eckner[25] vides det, at for dynamikken

$$dx_1 = k(\theta - x_1)dt + \sigma\sqrt{x_1}dW_t,$$

Det er den samme dynamik som i ligning (6.5). Det er

$$\mathbb{E} \left( e^{iu \int_{\tau_i}^t x_1(s)ds} \right) = e^{\alpha(t - \tau_i) + \beta(t - \tau_i)x_1(\tau_i)}$$

hvor

$$\begin{aligned} \alpha(t - \tau_i) &= -\frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left( \frac{c + de^{-\gamma(t - \tau_i)}}{c + d} \right) + \frac{k\theta}{c}(t - \tau_i) \\ \beta(t - \tau_i) &= \frac{1 - e^{-\gamma(t - \tau_i)}}{c + d} \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{k^2 - 2\sigma^2 i u} \\ c &= \frac{k + \gamma}{2iu} \\ d &= \frac{-k + \gamma}{2iu}\end{aligned}$$

Den karakteristiske funktion kan derfor nu udregnes som

$$\begin{aligned}\phi_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(u) &= \mathbb{E} \left( e^{iu(\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i))} \right) \\ &= e^{\alpha(t-\tau_i)+\beta(t-\tau_i)x_1(\tau_i)} e^{iu(\Psi_1(t)-\Psi_1(\tau_i))} \\ &= e^{\alpha(t-\tau_i)+\beta(t-\tau_i)x_1(\tau_i)+iu(\Psi_1(t)-\Psi_1(\tau_i))}\end{aligned}\tag{7.43}$$

Nu findes der et udtryk for den karakteristiske funktion  $\phi_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(u)$ , og fordelingen fra ligning (7.40), kan nu udregnes som

$$F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left( \frac{e^{-iux} \phi_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(u)}{u} \right) du \tag{7.44}$$

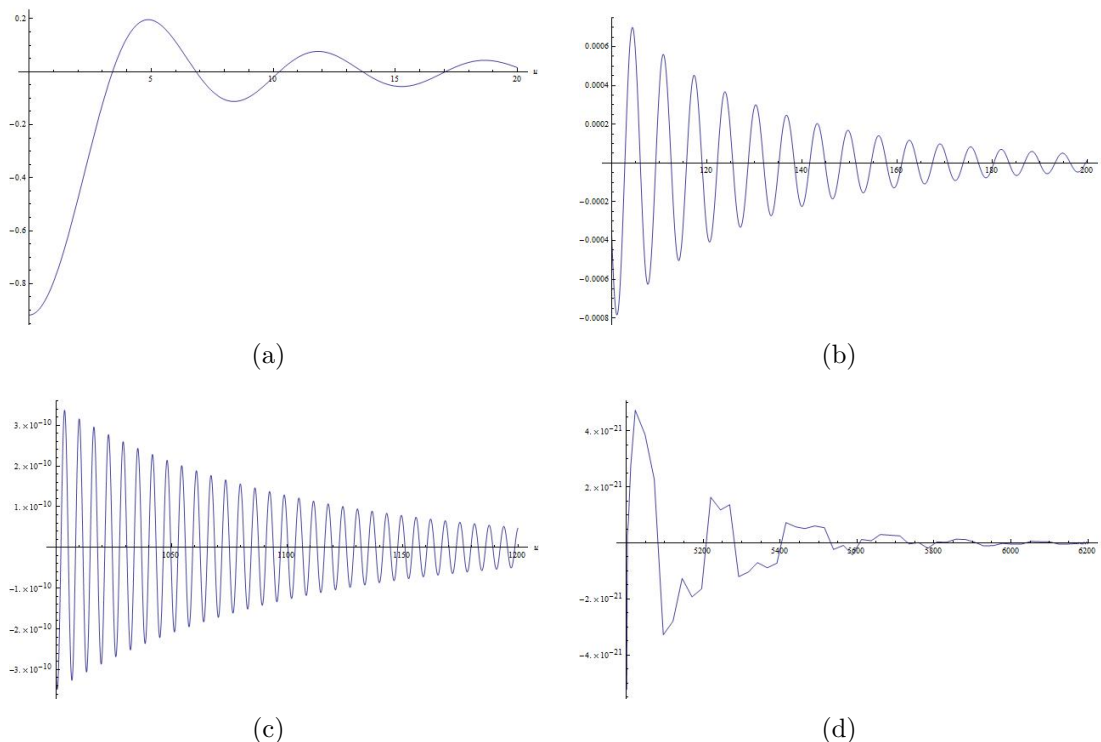
### 7.5.2 Øvre integrationsgrænse

Integralet i ligning (7.44) går fra nul til uendelig, det er ikke muligt at implementere i Mathematica. Det er derfor nødvendigt at finde et andet interval, hvor det er muligt at regne integralet.

For at få en idé om hvilket interval der skal integreres over, ses der først på funktionen i integralet.

$$\text{Im} \left( \frac{e^{-iux} \phi_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(u)}{u} \right) \tag{7.45}$$

Nedenunder er der fire grafer, der viser repræsentative eksempler på ligning (7.45)



Figur 7.10: De fire grafer viser et eksempel på ligning (7.45) for forskellige intervaller af  $u$ , med  $k = 0,5$ ,  $\theta = 0,02$  og  $\sigma = 0,1$ . Eksemplerne er repræsentative for den generelle udvikling af funktionen i ligning (7.45).

Det, man kan se i ovenstående eksempler på funktionen i ligning (7.45) er, at det er en funktion, som hele tiden svinger omkring 0. Når  $u$  vokser, falder funktionens svingninger, hvilket er meget intuitivt, da der i funktionen bliver divideret med  $u$ <sup>39</sup>. På figur 7.10(d), kan ses at Mathematica får problemer med udregningen af funktion, hvis  $u$  bliver for ”stor”. Da udsvingende er store i begyndelsen og derefter bliver mindre, kommer der et punkt hvor betydningen for højere  $u$ ’er ikke har reel betydning for integralet. Integralet tages derfor fra nul og op til en tilstrækkelig høj øvre grænse, som kaldes  $u_0$ . Dette sikrer, at approksimationen er tilstrækkelig, men stadig ikke så højt at Mathematica ikke kan lave beregningerne. Dvs. at integralet fra (7.44) bliver approksimeret med

$$\int_0^{u_0} \text{Im} \left( \frac{e^{-iux} \phi_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(u)}{u} \right) du \quad (7.46)$$

<sup>39</sup>Funktionen (7.45) har altid samme udformning vist i figur 7.10. For flere eksempler se da appendiks A.2

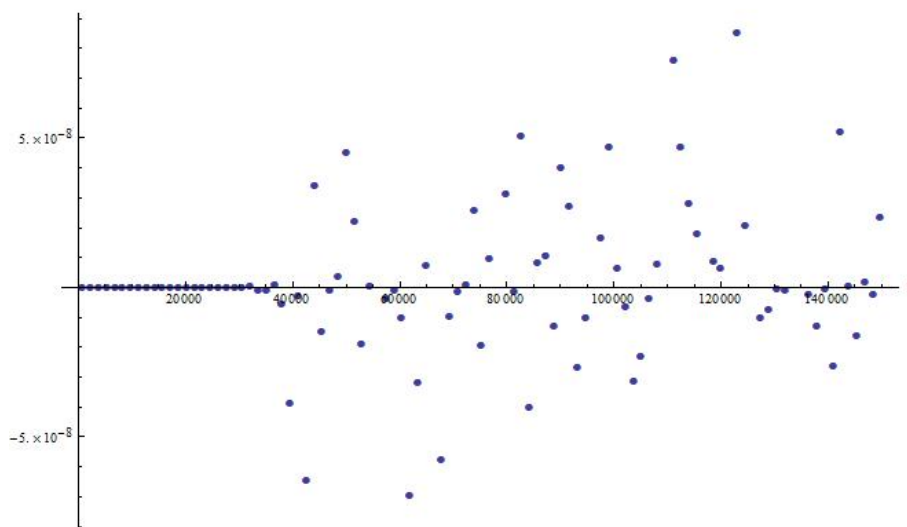


hvor det gerne skulle gælde at

$$\int_{u_0}^{\infty} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{-iux} \phi_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(u)}{u} \right) du \approx 0 \quad (7.47)$$

Selve integralet i ligning (7.46) bliver, udregnet med en numerisk integrationsfunktion fra Mathematica<sup>40</sup>

Der skal findes en metode til at bestemme den øvre integrationsgrænse  $u_0$ . Der er to ting, man skal overveje i fht. at sætte integrationsgrænsen ”meget” højt. Der er spørgsmålet om, hvor lang tid det tager at lave en beregningen og om den vedbliver med at være præcis. Nedenunder i figur 7.11 kan det ses et eksempel på udregninger af fordelingsfunktionen med forskellige  $u_0$ . Det ses, at der begynder at opstå numerisk ustabilitet, når der integreres til et for højt  $u_0$ .

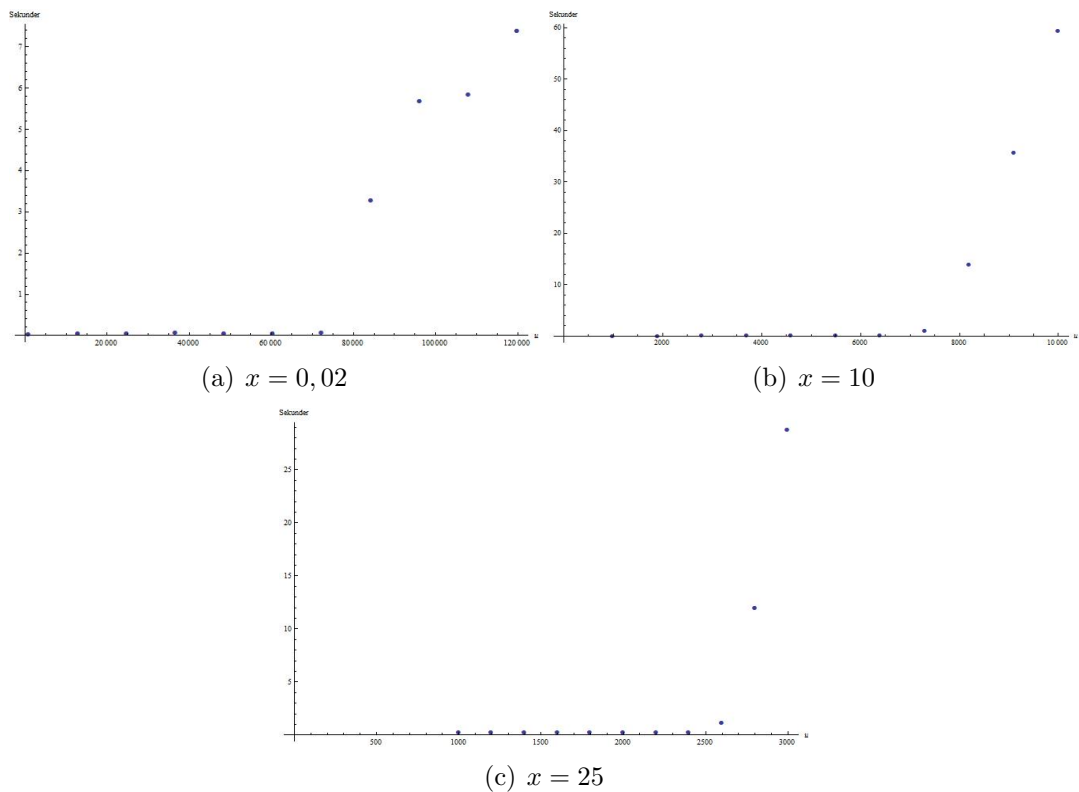


Figur 7.11: Grafen viser beregninger af fordelingen fra ligning (7.44), givet at der integreres op til et bestemt  $u$ .

Herunder i figur 7.12 kan tiden for en enkelt beregning af fordelingen ses. Her ses det at der for  $u_0$  over en vis grænse, sker en voldsom stigning i beregningstiden.

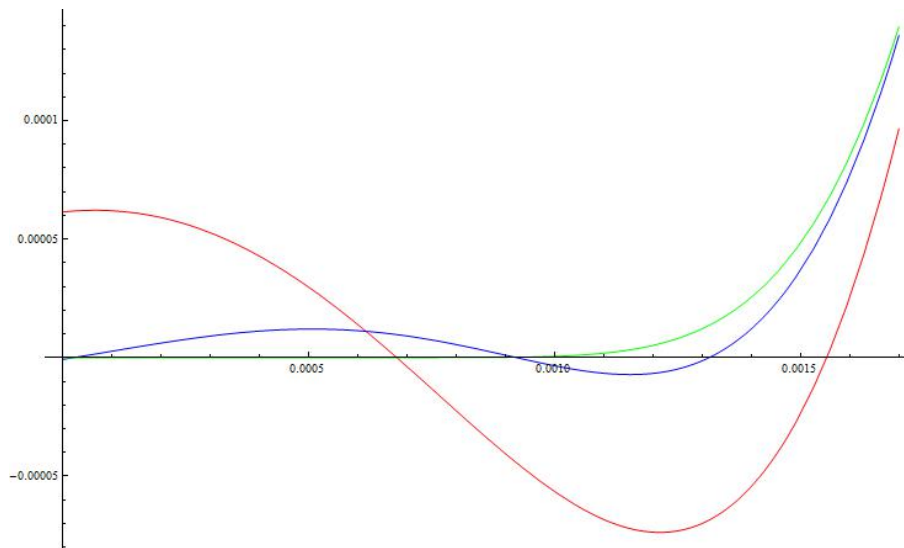
---

<sup>40</sup>NIntergrate



Figur 7.12: I de tre grafer kan man se tiden det tager for Mathematica at regne fordelingen fra ligning (7.44), givet at der ikke integreres op til uendeligt, men til et bestemt  $u$ .

Det er dog stadig ikke muligt bare, at vælge et alt for lavt  $u_0$  at integrere op til. Nedenstående grafer i figur 7.13 viser udregninger af den nedre del af en fordeling med tre forskellige  $u_0$ . Det kan observeres, at valget af et for lavt  $u_0$ , kan betyde store fejl i udregningen af den nedre del af fordelingen.



Figur 7.13: Grafen viser beregninger af fordelingen fra ligning (7.44), givet at der integreres op til et bestemt  $u$ . Rød:  $u = 2000$ , Blå:  $u = 3000$ , Grøn:  $u = 10.000$ .

Det er ikke ligetil at finde en metode til at bestemme  $u_0$ , så ligning 7.47 er tilstrækkelig tæt på nul. Men jeg kan vælge en metode, og så bagefter undersøge om metoden giver at fordelingen (7.44) for et ”meget” højt  $x$  giver 1. Desuden skal det undersøges, om det er nødvendigt at regne et nyt  $u_0$ , for hver udregning af en værdi af fordelingen.

Metoden, der skal undersøges, går ud på se, hvornår (7.45)’s svingninger er tilstrækkelig tæt på nul. Måden det kan gøres på, er ved at se på om et antal punkter i området omkring et givent  $u$  er mindre end  $10^{-6}$ . Her er ”tilstrækkeligt tæt på nul” sat til  $10^{-6}$  og det viser sig, at hvis der blev valgt en mindre grænse, gør det, at der kan opstå problemer med Mathematica’s udregninger. Området jeg vælger at se på for et givent  $u$  er intervallet  $[u \cdot 0,9; u \cdot 1,1]$ , og jeg vælger at bruge ti punkter ligeligt fordelt i intervallet. Nedenstående tabel viser resultaterne som den beskrevne metode udregner, med et forskelligt antal af punkter regnet i intervallet  $[u \cdot 0,9; u \cdot 1,1]$ .

| Indelinger/ $\sigma$ | 0,01    | 0,2     | 0,5     |
|----------------------|---------|---------|---------|
| 1                    | 6487,32 | 1922,17 | 4324,88 |
| 10                   | 6487,32 | 1922,17 | 4324,88 |
| 100                  | 6487,32 | 1922,17 | 4324,88 |
| 1000                 | 6487,32 | 1922,17 | 4324,88 |

Tabel 7.4: Udregninger af  $u_0$  for forskellige antal inddelinger af intervallet  $[u \cdot 0,9; u \cdot 1,1]$ . Med variable  $k = 0,8$ ,  $\theta = 0,05$  og  $T = 1$

Metoden er meget stabil, og der kun være valgt et lavere antal punkter, men for en sikkerheds skyld er valget faldet på ti punkter. Hvis svingningerne ikke er mindre end

$10^{-6}$  for et givent  $u$ , kigges der på svingningerne for et  $u$ , der er 50% højere, etc..

Det vil her blive vist, at den øvre grænse i integralet i (7.46), ikke er afhængigt af et specifikt  $x$ , men gælder for alle  $x$  for en given fordeling.

For at lette notationen, i de følgende beregninger vil der blive brugt  $\phi(u)$  i stedet for  $\phi_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(u)$ .

Der skal bruges Euler's formel, der siger at

$$e^{iw} = \cos(w) + i\sin(w), \quad w \in \mathbb{R} \quad (7.48)$$

Det skal desuden huskes at

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a \quad (7.49)$$

$$\operatorname{Im}(a + bi) = b \quad (7.50)$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \quad (7.51)$$

Først ses på ligning (7.45)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{-iux}\phi(u)}{u}\right) = \operatorname{Im}(e^{-iux}\phi(u)) \frac{1}{u}$$

Så bruges reglerne fra ligning (7.49) og (7.50), til at omskrive  $e^{-iux}$  og  $\phi(u)$

$$= \operatorname{Im}\left((\operatorname{Re}(e^{-iux}) + \operatorname{Im}(e^{-iux})i)(\operatorname{Re}(\phi(u)) + \operatorname{Im}(\phi(u))i)\right) \frac{1}{u}$$

så bruges (7.51), til at gange de to komplekse tal sammen, men da det kun er den imaginære del, der skal ses på jævnfør (7.50), så bliver det

$$\begin{aligned} &= (\operatorname{Re}(e^{-iux})\operatorname{Im}(\phi(u)) + \operatorname{Im}(e^{-iux})\operatorname{Re}(\phi(u))) \frac{1}{u} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(e^{-iux})\operatorname{Im}(\phi(u))}{u} + \frac{\operatorname{Im}(e^{-iux})\operatorname{Re}(\phi(u))}{u} \end{aligned}$$

nu bruges (7.48) sammen med (7.49)

$$= \frac{\cos(-ux)\operatorname{Im}(\phi(u))}{u} + \frac{\sin(-ux)\operatorname{Re}(\phi(u))}{u} \quad (7.52)$$

Nu kan der laves en omskrivning af

$$\int_{u_0}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-iux}\phi(u)}{u}\right) du \quad (7.53)$$

Med ligning (7.52), så

$$\begin{aligned}
&= \int_{u_0}^{\infty} \left( \frac{\cos(-ux) \operatorname{Im}(\phi(u))}{u} + \frac{\sin(-ux) \operatorname{Re}(\phi(u))}{u} \right) du \\
&= \int_{u_0}^{\infty} \frac{\cos(-ux) \operatorname{Im}(\phi(u))}{u} du + \int_{u_0}^{\infty} \frac{\sin(-ux) \operatorname{Re}(\phi(u))}{u} du
\end{aligned}$$

Det ses, at de to integraler hver indeholder  $\cos(-ux)$  hhv.  $\sin(-ux)$ . Disse funktioner svinger begge mellem minus en og en, når  $x$  stiger. Dette betyder, at det der får integraler er til at konvergere er

$$\frac{\operatorname{Im}(\phi(u))}{u}, \text{ hhv. } \frac{\operatorname{Re}(\phi(u))}{u} \quad (7.54)$$

Da  $x$  ikke er med, i nogen af de to ligninger, ser det ud som om, at en udregningen af  $u_0$  gælder for vilkårlige  $x$ . Ved udregning af hvornår de to funktioner (7.54) er tilstrækkeligt små, viser det sig, at de i praksis er ens. Det ses samtidig også, at de finder den samme  $u_0$ , som når der regnes på (7.45). Det er derfor tilstrækkeligt at regne  $u_0$  for et vilkårligt  $x$ .

For at undersøge at  $u_0$  er tilstrækkeligt højt, kan der nedenunder ses en tabel, over udregninger af fordelingen. Som det ses ligger fordelingen og svinger omkring en med ca. ni decimalers nøjagtighed, hvilket i dette tilfælde må siges at være tilstrækkeligt præcist. Dette gælder generelt og ikke kunne fordelingen med de variable som er brugt i tabellen nedenunder.

| $x$   | $F_{\Lambda_1(5)-\Lambda_1(0)}(x)$ | $x$   | $F_{\Lambda_1(5)-\Lambda_1(0)}(x)$ |
|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|
| 0,875 | 0,980122753421564                  | 1,500 | 0,9999999998922185                 |
| 1,000 | 0,998589173964461                  | 1,625 | 0,999999999880250                  |
| 1,125 | 0,999935637091862                  | 1,750 | 1,000000000069970                  |
| 1,250 | 0,999997912555782                  | 1,875 | 1,000000000064790                  |
| 1,375 | 0,999999948428986                  | 2,000 | 0,999999999919418                  |

Tabel 7.5: Fordelingen af  $F_{\Lambda_1(5)-\Lambda_1(0)}(x)$  med  $k = 0, 5$ ,  $\theta = 0, 2$  og  $\sigma = 0, 1$ .

Med resultatet af at fordelingen kommer tilstrækkeligt tæt på en, for et  $x$  der er stort nok, må det betyde, at metoden vælger et tilstrækkeligt højt  $u_0$  til at regne fordelingen.

Desuden undersøges det, at metoden til at finde  $u_0$  sikre, at fordelingen kommer til at passe for små  $x$ . Som man kan se nedenunder, så er der godt nok nogle udsving omkring for meget små værdier af  $x$ . Men igen er de så små, at de må betragtes som ubetydelige. Dette gælder igen generelt og ikke kunne fordelingen med de variable som er brugt i tabellen nedenunder.

| $x$  | $F_{\Lambda_1(5)-\Lambda_1(0)}(x)$ | $x$  | $F_{\Lambda_1(5)-\Lambda_1(0)}(x)$ |
|------|------------------------------------|------|------------------------------------|
| 0,00 | $-1,86685555902955 \cdot 10^{-10}$ | 0,20 | $-6,36821373412033 \cdot 10^{-10}$ |
| 0,04 | $3,34353100761575 \cdot 10^{-11}$  | 0,24 | $-7,16350098683982 \cdot 10^{-07}$ |
| 0,08 | $1,61445357083068 \cdot 10^{-10}$  | 0,28 | $1,70172940183733 \cdot 10^{-08}$  |
| 0,12 | $-3,71542241417444 \cdot 10^{-10}$ | 0,32 | $2,05163240840633 \cdot 10^{-06}$  |
| 0,16 | $5,50994694314966 \cdot 10^{-10}$  | 0,36 | $6,68407480114985 \cdot 10^{-05}$  |

Tabel 7.6: Fordelingen af  $F_{\Lambda_1(5)-\Lambda_1(0)}(x)$  med  $k = 0,5$ ,  $\theta = 0,2$  og  $\sigma = 0,1$ .

### 7.5.3 Interpolation

Da det er beregningstungt at regne fordelingsfunktionen, kan det være en fordel at bruge interpolation til at reducere antallet af beregninger. Ikke alene er det beregningstungt at regne en fordeling, men for at regne værdien af en enkelt CDS skal fordelingen beregnes flere gange, så der kan være meget tid at spare ved at regne fordelingen ved hjælp af interpolation.

Fordelingen  $F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(x)$  er her en funktion af  $x$ , der kan gå fra nul til uendelig. Det er derfor nødvendigt at begrænse  $x$ 'erne, der bruges til grundlag for interpolationen. Når  $x$  går mod uendelig, går fordelingen mod en, som det også kan ses i tabel 7.5. Der vælges derfor en øvre grænse for  $x$ , kaldt  $x_{max}$ , hvor fordelingen er tilstrækkeligt tæt på en. Den naturlige nedre grænse er  $x = 0$ . Ligning (7.16) og (7.17), kan dog omskrives til at give en nedre grænse af  $x$

$$x = (-\ln(1 - \bar{U}_{1,i}) - \Lambda_1(\tau_i)), \quad i = 0, 2 \quad (7.55)$$

Ligning (7.55) kan derfor bruges som nedre grænse for  $x$ . I nogle tilfælde vil fordelingen ligge meget tæt på nul i starten for det første interval af  $x$ . Det kan derfor kraftigt reducere antallet af beregninger ved først at starte interpolationen fra et  $x$ , kaldt  $x_{min}$ , hvor fordelingen begynder at stige tilstrækkeligt over nul. Før  $x_{min}$  vil alle værdier, så blive sat til nul, og alle værdier efter  $x_{max}$ , vil blive sat til en.

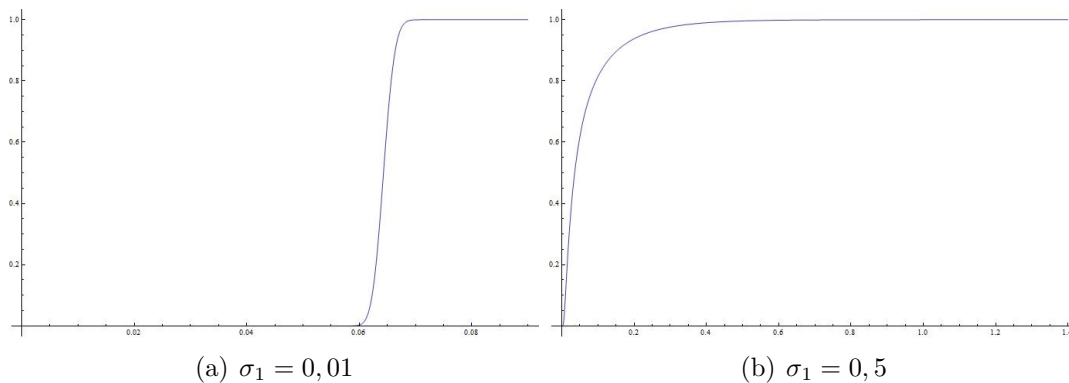
For at finde  $x_{min}$  og  $x_{max}$ , må det vælges, hvad der menes med "tilstrækkeligt tæt på en", og "tilstrækkeligt over nul". Spørgsmålet er, hvor store fejlene bliver ved at undlade at beregne værdierne af fordelingen og i stedet sætte dem til hhv. en og nul.

Hvis "tilstrækkeligt tæt på nul" sættes til fx 0,01, så betyder det, at der højst kan opstå fejl i størrelsesordenen 0,01. Dette skyldes at fordelingen fra  $x = 0$  til  $x_{min}$ , stiger fra nul til 0,01. Da værdien i intervallet nul til 0,01 sættes til nul, betyder det, at fejlene der opstår nærmer sig 0,01, når fordelingen nærmer sig  $x_{min}$ . Et lignende argument kan laves for  $x_{max}$ .

Det bliver derfor et spørgsmål om hvor store fejl, der skal accepteres. Fejlene som jeg her vælger at acceptere er  $10^{-5}$ . Dette betyder, at "tilstrækkeligt tæt på en" er 0,99999, og "tilstrækkeligt over nul" er 0,00001. Hver gang der skal regnes en ny fordeling, udregnes et nyt  $x_{min}$ . Pga. numerisk ustabilitet udregnes  $x_{max}$  ikke hver gang, men bliver regnet som en interpoleret kurve for flere fordelinger. For mere info om udregningen af

$x_{min}$  og  $x_{max}$ , se appendiks A.4. I tilfælde hvor  $x$  fra ligning (7.55) giver en værdi af fordelingen, der er større end 0,99999, sætter jeg fordelingen til at være konstant en.

Det kan generaliseres og siges, at der er to typer af fordelingen, der er bestemt af volatiliteten for udviklingen af intensitetsprocessen for den underliggende reference.



Figur 7.14: De to grafer er udregninger af fordelingen  $F_{\Lambda_1(2,1)-\Lambda_1(0)}(x)$ , hvor  $k_1 = 0,8$ ,  $\theta_1 = 0,05$ .

Disse to typer kan ses i ovenstående to grafer. som det kan observeres i figur 7.14(a), så betyder en lille volatilitet betyder, at sandsynligheden stiger meget hurtigt fra nul til en. Mens det i figur 7.14(b) kan observeres, at ved større volatilitet sker stigningen over en længere interval. Derfor skal der findes en metode, der kan fange begge ”typer” af fordeling.

Der skal skabes et udgangspunkt for at kunne finde de rigtige punkter til interpolation. Dette gøres ved først at regne fordelingen fjorten gange med lige store mellemrum fra  $x_{min}$  til  $x_{max}$ . For at sikre den numeriske stabilitet, og minimere antallet af beregninger og derved beregningstiden, er det vigtigt, med præcise  $x_{min}$  og  $x_{max}$ . Derfor tjekkes det at  $x_{max}$  om den sidste af de fjorten værdier er større end 0,99999. Hvis værdien ikke er stor nok regnes der en ny værdi af fordelingen for et højere  $x$ . Dette fortsætter, indtil den sidste værdi er tilstrækkelig stor. Herefter kigges der på, om der er mulighed for at indsnævre  $x_{min}$ , og  $x_{max}$ . For  $x_{max}$ , gøres det ved finde den første værdi, der er større end 0,99999 og slette de efterfølgende, og bruge den tilhørende  $x$ , som  $x_{max}$ . For  $x_{min}$  findes den sidste værdi der stadig er mindre end 0,00001, og alt før slettes og det tilhørende  $x$  bruges som  $x_{min}$ .

Der er nu skabt, et udgangspunkt for den videre udregning af punkterne til interpolationen. Hullerne mellem punkterne skal fyldes, så interpolationen ikke skaber for store fejl. Dette gøres ved at se på de enkelte intervaller, der er blevet dannet mellem  $x_{min}$ , og  $x_{max}$ . I det enkelte interval udregnes der værdier, alt afhængig af hvor meget sandsynlighedsmasse der er i intervallet. Antallet af punkter i intervallet  $x_k$  til  $k_{k+1}$  er

$$pkt_{interval} = (F_{\Lambda_1(2,1)-\Lambda_1(0)}(x_{slut \ interval}) - F_{\Lambda_1(2,1)-\Lambda_1(0)}(x_{start \ interval})) \cdot 40$$

Antallet af punkter vil dog minimum være de to, som udgør enderne af intervallet, men som kendes i forvejen. Valget af konstanten 40 i ovenstående ligning til udregning

af antallet af punkter, er lavet som en opvejning af tid og præcision. Flere punkter medfører højere beregningstid og bedre præcision, mens færre punkter medfører lavere beregningstid og dårligere præcision. Fyrrer er derfor valgt som en passende afvejning heraf, som det også senere vil blive vist.

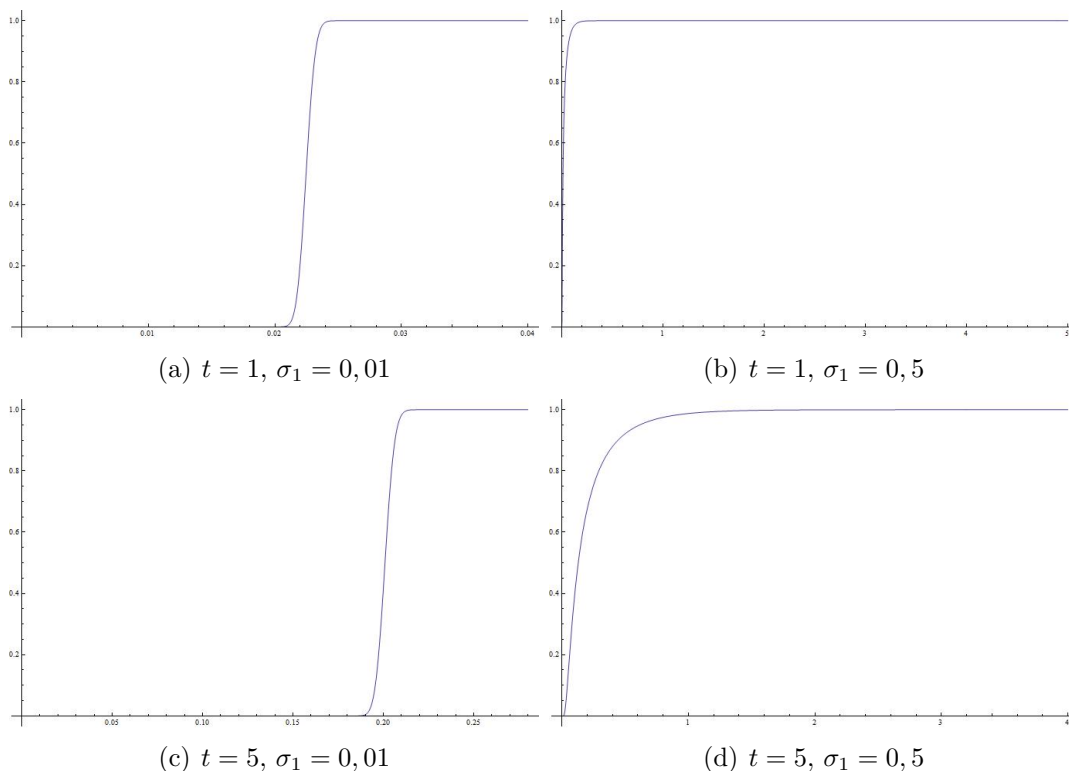
Punkterne bliver så beregnet i intervallet med mellemrum af størrelsen

$$dx = \frac{x_{slut\ interval} - x_{start\ interval}}{pkt_{interval}}$$

Når alle intervaller fra  $x_{min}$  til  $x_{max}$  er kørt igennem, gennemgås de nye intervaller med samme procedure. Dette fortsætter, indtil der ikke længere bliver lagt flere punkter.

Til sidst inden selv interpolationen er, at der i hver ende af punkterne udregnes fire ekstra punkter ind i hvert af de første/sidste fire intervaller. Dette skyldes, at metoden, som den er beskrevet indtil nu, havde svært ved at fange fejl i starten og slutningen. Interpolation af de punkter, der er blevet genereret, er igen interpolation med tredjegrads *spline* interpolation.

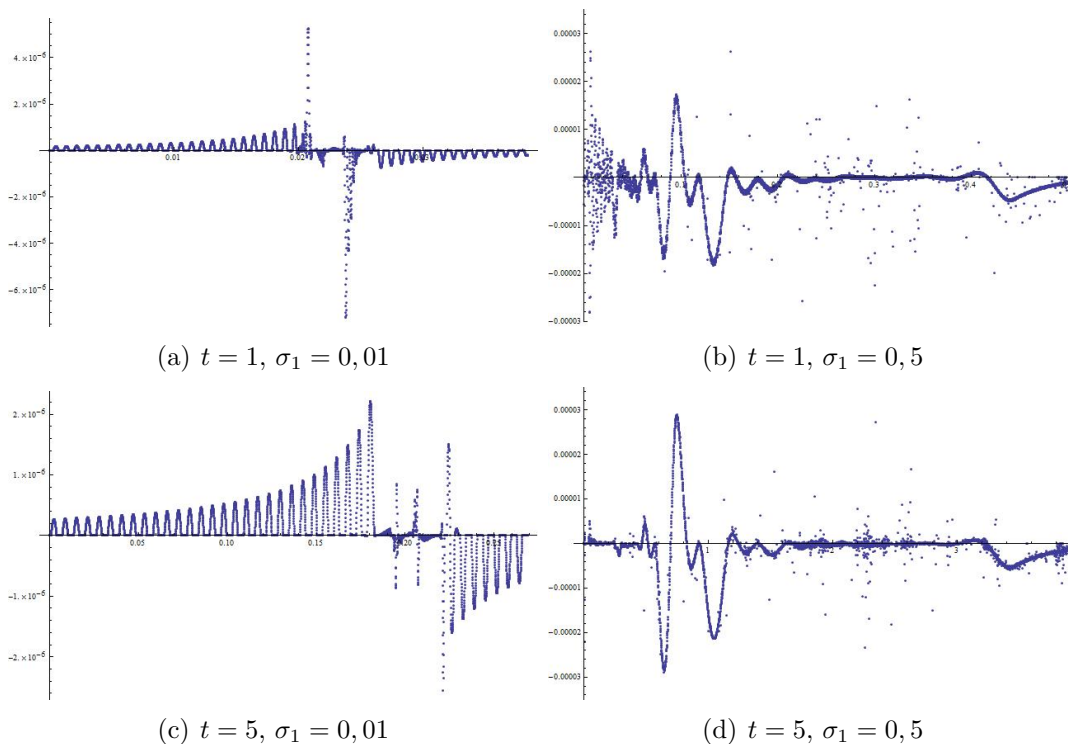
For at vise at metoden giver tilstrækkeligt små fejl, ses nedenunder, fire på grafer, med eksempler af den interpolerede fordeling.



Figur 7.15: De to grafer er udregninger af fordelingen  $F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(0)}(x)$ , hvor  $k_1 = 0,8$ ,  $\theta_1 = 0,05$ .

Herunder er så grafer, der viser de fejl, som opstår, når der bliver brugt interpolation, i stedet for at regne de eksakte værdier af fordelingen.





Figur 7.16: De to grafer er udregninger af fordelingen  $F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(0)}(x)$  fratrasket interpolationen, hvor  $k_1 = 0,8$ ,  $\theta_1 = 0,05$ .

Ved aflæsning af graferne ses det at fejlene er relativt små. Hvis der skulle reduceres mærkbart i fejlene, ville det kræve lavere grænser for, hvad der er tilstrækkeligt tæt på en og nul blev gjort mindre. Og antallet af punkter, der bliver brugt til at lave interpolationen, øges markant, hvilket ville betyde et forøgelse i beregningstiden.

Der er nu fundet en metode til at udregne fordelingen  $F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(x)$ . Det er desuden vist, at den kan implementeres, men at det samtidig betyder, at der opstår fejl i beregningen. Hvis modellen skal kunne regne handlebare priser vil det være nødvendigt, at se nærmere på de fejl der opstår i implementeringen. Ikke alene de fejl der opstår, som følge af interpolationen, men der skal også i i højere grad undersøges, hvad betydningen af den øvre grænse  $u_0$  betyder.

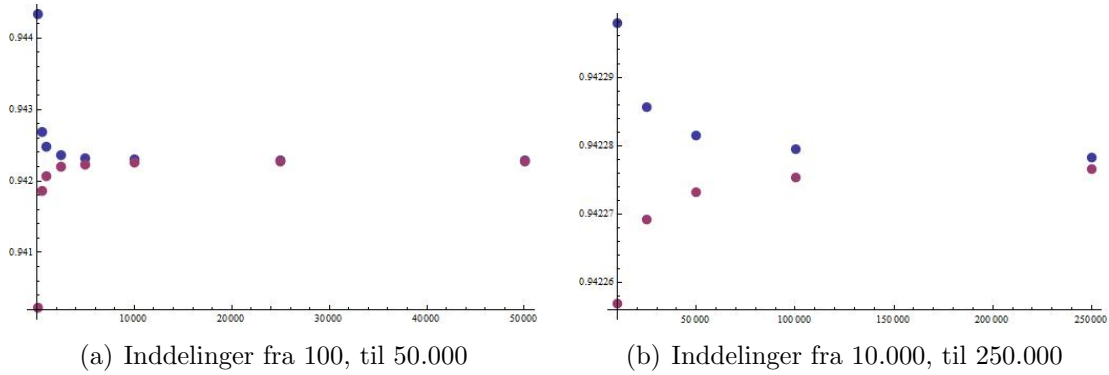
## 7.6 Overlevelsessandsynlighedskurven

Der er nu fundet en metode til at udregne de betingede sandsynligheder i ligning (7.18) og (7.19), samt fordelingsfunktion fra ligning (7.39). Det er derfor muligt at komme

videre med udregningen af overlevelsessandsynligheden fra ligning (7.16) og (7.17)

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_i}) \\ &= \int_{\bar{U}_{1,i}}^1 F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(-\ln(1 - u_1) - \Lambda_1(\tau_i)) d\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_i}, U_1 > \bar{U}_{1,i}, U_0 > \bar{U}_{2,i}), \quad i = 0, 2 \end{aligned}$$

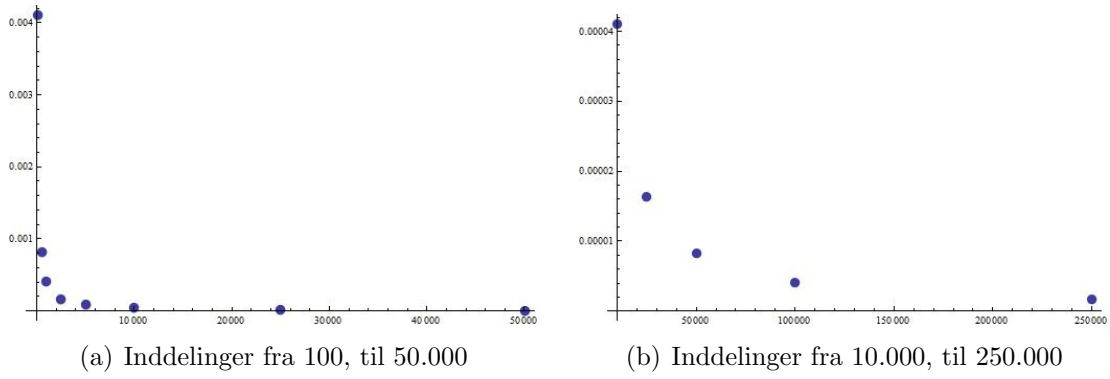
Det sidste der skal ske for at kunne implementere ligning (7.16) og (7.17), er at udregne integralet. Dette vil som tidligere approksimationer af integraler ske med Riemann integralet. Da både  $F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(x)$  og  $\mathbb{Q}(U_1 < u_1 | \mathcal{G}_{\tau_i}, U_1 > \bar{U}_{1,i}, U_0 > \bar{U}_{2,i})$  er regnet på forhånd som interpolerede kurver, kan det approksimerede integrale regnes med relativt små skridt. Hvis skridtene bliver for små påvirker det dog beregningstiden markant. Nedenunder ses i de to grafer et eksempel på forskellen mellem højre- og venstresum, regnet for forskellige inddelinger af integralet.



Figur 7.17:  $\mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_i})$  approksimeret med Riemann integralet, med forskellige inddelinger. Den blå er højresummen og den røde er venstresummen.

Det, man kan observere på de to grafer, er, at højresummen overestimerer sandsynligheden, mens venstresummen underestimerer sandsynligheden. Det kan desuden observeres, at både højre- og venstre summen bliver mere præcise, når antallet af inddelinger stiger. Da højre- og venstresummen ser ud til, at producere lige store fejl i fht. det ”rigtige” resultat. Der er derfor uvæsentligt, om det er den ene eller anden der bruges. Jeg vælger at bruge højresummen.

For at få et overblik er her to grafer, der viser forskellen mellem højre- og venstresummen.



Figur 7.18: Forskellen i  $\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i})$  approksimeret med Riemann integralet, for hhv. højre og venstresummen, med forskellige inddelinger.

For at få en fejl i forskellen mellem højre- og venstresummen, der er mindre end 0,00001, vil det kræve i nærheden af 50.000 inddelinger. Men da der samtidig skal tages højde for den tid, der skal bruges på beregningerne, vælger jeg at lave integralet med 10.000 inddelinger, da der ved flere inddelinger, begynder, at blive en betydelig forøgelse i beregningstiden. Med 10.000 inddelinger er fejlen her stadig 0,00005. Et lignede resultat viser sig for andre udregninger af sandsynligheden.

Overlevelsessandsynligheden bliver approksimeret med følgende Riemann integrale

$$\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) \approx \sum_{u=\bar{U}_{1,i}+du}^1 F(u)(\mathbb{Q}(u) - \mathbb{Q}(u - du))$$

hvor

$$\begin{aligned} F(u) &= F_{\Lambda_1(t) - \Lambda_1(\tau_i)}(-\ln(1 - u_1) - \Lambda_1(\tau_i)) \\ \mathbb{Q}(u) &= \mathbb{Q}(U_1 < u|\mathcal{G}_{\tau_i}, U_1 > \bar{U}_{1,i}, U_0 > \bar{U}_{2,i}) \end{aligned}$$

Dette gøres rent praktisk iterativt, hvor

$$\mathbb{Q}_u(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) = \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) + F(u)(\mathbb{Q}(u) - \mathbb{Q}(u - du)) \quad (7.56)$$

Beregningen kan stoppe hvis enten  $F(u) = 1$  eller  $\mathbb{Q}(u) = 1$ .  $F(u)$  og  $\mathbb{Q}(u)$  burde i teorien ikke være en før  $u = 1$ , men da de begge er approksimationer, opstår tilfældet hvor en af dem bliver en.

I tilfældet for  $u$  hvor  $\mathbb{Q}(u - du) = 1$ , da kommer ligning (7.56) til at se ud som følger

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_u(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) &= \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) + F(u)(\mathbb{Q}(u) - \mathbb{Q}(u - du)) \\ &= \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) + F(u) \cdot 0 \\ &= \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) \end{aligned}$$

Dvs. at når  $\mathbb{Q}(u - du) = 1$ , så vil  $\mathbb{Q}_u(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i})$  ikke ændre værdi for højere  $u$ 'er, og beregninger kan stoppe.

For  $u$  hvor  $F(u) = 1$  da kommer ligning (7.56) til at se ud som følger

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_u(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) &= \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) + F(u)(\mathbb{Q}(u) - \mathbb{Q}(u - du)) \\ &= \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) + \mathbb{Q}(u) - \mathbb{Q}(u - du)\end{aligned}$$

Efter at første  $u$  hvor  $F(u) = 1$ , så vil

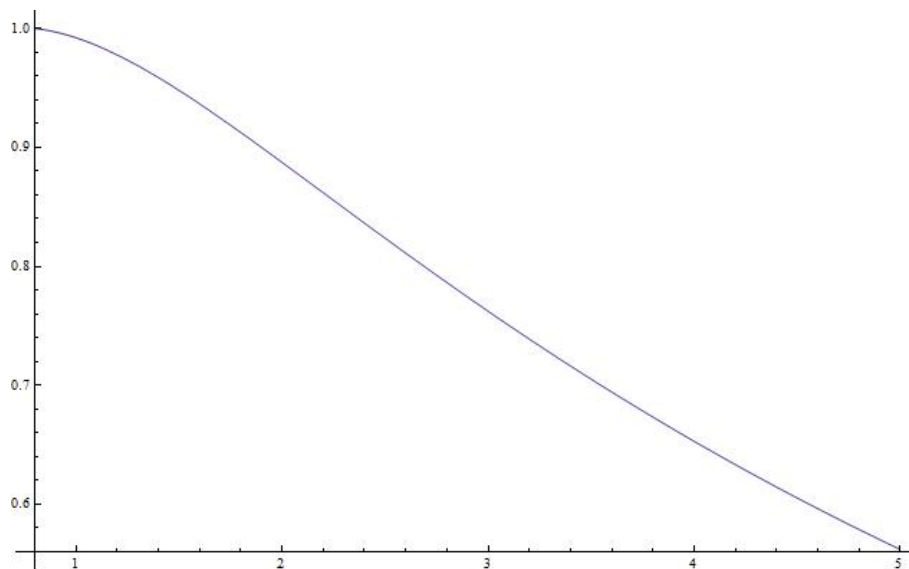
$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) &= \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) \\ &+ (\mathbb{Q}(u) - \mathbb{Q}(u - du)) + (\mathbb{Q}(u + du) - \mathbb{Q}(u)) + (\mathbb{Q}(u + 2du) - \mathbb{Q}(u + du)) \\ &+ \dots + (\mathbb{Q}(1) - \mathbb{Q}(1 - du))\end{aligned}$$

Da alle sandsynligheder, undtagen  $\mathbb{Q}(1)$  og  $-\mathbb{Q}(u - du)$  nettes ud med hinanden, og  $\mathbb{Q}(u) = 1$  for  $u = 1$ , så betyder det at

$$\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) = \mathbb{Q}_{u-du}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i}) + 1 - \mathbb{Q}(u - du)$$

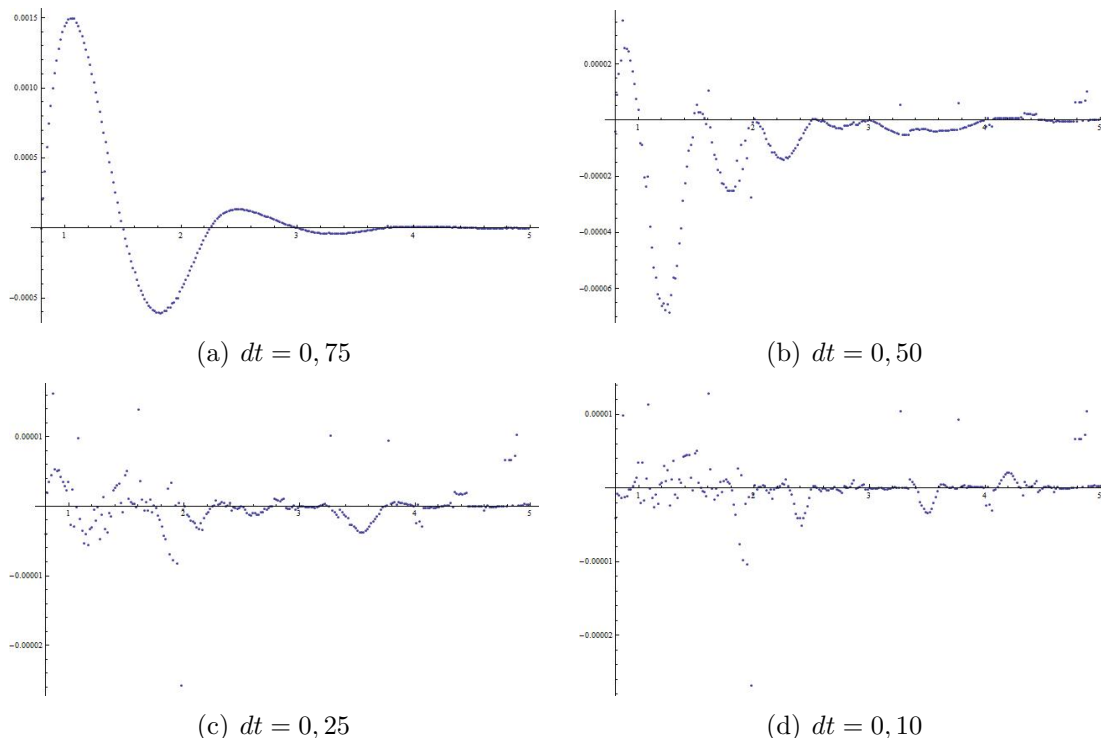
Da der for hver udregning af en overlevelsessandsynlighed skal udregnes en kurve for  $F_{\Lambda_1(t)-\Lambda_1(\tau_i)}(-\ln(1 - u_1) - \Lambda_1(\tau_i))$ , så bliver udregningen af den enkelte overlevelsessandsynlighed meget beregnings tung, og det tager derfor lang tid at lave beregningen. Meget beregningstid kan spares ved igen at lave en interpoleret kurve, her over overlevelsessandsynlighederne.

Her ses et eksempel på kurven for overlevelsessandsynligheden.



Figur 7.19: Grafen viser et eksempel på en kurve af overlevelsessandsynligheder  $\mathbb{Q}(\tau_1 > t|\mathcal{G}_{\tau_i})$ , efter en fallit på tidspunkt investor på tidspunkt  $t = 0.798$ .

Overlevelsessandsynlighedskurven laves med tredjegrads *spline* interpolation. Punkterne som kurven bliver dannet ud fra er lavet i intervaller af størrelse  $dt$ , dog minimum fire punkter. Nedenunder kan ses fire eksempler på forskellen mellem ind interpoleret overlevelsessandsynlighedskurve lavet med forskellige  $dt$  og faktisk udregnede overlevelsessandsynligheder.



Figur 7.20: Forskellen mellem den  $\mathbb{Q}(\tau_1 > t | \mathcal{G}_{\tau_0})$  regnet som interpoleret kurve med forskellige  $dt$ , og faktisk udregnede.

Som det ses på figur 7.20(a), så er fejlene når  $dt = 0,75$  langt fra et tilstrækkeligt småt interval. I figur 7.20(b) kan man se at med  $dt = 0,5$ , så er fejlene stadig for store, men fejlene er næsten på en niveau der kan accepteres, da de fleste fejl ligger inden for rammen af 0,00001. For figur 7.20(c) og 7.20(d) kan man se at stort set alle fejl ligger inden for grænsen af 0,00001, dog uden at det hjælper syndeligt at gå fra et  $dt = 0,25$ , til et  $dt = 0,1$ .

Ud fra ovenstående betragtninger, ville jeg vælge  $dt = 0,25$ , som et passende valg af skridt til brug i interpolationen af kurven. Jeg bliver dog også nødt til at sætte en grænse for den tid, som jeg synes, jeg kan bruge på at regne værdien af BR-CVA<sup>41</sup>.

Med kurven for overlevelsessandsynlighederne er det nu muligt at regne værdien for en CDS kontrakt efter en fallit hos enten investor eller modpart. Det er, sammen

<sup>41</sup>Tiden for udregninger bliver kan ses i sektion 8.3

med metoden til udregning af fallitter, derfor nu muligt, at udregne BR-CVA-CDS. Det er dog vigtigt, at holde sig for øje, at for at lave implementeringen, er der lavet approksimationer, som har medført at resultatet bliver behæftet med fejl. Fejlene er prøvet at blive holdt på et minimum, i fht. at beregningstiden også skal være overskuelig. Størrelsen af fejlen, der opstår, er lidt svær at sige noget om, det vil kræve yderlige test af modellen, som ikke er mulig pga. specialets omfang.

## 7.7 Renter og diskontering

En vigtig del af modellen er diskonteringen, i denne sektion gennemgås valget af rente-model og diskontering.

Jeg har valgt at bruge deterministiske renter i stedet for en stokastisk rentemodel. Dette gøres for ikke at gøre udregninger mere beregningstunge. Desuden ville en stokastisk rentemodel sandsynligvis, ikke gøre resultatet af modpartrisikoen mere tydelig. Valget af en deterministisk renter betyder også, at fallitter og *recovery rates* er uafhængige af renten. Det vil ikke være et problem at bruge en stokastisk rente i stedet for den deterministiske. Så længe at renterne er uafhængige af fallitrisikoen.

I udregningerne er der ikke brug for selve rentesatsen, men kun en diskonteringsfaktor, har jeg valgt ikke at bruge en rentekurv, men i stedet en linær interpoleret diskonteringskurve. Kurven, der bruges, er en *stripped* OIS kurve taget fra Bloomberg d. 2. februar 2012. For data kurvens data, se da appendiks A.5.

Diskonteringen kurven er beskrevet ud fra tidspunkt nul, dvs  $D(0, t)$ . Ofte er der dog brug for diskontering i perioden  $t$  til  $s$ , er bruger jeg

$$D(t, s) = \frac{D(0, s)}{D(0, t)}, \quad t < s$$

Dette skaber en diskonteringsflade, som også kan ses i appendiks A.5.

## 7.8 Kode

Selve implementeringen, er som tidligere skrevet, lavet i Mathematica. Koden kan ses i den vedlagte cd-rom.

## 8 Resultater

Efter at have vist hvordan modellen til udregning af  $BR - CVA - CDS$  er blevet implementeret, ses der i dette afsnit på hvilke resultater modellen giver.

Pga. omfanget af specialet, er jeg nødt til at begrænse mig fra at lave beregninger, hvor modellen er tilpasset empirisk data. I stedet defineres tre scenarier med forskellige niveauer af fallitrisiko. De tre scenarier specificeres ud fra parametrene i CIR processen.

| Fallitrisiko | $x_i(0)$ | $k_i$ | $\theta_i$ | $\sigma_i$ | $LGD_i$ |
|--------------|----------|-------|------------|------------|---------|
| Lav          | 0,00001  | 0,9   | 0,0001     | 0,01       | 0,6     |
| Mellem       | 0,01     | 0,8   | 0,02       | 0,2        | 0,65    |
| Høj          | 0,03     | 0,5   | 0,05       | 0,5        | 0,7     |

Tabel 8.1: Klassificering af fallitrisiko niveauer, ud fra parametrene i CIR processen.

Scenarierne er valgt ud fra et ønske om at se på resultaterne for tre scenarier der differentierer sig i forhold til hinanden. Måden, de differentiere sig på, er risikoen for at gå fallit dvs. kreditrisiko. Scenariet ”høj” har den største kreditrisiko. I disse scenarier er der brugt forskellige kreditrisiko volatiliteter,  $\sigma_i$ . Det er antaget, at scenariet med den største kreditrisiko også har størst kreditrisiko volatilitet<sup>42</sup>. Valget af  $LGD_i$  er taget ud fra betragtningen fra om den negative sammenhæng der er mellem kreditrisiko og *recovery rates*, som vist i undersektion 2.4. Dette betyder, at der er valgt en højere  $LGD_i$  når der er højere kreditrisiko. Valget af variable er et subjektivt valg, ved empiriske studier kan variablene blive markant anderledes end beskrevet i de tre scenarier. Scenarierne er i øvrigt de samme som i Brigo & Capponi[1] (2009)

Den CDS kontrakt, der regnes på i dette speciale, er en der starter med det samme, løber i fem år og har kvartårige betalinger<sup>43</sup>. CDS *spread*'et ( $S_1$ ) for de enkelte scenarier, er regnet uden modpartsrisiko, er vist i nedenstående tabel.

<sup>42</sup>Udregninger vil evt. have andre kreditrisiko volatiliteter, men det vil være forklaret når det sker.

<sup>43</sup>Der tages ikke højde for dagskonventioner og faktisk antal af dage, et kvart år er 0,25.

|        | Standard scenarier | Standard scenarier<br>hvor alle $\sigma_i = 0,01$ |
|--------|--------------------|---------------------------------------------------|
| Lav    | 16,2               | 0,4                                               |
| Mellem | 109,5              | 111,0                                             |
| Høj    | 202,6              | 234,7                                             |

Tabel 8.2:  $S_1$  udregnet for forskellige scenarier, vist i basispunkter.

## 8.1 Receiver og payer CDS

Først ses på BR-CVA-CDS for hhv. en *receiver* CDS kontrakt og *payer* CDS kontrakt med forskellig korrelation mellem referencen og modparten. Der ses på et tilfælde, hvor investor har lav fallitrisiko, modparten har mellem fallitrisiko, og referencen har høj fallitrisiko, som alle er beskrevet i tabel 8.1.

Resultaterne i den nedenstående tabel er beregnet med 1000 simuleringer<sup>44</sup> af fallit hos enten investor eller modpart, og vist i basispunkter.

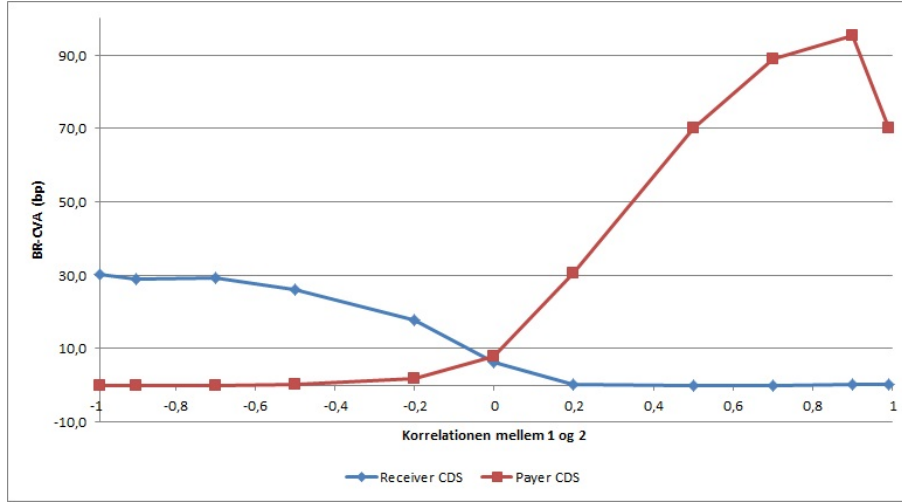
| $\Sigma_{1,2}$ | <i>Receiver</i> CDS | <i>Payer</i> CDS |
|----------------|---------------------|------------------|
| -0,99          | 30,0                | -0,1             |
| -0,9           | 29,0                | 0,0              |
| -0,7           | 29,1                | 0,0              |
| -0,5           | 26,0                | 0,2              |
| -0,2           | 17,8                | 1,9              |
| 0              | 6,3                 | 8,0              |
| 0,2            | 0,1                 | 30,6             |
| 0,5            | 0,0                 | 70,1             |
| 0,7            | 0,0                 | 89,0             |
| 0,9            | 0,2                 | 95,2             |
| 0,99           | 0,3                 | 70,2             |

Tabel 8.3:  $BR - CVA - CDS_r$  og  $BR - CVA - CDS_p$  med forskellige korrelationer, udtrykt i basispunkter.

Og her er der det samme resultat illustreret med grafer.

<sup>44</sup>Antallet af simuleringer er en afvejning af præcision og beregningstid. I senere beregninger bruges der flere simuleringer, men dette skyldes et ønske om, at vise noget om standardafvigelsen i resultaterne.





Figur 8.1:  $BR - CVA - CDS_r$  og  $BR - CVA - CDS_p$  med forskellige korrelationer, udtrykt i basispunkter

Der startes med resultaterne for *receiver* CDS kontrakten, der er vist som første kolonne i tabel 8.3 og den blå linie i figur 8.1. Der ses at  $BR - CVA - CDS_r$  generelt er faldende for  $\Sigma_{1,2}$  gående fra  $-0,99$  til  $0,99$ . Dette er intuitivt. I de tilfælde hvor modparten går fallit som den første, så bliver ligning (5.3) til

$$BR - CVA - CDS_r(t, T) = LGD_2 \cdot D(t, \tau_2) \cdot [\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+ \quad (8.1)$$

Værdien er styret af  $\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)$ . Når korrelationen er negativ, betyder en fallit hos modparten, at der er lille sandsynlighed for at referencen går fallit, hvilket igen betyder at værdien *receiver* CDS kontrakten er høj for investor og justering skal tillige være høj. Med høje korrelationer mellem referencen og modparten, betyder en fallit hos modparten, at der er stor sandsynlighed for at referencen vil gå fallit, hvilket gør værdien af CDS kontrakten negativ for investor. Men da justeringen i ligning (8.1) kun har værdi, hvis CDS kontrakten har positiv værdi, betyder det at justeringen bliver nul. Som det ses i tabel 8.3's syvende række, så  $\Sigma_{1,2} = 0,2$  så stor effekt at  $BR - CVA - CDS_r = 0$ . Tilfældende, hvor investor går fallit som den første, er få, da der kun er meget lille kreditrisiko, hvilket gør, at fallit hos investor ikke har reel indflydelse i den samlede værdi.

Et tilsvarende argument kan laves for *payer* CDS kontrakten, der er vist som anden kolonne i tabel 8.3 og den røde linie i figur 8.1. Dog kan det observeres i tabel 8.3 sidste række og til højre side i figur 8.1, at for en meget høj korrelation, her  $\Sigma_{1,2} = 0,99$ , så falder  $BR - CVA - CDS_p$ . Dette er ikke intuitivt. Det, der sker for meget høje korrelationer, er, at de eksponentialfordelte variable  $E_1$  og  $E_2$  vil være stort set ens. Hvis  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  samtidig er meget små, så betyder det, at intensitetsprocesserne  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  næsten kan betragtes som deterministiske. Med de valgte scenarier er kreditrisikoen størst hos referencen, og det vil derfor gælde at  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Dette gør, at referencen altid vil gå fallit før modparten, og der vil derfor ikke være nogen justering for modpartsrisiko. I tilfælde

hvor  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  ikke er tæt på nul, vil der opstå en større del af simuleringerne, hvor modparten går fallit før referencen. Derfor vil BR-CVA-CDS<sub>p</sub> for meget høje korrelationer stige, hvis kreditrisiko volatiliteten stiger.

## 8.2 Ny verden mod gammel

I denne sektion ses på hvordan BR-CVA'en ændrer sig når investor går fra at betragte sig selv som risikofri til risikofyldt .Dvs. at gå fra, at betragte modpartsrisiko som unilateralt, dvs CVA, til at se det bilateralt, dvs. BR-CVA. De to scenarier kaldes før "Før krisen" og "Efter krisen". I begge scenarier vil referencen være med høj fallitrisiko, og modparten med mellem fallitrisiko, begge beskrevet i tabel 8.1. I scenariet "Før krisen", vil investor være med lav fallitrisiko, og i scenariet "Efter krisen" vil investor være med høj fallitrisiko. I begge scenarier og for alle tre parter, ændres volatiliteten så den er ens for alle,  $\sigma_i = 0, 1$ . Dette gøres for, at sikre større sammenlignelighed.

Resultaterne i tabel 8.4 og 8.5 er vist i basispunkter, og er regnet med 2000 simuleringer af fallitter hos enten investor eller modparten. Tallet i parentes beskriver standardafvigelsen af ti beregninger lavet med 200 simuleringer af fallit hos enten investor eller modpart. Jeg ville gerne have lavet udregningerne af standard afvigelserne med 1000 simuleringer som i sektion 8.1, i stedet for 200 og med mere end ti beregninger af BR-CVA-CDS. Men her har beregningstiden sat sine begrænsninger. Valget af 2000 simuleringer i stedet for 1000 er at der nu havde beregnet 2000 simuleringer, og de derfor ligeså godt kunne blive anvendt.

Der er to effekter, der påvirker BR-CVA-CDS. Den første er antallet af fallitter hos hhv. investor og modpart. Den anden effekt er givet en fallit, hvad er da værdien af CDS kontrakten. For at få en forståelse af disse to effekter vil jeg analysere nogle udregninger af BR-CVA-CDS, for hhv. en *payer* og en *receiver* CDS. Der startes med at se på en *payer* CDS.

### 8.2.1 Payer CDS

I nedenstående tabel kan ses resultaterne for en *payer* CDS, i scenarierne "Før krisen" og "Efter krisen".

| $(\Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{1,2})$ | Før krisen   | Efter krisen |
|----------------------------------------------|--------------|--------------|
| (0, 0, 0)                                    | 6, 9(0, 5)   | 5, 2(1, 3)   |
| (0.1, 0, 0)                                  | 2, 8(0, 3)   | 1, 6(0, 5)   |
| (0.5, 0, 0)                                  | 0, 0(0, 0)   | -0, 1(0, 0)  |
| (0.9, 0, 0)                                  | 0, 0(0, 0)   | 0, 0(0, 1)   |
| (0, 0.1, 0)                                  | 7, 2(0, 5)   | 4, 9(0, 9)   |
| (0, 0.5, 0)                                  | 7, 3(0, 6)   | 4, 5(0, 6)   |
| (0, 0.9, 0)                                  | 7, 2(0, 6)   | 4, 5(0, 4)   |
| (0, 0, 0.1)                                  | 25, 5(0, 6)  | 21, 6(1, 7)  |
| (0, 0, 0.5)                                  | 103, 6(2, 4) | 81, 6(12, 4) |
| (0, 0, 0.9)                                  | 94, 0(1, 8)  | 83, 2(14, 3) |
| (0.3, 0.3, 0.3)                              | 35, 0(2, 6)  | 27, 4(5, 1)  |
| (0.5, 0.5, 0.5)                              | 100, 7(6, 6) | 38, 2(3, 4)  |
| (0.7, 0.7, 0.7)                              | 83, 7(1, 9)  | 46, 2(5, 9)  |

Tabel 8.4: BR-CVA for en *payer* CDS, udtrykt i basispunkter.

Når BR-CVA-CDS<sub>p</sub> skal udregnes, anvendes ligning (5.4). Når enten investor eller modpart er gået fallit som den første, betyder det, at ligning (5.4) bliver til

$$BR - CVA - CDS_p(t, T) = -LGD_0 \cdot D(t, \tau_0) [\overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+ \quad (8.2)$$

hhv.

$$BR - CVA - CDS_p(t, T) = LGD_2 \mathbb{E}_t(1_{CUD} \cdot D(t, \tau_2) \cdot [-\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+) \quad (8.3)$$

Når investor går fra at være risikofri til risikofyldt, er den største ændring i simuleringerne at i langt flere simuleringer går investor fallit som den første, hvilket stort set aldrig skete, i scenariet "Før krisen". Dette gælder både for en *payer* og en *receiver* CDS kontrakt. Dette betyder, at for "Før krisen" var det stort set kun ligning (8.3), der havde effekt på BR-CVA-CDS<sub>p</sub>. Men i "Efter krisen" får ligning (8.2) den største betydning, da kreditrisikoen her er størst hos investor. Da ligning (8.2) har en negativ effekt, vil det gøre BR-CVA-CDS<sub>p</sub> mindre. Dette kan bl.a. ses i tabel 8.4 række et, hvor der ikke er nogen effekt af korrelation

BR-CVA-CDS<sub>p</sub> er styret af værdien af  $\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)$ , der er en *receiver* CDS. Det betyder, at dens værdi bliver højere, når kreditrisikoen bliver mindre hos referencen, mens værdien bliver mindre hvis kredit risikoen bliver større hos referencen.

I tabel 8.4 række 2 kan ses et lille fald i BR-CVA-CDS<sub>p</sub>, mens det i række 3-4 er uændret. Der var egentlig forventet et fald pga. investors øgede kreditrisiko. Grunden til at det ikke er sket, kan skyldes de positive korrelationers modsatrettede indvirkning. Når investor går fallit, så bliver sandsynligheden for fallit større hos referencen, hvilken

gør værdien af CDS kontrakten mindre evt. negativ, hvilket kan gøre at effekten af ligning (8.2), bliver lille eller ikke eksisterende. Det kan derfor betyde at fallitterne hos investor ikke har nogen betydning BR-CVA-CDS<sub>p</sub>.

Resultaterne for korrelationen mellem investor og modpart, som kan ses i tabel 8.4 række 5-8, ligner meget det ikke korrelerede resultat i række 1. Dette skyldes, at det ikke er  $\Sigma_{0,2}$  som har betydningen af  $\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)$ .

For korrelationen mellem modparten og referencen, er effekten af korrelationen, den samme i både scenariet "Før krisen" og "Efter krisen". Så det fald, der kan ses i tabel 8.4 række 9-11, må udelukkende skyldes stigningen i investors kreditrisiko.

## 8.2.2 Receiver CDS

I nedenstående tabel ses resultaterne for en *receiver* CDS kontrakt, i scenarierne "Før krisen" og "Efter krisen".

| $(\Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{1,2})$ | Før krisen  | Efter krisen   |
|----------------------------------------------|-------------|----------------|
| (0, 0, 0)                                    | 0, 2(0, 1)  | -15, 3(1, 9)   |
| (0.1, 0, 0)                                  | 3, 8(0, 5)  | -27, 8(3, 0)   |
| (0.5, 0, 0)                                  | 22, 0(0, 8) | -92, 8(8, 5)   |
| (0.9, 0, 0)                                  | 26, 5(1, 1) | -218, 5(23, 1) |
| (0, 0.1, 0)                                  | 0, 3(0, 1)  | -15, 5(1, 6)   |
| (0, 0.5, 0)                                  | 0, 3(0, 1)  | -14, 7(1, 0)   |
| (0, 0.9, 0)                                  | 0, 5(0, 1)  | -15, 2(0, 9)   |
| (0, 0, 0.1)                                  | -0, 1(0, 1) | -15, 0(2, 2)   |
| (0, 0, 0.5)                                  | -0, 1(0, 0) | -14, 1(1, 2)   |
| (0, 0, 0.9)                                  | -0, 1(0, 0) | -15, 1(2, 2)   |
| (0.3, 0.3, 0.3)                              | -0, 6(0, 4) | -63, 4(4, 1)   |
| (0.5, 0.5, 0.5)                              | -1, 6(1, 2) | -108, 9(10, 1) |
| (0.7, 0.7, 0.7)                              | -0, 4(0, 5) | -169, 4(7, 5)  |

Tabel 8.5: BR-CVA for en *receiver* CDS.

Når BR-CVA-CDS<sub>r</sub> skal udregnes, anvendes ligning (5.3). I simuleringerne ses der på ligning (5.3), når enten investor eller modpart er gået fallit som den første, betyder det, at ligning (5.3) bliver til

$$BR - CVA - CDS_r(t, T) = - LGD_0 \cdot D(t, \tau_0) \cdot [-\overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+ \quad (8.4)$$

hhv.

$$BR - CVA - CDS_r(t, T) = LGD_2 \cdot D(t, \tau_2) \cdot [\overline{CDS}(\tau_2, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)]^+ \quad (8.5)$$

Forskellen på ligning (8.4) og (8.2), og ligning (8.5) og (8.3) er kun fortegnet foran  $\overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)$ , der er modsat. Dette betyder, at flere af argumenterne fra undersektion 8.2.1, også kan bruges her. Der, hvor der opstår en forskel, er i tabel 8.5 række 2-4. Når investor går fallit, så bliver sandsynligheden for fallit større hos referencen, hvilken gør værdien af CDS kontrakten mindre evt. negativ, og med et minus foran  $\overline{CDS}(\tau_0, \mathcal{T}, S_1, LGD_1)$  i (8.4) betyder det, at den positive korrelationen er med til at øge den negative effekt, som den øgede kreditrisiko har på BR-CVA-CDS<sub>*r*</sub>.

## 8.3 Beregningstid

Der er nu vist resultaterne, som den implementerede model har givet, men for at finde ud af, om metoden er brugbar, er det også vigtigt, at få et overblik over den tid, det tager at lave beregningerne. Dette ses på i denne sektion.

Der er forskellige faktorer, der spiller ind i beregningstiden. Den første er tiden, det tager, at udregne fallitterne hos enten modparten eller investor. Den anden er tiden det tager, at lave beregninger for værdien af CDS kontrakten på tidspunktet for fallit hos enten investor eller modpart.

### 8.3.1 Fallitter

Først ses på tiden det tager at udregne fallitter hos enten investor eller modpart. Udregningerne tager udgangspunkt i scenarierne fra tabel 8.1.

| Scenarier<br>(0, 1, 2) | $(\Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{1,2})$ |             |                 |
|------------------------|----------------------------------------------|-------------|-----------------|
|                        | (0, 0, 0)                                    | (0, 0, 0.9) | (0.9, 0.9, 0.9) |
| $(l, h, m)$            | 2, 35                                        | 4, 05       | 3, 08           |
| $(h, h, m)$            | 0, 58                                        | 0, 89       | 1, 24           |
| $(m, l, m)$            | 1, 28                                        | 1, 15       | 1, 63           |
| $(h, l, h)$            | 0, 56                                        | 0, 54       | 0, 58           |

Tabel 8.6: Beregningstiden for 1000 fallitter hos enten investor eller modpart, uden beregning af værdien af CDS kontrakten ved fallit. Resultatet er vist i timer. Scenarierne er dem der er beskrevet i tabel 8.1 (l=lav, m=mellem, h=høj)

Som det kan observeres i tabel 8.6, så afhænger tiden, der samlet bruges til at regne fallitter, af to forskellige ting. Den ene er sandsynligheden for fallit hos enten investor eller modpart i fht. referencen. Hvis sandsynligheden for fallit hos investor og/eller modpart stiger i fht. sandsynligheden for fallit hos referencen, så mindskes tiden, der bruges på udregningen. Dette kan observeres i tabel 8.6 kolonne 1 række 1-2, og især i kolonne 1 række 3-4. Dette skyldes, at hvis sandsynligheden for fallit er størst hos referencen, så vil referencen i simuleringen oftere gå fallit som den første, og der skal derfor flere simuleringer af fallitter til, før investor eller modpart går fallit som den

første. Den anden grund er det generelle niveau af fallitsandsynligheden hos investor og modpart. Des mindre sandsynlighed der er for fallit hos investor og modpart, des flere simuleringer vil der gå uden at nogen går fallit. Der skal derfor flere simuleringer af fallitter til, før investor eller modpart går fallit som den første. Dette kan observeres i tabel 8.6 kolonne 1 række 3-4.

Som det kan observeres i kolonne 2 og 3 i tabel 8.6, så er betydningen af korrelation generelt en forøgelse af beregningstiden.

### 8.3.2 Værdien af CDS kontrakten

Her ses på tiden, det tager at regne værdien af CDS kontrakten, efter der har været fallit hos enten investor eller modparten som det første, dvs. en udregning af BR-CVA-CDS men fratrasket tiden fra tabel 8.6. Udregningerne tager udgangspunkt i scenarierne fra tabel 8.1.

| Scenarier<br>(0, 1, 2) | $(\Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{1,2})$ |             |                 |
|------------------------|----------------------------------------------|-------------|-----------------|
|                        | (0, 0, 0)                                    | (0, 0, 0.9) | (0.9, 0.9, 0.9) |
| $(l, h, m)$            | 10, 13                                       | 8, 87       | 16, 08          |
| $(h, h, m)$            | 13, 77                                       | 12, 82      | 14, 26          |
| $(m, l, m)$            | 3, 52                                        | 3, 31       | 4, 25           |
| $(h, l, h)$            | 3, 14                                        | 3, 21       | 3, 84           |

Tabel 8.7: Beregningstiden for 1000 udregninger af BR-CVA-CDS fratrasket tiden det tager at regne fallitterne fra tabel 8.6. Resultatet er vist i timer. Scenarierne er dem der er beskrevet i tabel 8.1 (l=lav, m=mellem, h=høj)

Resultaterne i tabel 8.7 er ikke intuitive. Forventningen var egentlig, at mere korrelation ville betyde mere beregningstid. Som det kan ses i tabel 8.7 kolonne 1 og 2 er dette dog ikke tilfældet. Det er ikke rigtigt muligt at give en forklaring på dette resultat. Men resultaterne i kolonne 3 viser sig dog at passe mere intuitivt, da det her ses en betydelig forøgelse i beregningstiden med den øgede korrelation.

### 8.3.3 BR-CVA-CDS

Til sidst ses på beregningstiden for hele BR-CVA-CDS. Udregningerne tager igen udgangspunkt i scenarierne fra tabel 8.1.

| Scenarier<br>(0, 1, 2) | $(\Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{1,2})$ |             |                 |
|------------------------|----------------------------------------------|-------------|-----------------|
|                        | (0, 0, 0)                                    | (0, 0, 0.9) | (0.9, 0.9, 0.9) |
| $(l, h, m)$            | 12, 48                                       | 12, 92      | 19, 16          |
| $(h, h, m)$            | 14, 35                                       | 13, 71      | 15, 5           |
| $(m, l, m)$            | 4, 8                                         | 4, 46       | 5, 88           |
| $(h, l, h)$            | 3, 70                                        | 3, 75       | 4, 42           |

Tabel 8.8: Beregningstiden for 1000 udregninger af BR-CVA-CDS. Resultatet er vist i timer. Scenarierne er dem der er beskrevet i tabel 8.1 (l=lav, m=mellem, h=høj)

Resultaterne for de samlede beregninger, som er vist i ovenstående tabel 8.8, er en lille forøgelse ved kun at lave to af parterne korrelerede, dette ses i kolonne 1 og 2. Der er dog en betragtelig forøgelse i beregningstiden, når alle parter er højt korrelerede. Det, som der måske skal lægges mest mærke til, er at den store variation i beregningstiden fra 3,70 i kolonne 1 række 4, til 19,16 i kolonne 3 række 1. Selv med den laveste på 3,70 er det en meget høj beregningstid.

## 9 Udvidelser/Diskussion

Modellen for BR-CVA-CDS er nu blevet udledt og implementeret, og modellen er brugt til at udregne resultater for BR-CVA-CDS. Det er dog vigtigt at holde for sig øje, at modellen ikke er blevet testet op mod empirisk materiale. Derfor kan modellen kun bruges til at få en forståelse af retningen i resultaterne, og ikke vil kunne bruges uden videre test mod empirisk data.

I modellen, gennemgået i dette speciale, er der lavet en række forsimplinger og antagelser. Disse er lavet af hensyn til den mulige implementering og på grund af specialets omfang. Jeg vil, i dette afsnit, se lidt nærmere på disse forsimplinger og antagelser, og se på om de kan passe, eller om der er andre metoder, der ville være mere egnede.

I fht. til CDS kontrakten er der især en ting, der ville være nødvendig at ændre for at gøre modellen brugbar. Det er muligheden for at have en *upfront* betaling. Dette er nødvendigt, da det i dag er markedspraksis at have sådan en betaling, og så løbende betale en præmie. Dette er dog en relativt enkel ændring at implementere i modellen.

En *upfront* betaling har også betydning for BR-CVA-CDS. I denne model vil betalingen flytte modpartsrisiko fra *protection buyer* til *protection seller*, der er den part, der modtager *upfront* betalingen. Dette skyldes at *protection seller* er sikker på at modtage en større del af betalingerne fra *protection buyer*. Hvis denne model havde mulighed for simultan fallit hos begge CDS kontraktens parter, kunne det faktisk betyde, at en *upfront* betaling ville være med til også at reducere *protection buyer*'s modpartsrisiko. Dette ville være tilfældet, hvis *upfront* betalingen markant reducerede *protection seller*'s fallitrisiko, og vil derfor være en vigtig udvidelse til modellen.

Der er flere antagelser, der både har betydning for BR-CVA og CDS kontrakten. En ændring, der måske ikke ser ud til at have den store effekt, er valget af kalender og dagskonvention. I denne model tages der ikke højde for nogen af de to. Modellen er forsimplet til at sige at tre måneder er præcis et kvart år. Modellen skulle derfor tilpasses, så den kan tage højde for en eller flere landes kalendre. Modellen skal også kunne tage højde for forskellige dagskonventioner som "act/act", "act/360, etc.. Ændringen vil hele tiden have betydning, for hvordan betalingerne falder, og derved også hvilken diskontering der skal bruges. Begge dele vil have betydning for værdien af CDS kontrakten og BR-CVA, men betydning af disse ændringer for BR-CVA-CDS vil dog være forholdsvis små.

En anden antagelse, der er brugt i modellen, er, at betalinger ved en fallit sker med det samme. Dette er ikke samstemt med praksis, hvor der altid vil gå en periode, en



såkaldt *cure*, efter en fallit, før betalingerne falder. Dette har hovedsageligt betydning for diskonteringen, da betalingerne vil blive flyttet til et senere tidspunkt og derfor vil have mindre værdi. Det, der nok i højere grad vil kunne have betydning for BR-CVA-CDS er muligheden for fallit hos mere end kun en enkelt part, da der kan opstå en yderligere fallit i *cure* perioden. Der kunne både være "naturlige" fallitter, og som følge af fx en fallit hos referencen, hvilket kunne forårsage at *protection seller* ville få problemer med at opfylde sine forpligtigelser, og derfor måtte gå fallit.

Både for CDS kontrakten og for BR-CVA er det antaget, at *recovery* og derved LGD er konstant. Det er muligt at indgå CDS kontrakter med fast LGD, men oftest vil det være stokastisk. Dette betyder, at for at modellen ville kunne bruges i praksis, så vil en model med mulighed for stokastisk LGD være en nødvendighed. Der skulle desuden laves en undersøgelse af om betydning af en LGD, der er korreleret med kreditrisikoen, og hvilken betydning dette kunne have. Betydningen af, at *recovery* bliver gjort stokastisk, kan variere alt afhængigt af hvilken fordeling, der bruges, men hvis middelværdien er det samme som den konstante *recovery*, vil det nok ikke betyde det store, da det i længden er den samme middelværdi. Et korreleret *recovery* kunne derimod få større betydning, da det kunne betyde en mærkbar ændring i diskonteringen.

Renter i modellen er antaget at være deterministiske. Det kunne være interessant at undersøge betydningen af stokastiske rentemodeller til modellen, fx Vasicek, CIR, Hull-White, etc.. Samtidig med en stokastisk rentemodel kunne der undersøges betydning af korrelation mellem kreditrisikoen og renter, da der her kunne være bekymring om mulig for *wrong-way risk*. Derfor ville det være naturligt at undersøge betydning for BR-CVA-CDS. Igen afhænger betydningen af stokastiske renter, af valget af rentemodel, og BR-CVA-CDS vil nok først for alvor blive påvirket, hvis renterne korreleres med fallitsandsynligheden.

I modellen er der valgt CIR som intensitetsproces. Det er dog muligt at udvide CIR processen, så den indeholder et hop element, dvs. en pludselig stor forøgelse af intensiteten. Denne proces bør blive testet, og der bør også testes, om der er andre modeller, som Vasicek og Hull-White, ville passe bedre.

At korrelationerne mellem finansielle modparter altid er konstant, er ikke nødvendigvis intuitivt. At korrelationerne i kreditkvaliteten på nogle tidspunkter er positiv og andre tidspunkter er negativt, er ikke utænkeligt. Det kan derfor være at for at modellen bliver korrekt, skal der laves en model, der har stokastisk korrelation.

Ud over de indtil nu nævnte ændringer til modellen, er der også andre overvejelser, der i højere grad vil betyde en større ændring eller tilføjelse til modellen. Der er i modellen en implicit antagelse om, at CDS kontrakten er likvid, og at der derfor ikke opstår problemer omkring værdifastsættelsen af CDS kontrakten. De problemer, der kan opstå ved perioder med illikviditet i modellen, bør derfor indregnes i modellen.

En sidste ting, der er udeladt af modellen, er en valutaovervejelse. Der kan være betydelig *wrong-way risk* forbundet med værdien af valutaen og værdien på både en CDS og på BR-CVA. Det er også sådan i dag at fx en CDS kontrakt, med en amerikansk statsobligation som underliggende aktiv, ikke har betaling i USD, men i stedet i EUR. Modellen burde derfor have valuta som en del af modellen.

I dette speciale bliver der kun set på BR-CVA mellem to parter på en enkelt kontrakt. Der vil dog ofte være flere kontrakter mellem de to parter, og ikke kun CDS kontrakter, men en lang række af produkter. Der kan desuden være forskellige aftaler om kollateralstillelse og *netting* aftaler. Dette kan derfor have stor effekt på værdien af BR-CVA-CDS, hvis den bliver regnet i fht. en portefølje.

## 10 Konklusion

For at lave en model til værdiansættelse af justeringen for bilateral modpartsrisiko vedrørende en CDS (BR-CVA-CDS) med et givet spread, er det nødvendigt, at udlede især to formler. Den første er den generelle formel for bilateral modpartsrisiko (BR-CVA). Den anden formel er formelen for en *receiver* CDS. Begge formler er udledt som den forventede risikoneutrale værdi af et *cash flow*. Ud fra disse to formler fås formelen for BR-CVA-CDS.

Implementeringen af modellen foregår med Monte Carlo simulation. Først udregnes der fallitter hos de tre involverede parter, investor, modpart og referencen med cox processor. Hvis investor eller modpart går fallit som den første, så udregnes værdien af CDS kontrakten, givet fallitten hos enten investor eller modpart. Udregningen af CDS kontrakten, gør bl.a. brug af afledte copulafunktioner og fourier inversion.

Med hensyn til modellens præcision er det vigtigt, at være opmærksom på at modellen ikke er testet empirisk, og der er ikke testet for betydningen af de antagelser, der har været nødvendige at lave for at kunne implementere modellen. De fundne standardafvigelser er relativt store i fht. til resultaterne. Dog er beregningsgrundlaget for standardafvigelserne relativt spinkelt. Pga. den begrænsede beregningsmulighed er det svært at sige noget om usikkerheden i beregningerne, men det ser ud til at det vil være nødvendigt med flere simuleringer for at resultatet konvergerer i tilstrækkelig grad. Dette skyldes, at udregningen i visse tilfælde viser en standardafvigelse så stor som 10 basispunkter.

Udregningen af 1000 simuleringer tager, alt afhængig af forskellige variable, alt mellem tre og nitten timer. For at gøre beregninger hurtigere skal der arbejdes med koden, og computerens regnekraft skal øges. Dette ændrer dog ikke på, at modellen er meget beregningstung, og at det sandsynligvis ikke er muligt at få bragt beregningstiden ned i et niveau, hvor modellen er praktisk anvendelig, i noget der skulle minde om *real time*. Hvis modellen i stedet bruges til at lave en kørsel hen over natten, evt. med følsomhedsberegninger i fht. de forskellige variable, og man dagen efter så brugte nattens resultater med justeringer i fht. dagens marked. I så fald begynder det at være realistisk med brug af modellen. Dette går dog væk fra præmissen for modellen, at beregningerne var præcise, og ikke ved at lave justeringer til en model.

At der bliver indført korrelation i fallitsandsynlighederne mellem de tre involverede parter i en CDS kontrakt, kan have forskellig indvirkning på værdien af den bilatera-

le modpartsrisiko. Om der er indvirkning på værdien af den bilaterale modpartsrisiko, afhænger meget af, hvem der er korrelerede og hvor meget de er korrelerede. Når korrelationen har indvirkning på den bilaterale modpartsrisiko kan den, afhængig af størrelsen på korrelationen, både forøge og formindske modpartsrisikoen, det såkaldte *wrong-way* og *right-way risk*. Dette skyldes, at hvis investor indgår i fx en *payer* CDS med en modpart, og modpartens fallitrisiko er positivt korreleret med referencens, så vil en fallit hos modparten betyde en øget fallitrisiko hos referencen, og derved en større værdi af *payer* CDS kontrakten for investor, en værdi han ikke modtager fuldt, da modparten er gået fallit. Det modsatte ville være tilfældet hvis korrelationen var negativ eller det var en *receiver* CDS kontrakt.

I denne opgave er der desuden set på, hvad der sker med værdien af den bilateral modpartsrisiko, hvis investor går fra at blive betragtet som næsten risikofri til risikofyldt. Det første, der er vigtigt, at lægge mærke til, er at værdien af den bilaterale modpartsrisiko for investoren falder i fht. tilfældet hvor han blev betragtet som risikofri. Dette skyldes, at hvis investor har negativ værdi på CDS kontrakten på det tidspunkt, hvor han går fallit, betaler han ikke hele værdien tilbage. Det andet er, at hvis investors fallitsandsynlighed er tilstrækkelig stor i fht. modpartens, så kan værdien af den bilaterale modpartsrisiko blive negativ. Dette betyder i teorien, at investor pga. af sin egen fallitrisiko, ville være villig til at indgå en handel med et tab.

# A Appendiks

## A.1 Program og computer

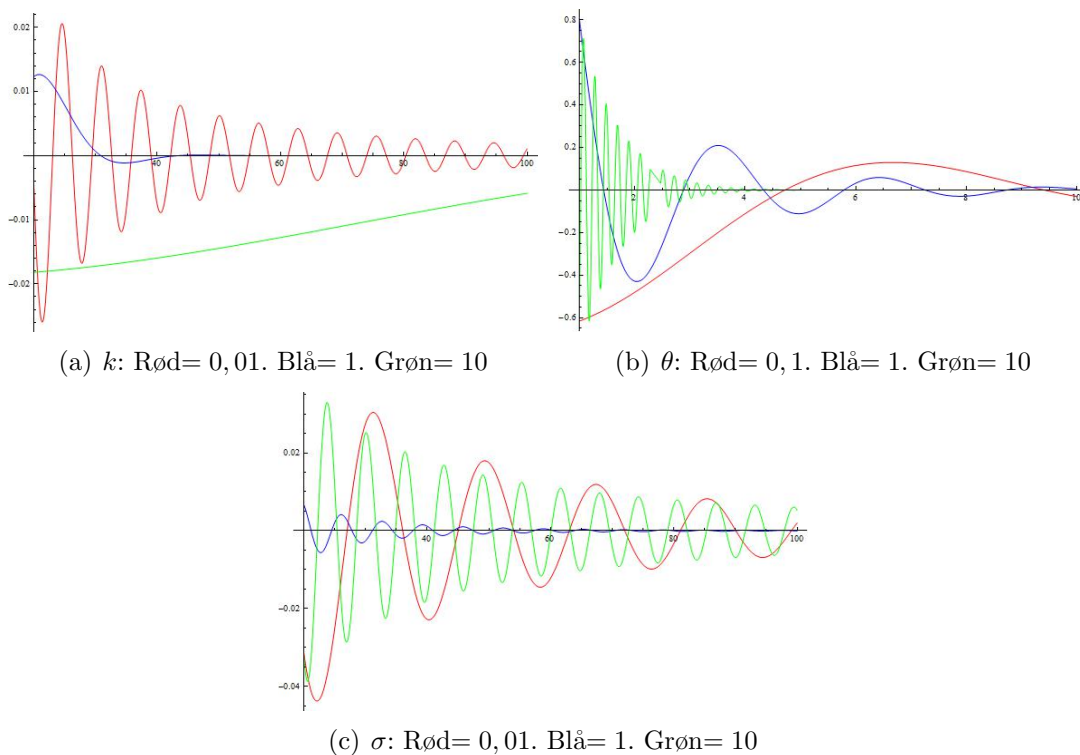
Programmet der bruges til implemteringen er *Wolfram Mathematica 8*.

Programmet køres på en computer med

- Styresystem: Windows 7 Professional, Service Pack 1
- CPU: Intel Core i3-2310M CPU 2.10GHz
- Installeret ram: 4,00 GB
- Systemtype: 64-bit operativsystem

## A.2 Eksempler på ligning 7.45

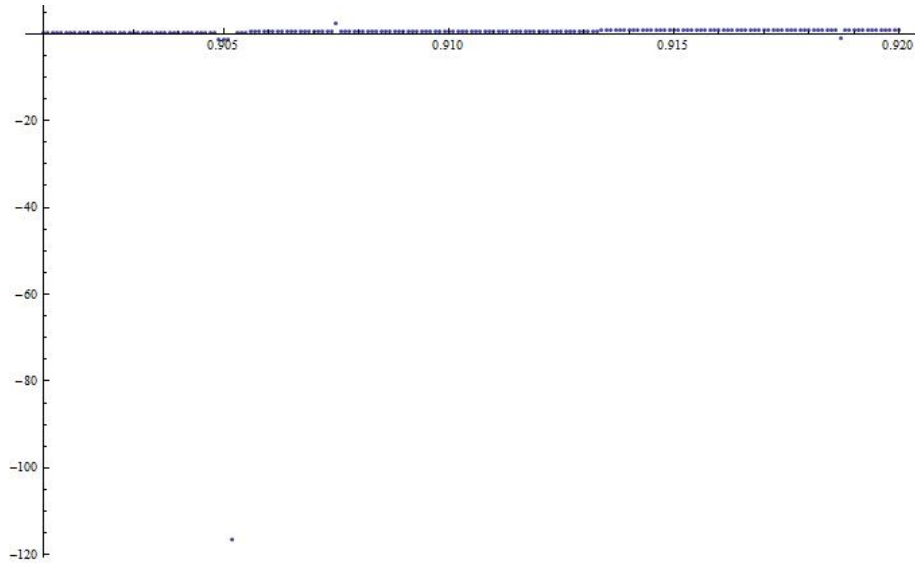
For at se at funktionen, der integreres over (7.45), ikke ændrer radikalt udseende, kan man herunder se 3 grafer, der viser funktionen for forskellige værdier af  $k$ ,  $\theta$  og  $\sigma$ . Det ses at der ikke radikalt ændres på formen af funktionen.



Figur A.1: De tre grafer viser et eksempel på ligning (7.45), hvor der i hver enkel graf er lavet med ændringer i en af konstanterne  $k$ ,  $\theta$  og  $\sigma$ . I de andre til fælde er konstanterne  $k = 0,5$ ,  $\theta = 0,02$  og  $\sigma = 0,1$ .

## A.3 Betinget Fordeling

Grundet numerisk ustabilitet i Mathematica kan der opstå fejl i udregningen af de betingede fordelinger (7.35) og (7.36). Nedenunder kan ses en graf, der viser en udregning af (7.35)  $C_{1|0,2}(u_1; U_2)$



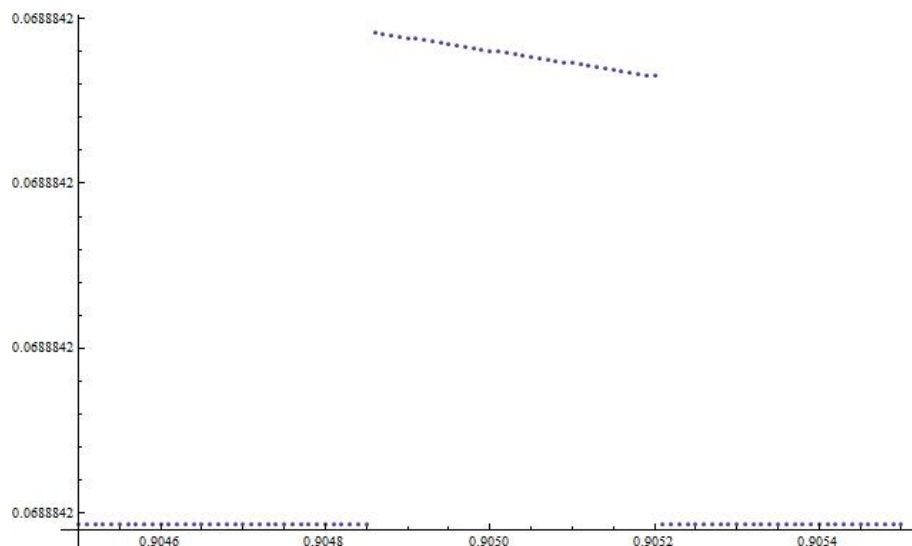
Figur A.2:  $C_{1|0,2}(u_1; U_2)$  udregnet i intervallet  $u_1 \in [0,901; 0,92]$  med alle korrelationer lig 0,9,  $\bar{U}_{0,2} = 0,1$ ,  $\bar{U}_{1,2} = 0,9$  og  $u_2 = 0,1$ .

Som det kan ses på grafen, er der bl.a. en meget stor fejl, der giver en sandsynlighed, der er ca. minus 120. Der er desuden flere, som er både negative og større end 1. Dette kan ikke være rigtigt.

Det viser sig, at fejlen opstår i udregningen af multinormalfordelingen i udregningen af

$$\frac{\partial C(\bar{U}_{0,2}, u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

Nedenunder ses en graf, der viser  $C(\bar{U}_{0,2}, u_1, u_2)$ . Funktionen er i teorien kontinuert og stigende, men der opstår en fejl, som desværre forplanter sig i beregningerne.



Figur A.3:  $C(\bar{U}_{0,2}, u_1, u_2)$  udregnet i intervallet  $u_1 \in [0,9045; 0,9055]$  med alle korrelationer lig 0.9,  $\bar{U}_{0,2} = 0,1$ ,  $\bar{U}_{1,2} = 0,9$  og  $u_2 = 0,1$ .

For at sikre at de opståede fejl ikke medtages i beregningerne, og derved er med til at skabe fejl, fjernes alle punkter der, enten er mindre end den foregående eller større end en. Hvis et punkt har en værdi, der er større end den foregående, fjernes de begge to for at sikre, at den lavere værdi skyldtes, at den foregående var for høj.

## A.4 Udregning af $x_{min}$ og $x_{max}$

I dette appendiks vises hvordan  $x_{min}$  og  $x_{max}$  findes, herunder pseudokode til udregningerne.

### A.4.1 $x_{min}$

Jeg starter med  $x_{min}$ .

$x_{bund} = 0$ ,  $x_{top} = 0,01$

$k = F(x_{top})$

While  $k < 0,00001$

$x_{bund} = x_{top}$

$x_{top} = x_{top} * 5$

End While

While  $x_{top} - x_{bund} > 0,01$

$k = F((x_{top} - x_{bund})/2)$

If  $k < 0,00001$  then

$x_{bund} = (x_{top} - x_{bund})/2$

Else

$x_{top} = (x_{top} - x_{bund})/2$



```

End If
 $x_{min} = x_{bund}$  End While

```

#### A.4.2 $x_{max}$

Koden for  $x_{max}$ , er næsten den samme som for  $x_{min}$

```

 $x_{bund} = 0$ ,  $x_{top} = 0,01$ 

```

```

 $k = F(x_{top})$ 

```

```

While  $k < 0,99999$ 

```

```

     $x_{bund} = x_{top}$ 

```

```

     $x_{top} = x_{top} * 2$ 

```

```

End While

```

```

While  $x_{top} - x_{bund} > 0,01$ 

```

```

     $k = F((x_{top} - x_{bund})/2)$ 

```

```

    If  $k < 0,99999$  then

```

```

         $x_{bund} = (x_{top} - x_{bund})/2$ 

```

```

    Else

```

```

         $x_{top} = (x_{top} - x_{bund})/2$ 

```

```

    End If

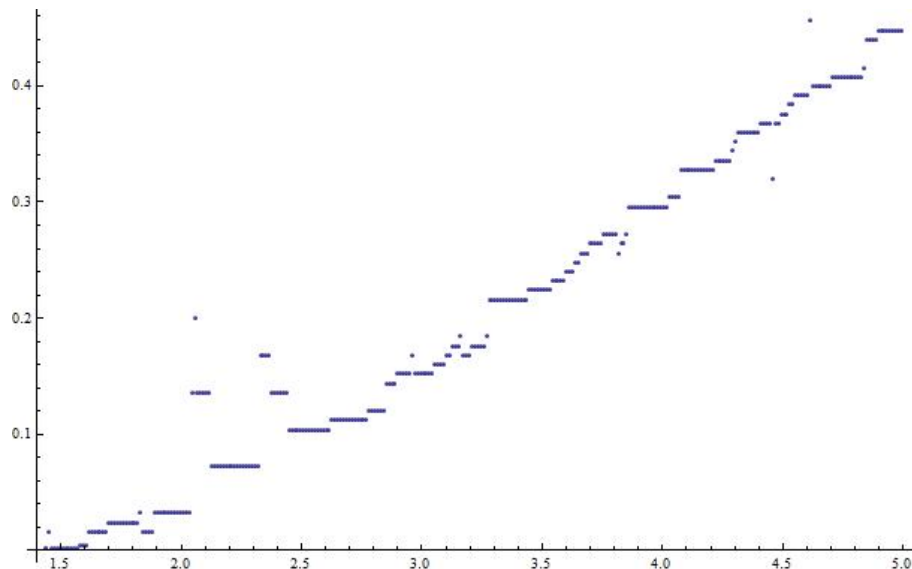
```

```

 $x_{max} = x_{top}$  End While

```

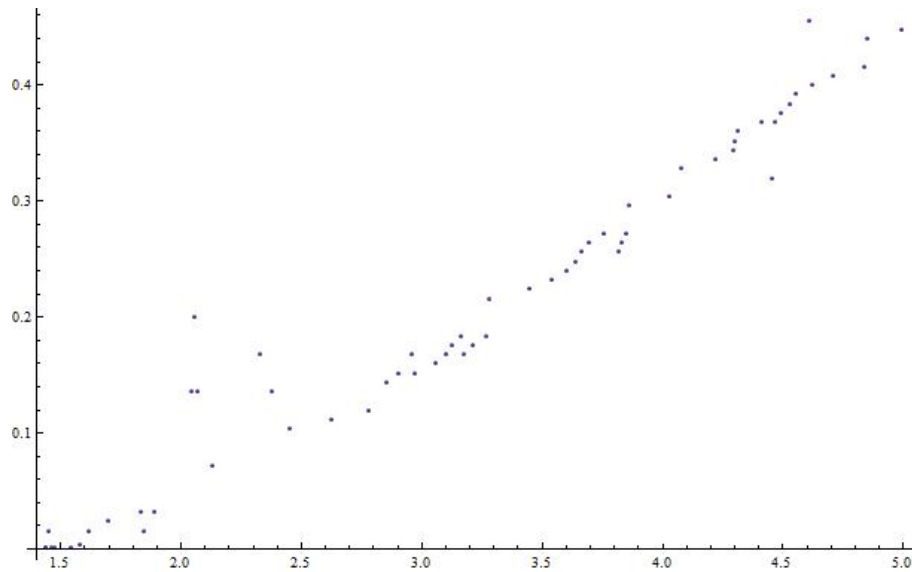
Som det kan ses i nedenstående, graf så kan der opstå unøjagtighed ved brug af denne metode til at udregne  $x_{max}$



Figur A.4: Udregninger af  $x_{max}$ , mellem fallit og CDS kontraktens udløb

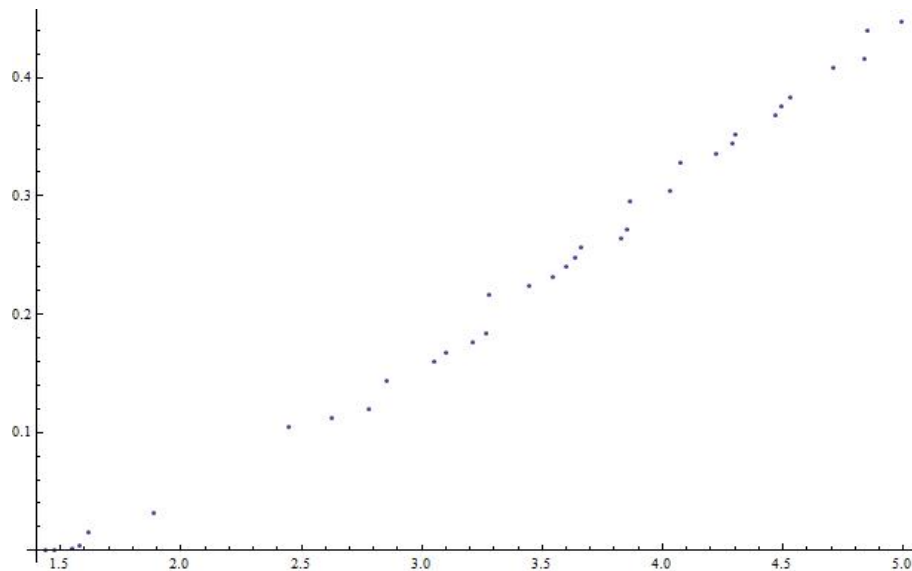
For at sortere i data, startes med at kigge på to af hinanden følgende værdier. Hvis

de er ens, slettes den sidste af de to. Dette gøres for nemmere bagefter at kunne fjerne eventuelle fejl. Resultatet af sorteringen kan ses i nedenstående graf.



Figur A.5: Udregninger af  $x_{max}$ , mellem fallit og CDS kontraktens udløb

I den anden sortering kigger jeg på tre værdier, hvis den midterste, er større eller mindre end de to andre, fjernes alle tre. Resultatet af sorteringen kan ses i nedenstående graf.



Figur A.6: Udregninger af  $x_{max}$ , mellem fallit og CDS kontraktens udløb

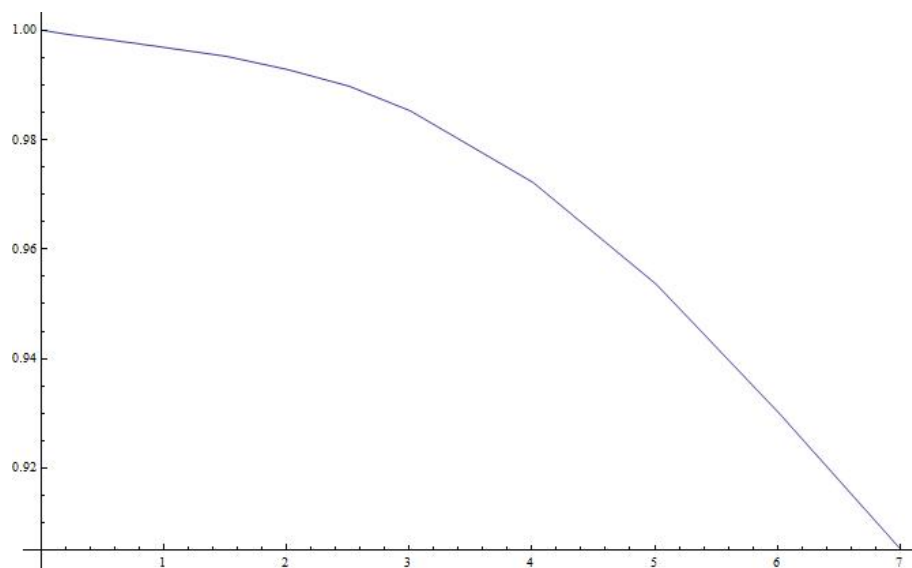
Til sidst laver jeg lineær interpolation mellem punkterne, og interpolationens værdier til at finde de  $x_{max}$ , som jeg skal bruge.

## A.5 Diskonteringskurve

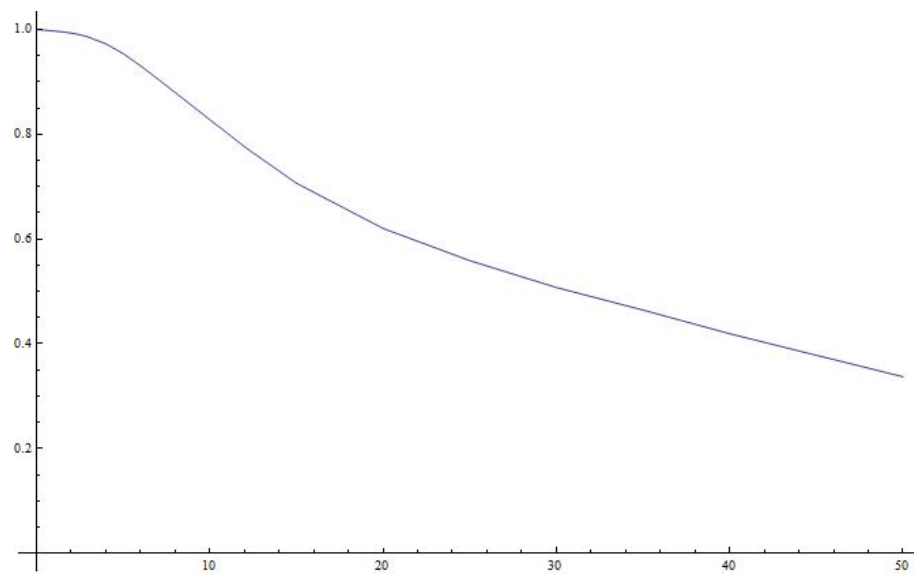
Her er data til en *stripped* OIS kurve taget fra Bloomberg d. 1. februar 2012.

| $t$       | $D(0, t)$ | $t$      | $D(0, t)$ | $t$     | $D(0, t)$ |
|-----------|-----------|----------|-----------|---------|-----------|
| 0         | 1         | 0,762295 | 0,997637  | 8,0082  | 0,879274  |
| 0,0136612 | 0,99997   | 0,838798 | 0,997369  | 9,00845 | 0,853428  |
| 0,0327869 | 0,999931  | 0,92352  | 0,997133  | 10,0085 | 0,827378  |
| 0,0519126 | 0,99986   | 1,01119  | 0,996836  | 11,0139 | 0,801663  |
| 0,0928962 | 0,999684  | 1,50982  | 0,995228  | 12,0137 | 0,775658  |
| 0,172131  | 0,999406  | 2,00845  | 0,99281   | 15,0085 | 0,706158  |
| 0,254098  | 0,999127  | 2,50708  | 0,98979   | 20,0082 | 0,620017  |
| 0,34153   | 0,998871  | 3,00845  | 0,985273  | 25,0085 | 0,558493  |
| 0,420765  | 0,998633  | 4,0082   | 0,972208  | 30,0085 | 0,507358  |
| 0,510929  | 0,998388  | 5,01393  | 0,953575  | 35,0112 | 0,464207  |
| 0,590164  | 0,998159  | 6,01393  | 0,93005   | 40,0137 | 0,419067  |
| 0,672131  | 0,997869  | 7,01119  | 0,905029  | 50,0139 | 0,336852  |

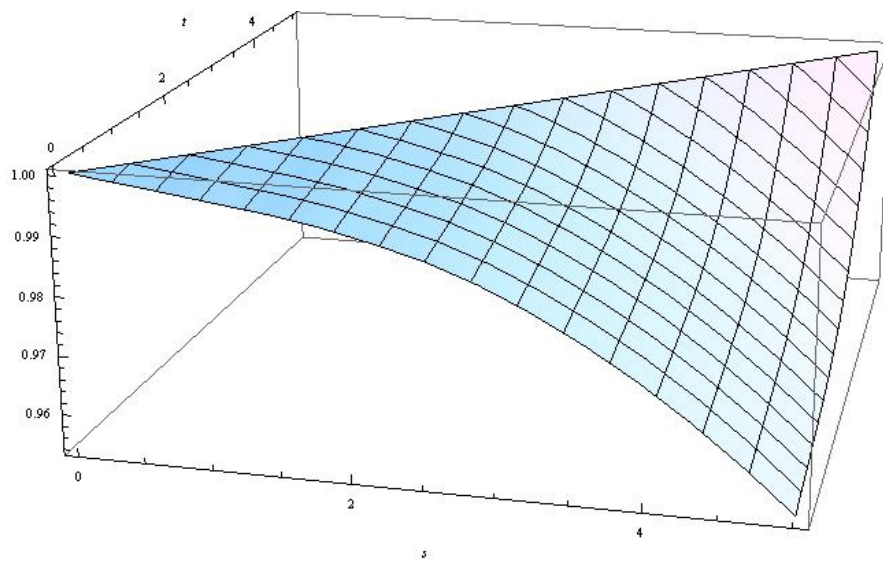
Tabel A.1: Tabellen viser data brugt til diskonteringskurven.



Figur A.7: Grafen viser fra nul til syv år.



Figur A.8: Grafen viser diskonteringskurven fra nul til halvtreds år.



Figur A.9: Grafen viser diskonteringsfladen for  $D(t, s)$ .

# Litteratur

- [1] Damiano Brigo & Agostino Capponi, *Bilateral counterparty risk valuation with stochastic dynamical models and application to Credit Default Swaps*. 2009
- [2] Damiano Brigo & Kyriakos Chourdakis *Counterparty Risk for Credit Default Swaps - Impact of spread volatility and default correlation* International Journal of Theoretical and Applied Finance 2008
- [3] Damiano Brigo & I. Bakka, *Accurate counterparty risk valuation for energy-commodities swaps*, Energy Risk, 2009
- [4] David Lando, *Credit Risk Modeling: Theory and Applications*, Princeton University Press, 2004
- [5] David Lando *On Cox Processes and Credit Risky Securities*, Klüver Academic Publishers, 1998
- [6] Jon Gregory, *Counterparty Credit Risk - The new challenge for global financial markets*, John Wiley & Sons Inc, 2011
- [7] Yuri Goegebeur, *The Poisson and the nonhomogeneous Poisson proces*, 2007
- [8] Tue Tjur, *Sandsynlighedsregning*, Materialesamling produceret for Handelshøjskolen i København, 5. udgave, 2002
- [9] Paul Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer Science, 2004
- [10] David X. Li, *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, 2000
- [11] A. Sklar *Random variables, joint distribution functions and copulas*, Kybernetika, 9:49-460, 1973
- [12] Pravin K. Trivedi, David M. Zimmer, *Copula modeling: an introduction for practitioners*, Now Publishers Inc, 2007
- [13] Roger B. Nelsen, *An introduction to copulas*, Springer, 1999

- [14] Dominic O’Kane, *Modeling Single-name and Multi-name Credit Derivatives*, John Wiley & Sons Ltd, 2008
- [15] S. Crépey, M. Jeanblanc, B. Zargari, *CDS with Counterparty Risk in a Markov Chain Copula Model with Joint Defaults* 2009
- [16] Nordea Markets, *Credit default swaps – en produkt- og risikobeskrivelse*
- [17] *The J.P. Morgan Guide to Credit Derivatives*, Contributions from the RiskMetrics Group, Risk Publications
- [18] David T. Hamilton, Praveen Varma, Sharon Ou, Richard Cantor, *Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-2005*, 2006
- [19] Damiano Brigo, Fabio Mercurio, *On deterministic-shift extensions of short-rate models*, 2001
- [20] Dominic O’Kane, Marco Naldi, Sunita Ganapati, Arthur Berd, Claus Pedersen, Lutz Schloegl, Roy Mashal, *The Lehman Brothers Guide to Exotic Credit derivatives*, 2001
- [21] Damiano Brigo, *Counterparty Risk Pricing: Intro to Unilateral and Bilateral CVA across asset classes with Netting and Collateral*, FM10 Master Lectures, 2011, London
- [22] Edward Altman, Andrea Resti, Andrea Sironi, *Default Recovery Rates in Credit Risk Modeling: A Review of the Literature and Empirical Evidence*, 2003
- [23] Kenneth Emery, Sharon Ou, *Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2008*, Moody’s, 2009
- [24] Martin Schmelzle, *Option Pricing Formulae using Fourier Transform: Theory and Application*, April 2010
- [25] Andreas Eckner, *Computational Techniques for basic Affine Models of Portfolio Credit Risk*, August 2009
- [26] Wolfram *WolframMathWorld* <http://mathworld.wolfram.com>