Cand.merc.(mat)-studiet
Økonomisk Institut

Kandidatafhandling

Multivariate kointegrationsanalyser

- En analyse af risikopræmien på det danske aktiemarked

Studerende: ______________________________

Louise Wellner Bech

Afleveret: 29. april 2009

Vejleder: Lisbeth la Cour

Censor: ______________________________

Copenhagen Business School 2009

Executive Summary

This thesis presents an attempt to resolve the problems emerging from the assumptions concerning the risk premium on the stock markets. The main concern is the calculation of the historical risk premium, which until now has been based on the assumption that the risk premium can be assumed constant, if the sample period is long enough. Since the risk premium for a specific stock market has different size depending on the period, the risk premium might not be constant after all. This thesis presents calculations of a timevariant risk premium and discusses the relevance for investors.

The thesis firstly reviews the original risk premium theory from 1985, presenting the definition of the risk premium, the calculation methods and the main assumptions. In the continuation of this, the next part of the thesis presents the appropriate series to represent both the Danish stock market and a Danish riskfree asset, with a prior disscusion of the theoretical relevance of the alternatives.
The thesis proceeds to review the cointegration theory. The variation of the VAR-representation of multiple series is presented with the main focus on the effects from cointegration between the series. Especially the split into the long run parameters a, b and the short run parameters Γ_i are relevant, because it shows the different information within the series. Afterwards, both the univarate and the multivariate cointegration theory are described, with the center of attention on the consequences following choices concerning the parameters indicated by testresults.

The empirical part of the thesis shows how the theoretical arguments are put to work on the Danish stock market. Extensive attention is payed to the specification of the unrestricted VAR-model to ensure that the assumption of multivariate normality in the residuals is obtained. The final restricted model consists of one cointegration that describes the long run dynamic and respectively an AR(2)-process for the risk free asset and an AR(3)-process for the stock market to describe the short run dynamic. It is shown that the timevariante risk premium can be calculated from a statistical method and a financial method using the estimated parameters, but both methods are in some areas inconsistent with the known financial forces and the statistical definitions concerning the series.
The risk premium is calculated under the assumption of concistency, so that the result can be used as benchmark. Both timevariate calculation methods and the concistency method show that an investor can expect an annual risk premium of about 5% on a long investment. But the assumption of concistency during the periode is shown to be unacceptable, since the spread of the annual timevariant riskpremium is -28% to 38%. The timing of a shorter investment is therfor crucial for the size of the risk premium.

Indholdsfortegnelse

Der henvises i specialet til følgende filer, som er vedlagt på en CD-rom:

1) Excel-fil ”Data og Beregninger.xls” med dataserier og beregninger.
   - når filen åbnes skal makroerne aktiveres.
2) Programkode ”ProgramKode.PRG” til RATS samt indlæsning af VAR-modeller til CATS.
3) Excel-fil ”DataTilCats.xls” med dataserier, der kan indlæses i RATS.

1.0 Introduktion

I dag har størstedelen af den danske befolkning investeringer i det danske værdipapirsmarked. Nogle mennesker har en pensionsopsparing som er investeret i en kombination af aktier og obligationer. Andre har investeret en personlig opsparing i attraktive værdipapirer og forskellige virksomheder har en portion penge, som er sat til side til dårlige tider. Ens for investeringerne er, at investeringsværdien ønskes bibeholdt, samtidig med at der opnås størst muligt afkast. En investor anbefales at diversificere sin portefølje, for eksempel ved at investere i flere forskellige aktier i det danske marked, således at risikoen minimeres i forhold til det afkast som er muligt at opnå.
For en langsigtet investor er det interessant at kende til afkastet på investeringerne over en længere horisont. Derfor er der i denne analyse fokus på forholdet mellem afkastet på aktiemarkedet og afkastet på et risikofrit aktiv, idet dette viser forskellen på at have pengene stående på en bankkonto og ved at investere pengene i en veldiversificeret dansk aktieportefølje. Ifølge teorien svarer afkastet på aktiemarkedet til afkastet på et risikofrit afkast plus en risikopræmie for den øgede risiko, der er ved at investere i et risikofyldt aktiv.

Der er foretaget forskellige undersøgelser af risikopræmien på det danske aktiemarked, hvor undersøgelserne har varierende historiske horisonter samtidig med at der ikke er fuldstændig enighed om, hvordan hhv. aktiemarkedet og det risikofrie aktiv skal beskrives. Indtil nu har den gængse metode til bestemmelse af risikopræmien været, at beregne et gennemsnit af de historiske afkast over en periode, hvilket er i overensstemmelse med at risikopræmien antages at være konstant over tid.
Spørgsmålet er, om denne antagelse er acceptabel ift. det danske aktiemarked. Da det er umuligt at forudsige udviklingen af priserne på værdipapirer, vil værdipapirernes afkast være præget af stokastiske elementer, hvorfor antagelsen om en konstant risikopræmie kan være problematisk.

Gennem tidsrækkeanalyse[1] er det vist, at afkastudviklingen for et enkelt aktiv tilnærmelsesvist kan beskrives ved en Autoregressiv proces (AR-proces). Derfor er det nærliggende at beskrive afkastudviklingen for aktiemarkedet ved én AR-proces og renteudviklingen for et risikofrit aktiv ved en anden AR-proces. Idet aktiverne finansielt set kan påvirke hinanden, samtidig med at de kan være drevet af en fælles stokastisk proces, undersøges det i denne analyse om der findes en kointegration mellem udviklingen på hhv. det danske aktiemarked og et risikofrit aktiv. Ved kointegration har de to aktiver mulighed for at påvirke hinandens udvikling, samtidig med at

[1] Faget Tidsrækkeanalyse på Cand.merc.(mat) -studiet

serierne varierer over tid. Med det taget i betragtning, giver antagelsen om en konstant risikopræmie over tid ikke længere mening, hvorfor en alternativ beregning af risikopræmien vil beskrive den finansielle situation bedre. Kun i én forholdsvis lille undersøgelse[2] er risikopræmien på det danske aktiemarked bestemt ved hjælp af kointegrationsanalyse. Derfor er det interessant at foretage en større undersøgelse af kombinationen mellem multivariate kointegrationsanalyser og størrelsen af risikopræmien på det danske aktiemarked. Yderligere har det interesse at beregne spændet mellem maksimum og minimum for risikopræmien, således at relevansen af timing og horisont af en investering kan vurderes, når risikopræmien antages at variere over tid.

1.1 Problemformulering

Formålet med specialet er at gennemføre en multivariate kointegrationsanalyse, og herigennem at opnå indsigt i modelspecifikation og relevante tests. Specifikt gennemføres en analyse af det danske aktiemarked, og herfra beregnes den tidsvarierende risikopræmie, som en investor kan forvente at opnå ved en investering i det danske aktiemarked. Hovedspørgsmålet i specialet er således:
"Hvordan kan risikopræmien på det danske aktiemarked beregnes ved brug af multivariate kointegrationsanalyser?"
Det overordnede emne er defineret som "Multivariate kointegrationsanalyser af risikopræmien på det danske aktiemarked". Ved besvarelse af hovedspørgsmålet opnås således den ønskede forståelse af det overordnede emne. Det overordnede emne er delt op i flere delemner, hvoraf hvert delemne beskrives for sig. Således opnås en dybdegående besvarelse af hovedspørgsmålet.

Hvert delemne undersøges med udgangspunkt i hvert sit delspørgsmål:

- Hvad er definitionen af risikopræmien og hvordan beregnes den?
- Hvilke serier beskriver det danske værdipapirmarked bedst ift. teorien bag risikopræmien?
- Hvordan defineres en VAR-model, og hvad betyder det for modellen, når der er kointegration mellem serierne i modellen?
- Hvad indebærer multivariat kointegration (Johansens kointegration), og hvilke konsekvenser er der ved resultaterne af de forskellige tests, som benyttes i analysen?
- Hvad opnås ved en empirisk analyse af det danske aktiemarked mht. størrelsen på risikopræmien og spændet mellem maksimum og minimum for denne?

Delspørgsmålene undersøges i nævnte rækkefølge. Analysen indledes således med at beskrive definitionen af risikopræmien, og klargøre hvorledes denne kan beregnes.

[2] Olesen, J.O. (2000)

1.2 Afgrænsninger

Det er nødvendigt at foretage visse afgrænsninger for emnet. I dette afsnit beskrives hver afgrænsning, samt hvad der ligger til grund for disse.

Først afgrænses kointegrationsteorien, idet at der kun laves I(1)-analyse for multivariat kointegration. Der ses bort fra muligheden for I(2)-analyse, idet I(1)-analyse er tilstrækkelig for den valgte case. Yderligere vil MA-dynamikken i en eventuel langsigtet ligevægt ikke blive beskrevet, idet dynamikken i ligevægt ikke er relevant for størrelsen på risikopræmien for det danske aktiemarked. Antagelser om at estimerede parametre er konstante over hele perioden anfægtes ikke, da modellen ikke skal benyttes til forcast. Derfor undlades rekursiv estimation med de estimerede parameter i analysen.

I forhold til den valgte case beregnes risikopræmien over en afgrænset tidsperiode fra 1970 til 2008, da denne tidsperiode er relevant at sammenligne med en fremtidig udvikling. Samtidig antages det, at det danske værdipapirmarked kun indeholder obligationer, renter og aktieindeks, og der ses bort fra muligheden for at investere i mere eksotiske værdipapirer. Der antages yderligere simplificeringer for værdipapirmarkedet, idet der ses bort fra investorskatter, kurtage på handler og lignende skatter og afgifter.

Ud fra disse afgrænsninger undersøges de forskellige delspørgsmål fra problemformuleringen. Således vil teorien omkring beregning af risikopræmien, den afgrænsede kointegrationsteori og den empiriske analyse give en grundig dækning af emnet inden for de angivne rammer.

1.3 Data valg

Dataserierne som benyttes til den empiriske analyse er bestemt ud fra overvejelser omkring det danske værdipapirmarked. En længere diskussion af værdipapirmarkedet i Danmark indgår senere, hvor der fremgår begrundelser for valg af dataserier. I analysen benyttes kvartalsdata i perioden 31. december 1969 til 31. december 2008, således at undersøgelsen dækker over en periode på 39 år med i alt 157 observationer. En samlet oversigt over aktiver, beskrivelser af serier, tidsperioder og datakilder findes i bilag 1.

Da der benyttes kvartalsdata, skal det risikofrie aktiv defineres over en 3 måneders periode. Derfor benyttes en 3 måneders CIBOR-rente, som bestemmes ud fra danske bankers rentesatser på det givne tidspunkt. Da renteserien ikke går langt nok tilbage i tid, benyttes diskontosatser fra den danske nationalbank til den første del af dataserien fra 31. december 1969 til 31. marts 1988. Herefter benyttes den 3 måneders CIBOR-rente fra 31. marts 1988 og frem til 31. december 2008. Den årlige diskontosats på et givent tidspunkt deles med 4, således at serien angiver 3 måneders rentesatser svarende til de resterende kvartalsdata.

Det danske aktiemarked kan angives ved flere forskellige indeks, der beskriver markedet ud fra forskellige vinkler. I denne analyse benyttes Morgan Stanleys MSCI Danmark indeks til at beskrive en veldiversificeret portefølje på det danske aktiemarked. Indekset omregnes til DKK ved hjælp af valutakurserne på tidspunktet for den enkelte observation. Hermed giver det mening at sammenligne med et dansk risikofrit aktiv som automatisk opgøres i DKK, hvilket betyder at valutarisikoen fjernes fra undersøgelsen. MSCI indekset er udbyttekorrigeret, hvorfor der i undersøgelsen ikke fremkommer fejl som følge af udbytte på de enkelte aktier.

I analysens beregninger benyttes reale indeks-, afkast- og renteserier. Disse er fremkommet ved at deflaterer serierne med den danske inflation. I denne analyse benyttes en inflationsserie fra IMF International Financial Statistics, som angiver en gennemsnitlig årlig inflation over en periode på 3 måneder.[3] For at inflationen gælder kvartalsvist, deles den gennemsnitlige årlige inflationssats på et givent tidspunkt med 4, således at inflationen svarer til de resterende kvartalsdata.

2.0 Risikopræmien på et aktiemarked

En del af aktivallokeringen i en portefølje er at bestemme en fordeling af investeringerne. Fordelingen kan bestå af en blanding af aktier, obligationer og kontantbeholdning, eller fordelingen kan indeholde mere eksotiske investeringer. En investering i aktiemarkedet kan give varierende afkast og markedets udvikling kan beskrives ved et markedsindeks, som herved indikerer afkastet på en veldiversificeret portefølje. En kontantbeholdning, vil derimod give et rentebeløb, og idet renten er kendt fra investeringens start, anses kontantbeholdningen for at være en risikofri investering, mens en investering i aktiemarkedet er risikofyldt.

Under antagelse af at en tilpas lang tidshorisont vil indeholde en hel business cyklus med både op- og nedture i markedet, er der generelt opstået en hypotese om, at forskellen på en investering i et

[3] Først beregnes årlige inflationer for hver måned ift. året før. For eksempelvis 1. kvartal vil den gennemsnitlige årlige inflation være summen af inflationer for januar, februar og marts, som herefter deles med 3.

risikofyldt aktiv og et risikofrit aktiv er konstant over denne tidshorisont. Et argument, der taler for denne hypotese er, at variationen i forskellen mellem de to investeringer gennem den tilpas lange tidshorisont vil udligne sig, hvorfor antagelsen om en konstant forskel kan accepteres.
På denne baggrund undersøges første delspørgsmål om den generelle definition og beregning af risikopræmien på et aktiemarked.

2.1 Definition og beregning af risikopræmien

I en undersøgelse af det amerikanske aktiemarked fra 1985[4] ser Mehra og Prescott først på den historiske udvikling i markedet. Ifølge dem beskrives sammenhængen mellem det gennemsnitlige årlige historiske realafkast på hhv. aktiemarkedet og et risikofrit aktiv ved:

$$R_t = Rf_t + PR_t \quad \Leftrightarrow \quad PR_t = R_t - Rf_t \,. \tag{2.1}$$

R_t er aktiemarkedets årlige afkast, Rf_t er afkastet på det risikofrie aktiv og PR_t er en risikopræmie.

Mehra og Prescott viser, at historisk set har det årlige afkast på det amerikanske aktiemarked været betydeligt større end det årlige afkast på det risikofrie aktiv. Dette merafkast kaldes risikopræmien på aktier (risikopræmien) og angives ovenfor i ligningen med PR_t. Risikopræmien er afhængig af den valgte tidsperiode som afkastene sammenlignes over, samt hvilket markedsindeks og hvilket risikofrit aktiv der benyttes som sammenligningsgrundlag.

2.1.1 Afgrænsninger for aktiemarkeds indeks

Et aktiemarkedsindeks består af mange aktier fra et givent marked. Disse aktier skal sættes sammen således at der opnås et samlet indeks, som kan beregnes kontinuerligt. Typisk er der 2 forskellige metoder til at vægte aktierne i et indeks, pris-vægtet eller værdi-vægtet. Et pris-vægtet indeks beregnes ved at finde summen af priserne på de aktier der indgår, hvorefter summen deles med antallet af aktier. Et værdi-vægtet indeks beregnes derimod ved, at hver aktie i indekset har et vægt som svarer til markedsværdien af selskabets egenkapital. Idet der i et pris-vægtet indeks ikke tages højde for værditilvæksten ved eksempelvis udbytte, vil bevægelserne i indekset ikke svare til det afkast en investor ville få, hvis han replikerede indekset. Afkastet i et værdi-vægtet indeks svarer således bedre til det afkast en investor ville få ved replikering, hvilket betyder, at et værdi-vægtet indeks er at fortrække, når performance og herunder risikopræmien på aktier skal beregnes[5].

[4] Mehra, R. And Prescott, E.C. (1985)
[5] Cornell, B. (1999)

I en revideret udgave fra 2008 af Mehra og Prescotts artikel specificeres de underliggende antagelser for beregning af risikopræmien[6]. Det antages, at alle betalinger på de underliggende aktiver bliver reinvesteret. Det betyder at udbyttebetalinger på aktier og renter på obligationer samt kontantbeholdninger skal investeres i det givne aktiv, således at betalingerne kommer til at indgå som en stigning i aktivets værdi. Yderligere antages det, at der ikke betales skat eller handelsomkostninger, idet disse kan være forskellige fra aktiv til aktiv.

2.1.2 Beregning af realafkast og realrente

Da inflationen varierer fra tidsperiode til tidsperiode, skal den ikke være en faktor i størrelsen på risikopræmien. Den nominelle rente er pr. definition påvirket af inflationen, hvorfor der skal benyttes en realrente til risikopræmieberegningen. Realrenten findes ved at fjerne inflationspåvirkningen fra den nominelle rente, hvilket gøres ved at benytte den generelle rentes regningsformel[7]:

$$r = \frac{1+i}{1+p} - 1, \tag{2.2}$$

hvor r er den reale rente, i er den nominelle rente og p er inflationen.

Beregningen af et nominelt afkast (lig prisændringen) på et givent aktiv kan findes ved:

$$i_{t+1} = \Delta P_{t+1} = \frac{P_{t+t} + D_t - P_t}{P_t} = \frac{P_{t+1} + D_t}{P_t} - 1, \tag{2.3}$$

hvor i_{t+1} er afkastet fra t til t+1, P_{t+1} er aktivprisen på tid t+1, P_t er aktivprisen på tid t og D_t er udbytte i løbet af periode t der skal reinvesteres.

Den generelle formel (2.2) for realrenteberegning kan direkte overføres til aktieindeksserier, hvorved r er det reale afkast, og i er det nominelle afkast.

2.1.3 Beregning af risikopræmien

Et alternativ til ligning (2.1) er at beregne et afkast på aktiemarkedet, en rente for det risikofrie aktiv, samt at beregne en tilhørende risikopræmie til hvert deltidspunkt. Risikopræmien over en længere periode bestemmes herefter som et gennemsnit af de enkelte risikopræmier indenfor intervallet, idet det antages at risikopræmien over det samlede interval er konstant. Set fra et matematisk synspunkt kan der benyttes to forskellige typer af gennemsnit:

---

[6] Mehra, R. And prescott, E.C. (2008), s.8
[7] Jensen, B.A. (2005), s.217

Arithmetrisk gennemsnit: $\frac{\text{Sum af observationer}}{\text{Antal observationer}}$, hvor det antages at delperioder er lige lange.

Geometrisk gennemsnit: $\left(\frac{\text{Slut værdi}}{\text{Start værdi}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$, hvor n = antallet af delperioder.

Generelt gælder det, at det geometriske gennemsnit altid er mindre eller lig det arithmetriske gennemsnit. Yderligere gælder, at jo mere variabel en serie er, jo større forskel vil der være mellem de to typer af gennemsnit. Således vil der være stor forskel på størrelsen af risikopræmien alt efter hvilken type gennemsnit der benyttes.

Ved beregning med flere serier (eksempelvis en aktieserie og et risikofrit aktiv) over en fast periode gælder det, at differencen af det geometriske gennemsnit på to individuelle serier, ikke svarer til et geometrisk gennemsnit af en serie med differensen på de enkelte observationer i de to serier. I forhold til beregningen af risikopræmien over en samlet periode vil det betyde, at der med geometrisk gennemsnit fremkommer én størrelse fra ligning (2.1) og en anden størrelse fra den alternative metode med risikopræmier ved alle delperioderne. Dette er en uheldig egenskab, idet der vil være tvivl om størrelsen på den samlede risikopræmie.
Denne problemstilling opstår ikke for det arithmetriske gennemsnit, hvorfor der er en klar fordel, ved at benytte det arithmetriske gennemsnit i beregningen af den samlede risikopræmie på aktiemarkedet.
Mehra og Prescott argumenterer således også for det arithmetriske gennemsnit i deres reviderede undersøgelse:
" If returns are uncorrelated over time, the appropriate statistic is the arithmetic average because the expected future value of a $1 investment is obtained by compounding the mean returns. Thus, this is the appropriate statistic to report if one is interested in the mean terminal value of the investment."[8]
Yderligere mener de, at den fremtidige værdi af en investering vil blive underestimeret, hvis det geometriske gennemsnit benyttes, idet denne har mindre værdi end det arithmetriske gennemsnit.
Alt i alt må det konkluderes, at det arithmetriske gennemsnit skal benyttes i beregning af den historiske risikopræmie på aktiemarkedet.

2.1.4 Historisk risikopræmie vs. Fremtidig risikopræmie

Idet en investor er interesseret i den forventede indtjening på en investering, er den fremtidige risikopræmie mere interessant end den historiske risikopræmie.

[8] Mehra, R. And prescott, E.C. (2008), s.2

I flere undersøgelser[9] antages det, at hvis den historiske risikopræmie beregnes ud fra et langt historisk interval, så er det et godt estimat af den forventede risikopræmie. Dette sker med en implicit antagelse om at fremtiden bliver ligesom fortiden, hvorfor det forventede afkast i fremtiden vil være det gennemsnitlige risikofrie afkast plus den historiske risikopræmie.
Som en yderligere dimension til diskussionen er inflation varierende over tid. For at undgå at den varierende inflation påvirker risikopræmien benyttes som tidligere nævnt realafkast. Benyttes det reale afkastet historisk opstår der et bias, idet markedspriserne afspejler den forventede inflation i det kommende interval, mens det faktiske afkast beregnes ud fra den realiserede inflation. Det viser sig på lang sigt, at fejl-effekterne mellem forventet og realiseret inflation vil gå ud med hinanden[10].

Overordnet betyder dette, at en historisk risikopræmie der er beregnet over en lang tidshorisont, kan benyttes som estimat for fremtidens risikopræmie. Så længe investoren er opmærksom på de bagvedliggende antagelser om, at fremtidens udvikling bliver som fortidens udvikling, samt det bias der opstår fra problemstillingen mellem forventet og realiseret inflation, kan investoren altså anskue en historisk risikopræmie som et estimat af det fremtidige forventede merafkast på aktiemarkedet.

2.2 Mulige risikofrie aktiver

Afkastet på det risikofrie aktiv, der benyttes til at beregne risikopræmien, er ikke specificeret til en specifik type aktiv. Det betyder, at der er flere alternative investeringsmuligheder som er kandidat til at være et risikofrit aktiv. På kort sigt kan der benyttes et skattekammerbevis med en løbetid på en måned eller et statsobligationsindeks med fast varighed på $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$. Dette er det tætteste man kan komme på et risikofrit aktiv, idet løbetiden tilbage på aktivet er så kort at udbetalingen kan betegnes som kendt.

På lang sigt (ex. 20 år) kan der benyttes et statsobligationsindeks eller en obligation med hhv. en varighed på 20 eller en løbetid på 20 år. Generelt må langsigtede statsobligationer anses som værende default-free, hvilket gør dem egnede som et risikofrit aktiv i beregningen af risikopræmien. Til gengæld kan de variere på kortere sigt på grund af ændringer i renten, og de kan variere på lang sigt på grund af ændringer i inflationen. Det betyder, at statsobligationerne ikke lever fuldt op til kravet for et risikofrit aktiv, idet de således ikke genererer et kendt afkast.

---

[9] Cornell, B. (1999) og Dimson, E., March, P., Staunton, M. (2002)
[10] Dette sker eksempelvis på det amerikanske datasæt i Cornell, B. (1999)

Specielt for det danske marked er statsobligationer historisk set tyndt handlet[11], hvorfor disse i perioder har været illikvide. Danske realkreditobligationer har historisk set været likvide, men en realkreditobligation kan ikke anses for at være default-free. Derfor kan et realkreditobligations-indeks ikke anses for at være risikofri. Den risiko der er forbundet med en realkreditobligation afbalanceres ved at der er en større rente på denne type obligation frem for en statsobligation.
Et andet alternativ er at benytte interbankrenten som oplyses af Nationalbanken. Interbankrenten kan også ændre sig undervejs, men hvis en bank finansierer et lån til en anden bank, vil interbankrenten på den pågældende dag blive benyttet som rente på lånet. Det betyder, at afkastet på det risikofrie aktiv (hvilket er lig interbankrenten) er kendt for den valgte investeringsperiode.

Dimson, Marsh og Staunton[12] har fortaget en analyse af det danske aktiemarked fra 1900-2000, hvor risikopræmien beregnes for samtlige delperioder, der kan inddeles ved 10års interval såvel med en estimeret kort rente serie som et estimeret 10-årigt realkreditobligationsindeks. Analysen viser at der er stor forskel på risikopræmiernes størrelser alt efter hvilken tidsperiode der benyttes. Derudover viser analysen også, at forskellen mellem præmien bestemt ved hhv. den korte rente og det 10-årige realkreditobligationsindeks indenfor den samme periode kan variere. Den største forskel er i perioden 1910-1919, hvor risikopræmien ved realkreditobligationsindekset er 6,8% større end risikopræmien ved brug af den korte rente. Den mindste forskel findes fra 1940-2000, hvor risikopræmien ved realkreditobligationsindekset er 0,1% større end risikopræmien ved den korte rente. I 2/5 af tilfældene er det risikopræmien bestemt ved kortrenten, der er størst, mens det i 3/5 af tilfældene er risikopræmien bestemt ved realkreditobligationsindekset, der er størst.
Kortrenteserien hos Dimson, Marsh og Staunton har en større realrente end deres 10-årige realkreditobligationsindeks gennem hele perioden. Ifølge ligning (2.1) vil en større rente på det risikofrie aktiv resultere i en mindre risikopræmie og derfor giver den overordnede fordeling god mening.
Normalt vil renten på en realkreditobligation være større end kortrenten, idet den større rente skal kompensere for den øgede risiko, der er tilknyttet en realkreditobligation. Ifølge ligning (2.1) vil realkreditobligationsindekset derfor generere en mindre risikopræmie på grund af den større rente.

En real rente vil blive beregnet vha. ligning (2.2), og idet risikopræmien beregnes ved arithmetrisk gennemsnit, må det antages, at renten er approksimativt konstant, for at et gennemsnit vil give en konstant risikopræmie.

---

[11] Jf. Samtale med Senior porteføljemanager Henrik Qvistgaard fra Kapitalforvaltning i Gudme Raaschou Banks
[12] Dimson, E., March, P., Staunton, M. (2002)

Samlet set har valget af det risikofrie aktiv således en påvirkning på størrelsen af risikopræmien. De vigtigste elementer i valget af det risikofrie aktiv er derfor:

- At aktivet er defineret over den relevante periode.
- At aktivet er approksimativt konstant.
- At aktivet af investoren kan anses at være forudsigeligt, og således risikofrit.

2.3 Opsummering

Fra antagelsen om, at risikopræmien er konstant over tid, kan risikopræmien for et aktiemarked beregnes. Risikopræmien angiver det gennemsnitlige merafkast, der kan opnås ved at investere i et aktiemarked, frem for at investere til en rente, der er kendt ved start.
Der indgår op til flere elementer i beregningen af den konstante risikopræmie. Det er bl.a., at aktieindekset er værdi-vægtet og repræsenterer markedet så bredt som muligt, at udbytter og renter reinvesteres, samt at der benyttes realafkast og arithmetriske gennemsnit ved beregningen. Yderligere er der elementer der kan have påvirkning på størrelsen af den konstante risikopræmie, så som valget af periodelængden og en vurdering af hvilket aktiv der anvendes til at repræsentere det risikofrie aktiv.

3.0 Det danske marked

I dette afsnit beskrives det danske værdipapirmarked og det undersøges hhv. hvilken type aktiemarkedsindeks og hvilken type af risikofri aktiv, der passer bedst til risikopræmieanalysen. Herved besvares det andet delspørgsmål under problemformuleringen, idet kriterierne fra teorien benyttes til at vælge de mest anvendelige serier.

3.1 Definition af det danske aktiemarked

Det danske aktiemarked har et stort udbud af aktier, idet både større og mindre virksomheder inden for forskellige brancher er finansieret ved hjælp af aktier. Som udgangspunkt defineres aktier til hhv. at være noteret eller unoteret. Dvs. en noteret aktie er en aktie, der er noteret på OMX København, mens en unoteret aktie ikke er noteret på OMX København. OMX København er en del af OMX Den Nordiske Børs og står for aktiehandlen på det danske marked. Således er OMX København selve hovedmarkedspladsen for aktiehandler i Danmark.

3.1.1 OMX København

OMX København har defineret forskellige indeks, der beskriver handlen på det danske marked. Indeksene kan være opdelt i 4 forskellige indekstyper, der angiver hvilken udvikling en serie skal afspejle[13].

- PI-indekstypen angiver en ren prisserie, hvor udbyttet på de repræsenterede aktier ikke reinvesteres. Når en aktie giver udbytte, vil aktieværdien falde på udbyttedagen svarende til den værdi, der gives i udbytte. Korrigeret med den specifikke akties vægt i indekset vil det dermed også føre til et fald i indeks af PI-typen. Således er et indeks af PI-typen et billede af aktiekursens bevægelse alene.
- GI-indekstypen angiver et bruttoserie, hvor udbyttet er geninvesteret i den pågældende aktie. Herved vil faldet i aktieværdien på udbyttedagen blive modvirket af en tilsvarende investering, hvorfor den vægtede værdi i GI-indekset vil være uændret. Således angiver GI-typen den sande udvikling i aktieindekset.
- NI-indekstypen defineres på samme måde som GI-typen, hvor der dog er et fradrag af kildeskat før udbyttet kan geninvesteres. NI-typen angiver derfor et nettoindeks.
- Cap-typen har en grænse for hvor stor en vægt en enkelt aktie kan have i indekset. Hvis vægten af aktien bliver for stor, bliver dens vægt justeret til værdien af den øvre grænse. Cap-typen er derfor en justeret indeksserie kaldet et ”cappet” indeks, og serien findes både i en PI- og en GI-type.

OMX København's 5 overordnede aktieindeks giver forskellige vinkler af handlen på det danske aktiemarked. Alle indeksene er værdi-vægtet, således at hver aktie indgår med sin markedsvægt. Totalindekset, der beskriver hele markedet på OMX København, er KAX. Samtlige aktier, der er noteret på OMX København, er således inkluderet. Indekset viser den samlede tilstand af det danske marked, og heraf kan det udledes, hvilke ændringer der sker i markedet som helhed. KAX findes både som PI- og GI-type samt Cappede versioner af disse.
OMXC20 (C20) er det førende aktieindeks på det danske marked. Indekset revideres en gang om året og indeholder de 20 mest omsatte danske aktier, der er noteret på OMX København. Modstykket hertil er KFMX indekser, der indeholder alle de noterede danske aktier, som ikke er med i C20-indekset[14]. Ved værdiændringer giver selskaberne i C20 en beskrivelse af bevægelserne i ca. 80% af det danske aktiemarked, hvorved selskaberne i KFMX giver en beskrivelse af ændringer

[13] Beskrivelse af aktieindeks og indekstyper kan ses på www.omxnordicexchange.com
[14] Af særlige årsager er enkelte aktier ikke indeholdt i hverken C20 eller KFMX. Ved at trække aktierne i C20 fra Totalindekset vil der være enkelte undtagelser i forhold til aktierne i KFMX.

i de sidste ca. 20%. Mens C20 kun opgøres som PI-type, opgøres KFMX både som PI- og GI-type. Formålet med de to aktieindeks er at beskrive, hvordan det hhv. går med de mest og mindre omsatte aktier på markedet. Herved vil ændringer i markedet ses som umiddelbare reaktioner på C20, mens reaktionerne først ses senere på KFMX.
OMXCB angiver OMX Københavns benchmarkindeks. Her er aktierne i indekset en kombination af de største aktier og de mest omsatte aktier, hvor alle aktier vægtes med den del af deres aktiekapital der anses for at være tilgængeligt for markedet. OMXCB findes i de samme typer som KAX, nemlig PI-, GI-, Capped PI- og Capped GI-typer.
Derudover findes der flere sektorindeks CX, som inddeler alle noterede aktier på OMX København i 4 niveauer. Disse niveauer er specificeret i forhold til "Global Industry Classification Standard" (GICS), som er en international inddeling af selskaber som er udviklet af Morgan Stanley Capital International Inc. og Standard and Poor's. Hver sektorindeks findes hhv. som om PI- og GI-typer.

Når en investor skal benytte et af indeksene fra OMX København til at beskrive det danske aktiemarked, er der flere faktorer der gør sig gældende. Før der kan træffes et valg om et specifikt indeks skal investoren overveje hvilken vinkel af markedet, der skal belyses. De mest eller mindst omsatte, det totale marked eller en kombination heraf. Samtidig skal det besluttes, om indekset skal afspejle den rene prisudvikling, eller om der skal tages højde for udbytte. Alle disse variationer betyder, at investorer og analytikere har forskellige syn på, hvordan det danske aktiemarked er sammensat. Derfor er det vigtigt at specificere "sit marked" før der gennemføres analyser og anbefalinger.

3.1.2 MSCI

Morgan Stanley Capital International Inc. (MSCI) definerer indeks for markeder i hele verden[15], hvor hver indeks bl.a. kan dække over et land eller et kontinent. Indeksene er inddelt efter, om det er et udviklingsland eller et industriland, der beskrives, eller alternativt hvilken verdensdel der skal beskrives. Oftest er indeksene noteret i USD, men de kan også angives i andre valuta.
MSCI har bl.a. defineret et indeks, der beskriver det samlede danske aktiemarked: MSCI Daily TR Net Denmark USD (MSCI Danmark). Indekset giver en alternativ beskrivelse af det danske aktiemarked i forhold til indeksserierne fra OMX København. Indekset fra MSCI er oprindeligt noteret i USD, men kan angives i DDK ved at omregne værdien med den officielle valutakurs til hvert givent tidspunkt.

[15] Beskrivelser af indeks typer kan ses på www.msci.com.

MSCI Danmark dækker ca. 85% af det danske aktiemarked[16], men definitionen af selskaberne indeholdt i indekset er mere kompliceret end for C20. Samtlige noterede aktier inddeles efter de 4 GICS niveauer, hvorefter aktierne til indekset vælges således at de 85% af markedet er dækket. Udvælgelsen af aktierne sker på basis af et kriterium om, at aktier fra samtlige kombinationer af niveauer skal være repræsenteret. Det betyder, at aktier fra alle de forskellige sektorer af markedet er inkluderet, selvom de ikke nødvendigvis er særligt omsatte på børsen. Yderligere er vægten af hver enkelt aktie defineret ud fra den free float justeret markedskapital i selskabet[17]. Således er det kun de aktier, som er tilgængelig for den almindelige investor, der tæller med i indekset, hvorfor MSCI Danmark vil give et mere reelt billede af det danske aktiemarked for en almindelig investor, idet den uopnåelige del af aktiemarkedet er sorteret fra ved free float justering.

3.1.3 Valg af aktieindeks til empirisk analyse

Fra ovenstående beskrivelser af det danske aktiemarked kan det konkluderes, at der er forskel på hvilket indeks der skal benyttes i en given situation. Det skyldes, at hvert indeks er opgjort på forskellig vis, og således giver hver sin en vinkel på det danske aktiemarked. De forskellige indeksserier er mere eller mindre anvendelige i forhold til beregning af risikopræmien på markedet, hvorfor nogle af indeksene kan udelukkes med det samme. Risikopræmien på det danske aktiemarked, skal i denne analyse bestemmes ud fra en helhedsvurdering af markedet. Idet der findes eksempler på at noterede aktier sjældent bliver handlet og derfor enten får en forkert vægtning eller er uopnåelige for den almindelige investor, må der ses bort fra KAX og KFMX. I analysen behøves der ikke oplysninger på sektorniveau, så OMXCX- indeksene fravælges også.

OMXCB, C20, og MSCI Danmark er derfor som udgangspunkt de 3 mulige kandidater til at beskrive det danske aktiemarked. Som beskrevet i afsnit 2.1 skal aktieindekset være korrigeret for udbytte og inddelt således, at mest muligt af markedet er repræsenteret. Samtidig skal der benyttes en lang tidshorisont for at sikre sig mest mulig historik i forhold til at kunne beregne en så præcis risikopræmie som muligt. Ifølge teorien er det også en fordel at indekset er værdivægtet, så der tages højde for værditilvækster ved udbytte. Derfor er det bedste valg til at beskrive det danske aktiemarked MSCI Danmark, hvorfor MSCI Danmark i resten af opgaven vil definere det danske aktiemarked.

[16] I 1990 skete der en opjustering, således at indekset gik fra at dække ca. 60% til at dække de nuværende 85%.
[17] Uddybende forklaring af free float justeret marktedskapital findes i bilag 2.

3.2 Definition af det risikofrie aktiv

Udgangspunktet i teorien er, at det risikofrie aktiv bedst beskrives ved en kortrente, idet denne er kendt ved investeringens begyndelse og dermed kan antages at være risikofri. Danmarks Nationalbank offentliggører de danske interbankrenter, også kaldet CIBOR (Copenhagen Interbank Offered Rate). Renterne beregnes ud fra en række individuelle pengeinstitutters interne rentesatser[18]. Alt efter hvor mange pengeinstitutter[19] der har indberettet deres rentesatser, fjernes de 1-3 højeste og 1-3 lavest rentesatser (ved 12 stillere fjernes 3, og ved under 8 stillere fjernes kun 1), hvorefter der regnes et simpelt gennemsnit af de tilbageværende rentesatser. CIBOR findes med løbetider på hhv. 1 uge, 2 uger og op til 12 måneder, og de offentliggøres dagligt på Danmarks Nationalbanks hjemmeside. Udviklingen i det danske aktiemarked er beskrevet kvartalsvist, og derfor vil CIBOR med en løbetid på 3 måneder (CIBOR3M) beskrive den tilsvarende udvikling for kortrentemarkedet i Danmark.

Registreringen af CIBOR3M dækker perioden fra 31. juni 1988 og frem til i dag, hvilket betyder at perioden fra 31. december 1969 og frem til 31. juni 1988 må beskrives ved en anden rente. Den bedste mulighed er at benytte Nationalbankens diskontosatser, som indikerer den overordnede udvikling i Nationalbankens renter. Diskontosatsen angiver den årlige diskontering, hvilket betyder at den skal deles med 4 for at den kvartalsvise diskontering fremkommer.

Et alternativ er at beskrive det risikofrie aktiv ved nulkupon-renterne fra korte statsobligationer eller skattekammerbeviser. På nuværende tidspunkt er de fleste danske skattekammerbeviser ved at blive udfaset og de korte statsobligationer er i øjeblikket meget illikvide[20]. Derudover er det ikke muligt at benytte et enkelt aktiv over hele tidshorisonten, idet aktiverne vil udløbe og jævnligt skal erstattes af nye aktiver. Det vil skabe problemer i forhold til at opnå en kontinuerlig serie og derfor kan det resultere i meget dårlige resultater, hvis statsobligationer eller skattekammerbeviser benyttes som det risikofrie aktiv.

En anden mulighed er at beskrive det risikofrie aktiv ud fra enten statsobligationer med længere løbetid eller et statsobligationsindeks med længere varighed. Men idet aktiemarkedet er opdelt i kvartaler og såvel statsobligationen som indekset kan ændre sig over tid, hvis der sker rente- eller inflationsændringer, vil disse højst sandsynlig ikke give et godt estimat af det risikofrie aktiv.

En tredje mulighed er at benytte realkreditobligationer til at beskrive det risikofrie aktiv. Selv om et dansk realkreditobligationsindeks er likvid over hele perioden fra 31. december 1969 til 31.

[18] www.nationalbanken.dk/DNDK/Valuta.nsf/side/CIBOR_forklaring!OpenDocument

[19] Det øjeblikkelige antal og specifikation af hvilke institutter der er tale om findes på Nationalbanken hjemmeside.

[20] Jf. Samtale med Senior porteføljemanager Henrik Qvistgaard fra Kapitalforvaltning i Gudme Raaschou Banks

december 2008, kan det ikke benyttes til beskrivelse af det risikofrie aktiv. Denne type indeks kan ikke betragtes som risikofri, idet der er mulighed for default af selskaberne bag obligationerne.

Det kan således konkluderes, at kortrenten i Danmark bedst beskriver det risikofrie aktiv. Kortrenten angives med den Danske Nationalbanks diskontosats fra 31. december 1969 til 31. marts 1988 og med CIBOR3M fra 31. juni 1988 til 31. december 2008.

3.3 Udviklingen i det danske marked

Udviklingen i det danske værdipapirmarked undersøges på baggrund af udviklingen for hhv. det valgte aktieindeks og indekset for det risikofrie aktiv. Først defineres den nominelle og den reale udvikling for de to serier, hvorunder også inflationen defineres, og derefter kan de to udviklingsmønster beskrives.

3.3.1 Definition af inflation

Inflationen hentes fra IMF International Financial Statistics, som er en standard kilde til internationale og nationale finansielle undersøgelser. Inflationen i Danmark beregnes ud fra forbrugerprisindekset fra Danmarks Statistik[21] og kan opgøres for forskellige tidshorisonter.

IMF International Financial Statistics benytter følgende beregningsmetode af inflationen. Den årlige inflation, som svarer til den årlige ændring i forbrugerprisindekset, beregnes for hver måned ud fra formlen:

$$p_t = \frac{F_t - F_{t-12}}{F_{t-12}}, \tag{3.1}$$

hvor F_t er forbrugerprisindekset på tid t og F_{t-12} er forbrugerprisindekset et år forinden.

Den gennemsnitlige årlige inflation for hvert kvartal kan nu beregnes ved at tage et gennemsnit af de årlige inflationer for de 3 måneder, der defineret et bestemt kvartal. Den gennemsnitlige årlige inflation for hvert kvartal deles med 4, således at inflationen opgøres kvartalsvis.

Inflationsindekset beregnes herefter som:

$$p_t = \frac{I_{p,t}}{I_{p,t-1}} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad I_{p,t} = (p_t + 1) \cdot I_{p,t-1}, \tag{3.2}$$

hvor $I_{p,t}$ er inflationsindeksserien på tid t, $I_{p,t-1}$ er inflationsindeksserien på tid t-1, p_t er inflationen på tid t. Indekset startes ved $I_{p,1969;Q4} = 100$.

[21] www.dst.dk/Statistik/seneste/Indkomst/Priser/Forbrugerprisindeks.aspx

3.3.2 Beregning af nominel og real udvikling i det danske aktiemarked

Udviklingen af aktiemarkedets indeksserie og afkastserie kan vises nominelt og realt. De nominelle serier er udtryk for de observerede værdier, der har været i markedet på de givne tidspunkter, mens de reale serier viser de deflaterede værdier. Deflaterede værdier svarer til de observerede værdier justeret for inflation. Disse beregnes vha. formel (2.2).

Aktiemarkedets indeksserie benyttes til at beregne afkastet for aktiemarkedet på tidspunktet t ved hjælp af formel (2.3). Idet udbyttet er reinvesteret i MSCI indekset, skal der ikke tages højde for udbytte i løbet af perioderne. Derfor er D_t sat lig 0 i samtlige perioder.

Sammenhængen mellem den reale prisserie og den nominelle prisserie er:

$$P_{real,t} = \frac{P_{no\min el,t} \cdot 100}{I_{p,t}}, \qquad (3.3)$$

hvor $P_{real,t}$ er værdien af den reale prisserie, $P_{no\min el,t}$ er værdien af den nominelle pris og $I_{p,t}$ er værdien af inflationsindeksserien til hvert tidspunkt.

3.3.3 Beregning af nominel og real udvikling i det danske rentemarked

Idet den nominelle renteserie svarer til afkastserien for det danske aktiemarked, omskrives formel (2.3), således at der ses bort fra udbytter, hvorefter der kan beregnes en indeksserie for det risikofrie aktiv.

$$i_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad P_{t+1} = (i_{t+1} + 1) \cdot P_t \ , \qquad (3.4)$$

hvor P_t er værdien af serien for det risikofrie aktiv på tid t, P_{t+1} er værdien af serien for det risikofrie aktiv på tid t+1, i_{t+1} er det nominelle afkast mellem tid t og t+1. Indekset startes ved $P_{1969;Q4} = 100$.

Det nominelle renteindeks omregnes til realrenteindeks vha. formel (3.3) og beregningen kan kontrolleres i henhold til den kendte rentes regning sammenhæng mellem den nominelle rente og realrenten, formel(2.2).

3.3.4 Udviklingsmønster på det danske marked

Graferne for hhv. den nominelle og den reale udvikling for såvel indeks- som afkastserier indenfor de to markeder er illustreret i bilag 3. Af graferne bemærkes det, hvorledes inflationsindekset påvirker den nominelle udvikling for såvel aktieindekset som indekset for det risikofrie aktiv.

Udsvingene i de nominelle serier er stadig at finde i de reale serier, hvor størrelsen på udsvingene er noget mindre, idet inflationspåvirkningerne er fjernet.

Det reale aktieindeks kan inddeles i 3 perioder med forskellige overordnede tendenser:

- 1970-1980 er det reale aktieindeks stabil
- 1981-1996 er det reale aktieindeks voksende med en lille volatilitet
- 1997-2008 er det reale aktieindeks stærkt voksende, men med stor volatilitet

Tilsvarende kan det reale indeks for det risikofrie aktiv inddeles i 3 andre perioder:

- 1970-1984 er det reale indeks for det risikofrie aktiv stabilt
- 1985-1993 er det reale indeks for det risikofrie aktiv stærkt stigende
- 1994-2008 er det reale indeks for det risikofrie aktiv svagt stigende

Som udgangspunkt er tendenserne i de to serier ikke ens, hvilket er naturligt idet økonomiske begivenheder påvirker de to serier forskelligt.

Ved afkast- og renteserier er udviklingen lidt anderledes. Her påvirkes renteserien af inflationen, mens aktieserien stort set ikke ænders. Det skyldes, at det reale aktieafkast svinger mellem -20 og 40%, mens den reale rente svinger mellem -1,7 og 4,0%. Inflationen har derfor stor indvirkning på renteudviklingen, mens ændringen i inflationen ikke kan ses blandt de store udsving i aktieafkastet. Det reale aktieafkast viser en stabil tendens gennem hele perioden med den samme middelværdi og volatilitet. Den reale rente ser derimod ud til at være stabil i første og sidste del af perioden, mens den i midten af perioden først har en svagt stigende og derefter en svagt faldende tendens. Yderligere er der enkelte store udsving i forhold til en ellers ens volatilitet gennem perioden.

3.4 Opsummering

Det kan konkluderes at der findes flere alternativer til hhv. at beskrive aktiemarkedet og det risikofrie aktiv i Danmark. Ud fra den teoretiske definition af en aktieindeksserie, der skal benyttes til at beregne risikopræmien, passer MSCI Danmark bedst. Tilsvarende er det en kombination af diskontosatsen og CIBOR3M, der er det mest optimal til at beskrive en risikofri serie. De nominelle og reale indeks-, afkast- og renteserier beregnes ud fra de tidligere beskrevne formler. Tendenserne i indeksserierne er generelt stigende, mens afkast- og renteserier generelt set har samme middelværdier gennem hele perioden.

4.0 Introduktion til VAR model

Som redskab til at samle de forskellige serier i en model benyttes en Vektor Autoregressiv proces (VAR). Det tredje delspørgsmål fra problemformuleringen må derfor besvares, med henblik på at definitionen af modellen og kointegrationen mellem serierne i modellen beskrives.

En VAR-model beskriver et antal stokastiske processer $x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \vdots \\ x_{p,t} \end{bmatrix}$ og er en reformulering af kovarianserne mellem disse p processer. Modellen er i sig selv en statistisk model, som beskriver stokastiske variationer i et datasæt. Ved hjælp af modellen kan økonomiske eller finansielle problemstillinger defineres statistisk, og der kan udledes hhv. estimater, statistiske tests og asymptotiske fordelinger, således at der kan drages logiske konklusioner om den statiske model og derved også den bagvedliggende økonomiske eller finansielle model.

En VAR model med k lags (VAR(k)), dvs. der skal k tidligere værdier af processerne til at beskrive de nuværende værdier, kan formuleres som:

$$\begin{aligned} &x_t = m + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \dots \Pi_k x_{t-k} + e_t \quad t = 1, \dots, T \\ &e_t \sim NI_p(0, \Omega) \end{aligned},$$

hvor t angiver at samme model kan benyttes til et hvert givet tidspunkt mellem 1 og T, m er en vektor med middelværdier, mens Ω og Π_i $i = 1, \dots, k$ er de ukendte variable. Ω er variansen på støjleddet og Π_i $i = 1, \dots, k$ beskriver "hældnings koefficient matricer".

Generelt vil det for en stationær proces gælde at forskellen mellem den realiserede værdi og den betingede middelværdien $m_t = E_{t-1}[x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-k}] = m + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \dots \Pi_k x_{t-k}$ er en Gausisk støj-proces, dvs: $x_t - m_t = e_t$, $e_t \sim NI_p(0, \Omega)$, $t = 1, \dots, T$.

Idet modellen har en underliggende antagelse om multivariat normalitet i residualerne, er x_t lineært udtrykt ved parametrene, og disse parametre antages at være konstante over samtlige tidspunkter. I empirien vil dette være konsistent med, at investor er rationel, og at han ikke laver systematiske fejl, når han planlægger for tid t baseret på informationen om de tidligere værdier. Når modellen estimeres vil der derfor være to antagelser. En antagelse om multivariat normalitet, således at residualerne fra den estimerede model ikke afviger signifikant fra antagelsen $e_t \sim NI_p(0,\Omega)$, og en antagelse om at parametrene er konstante over tidsperioden.

4.1 Omskrivning til kompakt form

Når der ikke er restriktioner på variablene er en simplere notation for en VAR(k) den kompakte form: $\begin{matrix} x_t = B'Z_t + e_t & t = 1,\mathbf{K},T \\ e_t \sim NI_p(0,\Omega) & \end{matrix}$, hvor $B' = [m, \Pi_1, \Pi_2, \mathbf{K}, \Pi_k]$ og $Z_t' = [1, x_{t-1}', x_{t-2}', \mathbf{K},, x_{t-k}']$.

Idet modellen er uden restriktioner og på kompakt form kan loglikelihood funktionen udledes, hvorved de fulde informations maksimum likelihood (FIML) estimaterne $\hat{B}$ og $\hat{\Omega}$ findes ved at sætte de afledede lig 0[22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial B} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \hat{B}' = \sum_{t=1}^{T} (x_t Z_t') \left(\sum_{t=1}^{T} Z_t Z_t' \right)^{-1} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \Omega} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \hat{\Omega} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_t' \end{aligned}.$$

Den maksimale værdi af loglikelihood funktionen for maksimum likelihood estimaterne findes ved:

$$\ln L_{\max} = -\frac{p}{2} T \ln(2p) - \frac{1}{2} T \ln\left|\hat{\Omega}\right| - \frac{1}{2}\left(x_t - \hat{B}'Z_t\right)' \hat{\Omega}^{-1}\left(x_t - \hat{B}'Z_t\right).$$

og ved indsætning af de fundne estimater $\hat{B}$ og $\hat{\Omega}$ viser det sig at værdien kan udtrykkes ved:

$$\ln L_{\max} = \frac{1}{2} T \ln\left|\hat{\Omega}\right| - \frac{1}{2} pT \left(\ln(2p) + \frac{1}{2} \right).$$

Fra ligningen ses det, at den maksimale loglikelihood værdi er proportional med logaritmen til determinanten af kovariansmatricen for residualerne og ellers afhænger af konstanterne T, p og p.

Loglikelihood værdien benyttes ofte som sammenligningsgrundlag for forskellige modeller, hvorfor det er vigtigt at kende til dens værdi. Specielt benyttes loglikelihood værdien til at teste om der kan laves reduktion fra en model til en anden, idet eksempelvis en eller flere parametre sættes til nul.

4.2 Omskrivning til VECM

For at adskille de kortsigtede og de langsigtede effekter kan VAR-modellen reformuleres til en Vektor Ligevægts Korrektions Model (VECM) uden at indføre bindende restriktioner på modellen.

---

[22] Juselius (2006), afsnit 4.1

Den generelle model kan formuleres ved[23]: $\Delta x_t = \Gamma_1^{(m)}\Delta x_{t-1} + \Gamma_2^{(m)}\Delta x_{t-2} + \mathbf{K}\,\Gamma_{k-1}^{(m)}\Delta x_{t-k-1} + \Pi x_{t-m} + e_t$, $e_t \sim NI_p(0,\Omega)$

hvor m er et heltal, som ligger mellem 1 og k, og som definerer placeringen af ligevægts korrektions leddet. Det vil generelt gælde at $\Pi = \sum_{i=1}^{k}\Pi_i - I_p$, mens definitionen af $\Gamma_i^{(m)} \quad i = 1, \mathbf{K}, k$ afhænger af m. Eksempelvis for $m = 1$ gælder det at $\Gamma_i = -\sum_{i=i+1}^{k}\Pi_i$

VECM angiver ændringen i x_t ved differencer, laggede differencer og laggede niveauer, så det bliver nemmere at skelne mellem stationaritet fra differencer og stationaritet fra linear kombinationer Πx_{t-m}. Fordelen ved VECM er at multicollinearitets effekten er signifikant reduceret i denne formulering. Det betyder, at afhængigheden mellem de forklarende variable bliver mindre, idet korrelationen mellem differencerne er mindre end korrelationen mellem variablene i niveau. Herved er beregningerne af koefficienten til den enkelte forklarende variabel mere valid og der fremkommer et bedre estimat af påvirkningen fra hver enkel forklarende variabel. Yderligere ligger den langsigtede effekt i matricen Π, mens den kortsigtede effekt ligger i de resterende variable. Reformuleringen betyder, at modellen er nemmere at fortolke, og de kortsigtede samt de langsigtede effekter kan analyseres hver for sig.

4.3 Kointegration i VECM

Indtil nu er de enkelte variable kun beskrevet i hver sin proces. Derfor undersøges det, hvordan en kointegration mellem variable opstår.

4.3.1 Definition af kointegration

For økonomiske senarier sker det ofte, at effekterne ændrer sig over tid og derved bedst beskrives ved tidsserier. I et simpelt tilfælde ses der på $p = 2$ variable. Det antages at hver af serierne består af en stationær del[24], og en del som indeholder en random walk, der genereres fra en enhedsrod. En serie der indeholder disse to dele er defineret til at være I(1), hvorfor begge serier antages at være I(1). Serierne kan opskrives som:

$$x_{j,t} = \text{stationær del} + \sum_{i=1}^{t} e_{j,i}, \quad j = 1,2. \tag{4.1}$$

Det gælder det, at e_{1t} og e_{2t} er hvide støjprocesser, og de kumulerede fejl angiver stokastiske trends for hver af de to tidsserier.

[23] Omskrivningen for et eksempel med 2 lags kan ses i bilag 4.
[24] Herunder initialværdien for processen

At en serie er I(1) betyder grafisk set, at niveauserien ikke har en fast middelværdi, og at der kan være voksende eller aftagende trends i serien. Yderligere kan variansen svinge og derved varierer i forskellige perioder af niveauserien. Til gengæld vil førstedifferensserien for hver af variablene være I(0), hvorfor de grafisk set vil være uden både stokastiske og deterministiske trends og have en konstant middelværdi. Alt i alt gælder, at niveauserierne er styret af varierende trends, mens differensserierne er stationære serier uden trends.

En linear kombination af de to variable kan opskrives som: $z_t = b_1 x_{1t} - b_2 x_{2t} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = b' x_t$.

Ved indsætning af definitionen af de to serier (4.1) fås:

$$z_t = \text{stationær del} + b_1 \sum_{i=1}^{t} e_{1i} - b_2 \sum_{i=1}^{t} e_{2i} = \text{stationær del} + \sum_{i=1}^{t} \left(b_1 e_{1i} - b_2 e_{2i} \right).$$

Generelt set vil det gælde, at z_t er I(1). I speciale tilfælde vil det dog være sådan at linearkombinationen af de to tidsserier vil give en I(0)-serie. Det sker, når de individuelle stokastiske trends i de to serier udligner hinanden i linearkombinationen. Herved må de to stokastiske trends være proportionale, hvorfor de to variable deler en fælles stokastisk trend der skalleres forskelligt. I tilfældet ovenfor vil z_t være I(0), og det vil gælde at $b_1 \sum_{i=1}^{t} e_{1t} = b_2 \sum_{i=1}^{t} e_{2t}$.

Denne egenskab for de specielle linearkombinationer kaldes kointegration og kan opnås, når der er færre individuelle stokastisk trends, end der er variable i x_t. Vektoren b kaldes en kointegrationsvektor og vil ofte være normaliseret på en koefficient, Ex. $b = \begin{pmatrix} 1 & -b_2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{b_2}{b_1}$.

Ved hjælp af en normaliseret kointegrationsvektor kan der opskrives en regression:

$$x_{1t} = m + b_2 x_{2t} + u_t,$$

hvor m er middelværdien af $z_t = x_{1t} - b_2 x_{2t}$ og u_t er en stationær proces med middelværdi 0.

I forhold til økonomisk teori afspejler regressionen en økonomisk ligevægt. De to variable vil tilfældigt gå op og ned, men vil ikke afvige meget fra ligevægten. Ved kointegration vil afvigelsen fra ligevægt være angivet ved u_t. Chokkene e_{1t} og e_{2t} vil have permanente effekter på variablene selv, mens de kun vil have transitorisk effekt på u_t.

I tilfælde af $p > 2$ variable, kan der være op til $p-1$ forskellige kointegrations muligheder, som er repræsenteret ved $p-1$ forskellige kointegrationsvektorer. For en given kointegration udvides teorien ovenfor med flere variable således at $x_t = \left(x_{1t} \quad x_{2t} \quad \ldots \quad x_{pt}\right)'$ og $b = \left(1 \quad -b_2 \quad \ldots \quad -b_p\right)$.

4.3.2 Kointegration specificeret i VECM

Kointegrations hypotesen kan formuleres som en del af VECM-notationen, idet matricen Π per definition indeholder de langsigtede effekter i modellen. Da kointegration af I(1) variable er I(0) vil det i VECM-notationen betyde at $x_t \sim I(1)$ og $\Delta x_t \sim I(0)$. Modellen er tidligere defineret som:

$$\begin{aligned}&\Delta x_t = \Gamma_1^{(m)}\Delta x_{t-1} + \Gamma_2^{(m)}\Delta x_{t-2} + \ldots \Gamma_k^{(m)}\Delta x_{t-k} + \Pi x_{t-m} + e_t \\ &e_t \sim NI_p(0,\Omega)\end{aligned}.$$

Leddene med Δx_t er stationære laggede led af Δx_t idet de allerede er I(0), og fejleddet er pr. definition stationært. Men leddet med x_{t-m} er et ikke-stationære led. Derfor er den eneste måde hvorpå kointegrations hypotesen kan passe med modellen, hvis Π-matricen ikke er af fuld rang. Hvis $\Pi = I$ (enhedsmatricen, som per definition er af fuld rang) vil venstre side i modellen være stationær på grund af kointegrations hypotesen, mens højre side sammenlagt vil være ikke-stationær. Derfor må Π være lig 0 eller have reduceret rang. Rangen af Π angiver derfor antallet af fælles stationære relationer mellem variablene i modellen.

Hvis Π defineres som $\Pi = ab'$, hvor a, b er $p \times r$ matricer, så vil Π have reduceret rang når $p \geq r$, og dermed sørge for at Πx_{t-m}-leddet i VECM bliver stationært. VECM kan under kointegrations hypotesen defineres som:

$$\begin{aligned}&\Delta x_t = \Gamma_1^{(m)}\Delta x_{t-1} + \Gamma_2^{(m)}\Delta x_{t-2} + \ldots \Gamma_p^{(m)}\Delta x_{t-p} + ab'x_{t-m} + e_t \\ &e_t \sim NI_p(0,\Omega)\end{aligned},$$

hvor $b'x_{t-m}$ er en $r \times 1$ vektor, der angiver r forskellige stationære kointegrationsrelationer mellem elementerne i x_{t-m}, og a angiver tilpasningshastigheden til disse.

Det bemærkes, at en enkelt stationær variabel er en kointegrationsrelation med sig selv, hvilket svarer til, at en enhedsvektor er en kointegrationsvektor i modellen. Det betyder, at hvis der tilføres en stationær variabel til en allerede defineret model, vil kointegrationsrangen r stige med 1.

4.4 Deterministiske komponenter

Oftest vil der i en VAR model være inkluderet en komponent til hhv. at opfange deterministiske trends og konstanter for de forskellige stokastiske processer. Modellen for en VAR(k) ser ud som følger:

$$\begin{aligned} &x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \mathbf{K}\,\Pi_k x_{t-k} + \Phi d_t + e_t \quad t = 1, \mathbf{K}, T \\ &e_t \sim NI_p(0, \Omega) \end{aligned}.$$

Den tilsvarende VECM under kointegrations hypotesen er:

$$\begin{aligned} &\Delta x_t = \Gamma_1^{(m)} \Delta x_{t-1} + \Gamma_2^{(m)} \Delta x_{t-2} + \mathbf{K}\,\Gamma_p^{(m)} \Delta x_{t-p} + a b' x_{t-m} + \Phi D_t + e_t \\ &e_t \sim NI_p(0, \Omega) \\ &D_t = d_t - d_{t-1} \end{aligned}.$$

Idet VECM indeholder såvel p ligninger for hver af variablene i x_t som r kointegrationsrelationer beskrevet ved $b'x_{t-m}$, kan der defineres trends og konstanter i hvert af tilfældene.

En konstant defineres ved m_0 og en trend defineres ved $m_1 t$. Således vil det i ovenstående model gælde at $\Phi = (1 \quad t)$ og $D_t = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \end{pmatrix}$. I Juselius (2006)[25] vises det, at de deterministiske komponenter kan dekomponeres således, at de inddeles efter om de enten beskriver tilstandene i ligningerne for variablene eller tilstandene i kointegrationsrelationerne. De to deterministiske komponenter kan beskrives ved $m_0 = a b_0 + g_0$ og $m_1 = a b_1 + g_1$, og herved kan VECM, idet de kortsigtede parametre sættes til nul, udtrykkes ved:

$$\begin{aligned} &\Delta x_t = a b' x_{t-m} + a b_0 + a b_1 t + g_0 + g_1 t + e_t \quad \Leftrightarrow \\ &\Delta x_t = a \begin{bmatrix} b' & b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-m} \\ 1 \\ t \end{bmatrix} + g_0 + g_1 t + e_t, \quad e_t \sim NI_p(0, \Omega) \end{aligned}.$$

Parametrene b_0 og b_1 beskriver hhv. konstantled og trend i kointegrationsrelationerne, mens parametrene g_0 og g_1 beskriver hhv. konstantled og trend for variablene i ligningerne. Ved at sætte en eller flere af parametrene lig nul, opnås forskellige kombinationer af konstantled og trends.

Der findes 5 forskellige muligheder for begrænsninger af de deterministiske komponenter:

1) Den simpleste model har ingen deterministiske komponenter i dataserier eller kointegrationsrelationer. Derfor sættes:

   $b_0 = b_1 = 0$, hvilket angiver, at der ikke er deterministiske led i relationerne.

   $g_0 = g_1 = 0$, hvilket angiver, at der ikke er deterministiske led for dataserierne.

[25] Se Juselius, K. (2006) s. 95-97

2) I modellen findes et konstantled i kointegrationsrelationerne, men der findes ingen deterministiske komponenter i dataserierne. Derfor sættes:

   $b_0 \neq 0, \quad b_1 = 0$, hvilket angiver en skæring forskellig fra nul og ingen trends i relationerne.

   $g_0 = g_1 = 0$, hvilket angiver, at der ikke er deterministiske led for dataserierne.

3) Der er lineære trends i dataserierne, hvilket giver et konstantled i VEC-ligningerne. Men det antages, at trendene går ud mod hinanden ved kointegration, hvorfor der kun findes et konstantled i kointegrationsrelationerne. Således sættes:

   $b_0 \neq 0, \quad b_1 = 0$, hvilket angiver en skæring forskellig fra nul og ingen trends i relationerne.

   $g_0 \neq 0, \quad g_1 = 0$, hvilket angiver en skæring forskellig fra nul men ingen trends for differensserierne, hvorved der kan findes lineære trends i dataserierne i niveau.

4) Der findes lineære trends i både dataserier i niveau og kointegrationsrelationer. Herved indeholder modellen trend-stationære variable og trend-stationære relationer, idet de stokastiske trends er fjernet. Derfor sættes:

   $b_0 \neq 0, \quad b_1 \neq 0$, hvilket angiver skæring og trends forskellig fra nul i relationerne.

   $g_0 \neq 0, \quad g_1 = 0$, hvilket angiver en skæring forskellig fra nul men ingen trends for differensserierne, hvorved der kan findes lineære trends i dataserierne i niveau.

5) Der findes lineære trends i både differensserier og kointegrationsrelationer. Herved kan dataserierne i niveau indeholde kvadratiske trends. Således sættes:

   $b_0 \neq 0, \quad b_1 \neq 0$, hvilket angiver skæring og trends forskellig fra nul i relationerne.

   $g_0 \neq 0, \quad g_1 \neq 0$, hvilket angiver skæring og lineære trends forskellig fra nul for differensserierne, hvorved der kan findes kvadratiske trends i dataserierne i niveau.

Mulighed 1) er meget speciel og mest restriktiv, idet der slet ikke tillades deterministiske komponenter i modellen, mens mulighed 5) er den mest frie af mulighederne.
Hvis der ikke er forudgående antagelser for hvordan de deterministiske led skal være i kointegrationsrelationerne, vil man i praksis ofte starte med begrænsningerne fra mulighed 4) eller 5), alt efter hvilken trend man ser i dataserierne i niveau, og derefter begrænse det deterministiske led yderligere hvis der er behov for det. Hvis der er forudgående antagelser om de deterministiske komponenter i kointegrationsrelationerne, vil disse, kombineret med de deterministiske led i

dataserierne i niveau, på forhånd angive hvilke begrænsninger der skal sættes på de 4 beskrevne parametre.

4.4.1 Dummie variable

Det er muligt, at de stokastiske processer kan blive påvirket af ekstraordinære chok fra omverdenen. Det vil give heteroscedasticitet fra ARCH-effekter og en mangel på normalitet i residualerne. Der findes 2 overordnede typer af ekstraordinære chok. Additive chok som ikke påvirker VAR-dynamikken, og innovative choks som, efter de er sket, påvirker af VAR-dynamikken, og derfor vil give permanente eller transitoriske effekter.

De additive chok giver ingen effekter i modellen, og derfor kan der ses bort fra disse, idet de kan fjernes fra de stokastiske processer uden eftervirkninger. De innovative chok må derimod ikke fjernes fra modellen, idet de påvirker dynamikken. Derfor kan der indføres dummie variable for at beskrive effekterne i dynamikken, og dermed rette op på hhv. den manglende normalitet og heteroscedasticiteten som residualerne vil udvise. Disse dummie variable indgår som en del af den deterministiske komponent i modellen.

Der benyttes 3 typer dummie variable til at korrigere forskellige effekter.

1) Et skift i den lineære trend for en stokastisk proces, der medfører et middelværdi skift i den differentierede proces, beskrives ved en Shift dummy: $D_{s,t} = \begin{cases} 1 & hvis\ t > t_0 \\ 0 & hvis\ t \le t_0 \end{cases}$

2) Et niveau skift for en stokastisk proces, der medfører et stort udsving i den differentierede proces, beskrives ved en Permanent impuls dummy: $D_{p,t} = \begin{cases} 1 & hvis\ t = t_0 \\ 0 & hvis\ t \ne t_0 \end{cases}$

3) Et niveau skift først i en retning og derefter i modsat retning for en stokastisk proces, der medfører to udsving i modsat retning i den differentierede proces, beskrives ved en Transitorisk impuls dummy: $D_{tr,t} = \begin{cases} 1 & hvis\ t = t_0 \\ -1 & hvis\ t = t_0 + 1 \\ 0 & ellers \end{cases}$

Timingen af dummie variable er vigtig, idet korrektion på det forkerte tidspunkt vil være værdiløs og i værste flad skadefuld for en model. Tilsvarende kan benyttelsen af en forkert type dummie skade modellen. Begge tilfælde er kendetegnet ved større heteroscedasticitet fra ARCH-effekter og en tydeligere mangel på normalitet i residualerne.

Da det for en given serie i praksis kan være svært at skelne de signifikante udsving fra de mindre signifikante, benyttes store residualværdier som indikator for, hvor der eventuelt skal indføres en dummie variable. For både at sikre en korrekt timing og korrekt type af dummies kontrolleres indikationerne i differens- og niveauserierne, og effekterne af de mulige dummier i residualerne undersøges, før dummie variablene endeligt kan indføres i modellen.

4.5 Opsummering

En VAR-model kan formuleres på flere måder. Under kointegrations hypotesen udtrykkes de langsigtede effekter ved hjælp af a og b, mens de kortsigtede effekter udtrykkes ved $\Gamma_i^{(m)}$-matricerne. Specielt benyttes VECM- repræsentationen til at analysere strukturen af kointegrationsrelationerne, idet de stationære laggede led af Δx_t og den stationære linearkombination i leddet med x_{t-m} kan analyseres hver for sig. Yderligere kan der tages højde for konstanter og trends i både dataserier og kointegrationsrelationer ved at indsætte forskellige begrænsninger på de deterministiske komponenter. Til sidst kan der korrigeres for ekstraordinære chok ved at indføre dummie variable.

5.0 Univariate kointegrationsanalyser

Før det fjerde delspørgsmål fra problemformuleringen omkring multivariate kointegrationsanalyser besvares i afsnit 6, indledes her først med en undersøgelse af univariate kointegrationsanalyser.

5.1 Dickey-Fuller-test

En af mulighederne til at vurdere om en given tidsserie er stationær, er at undersøge om den har enhedsrødder. Hertil er der udledt et argumenteret Dickey-Fuller-test[26] (ADF-test). ADF-testet giver mulighed for at tidsserien har hhv. en middelværdi forskellig fra nul og en lineær trend. Til gengæld er det en forudsætning for testet, at der ikke er signifikant autokorrelation i tidsserien. ADF-teststørrelsen baseres på koefficienten for forrige observation i differensserien, og for tidsserien x_{1t} vil differensserien (ADF-regressionen) være: $\Delta x_{1t} = \text{stationær del} + p x_{1t-1} + h_t$,

hvor h_t er normalfordelt hvid støj. ADF-teststørrelsen er herfra defineret som $\hat{t}_c = \dfrac{\hat{p}}{se(\hat{p})}$, (5.1)

hvor H_0-hypotesen om at der findes enhedsrødder svare til at teste, om $p = 0$. Hvis hypotesen ikke er opfyldt og $p = 0$, vil ændringen i tidsserien kun afhænge af hhv. en stationær del og normalfordelt hvid støj.

[26] Nielsen, H.B. (2008), s.22

Teststørrelsen kan evalueres i en justeret t-fordeling, som skal tilpasses alt efter om der er en konstant og/eller trends med. Derved evalueres teststørrelsen i en Dickey-Fuller estimeret asymptotisk fordeling, hvoraf navnet på testen fremkommer.

Dickey-Fuller-testet kan benyttes i flere tilfælde i forhold til kointegrationsanalyse:

1) Undersøge antagelserne om at tidsserierne er - I(1) i niveau (ikke stationær) .
   - I(0) i differens (stationær).
2) For en kendt kointegrationsvektor kan det undersøges, om støj-processen u_t er stationær.

<u>5.2 Engle-Granger proceduren</u>

Da kointegrationsvektoren ikke altid er kendt på forhånd, er der udviklet en test procedure til at undersøge, om der findes kointegration mellem variable. Denne 2-steps procedure kaldes Engle-Granger proceduren[27] (EG-proceduren). De to steps er:

1) Idet kointegrations koefficienterne $b_2, \mathbf{K}, b_p$ er ukendte kan de blive estimeret ved statistisk regression. Herved kan den kendte kointergrations relation $x_{1t} = m + b'x_t + u_t$ opskrives, hvor u_t antages at være stationær.
2) Herefter kan ADF-testet benyttes til at teste, enten om de estimerede residualer $\hat{u}_t$ har en enhedsrod, således at H_0-hypotesen om ingen-kointegration holder, eller om de estimerede residualer er uden enhedsrødder, således at de er en stationær proces, samt at variablene i x_t dermed kan accepteres som kointegereret.

Da kointegrationsvektoren estimeres i proceduren, ændres den kritiske værdi for ADF-testet idet usikkerheden fra estimationen skal medtages. Ordinary Least Squares (OLS) metoden benyttes til at estimere den statistiske regression, og således vil variansen af $\hat{u}_t$ blive minimeret og $\hat{u}_t$ vil se ”så stationære ud som muligt”. Samtidig vil flere variable i regressionen betyde, at flere parametre skal estimeres, hvorved variansen af $\hat{u}_t$ yderligere vil blive minimeret. For at tage højde for dette, afhænger de kritiske værdier i EG-proceduren af antallet af forklarende variable i regressionen. Det betyder, at jo flere forklarende variable der findes i regressionen, jo længere vil den asymptotiske fordeling flytte mod venstre, og jo mindre bliver de kritiske værdier. De sande kritiske værdier i EG-proceduren estimeres ved Mackinnons estimerede kritiske værdier, som tager højde for ovenstående problemstillinger.

---

[27] Nielsen, H.B. (2008), s.23 & 27

5.2.1 Problemstillinger ved EG-proceduren

Da EG-proceduren tager udgangspunkt i én ligning, hvor én af variablene er den afhængige, mens resten af variablene er forklarende, opstår der forskellige problemstillinger i forhold til at vælge den statistiske kointegration, der afspejler den økonomiske forestilling bedst.

For det første giver flere variable flere muligheder for forskellige kointegrationsrelationer. Det betyder, at for hver variabel skal der estimeres en regression og testes for stationære estimerede residualer, hvorefter der skal holdes styr på disse. Én simultan simulering vil være en fordel, idet alle relationer fremkommer på én gang.

For det andet, som forklaret i afsnit 4.2 kan en VAR-model omskrives til en VECM. Men ved EG-proceduren tages der kun højde for dén ECM-ligning der knyttes til den valgte forklarende variabel. De andre ECM-ligninger overvejes ikke. For et eksempel med to variable x_{1t} og x_{2t} og en kointegration vil VECM være:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{K} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}.$$

Fra starten i EG-proceduren foretages en implicit antagelse om at $a_2 = 0$, således at det er nok at tage højde for den øverste ligning i modellen.

For det tredje, og måske vigtigst af alt, tages der ikke højde for feedback mellem variablene. Det betyder, at når der er valgt en afhængig variabel, vil de forklarende variable være forudbestemt.

Grundet disse problemstillinger ved EG-proceduren vil det ved flere end 2 variable altid være en fordel at benytte multivariate analyse til at bestemme kointegrationsrelationer og kointegrationsvektorer. Ved 2 variable vil der naturligvis kun være én fælles kointegration, men det kan være en fordel at benytte mulitvariate analyser alligevel, idet der gives mulighed for feedback mellem variablene, og hele VECM medtages i analysen.

5.3 Opsummering

Det viser sig, at de beskrevne univariate tests og kointegrationsanalyser konstaterer om en serie i sig selv er stationær (ADF-test), og om der findes en kointegrationsintegration mellem flere variable (EG-proceduren). Da der ofte er feedback mellem økonomiske effekter, vil de univariate kointegrationsanalyser sjældent være fyldestgørende. De univariate analyser kan derfor bruges som indikator for om der findes en kointegration, men det vil være nødvendig at benytte mere kompleks statistisk teori for at sikre en kointegration, der kan forklares økonomisk.

6.0 Multivariate kointegrationsanalyser

Multivariat kointegration for en VAR-model er et godt bud på et statistisk værktøj, der tager højde for eventuel feedback mellem variablene, samtidig med at flere forskellige kointegrationer beskrives på en gang. I dette afsnit besvares fjerde delspørgsmål fra problemformuleringen, idet definitioner, forudsætninger og tests i den multivariate kointegrationsteori diskuteres. Før teorien omkring kointegration undersøges, må kriterierne for en relevant VAR-model diskuteres. Det betyder, at der skal bestemmes et antal lag til modellen, og det skal undersøges, om modellen er velspecificeret og opfylder normalitetsantagelsen.

6.1 Valg af lag i VAR-modellen

Specifikationen af en VAR-model med p parametre er afhængig af, hvor mange lags der skal medtages. Det betyder, at antallet af lags viser hvor mange af de foregående observationer, der påvirker den nuværende observation. Informationen om den nuværende effekt kan findes i kovariansmatricen Ω for residualerne til modellen med et givent antal lags. Oftest angives korrelationer frem for varianser, hvilket betyder, at elementerne i en estimeret kovariansmatrix $\hat{\Omega}$ kan estimeres ved at omskrive den kendte formel for korrelationskoefficienter:

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\hat{s}_{ij}}{\sqrt{\hat{s}_{ii}\hat{s}_{jj}}} \Leftrightarrow \hat{s}_{ij} = \hat{r}_{ij} \cdot \sqrt{\hat{s}_{ii}\hat{s}_{jj}} \quad i, j = 1, \mathbf{K}, p$$

Det undersøges, hvor godt modellen med k lags beskriver dataserierne ved at beregne den maksimale likelihood værdi:

$$-\left(\frac{2}{T}\right)\ln\left(L_{\max}\right) = \ln\left(\left|\hat{\Omega}\right|\right) + \text{konstante led}$$

hvor T angiver længden på den effektive datalængde, dvs. den samlede datalængde er T+k, mens elementerne i $\hat{\Omega}$ er beregnet ud fra ovenstående omskrivninger.

Ved bestemmelsen af antal lags i VAR-modellen er det nødvendigt med forskellig tests. En af disse er et likelihood ratio test (LR-test), hvor det undersøges, om det er muligt at reducere en model med k+1 lags til en model med k lags. Her er modellen med k lags nul-hypotesen, mens modellen med k+1 lags er den alternative hypotese. LR-teststørrelsen er ifølge den almindelige statistik defineret som:

$$-2 \cdot \ln Q\left(H_k / H_{k+1}\right) = T \cdot \left(\ln\left(\left|\hat{\Omega}_k\right|\right) - \ln\left(\left|\hat{\Omega}_{k+1}\right|\right)\right).$$

De to hypoteser er defineret ved hhv. H_k og H_{k+1} med de tilhørende estimerede kovariansmatricer $\hat{\Omega}_k$ og $\hat{\Omega}_{k+1}$. Ved at tilføre VAR-modellen et ekstra lag tilføres $p \times p$ variable. LR-teststørrelsen er derfor asymptotisk fordelt som en c^2-fordeling med p^2 frihedsgrader.

Alternativer til LR-teststørrelsen, når antallet af lags skal vælges, er hhv. Akaike informations kriteriet, Schwartz informations kriteriet og Hannan-Quinn informations kriteriet.
De er defineret som:

$$AIC = \ln\left(\left|\hat{\Omega}\right|\right) + \left(p^2 k\right)\frac{2}{T}$$

$$SC = \ln\left(\left|\hat{\Omega}\right|\right) + \left(p^2 k\right)\frac{\ln(T)}{T}$$

$$H - Q = \ln\left(\left|\hat{\Omega}\right|\right) + \left(p^2 k\right)\frac{2\ln(\ln(T))}{T}$$

De ligner alle maksimum likelihood værdien, bortset fra at informationskriterierne har et ekstra led, som angiver "straffen" for at tilføje k lags. Idéen med de tre informations kriterier er, at den k'te værdi med den mindste informationsværdi er det ønskede antal lags. Da størrelsen på "straffen" er forskellig i de tre informations kriterier, kan der være forskel på hvilken værdi af k, de 3 kriterier angiver som den med mindst informationsværdi.

Både LR-teststørrelsen og de tre informations kriterier kan således benyttes til at vælge den bedste lag længde. De beregnes alle ud fra den effektive data længde, hvilket betyder, at T bestemmes ud fra det største antal lags idet : T = samlet datalængde – k.
Specielt for LR-teststørrelsen er det vigtigt, at der benyttes samme effektive datalængde, når de to kovariansmatricer skal bestemmes, i henhold til at de to hypoteser kan testes mod hinanden. Samtidig er det en forudsætning for alle testene, at modellen er korrekt specificeret. Det betyder, at der i modellen skal være taget højde for hhv. eventuelt regime skift og outliers, før man kan være sikker på, at testene angiver den bedste lag længde.

Generelt skal man være opmærksom på problemstillinger i forhold til misspecifikation i dataserierne. For eksempel vil outliers og/eller middelværdi skift generere autokorrelation i residualerne, hvilket kan bevirke, at teststørrelserne angiver for mange lags til modellen. Samtidig skal modellen specificeres med en lag længde, før der kan udføres misspecifikationstest på denne. Det betyder, at der enten skal vælges mellem et højere antal lags eller et mindre antal lags, som efterlader en vis residual autokorrelation, når modellen skal bestemmes. Erfaringen viser[28], at det er mere skadeligt at have for mange lags end for få. Det skyldes, at misspecifikationerne i modellen er svære at finde, hvis modellen er overparametriseret med for mange lags. Samtidig vil en del af autokorrelationen i residualerne oftest skyldes strukturelle misspecifikationer af modellen på grund af eksempelvis outliers.

[28]Ifølge Juselius, K. (2006) , s.72

I praksis er k = 2 ofte nok til at beskrive dynamikken i et datasæt. Det bemærkes ved at udspecificere dynamikken for en todimensional VAR-model, hvor det viser sig, at k = 2 kan beskrive en relativ kompleks dataserie[29]. Derfor startes der med en lag længde på f.eks. 2 (dog skal der ses på hvad testene angiver), hvorefter der testes for misspecifikation. Hvis modellen respecificeres på baggrund at misspecifikationstestene, foretages endnu et lag længde test, for at se om lag længden skal ændres.

6.2 Misspecifikationstests

For en VAR-model er der en underliggende antagelse om multivariat normalitet. Det betyder, at residualerne fra en given model skal opfylde antagelsen om at være normalfordelt hvid støj, dvs. $e_t \sim NI_p(0,\Omega)$. Residualerne skal således være normalfordelte med en middelværdi på 0 og en konstant varians. Yderligere skal residualerne være ukorrelerede og uden Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity (ARCH-effekter), for at modellen er velspecificeret og beskriver informationen i serierne.

6.2.1 Normalitet

Middelværdi og varians kan undersøges på et plot over de standardiserede residualer. Heraf fremgår det, om de standardiserede residualer svinger omkring 0 og om udsvingene er konstante. Antagelsen om normalfordelte residualer kan undersøges ved et histogram over de standardiserede residualer. Herved skal der fremkomme en klokkeform, således at de højeste søjler er omkring 0 og at søjlerne herefter bliver lavere til begge sider. Yderligere må der ikke ligge observationer udenfor $|3|$, idet halerne på klokken bliver for tykke, og således skaber problemer med kurtosis. Det kan være svært alene ud fra et histogram at se, om normaliteten af residualerne er opfyldt. Derfor kan der beregnes flere teststørrelser. Eksempelvis Kolmogorov-Smirnov test for normalitet eller Jarque-Beras test, der begge er c^2 - fordelte univariate teststørrelser.

Alternativt har Hansen og Doornik[30] udledt en multivariat teststørrelse, der tager højde for excess skewness (3.moment) og excess kurtosis (4.moment) for de standardiserede residualer.

Momenterne defineres som: $skewness_i = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} u_{i,t}^3, \quad kurtosis_i = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} u_{i,t}^4, \quad i = 1,..,p \; og \; t = 1,..,T$.

[29] Juselius, K. (2006) , s.49
[30] Juselius, K. (2006) , s.75-76

Normalfordelingen har kurtosis 3 og skewness 0, og derfor vil excess kurtosis og excess skewness, for den fordeling der undersøges, hhv. være lig med den beregnede kurtosis minus 3 og lig med den beregnede skewness. Under antagelsen om at der er normalfordelte fejl i modellen, vil de to excess momenter for residualerne være asymptotisk fordelte med følgende middelværdier og varianser:

$$\sqrt{T}\left(skewness_i - 0\right) \sim N(0{,}6), \qquad \sqrt{T}\left(kurtosis_i - 3\right) \sim N(0{,}24).$$

Den generelle asymptotiske univariate teststørrelse for normalitet i residualerne er defineret som:

$$h_i^{asym} = \frac{T\left(skewness_i - 0\right)^2}{6} + \frac{T\left(kurtosis_i - 3\right)^2}{24}.$$

Og den asymptotiske multivariate teststørrelse er defineret som: $mh_i^{asym} = \sum_{i=1}^{p} h_i^{asym}$.

Begge asymptotiske teststørrelser er c^2 - fordelte med hhv. 2 og 2p frihedsgrader.

Idet residualerne fra en VAR-model er korrelerede, skal disse først ortogonaliseres for at de er ukorrelerede og uafhængige under normalitetsantagelsen. Herefter kan Hansen og Doorniks multivariate normalitetsteststørrelse beregnes som summen af de p univariate teststørrelser, der beregnes ved hjælp af de to excess momenter, der igen er beregnet med de ortogonaliserede residualer.

Både den univariate og den multivariate teststørrelse angives med tilhørende frihedsgrader og en p-værdi. Således kan det evalueres, om normalfordelingstesten er godkendt.

6.2.2 ARCH effekter

Det er vigtigt at kontrollere, om der er ARCH effekter tilbage i residualerne. Hertil benyttes normalt en m'te ordens multivariate ARCH teststørrelse, som bl.a. beregnes ud fra længden på datasættet og antallet af lags[31]. Teststørrelsen er c^2 - fordelt med $\frac{m}{4}p^2\left(p+1\right)^2$ frihedsgrader, og er defineret ud fra en antagelse om, at residualerne er normalfordelte.

Da ARCH effekter dækker over varierende varians vil teststørrelsen afsløre, om der er systematik i residualerne som VAR-modellen ikke har fanget. Hvis testen ikke accepteres vil VAR-modellen ikke beskrive alt information fra serierne, og modellen kan således ikke antages at være veldefineret. ARCH teststørrelser vises sammen med antallet af frihedsgrader og en p-værdi, så det kan evalueres, om ARCH testen er godkendt.

[31] Juselius, K. (2006) , s.74

6.2.3 Autokorrelation

En VAR-model kan først være velspecificeret, når der ikke er signifikant autokorrelation i residualerne. Hvis der er autokorrelation forskellig fra 0 mellem to residualer på hhv. tid t og s, betyder det, at residualen på tid t kan forudsiges fra residualen på tid s. Da en residual kan forudsiges ud fra en anden, er de ikke uafhængige. Denne afhængighed får uhensigtsmæssige følger, idet f.eks. OLS estimatorerne er inkonsistente, og således vil det ikke være muligt at regne med estimaterne for de forskellige parametre. Det er derfor meget vigtig at få test for autokorrelation godkendt, før parametrene kan estimeres.

Autokorrelation i modellens residualer kan testes ved en Ljung-Box teststørrelse. Denne beregnes blandt andet ud fra summen af korrelationerne mellem residualerne til de forskellige tidspunkter. Teststørrelsen antages at være approksimativt c^2 - fordelt med $p^2\left(\frac{T}{4}-k+1\right)-p^2$ frihedsgrader, hvor p er antallet af parametre, T er antallet af tidsperioder i det effektive sample og k er antallet af lags i modellen.

Alternativt kan der foretages et Lagrange Multiplier (LM) test af den j'te ordens autokorrelation, hvilket beregnes som en Wilks' ratio test[32]: $LM(n) = -\left(T - p(k-1) - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\left|\tilde{\Omega}(n)\right|}{\left|\hat{\Omega}\right|}\right)$.

Teststørrelsen er approksimativ c^2 - fordelt med p^2 frihedsgrader.

Begge typer test for autokorrelation er defineret ud fra en antagelse om, at residualerne er normalfordelte. Yderligere er Ljung-Box teststørrelsen estimeret med auto- og krydskorrelationerne for de første T/4 lags, mens LM teststørrelsen er beregnet ud fra den n'te ordens autokorrelation. Autokorrelationen mellem de forskellige lags opstilles ofte i et diagram, hvor specielt store teststørrelser markeres, mens den samlede Ljung-Box teststørrelse vises sammen med en angivelse af frihedsgrader og p-værdi.

I praksis er Ljung-Box teststørrelsen ikke til at stole på, når der testes for autokorrelation i multivariate modeller. Ved testes af VAR-modeller skal LM teststørrelserne derfor benyttes til at sikre, at der ikke er autokorrelation i residualerne, mens der kan ses bort fra, om Ljung-Box testet bliver godkendt.

[32]Juselius, K. (2006) , s.74

6.2.4 Sammenhæng mellem misspecifikationstests

Test for ARCH effekter og autokorrelation i residualerne er udledt på baggrund af en antagelse om, at residualerne er normalfordelte fejl. Samtidig er tests for at residualerne er normalfordelt udledt på baggrund af en antagelse om, at residualerne er uafhængige og har samme varians. Det er derfor vigtigt, at alle testene godkendes for samme model, før modellen kan antages at være veldefineret. Hvis en test ikke godkendes, er grundlaget for de andre tests ikke valid. Den givne model må derfor redefineres, og samtlige misspecifikationstests skal beregnes igen for at finde en veldefineret model.

6.3 Valg af kointegrationsrang

Når der er fundet en veldefineret VAR-model uden restriktioner på Π-matricen, kan den faktiske analyse af modellen indledes. Det første, der er interessant, er at undersøge rangen af Π-matricen. Som beskrevet i afsnit 4.3.2 svarer rangen af matricen til antallet af fælles stokastiske trends i modellen, hvilket vil sige, at rangen angiver antallet af kointegrationsrelationer for et givent datasæt. Tilsvarende angiver forskellen mellem hhv. antallet af variable (lig den fulde rang Π) og den reducerede rang af Π-matricen antallet af ikke-fælles stokastiske trends for dataserierne.

6.3.1 Rang test

Test af rangen sker ved et almindeligt LR-test, hvor det testes, om rangen på Π-matricen kan reduceres fra fuld rang til en rang på r. Den fulde rang er lig med p, hvilket svare til antallet af variable i modellen. LR-testet er defineret som:

$$-2 \cdot \ln Q\left(H_r / H_p\right) = T \cdot \ln\left(\frac{|S_{oo}| \cdot \left(1-\hat{\lambda}_1\right) \cdot \left(1-\hat{\lambda}_2\right) \ldots \left(1-\hat{\lambda}_r\right)}{|S_{oo}| \cdot \left(1-\hat{\lambda}_1\right) \cdot \left(1-\hat{\lambda}_2\right) \ldots \left(1-\hat{\lambda}_r\right) \ldots \left(1-\hat{\lambda}_p\right)}\right)$$

Ved reduktion og omformulering af teststørrelsen fås: $t_{p-r} = -T \cdot \ln\left(\left(1-\hat{\lambda}_{r+1}\right) \ldots \left(1-\hat{\lambda}_p\right)\right)$

Dette test kaldes Trace test og angives med antallet af stokastiske relationer som fodtegn. Trace teststørrelsen angiver testet for, om der findes $p-r$ fælles stokastiske relationer i dataserierne og dermed r stationære relationer.

Forudsætningerne for at Trace testet får den rette størrelse er, at modellen er velspecificeret. Det betyder, at residualerne skal være normalfordelte, og at der hverken må være signifikant autokorrelation eller ARCH effekter tilbage. Dog er det vist, at Trace testet er robust overfor moderate ARCH effekter[33], hvorimod det er vigtigt, at residualerne er normalfordelte og uden signifikant autokorrelation.

[33] Dennis, J.G. (2006), s. 52 & Juselius, K. (2006) s. 75

Idet fordelingen for Trace testet ikke følger en standard fordeling[34] (f.eks. c^2, F eller t), er der behov for at simulere en fordeling. Den grundlæggende ide bag simuleringen af den asymptotiske tabel for Trace testet er at benytte Monte Carlo-simulering og Brownske bevægelser. Der genereres en passende $(p-r)$-dimensional random walk proces til at approksimere en brownsk bevægelse, som herefter benyttes til at estimere den kritiske værdi. Det gentages et passende antal gange, således at der kan beregnes en kritisk værdi (95%-fraktil), som benyttes til at evaluere Trace testet.

Den simulerede asymptotiske fordeling er både afhængig af det deterministiske led i VAR-modellen, og om modellen har restriktioner. Det betyder, at specielle trends og strukturelle skift i variablene kan påvirke fordelingens udseende, og dermed om et Trace test skal godkendes eller forkastes. Eksempelvis vil inkluderingen af en shift dummy i en kointegrationsrelation få den asymptotiske fordeling til at flytte til højre i forhold til placeringen uden dummien. Til gengæld har impuls dummies (både permanente og transitoriske) sandsynligvis ikke så stor effekt på den asymptotiske fordeling[35]. Ved at inkludere impuls dummies i en VAR-model vil den asymptotiske fordeling ikke bevæge sig særlig meget i forhold til placeringen uden impuls dummies.
Ved evaluering af Trace Testet undersøges det for den givne VAR-model om teststørrelsen er mindre end den kritiske værdi for den simulerede asymptotiske fordeling. Hvis Trace teststørrelsen er større end den kritiske værdi, afvises testet. Hvis Trace teststørrelsen derimod er mindre end den kritiske værdi, godkendes testet.

6.3.2 Egenværdier

En anden måde at finde rangen for Π-matricen på, er ved at undersøge egenværdierne i companion matricen $\tilde{\Pi}$. Companion matricen fremkommer ved at omformulere en VAR(k) til en AR(1)-proces. For en VAR(2) vil AR(1)-processen være:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x}_t = \tilde{\Pi}\tilde{x}_{t-1} + \tilde{e}_t .$$

Herefter kan egenværdierne i $\tilde{\Pi}$ findes ved at løse egenværdiproblemet. Hvis der er egenværdier fra companion matricen på enhedscirklen, betyder det, at der findes fælles stokastiske trends for modellen. Grafisk vil antallet af egenværdier på enhedscirklen angive antallet af fælles stokastiske trends. Disse rødder kan alternativt identificeres ved, at de har modulus på 1.

[34] Juselius, K. (2006), s. 134
[35] Juselius, K.(2006), s. 139

I praksis er fremgangsmåden først at undersøge rødderne, når Π-matricen har fuld rang. Således kan det vurderes, hvor mange egenværdier $p-r$, der har modulus 1. Derefter undersøges de tilbageværende rødder, når der betinges med, at Π-matricen har reduceret rang r, og at der dermed er $p-r$ egenværdier med modulus 1. Hvis der ikke er flere egenværdier på enhedscirklen, er den korrekte reducerede rang fundet for Π.

6.3.3 Det korrekte valg

Valget af kointegrationsrangen er ekstremt vigtig, idet det kan få store konsekvenser enten at inkludere en kointegrationsrelation for meget eller for lidt. Kointegrationsrangen inddeler data i hhv. r relationer som dataserierne vil tilpasse sig på lang sigt, og $p-r$ individuelle drivende kræfter i systemet. Et forkert valg af r betyder, at relationer og drivende kræfter bliver opdelt forkert, og dermed kan økonomiske hypoteser blive accepteret eller forkastet på et forkert grundlag. Hvis r er valgt for stor og der inkluderes ikke-stationære relationer (dvs. r er for stor og $p-r$ er for lille), så vil en af rødderne i det karakteristiske polynomium svare til en enhedsrod. Dette ses grafisk, ved at en af egenværdierne($p-r$) for companion matricen vil være på enhedscirklen. Yderligere vil t-værdierne for a -estimaterne for den ekstra relation være meget små. a -estimaterne angiver tilpasningshastigheden til kointegrationsrelationen, og derfor vil den ekstra relation have meget lille forklaringskraft for modellen.
Der er således flere muligheder for at opdage ikke-stationære relationer mellem kointegrationsrelationerne, hvorfor det er muligt at vælge den korrekte kointegrationsrang.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at kointegrationsrangen ikke normalt er lig antallet af økonomiske ligevægts relationer i en given økonomisk model. Det betyder, at der kan være flere kointegrationsrelationer for et givent antal variable, mens der kun findes én økonomisk relation. Kointegration mellem variable er en statistisk egenskab for dataserierne, som ikke nødvendigvis kan tildeles en økonomisk fortolkning. Men et korrekt valg af kointegrationsrangen betyder, at en kointegrationsrelation, som kan fortolkes økonomisk, ikke undlades fra de statistiske muligheder.

6.4 Parametre og test af hypoteser

Når rangen af Π-matricen er valgt, er det automatisk defineret, hvor mange fælles stokastiske trends variablene har. En fælles stokastisk trend, som forklaret i afsnit 4.3.1, beskrives ved en lineær regression, hvor koefficienterne i regressionen angives i en kointegrationsvektor. Vektoren er normalt normeret således, at en af variablene har koefficienten 1, mens resten af koefficienterne er defineret i forhold til denne.

I VECM uden kortsigtede parametre er to kointegrationsrelationer for 3 parametre beskrevet som:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \Delta x_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & 1 & -b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ x_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix}.$$

De to normerede kointegrationsvektorer er $b = \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & 1 & -b_{23} \end{pmatrix}$ og tilpasningshastighederne til kointegrationsrelationerne er $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. Tilsammen definerer de to matricer a, b de langsigtede parametre i modellen.

6.4.1 Hypoteser for langsigtede parametre

Når den statistiske VECM skal tilpasses til en økonomisk situation, er der forskellige hypoteser omkring de langsigtede parametre. En hypotese kan enten være, at en eller flere parametre er nul, eller at der findes enhedsvektorer i en af matricerne. Fælles for dem alle er, at de fører til begrænsninger af modellens parametre. Hypoteserne defineres for de $\tilde{p}$ variable i kointegrationen ud fra s_i frie parametre i en af matricerne a_i^c eller f_i med hver sin design matrix H_i^a eller H_i^b.

Alternativt kan hypoteserne opskrives ved restriktionsmatricerne R_i^a eller R_i^b som begrænser en række eller en søjle i a eller b.

De generelle lineære hypoteser kan defineres på én af to følgende måder for hver af matricerne:

$$\begin{aligned} H_a &: a = \left(H_1^a a_1^c, H_2^a a_2^c, \mathbf{K}, H_r^a a_r^c\right) \\ H_b &: b = \left(H_1^b f_1, H_2^b f_2, \mathbf{K}, H_r^b f_r\right) \end{aligned} \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} H_a &: \left(R_1'^a a_1, R_2'^a a_2, \mathbf{K}, R_r'^a a_r\right) = (0,0,\mathbf{K},0) \\ H_b &: \left(R_1'^b b_1, R_2'^b b_2, \mathbf{K}, R_r'^b b_r\right) = (0,0,\mathbf{K},0) \end{aligned}$$

Hvor H_i^a og H_i^b er $(\tilde{p} \times s_i)$ matricer, og $R_i^a = H_{i\perp}^a$ samt $R_i^b = H_{i\perp}^b$ er $(\tilde{p} \times (\tilde{p} - s_i))$ matricer, som alle benyttes til at definere de forskellige hypoteser. a_i^c og f_i er $(s_i \times 1)$ koefficient matricer, der indeholder de begrænsede estimerede koefficienter fra VECM, mens a_i og b_i angiver enten en hel søjle eller en hel række af de estimerede koefficienter.

De forskellige hypoteser kan testes som et LR-test, hvor den asymptotiske fordeling er c^2 - fordelt.

En interessant hypotese er om en variabel er svagt eksogen. Hypotesen er defineret ved, at der er en 0-række i a . Således angiver hypotesen, at den langsigtede ligevægt ikke har betydning for denne variabel. Derfor er variablen eksogen bestemt ift. kointegrationsrelationen, men endogen bestemt ift. de eventuelle kortsigtede parametre i VECM. Variablen er derfor defineret som svagt eksogen. Variablen påvirker de resterende variable, men tilpasser sig ikke den langsigtede ligevægt fra kointegrationsrelationen. I eksemplet ovenfor kan VECM med hypotesen om at x_{3t} er svagt eksogen i begge kointegrationer opskrives som:

$$a = H_3^a a^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \Delta x_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & 1 & -b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ x_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix},$$

idet $\tilde{p} = 3$ variable og $s_i = 2$ frie parametre i hver af kointegrationerne under hypotesen.

En anden hypotese er, at en variabel er stationær i sig selv, og dermed ekskluderer de resterende variable. Hypotesen defineres ved at der er en enhedsvektor i b . Således angiver hypotesen at en variabel i sig selv definerer en kointegration. Det betyder, at ingen af de resterende variable kan påvirke den stationære variabel på lang sigt, men at den stationære variabel derimod kan påvirke de resterende variable. I eksemplet ovenfor kan VECM med hypotesen om stationaritet af x_{2t} i anden kointegration opskrives som:

$$b_2 = H_2^b f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (j_{21} = 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \Delta x_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & -b_{13} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ x_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix},$$

idet $\tilde{p} = 3$ variable og $s_i = 1$ fri parameter i den anden kointegration under hypotesen.

En tredje hypotese er, at der er langsigtet homogenitet mellem to eller flere variable i en kointegration. Hypotesen defineres ved, at der er 2 eller flere ens elementer i en vektor i b . Således angiver hypotesen, at variablene vil udvikle sig ens på lang sigt. I eksemplet ovenfor kan VECM med hypotesen om langsigtet homogenitet mellem x_{1t} og x_{3t} i kointegrationerne opskrives som:

$$b = H^b f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \\ -j_{11} & -j_{12} \end{pmatrix} \quad og \quad j_{11} = 1, j_{22} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \Delta x_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & -1 \\ -b_{21} & 1 & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ x_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{pmatrix},$$

idet $\tilde{p} = 3$ variable og $s_i = 2$ frie parametre i begge kointegrationer under hypotesen.

Der er mulighed for at teste en del flere hypoteser, som alle vil minde om de beskrevne hypoteser. Det er også muligt at teste en kombination af flere hypoteser samtidig. Det kan f.eks. være ved eksklusion af flere variable eller hhv. ved at flere variable er svagt eksogene på samme tid, eller at der er homogenitet mellem nogle variable samtidig med at andre variable ekskluderes. Det er ikke meningen at samtlige hypoteser skal testes på en given VECM. De statistiske hypoteserne der testes, skal defineres ud fra de økonomiske hypoteser, der findes, før parametrene er estimeret. Det kan være en fordel yderligere at teste enkelte hypoteser, hvis det fremgår, at en eller flere parametre ligger tæt på 0, eller hvis flere estimerede parametre er stort set ens.

6.4.2 Estimation af kortsigtede parametre

Når kointegrationsrangen er bestemt, og de langsigtede parametre er estimeret, kan de kortsigtede parametre estimeres. De kortsigtede parametre er hhv. angivet ved Γ-matricer, koefficienter til evn. dummies og trends. Antallet af Γ-matricer svarer til antallet af relevante lags i VECM, hvorved de kortsigtede stationære AR-processer beskrives ved $k-1$ Γ-matricer.

De kortsigtede parametre estimeres på baggrund af de estimerede langsigtede parametre og har en asymptotisk fordeling der er normalfordelt med middelværdi nul og kovarians forskellig fra 1. Størrelsen af kovariansen for den asymptotiske fordeling afhænger hhv. af kovariansmatricen for modellens variable samt de estimerede langsigtede parametre.

Normalt angives de estimerede kortsigtede parametre med en t-værdi eller en standardafvigelse, således at parametrene kan vurderes. Specielt er det interessant at undersøge om en eller flere af parametrene kan sættes til nul. Det undersøges bedst ved enten at kontrollere, om 95%-konfidensintervallet (angivet ved $\hat{p} \pm 1{,}96 \cdot \hat{s}_{\hat{p}}$) indeholder 0 eller ved at evaluere t-værdien i en t-fordeling med det relevante antal frihedsgrader.

<u>6.5 Ukorrelerede residualer</u>

Når antallet af kointegrationer er bestemt, og såvel de langsigtede som kortsigtede parametre er estimeret, beskriver den endelige VECM i princippet den økonomiske situation. I nogle situationer er det vigtigt, at alle sammenhænge er beskrevet således, at der ikke forekommer skjulte informationer i residualerne. Dette sikres bedst ved at indsætte kausalbetingelser på modellens variable. Kausalbetingelserne angiver i hvilken rækkefølge variablene skal bestemmes, og dermed hvordan de påvirker hinanden.

De kausale betingelser indsættes i modellen ved at benytte den inverse Choleski dekomponering af kovariansmatricen for modellens residualer, $\hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$. Matricen ganges på samtlige koefficient matricer i modellen, således at det sikres, at residualerne er ukorrelerede. Den ændrede VECM beskrives som: $\hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\Delta x_t = \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\Gamma_1^{(m)}\Delta x_{t-1} + \mathbf{K} + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\Gamma_p^{(m)}\Delta x_{t-p} + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}ab'x_{t-m} + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\Phi D_t + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}m_0 + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}e_t$.

Teoretisk betyder kausalbetingelserne at den samlede model pålægges $p(p-1)/2$ nul-begrænsninger, svarende til at alle elementer i den ene trekant udenfor diagonalen i residual kovavariansmatricen er nul.

Konsekvensen ved kausalbetingelserne er, at nogle af variablene antages eksogene i forhold til de næste i rækken. Denne antagelse kan accepteres, hvis variablen alligevel er fundet svagt eksogen i forhold til andre variable. Men eksogenitets antagelserne er problematiske, hvis der ikke er fundet svagt eksogene variable i en given model. I stedet vil der presses kausale betingelser ind i modellen, som ikke nødvendigvis svarer til den beskrevne økonomiske situation. Herved må det for den enkelte model vurderes, om ukorrelerede residualer er en nødvendighed på bekostning af at der indsættes kausalbetingelser.

6.6 Opsummering

Multivariate analyser er defineret ved en naturlig rækkefølge af delanalyser og tests. Først specificeres modellen med hhv. antal lags og deterministiske led. Derefter undersøges det ved forskellige tests om modellens residualer opfylder antagelserne. Herefter bestemmes hhv. antallet af kointegrationer og de langsigtede parametre. Relevante hypoteser og begrænsninger for de langsigtede parametre testes, hvorefter de kortsigtede parametre estimeres.

Den vigtigste forudsætning er, at modellen er velspecificeret, så der ikke er hhv. signifikant autokorrelation, ARCH-effekter og udeblivende normalitet i residualerne. Yderligere er det en forudsætning at rangen af p vælges korrekt.

Hvis skjulte sammenhænge skal undgås, må der indsættes eksogenitetsbetingelser mellem variablene, idet den Choleski dekomponerede kovariansmatrix benyttes til at opnå ukorrelerede residualer. Herved ændres størrelsen på samtlige parametre i modellen, mens den overordnede struktur på modellen forbliver intakt.

7.0 Analyse af den konstante risikopræmie på det danske aktiemarked

I dette afsnit indledes analysen af risikopræmien. Dermed indledes besvarelsen af det sidste delspørgsmål fra problemformuleringen, hvorved der gennemføres en empirisk analyse af det danske aktiemarked. De valgte dataserier fra afsnit 3 benyttes til analysen[36].

I afsnit 2.1.2 blev der argumenteret for, at der skal benyttes reale serier til bestemmelsen af risikopræmien. Det betyder således, at inflationsudviklingen fjernes fra serierne og dermed risikopræmiens størrelse, idet inflationen generelt set har en forskellige indflydelse på hhv. aktiemarkedsudviklingen og renteudviklingen. De reale serier beregnes ved formlerne fra afsnit 3.3.2 og 3.3.3[37], og i afsnit 3.3.4 er de forskellige tendenser i serierne beskrevet. Ved hjælp af de valgte realafkastserier foretages der nu en analyse af risikopræmien på det danske aktiemarked under antagelse af, at risikopræmien er konstant over tid. Efterfølgende vil det blive undersøgt, om denne antagelse rent faktisk kan accepteres som grundlag for analysen.

7.1 Beregning af den konstante risikopræmie

Som beskrevet i afsnit 2.1.4 er den generelle antagelse, at risikopræmien er konstant over tid. Dette danner grundlaget for, at der benyttes arithmetriske gennemsnit af realafkastene for hhv. aktiemarkedet og det risikofrie aktiv. De arithmetriske gennemsnit af de to afkastserier beregnes og den konstante risikopræmie på aktier kan beregnes ud fra ligning (2.1). Alternativt kan ligningen omformuleres, så den i stedet angiver risikopræmien til et bestemt tidspunkt ud fra ændringen i de to indeksserier:

$$\Delta I_{Aktie} = a_t^{Kon} + \Delta I_{risikofri} \quad \Leftrightarrow \quad a_t^{Kon} = \Delta I_{Aktie} - \Delta I_{risikofri}\ , \qquad (7.1)$$

hvor a_t^{Kon} angiver risikopræmien pr. kvartal.

Den konstante risikopræmie $\bar{a}^{Kon}$ kan herfra bestemmes som det arithmetriske gennemsnit af de enkelte risikopræmier.

Begge beregningsmetoder giver pr. definition samme konstante risikopræmie, og der opnås følgende gennemsnitlige afkast og konstante risikopræmier pr. kvartal og pr. år[38]:

Horisont (t)	Aktiemarkeds afkast	Risikofrit afkast	Risikopræmie (kvartal/år)
1 kvartal	1,75%	0,47%	1,28% / 5,13%

Tabel 1

[36] Dataserierne ses i Excel-filen på vedlagte CD-ROM under fanebladene ”Aktie Data” og ”Risikofrit aktiv Data”.
[37] Beregningen af de reale indeks- og afkastserier ses i Excel-filen på vedlagte CD-ROM under fanebladene ”Aktie Data” og ”Risikofrit aktiv Data”.
[38] Se beregningerne i Excel-filen på vedlagte CD-ROM under fanebladet ”Konstant præmie”

Med antagelsen om at risikopræmien er konstant over tid, ses det af tabel 1, at risikopræmien på det danske aktiemarked hhv. er ca. 1,3% pr. kvartal og 5% p.a.

7.2 Sammenligning med en lignende undersøgelse

Fra de kendte analyser af risikopræmien på det danske aktiemarked er Line Isager-Nielsens analyse[39], den som ligger tættest op af analysen i dette speciale. Som udgangspunkt er den undersøgte periode i denne analyse lidt længere end perioden i Line Isager-Nielsens analyse, som strækker sig fra 1. januar 1971 til 31. december 2005. Line Isager-Nielsen beregner sig frem til en årlig historisk risikopræmie på 9,3% på baggrund af årlige observationer. Det er næsten dobbelt så stort et niveau i forhold til de ca. 5,1%, som risikopræmien er beregnet til i denne analyse.

Ved nærmere undersøgelse af afkastserierne viser det sig, at de kvartalsvise risikopræmier i 2006 afspejlede de forrige års udvikling, mens de kvartalsvise risikopræmier i 2007 havde et noget lavere niveau. Alle 4 kvartaler i 2008 havde en negativ risikopræmie og specielt i de sidste to kvartaler var risikopræmien numerisk meget store på grund af det markante fald i aktiemarkedet. Yderligere var de kvartalsvise risikopræmier i 1970 også negative. Alt i alt betyder det, at de ekstra kvartaler, der er inkluderet i denne analyse, kan forklare en del af den markant lavere risikopræmie.
Som en kontrol af de ekstra kvartalers påvirkning, er den historiske risikopræmie beregnet over samme periode, som anvendes i Line Isager-Nielsens analyse på baggrund af denne analyses datasæt[40]. Heraf beregnes den gennemsnitlige årlige risikopræmie til 7,0%, og det kan således konkluderes, at de ekstra kvartaler har resulteret i et fald på 1,9% (7,0%-5,1%). Det betyder at de ekstra kvartaler, der er inkluderet i denne undersøgelse, kan forklare en del af niveauforskellen (9,3%-5%) mellem Line Isager-Nielsens analyse og denne analyse.

Line Isager-Nielsen benytter samme aktieindeks og samme serier til at sammensætte det risikofri aktiv. Line Isager-Nielsen benytter dog diskontosatsen frem til 31. december 1991, hvorimod denne analyse skifter til CIBOR3M allerede i 2. kvartal 1988. Ved at bibeholde den samme periode som brugt i Line Isager-Nielsens analyse og samtidig benytte diskontosatsen frem til 31. december 1991, beregnes den gennemsnitlige årlige risikopræmie til 7,3% på baggrund af denne analyses datasæt. Forskellen på risikopræmierne på 2,0% (9,3%-7,3%) kan således forklares ved forskellen i hyppigheden af observationerne (kvartal vs. årlig).

[39] Isager-Nielsen, L. (2006)
[40] Se beregningerne i Excel-filen på vedlagte CD-ROM under fanebladet "Konstant præmie"

7.3 Opsummering

Den korte undersøgelse viser, at risikopræmien på det danske aktiemarked kan beregnes til ca. 5,1% p.a. ud fra de valgte dataserier. Ved at tilføje 4 års data opstår der et fald i den gennemsnitlige risikopræmie på ca. 2%, mens der også findes ændringer i risikopræmien ved brug af hhv. forskellige dataserier og forskellig hyppighed af observationerne.

8.0 Analyse af en tidsvarierende risikopræmien på det danske aktiemarked

Afsnit 7 viste, at der er en følsomhed i risikopræmiens størrelse i forhold til hvilken tidsperiode, der benyttes. Noget tyder på, at antagelsen om at risikopræmien er konstant over tid, ikke er en korrekt anskuelse af systematikken omkring risikopræmien på det danske aktiemarked. Derfor handler dette afsnit om at bestemme en tidsvarierende risikopræmie. Herved viser det sig, hvor meget risikopræmien rent faktisk varierer over den valgte periode og således afgøres det, hvorvidt antagelsen om en konstant risikopræmie over tid er acceptabel eller ej. Det sidste delspørgsmål fra problemformuleringen vil derfor blive besvaret i dette afsnit, således at den endelige værdi af risikopræmien på det danske aktiemarked og spændet heraf bliver beregnet.

Den tidsvarierende risikopræmie beregnes på baggrund af kointegrationsanalyser, og således undersøges det, om der findes en stationær sammenhæng mellem serier, der ikke i sig selv er stationære. I det tilfælde hvor der er en sammenhæng, bestemmes først den fælles udvikling, hvorefter den tidsvarierende risikopræmie kan beregnes.
Hvis begge indeksserier er I(1), og der som udgangspunkt er uafhængighed mellem aktiemarkedet og rentemarkedet, kan eventuelle sammenhænge bedst afbilledes i en statistisk verden ved at benytte multivariate kointegrationsanalyser. Herved får markederne mulighed for at påvirke hinanden, idet de sættes sammen som en dynamisk enhed, frem for at det ene marked er forklarende (det risikofrie aktiv i ligning (2.1)), mens det anden marked er afhængig (aktieindekset i ligning (2.1)). Yderligere vil der indgå hhv. kortsigtede og langsigtede påvirkninger fra de to markeder samt et tidsvarierende element, som alle påvirker en tidsvarierende risikopræmie.

Når mulitvariate kointegrationsanalyser benyttes til at bestemme en tidsvarierende risikopræmie, er det interessant at se på VECM. VECM med et lag kan for de to indeksserier formuleres som:

$$\begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t} \\ \Delta I_{Risikofri,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{1A} & g_{2R} \\ g_{2A} & g_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t-1} \\ \Delta I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1A} & a_{2R} \\ a_{21A} & a_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1A} & b_{2R} \\ b_{21A} & b_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Aktie,t-1} \\ I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{\mathrm{A,t}} \\ e_{\mathrm{R,t}} \end{pmatrix}.$$

Det bemærkes, hvorledes der stadig kan være korrelation mellem støjleddene. Korrelationen angives ved kovariansmatricen Ω, og er derfor ikke afbilledet i modellens andre parametre.

Da det antages, at der findes kointegration mellem de to variable, vil Π-matricen være af reduceret rang, så der opnås stationaritet på begge sider af lighedstegnet. Ved én kointegrationsrelation vil rangen af Π være 1, hvorved VECM kan udtrykkes som:

$$\begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t} \\ \Delta I_{Risikofri,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{1A} & g_{2R} \\ g_{2A} & g_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t-1} \\ \Delta I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_A & b_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Aktie,t-1} \\ I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{\mathrm{A,t}} \\ e_{\mathrm{R,t}} \end{pmatrix}.$$

Det bemærkes, at den øverste ECM-ligning minder mest ligning (7.1), og ved at omforme denne, fremkommer følgende ligning::

$$\begin{aligned} \Delta I_{Aktie,t} &= a_A + g_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + g_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t-1} + a_A b_A \cdot I_{Aktie,t-1} + a_A b_R \cdot I_{Risikofri,t-1} + e_{\mathrm{A,t}} \quad \Leftrightarrow \\ \Delta I_{Aktie,t} &= \left(a_A + g_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + a_A b_A \cdot I_{Aktie,t-1} + a_A b_R \cdot I_{Risikofri,t-1} \right) + g_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t-1} + e_{\mathrm{A,t}} \end{aligned}$$

Den tidsvarierende risikopræmie kan heraf bestemmes til at være:

$$a_t^{Tid} = \left(a_A + g_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + a_A b_A \cdot I_{Aktie,t-1} + a_A b_R \cdot I_{Risikofri,t-1} \right)$$

Dvs. den tidsvarierende risikopræmie kan hhv. beskrives ved et konstant led, den stationære del fra ændringen i aktieindekset, og de to tidsvarierende led for de to serier.

Ud fra den statistiske udledning af den tidsvarierende risikopræmie bemærkes det, hvorledes renten leder afkastet på aktiemarkedet. Det betyder, at antagelsen om uforudsigelighed i værdipapirmarkedet brydes, idet renten i en periode kan benyttes til at forudsige ændringen i aktiemarkedet i næste periode.
En af mulighederne for at rette op på problemstillingen omkring uforudsigeligheden er at ECM-ligningen omskrives. Det kan gøres ud fra en statistisk synsvinkel ved at gange Choleski dekomponeringen af kovariansmatricen $\hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$ på modellen som beskrevet i afsnit 6.5. Herved vil modellen se ud som følger:

$$\hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t} \\ \Delta I_{Risikofri,t} \end{pmatrix} = \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} g_{1A} & g_{2R} \\ g_{2A} & g_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t-1} \\ \Delta I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_A & b_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Aktie,t-1} \\ I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \hat{\Omega}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} e_{\mathrm{A,t}} \\ e_{\mathrm{R,t}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s_{1A} & s_{2R} \\ 0 & s_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t} \\ \Delta I_{Risikofri,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_A \\ \tilde{a}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{g}_{1A} & \tilde{g}_{2R} \\ \tilde{g}_{2A} & \tilde{g}_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta I_{Aktie,t-1} \\ \Delta I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1A} & \tilde{p}_{2R} \\ \tilde{p}_{2A} & \tilde{p}_{1R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Aktie,t-1} \\ I_{Risikofri,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{e}_{\mathrm{A,t}} \\ \tilde{e}_{\mathrm{R,t}} \end{pmatrix}$$

Den øverste ECM-ligning kan nu omformes :

$$s_{1A}\Delta I_{Aktie,t} + s_{2R}\Delta I_{Risikofri,t} = \tilde{a}_A + \tilde{g}_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + \tilde{g}_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t-1} + \tilde{p}_{1A} \cdot I_{Aktie,t-1} + \tilde{p}_{2R} \cdot I_{Risikofri,t-1} + \tilde{e}_{\mathrm{A,t}} \quad \Leftrightarrow$$
$$s_{1A}\Delta I_{Aktie,t} = \tilde{a}_A + \tilde{g}_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + \tilde{g}_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t-1} + \tilde{p}_{1A} \cdot I_{Aktie,t-1} + \tilde{p}_{2R} \cdot I_{Risikofri,t-1} - s_{2R}\Delta I_{Risikofri,t} + \tilde{e}_{\mathrm{A,t}} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta I_{Aktie,t} = \frac{\tilde{a}_A + \tilde{g}_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + \tilde{g}_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t-1} + \tilde{p}_{1A} \cdot I_{Aktie,t-1} + \tilde{p}_{2R} \cdot I_{Risikofri,t-1} - s_{2R}\Delta I_{Risikofri,t} + \tilde{e}_{\mathrm{A,t}}}{s_{1A}}$$

Den tidsvarierende risikopræmie fra den statistiske metode kan heraf bestemmes til:

$$a_t^{Tid} = \left(\frac{\tilde{a}_A + \tilde{g}_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + \tilde{g}_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t-1} + \tilde{p}_{1A} \cdot I_{Aktie,t-1} + \tilde{p}_{2R} \cdot I_{Risikofri,t-1}}{s_{1A}} \right).$$

Som beskrevet afsnit 6.5 vil den statistiske omformning af modellen medføre, at der indføres kausalbetingelser på variablene. Det betyder, at ved benyttelsen af en øvre Choleski dekomponeret trekantsmatrix, da vil det implicit antages, at renten er eksogen i forhold til aktieafkastet. Det er ikke en antagelse, der svarer til forholdene i det finansielle marked, hvorfor den præcise størrelse af den tidsvarierende risikopræmie fra denne beregningsmetode vil være forbundet med usikkerhed. Til gengæld er korrelationen mellem støjleddene fjernet, og alle sammenhænge mellem de 2 variable er afbilledet i modellen.

Der findes en alternativ måde at omskrive ECM-ligningen på, så den både passer til den teoretiske definition af risikopræmien og samtidig kan accepteres finansielt. Den oprindelige ECM-ligning omskrives empirisk, så hhv. afkastet på aktiemarkedet og renten har samme tidsangivelse. Ved denne omskrivning beholdes de estimerede koefficienter, er fremkommet af den statistisk korrekte ECM-ligning. Den omskrevne ligning er som følger:

$$\Delta I_{Aktie,t} = \left(a_A + g_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + a_A b_A \cdot I_{Aktie,t-1} + a_A b_R \cdot I_{Risikofri,t-1}\right) + g_{2R} \cdot \Delta I_{Risikofri,t} + e_{\mathrm{A,t}}$$

Den tidsvarierende risikopræmie fra den finansielle metode kan heraf bestemmes til:

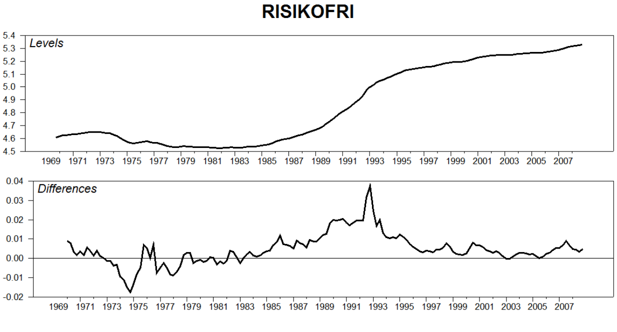
$$a_t^{Tid} = \left(a_A + g_{1A} \cdot \Delta I_{Aktie,t-1} + a_A b_A \cdot I_{Aktie,t-1} + a_A b_R \cdot I_{Risikofri,t-1}\right)$$

Det ses, at definitionen af den tidsvarierende risikopræmie ikke er ændret, men derimod at ændringen i aktiemarkedet i næste periode er afhængig af renten i næste periode. Dette kan lade sig gøre, idet det antages at renten er persistent. Det er således ikke en korrekt statistisk beregningsmetode, idet koefficienterne fra den korrekte ECM-ligning påføres en dataserie, uden at det kan testes, om det kan accepteres. Det betyder, at uforudsigeligheden i markedet opretholdes, dog uden at den sidste beregning er statistisk funderet. Yderligere er der ikke taget højde for korrelationen i støjleddene, hvorfor denne stadig er at finde i den samlede model.

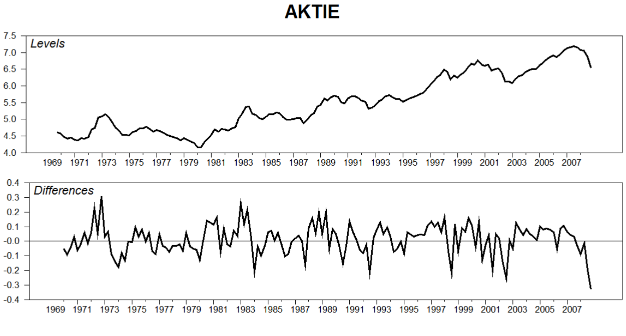
Efter at de forskellige variable og koefficienter er bestemt, kan risikopræmien til hvert tidspunkt beregnes ud fra enten den statistiske eller den finasielle metode. Herefter kan den gennemsnitlig tidsvarierende risikopræmie $\overline{a}^{Tid}$ beregnes og sammenlignes med risikopræmien $\overline{a}^{Kon}$ fra ligning (7.1), der er konstant over tid. Yderligere kan der beregnes et spænd for den tidsvarierende risikopræmie, så det er muligt at se, hvor stor variationen af risikopræmien har været over tid. Alt dette kan bruges, når det skal vurderes om risikopræmien kan accepteres at være konstant over tid. Før der opskrives en VAR-model, skal det undersøges, om de to indeksserier er I(1), da det er en af forudsætningerne for, at der kan undersøges for kointegration. Undersøgelsen kan gøres såvel grafisk som statistisk ved at analysere udviklingen for hhv. indeks og differensserier.

8.1 Grafisk dataudvikling og univariante tests

For at undersøge de præcise egenskaber ved indeksserierne, foretages først de grafiske fremstillinger af indeksserierne i hhv. niveau og differens i CATS. Graferne er illustreret i figur 1 og 2. Det bemærkes, at der ikke er den store forskel mellem differensserierne og de korrekt beregnede afkastserier[41]. Det skyldes, at der tages ln til indeksserierne, således at differensserierne er en approksimation af de kendte afkastserier. Ved at sammenligne hvert kvartal, ses der en lille forskel mellem de korrekt beregnede afkast og differensserierne ved numerisk store afkast. Denne forskel er under 0,1% for det risikofrie aktiv, mens der for aktiemarkedet er et par kvartaler, hvor forskellen er på 2-3%. Det kan dermed konkluders, at der ikke er problemer i forbindelse med at benytte de approksimerede aktieafkast og renter til analysen[42].



Figur 1



Figur 2

Som udgangspunkt virker det til, at renten ikke har en konstant middelværdi. Det bemærkes dog, at udsvingene ligger i intervallet -0,02 til 0,04, hvilket er meget tæt på 0. Til gengæld ser det ud til, at der er en nogenlunde konstant varians bortset fra enkelte store udsving. Aktieafkastet ser ud til både

[41] Korrekt beregnede afkastgrafer ses bilag 3.
[42] I resten af teksten refererer aktieafkast og rente til de approksimerende differensserier

at have en konstant middelværdi og en konstant varians, men det til trods har den udsving i intervallet -3 til 3, hvilket er et bredere interval end tilfældet for renten.

På graferne for de to indeksserier ser det ikke ud til, at der er signifikant autokorrelation mellem tidspunkterne (sæson i en serie). Derfor er forudsætningen for et Unit-root-test opfyldt, hvorfor de forskellige seriers stationaritet undersøges. I RATS testes dette med Dickey-Fuller-test på hhv. indeksserier og differensserier[43]. Teststørrelsen for begge indeksserier, hvor der tages højde for trends i serierne, er større end de kritiske værdier i den asymptotiske fordeling. Det betyder at indeksserierne har enhedsrødder og at det ikke kan accepteres at de er stationære.
Teststørrelsen for aktieafkastet er derimod mindre end de kritiske værdier for den asymptotiske fordeling. Det betyder, at serien ikke har enhedsrødder, hvorfor det ud fra et statistisk synspunkt kan accepteres, at den er stationær. Idet der tages højde for en konstant i serien, og den stadig er stationær, kan det konkluderes at der ikke er hverken stokastiske eller deterministiske trends tilbage, hvorfor aktieafkastet må være I(0).
Teststørrelsen for renten ligger på grænsen til at være mindre end den kritiske værdi for 10%. Det betyder, at serien næsten kan accepteres at være stationær på et 10%-niveau, og at der ikke er sikkerhed for, om differensserien er I(0) eller ej. Denne usikkerhed kan enten skyldes et det middelværdiskift, der ser ud til at være på grafen, eller den situation, at der er et antal outliers, som forstyrrer stationariteten i differensserien.

Fra et økonomisk synspunkt giver det mening, at aktieafkastet er stationært, da det stemmer overens med antagelsen om, at aktieafkastet følger en random walk. Til gengæld skal der mere overvejelse til angående renten.
Det er alment kendt, at en nominel rente ikke kan blive negativ. Tilsvarende er det næsten utænkeligt for den nominelle rente at overstige 30% p.a.. Derved er der naturlige grænser for den nominelle rente, hvorfor den ikke kan være I(1)[44]. Derfor må den nominelle rente være I(0). Tilsvarende ræsonnement antages for den reale rente, idet de naturlige grænser udvides til andre størrelser. Fra ligning (2.3) er det værd at bemærke, at den reale rente til et givent tidspunkt er positiv for nogle kombinationer af hhv. den nominelle rente og inflationen, mens den reale rente er negativ for andre kombinationer. Specifikt kan det fra ligning (2.3) udledes at:

$$p_t > i_t \Rightarrow r_t < 0 \text{ og } p_t < i_t \Rightarrow r_t > 0.$$

[43] Koden og output ses i bilag 5.
[44] Jf. Samtale med Professor Jesper Rangvid fra Institut for Finansiering på CBS

Idet realrenten ikke påvirkes af inflationen, kan realrenten være negativ, hvorved den naturlige nedre grænse for realrenten rykkes. Fra et økonomisk synspunkt er det således muligt, at acceptere hypotesen om, at realrenten er I(0).

Alt i alt kan det såvel fra et statistisk som et økonomisk synspunkt accepteres, at aktieafkastet er uden nogen former for trends. Derfor gælder det, at differensserien er I(0), hvorfor det kan konkluderes, at indeksserien er I(1). Det blev også antydet i Dickey-Fuller-testet, hvor indeksserien ikke kunne accepteres at være stationær.
Tilsvarende kan hypotesen om, at realrenten er uden nogen former for trends accepteres fra et økonomisk synspunkt, og til dels ud fra et statistisk synspunkt. Dermed antages det også her, at differensserien er I(0) og indeksserien I(1), hvilket igen var antydet i Dickey-fuller testet på indeksserien.

8.2 Indikation af kointegrationsrelation

Ved at sammensætte en linearkombination af de to indeksserier, vil der ifølge teorien generelt opstå en I(1)-serie. Det vil dog være muligt at der opstår en I(0) serie, hvorved der findes en kointegration mellem indeksserierne. Derfor benyttes Engle-Granger proceduren på de to indeksserier.

Sammenhængen mellem hhv. aktieafkastet, det risikofrit aktiv og risikopræmien er angivet i ligning (2.1). Det er derfor nærliggende at sætte aktiemarkedet som den afhængige variabel og det risikofrie aktiv som forklarende variabel i en kointegrationsrelation. Herefter testes relationen i Engle-Granger proceduren, som udføres i RATS.

ADF-regressionen med 2 lags giver den bedste estimation, idet der er flest mulige lags i ADF-regressionen, uden at nogle af dem bliver insignifikante (p-værdi >0,05).
Parameteren for det én-periode laggede led i ADF-regressionen estimeres[45] til $\hat{p}_c = -0{,}087_{(0{,}024)}$ og EG-teststørrelsen beregnes ud fra formel (5.1) til -3,66. De 3 kritiske værdier er estimeret ud fra mackinnoncv-proceduren i RATS, hvor der tages højde for antallet af estimerede parametre. Idet teststørrelsen er hhv. mindre end de kritiske værdier på både 5% og 10% -niveau men større end den kritiske værdi på 1% -niveau, kan det på 5% -nivau accepteres, at de estimerede residualer er stationære. Således kan den estimerede regression være en kointegrationsrelation.

[45] Kode og output ses i bilag 6.

Som udgangspunkt vurderes det, at der er én kointegrationsrelation mellem de to indeksserier. Men ifølge teorien omkring Engle-Granger proceduren er der en implicit antagelse om, at der ikke er feedback mellem de to variable. Ud fra et økonomisk synspunkt kan der godt være feedback mellem de to variable, og således er denne antagelse ikke i overensstemmelse med den situation der ønskes afbilledet i den statistiske teori. Derfor benyttes multivariate kointegrationsanalyse i det følgende underafsnit, således at alle feedback muligheder medtages i analysen.

8.3 Model uden restriktioner

Det har vist sig, at differensserierne er I(0), mens indeksserierne er I(1). Dette betyder, at forudsætningen om at serierne er stokastiske er opfyldt, og således kan de beskrives ved en VAR-model. Før det er muligt at undersøge kointegration mellem serierne, skal VAR-modellen specificeres, således at residualerne for modellen er normalfordelte og uden ARCH-effekter samt signifikant autokorrelation. Den generelle VAR-model for de $p = 2$ variable er:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} \mathbf{K} + \Pi_k x_{t-k} + e_t \\
e_t &\sim NI_2(0, \Omega) \quad t \in (1969:4; 2008:4) \\
x_t &= \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Når de forskellige parametre i modellen er bestemt, kan residualerne testes. Derfor specificeres modellen i forhold til hhv. hvilke trend der er i dataserierne, og hvilken laglængde der er relevant i forhold til at beskrive dataserierne.

8.3.1 Trend og laglængde i modellen

I afsnit 4.4 blev der beskrevet flere typer af trends, som alle kan modelleres i forhold til at beskrive et datasæt. Fra graferne for serierne i niveau er det tydeligt, at der er forskellige lineære trends. Det betyder, at der skal være mulighed for trends i niveau. Derimod giver det ifølge teorien ikke mening, at der er trend i risikopræmien. Det betyder, at den deterministiske komponent i modellen såvel skal give mulighed for skæring forskellig fra 0 som trends i dataserierne. Det må dog antages, at disse trends vil udligne hinanden i kointegrationsrelationerne. VAR-modellen skal derfor modelleres som mulighed 3) fra afsnit 4.4. I forhold til at sikre, at de deterministiske komponenter bliver specificeret korrekt, følgende begrænsninger på parametrene for differensserierne indgå: $b_0 \neq 0, b_1 = 0, g_0 \neq 0, g_1 = 0$. Herved bliver en trend i dataserierne i niveau defineret ved $g_0 t$, mens en eventuel skæring forskellig fra nul defineres ved K_0. I differensserierne vil denne skæring gå ud, idet det blot er en konstant. Det illustreres af understående eksempel:

$$y_t = K_0 + g_0 t \quad \Rightarrow \quad \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = K_0 + g_0 t - (K_0 + g_0(t-1)) = g_0 t - g_0 t + g_0 = g_0$$

Begrænsningerne implementeres for modellen i CATS ved at sætte DETREND=DRIFT.

Herefter testes der for, hvilket antal lags (størrelsen på k) som er relevante for modellen. Hertil benyttes funktionen ”Lag Length Determination” i CATS. Der beregnes loglikelihood værdier og testes for autokorrelation. Derudover beregnes en række informationskriterier, og der gennemføres LR-test for et angivet antal maksimale lags, k_{maks}. Det maksimale antal lags definerer den effektive datalængde, således at modellerne, der testes mod hinanden, har samme grundlag.

For at have flest mulig observationer, indlæses først en VAR-model med 2 lags. Grunden til dette er som tidligere nævnt i afsnit 6.1 at $k = 2$ kan beskrive en relativ kompleks struktur af dataserierne. For at få en ide om, hvor mange lags der er nødvendige sættes $k_{maks} = 5$.[46] Fra LR-reduktionstestet i bilag 7 kan det accepteres at reducere antallet af lags til $k = 2$. Ved $k = 2$ har Hannan-Quinn informations kriteriet og Schwartz informations kriteriet de mindste værdier, mens LM- testene for signifikant autokorrelation accepteres på grænsen.

Ved at test med hhv. $k_{maks} = 3$ og $k_{maks} = 2$[47] kan det igen fra LR-reduktionstestet accepteres at $k = 2$. Det bemærkes dog, hvorledes LM-testene for autokorrelation kun lige godkendes med p-værdier på hhv. 0,052 og 0,055. Ved $k = 3$ har LM-testene for autokorrelation derimod p-værdier omkring 0,5. Det er specielt vigtigt for rang testet, at der ikke er signifikant autokorrelation i residualerne, og derfor er 2 lags muligvis for lidt i forhold til at beskrive empirien tilfredsstillende. Selv om det i teoriafsnittet blev konkluderet, at det i praksis bør være nok med $k = 2$, er det her blevet vist, at der for denne finansielle problemstilling bør undersøges 2 modeller med hhv. $k = 2$ og $k = 3$, som sideløbende kan testes for modelspecifikation, rang osv. Derfor er VAR-modellerne nu specificeret til:

A1)
$$\begin{aligned} x_t &= \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + K_0 + g_0 t + e_t \\ e_t &\sim NI_2(0,\Omega) \qquad t \in (1969:4;2008:4) \\ x_t &= \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

B1)
$$\begin{aligned} x_t &= \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \Pi_3 x_{t-3} + K_0 + g_0 t + e_t \\ e_t &\sim NI_2(0,\Omega) \qquad t \in (1969:4;2008:4) \\ x_t &= \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[46] Output ses i bilag 7.
[47] Output ses i bilag 7.

8.4 Undersøgelse af misspecifikation i modellerne

Når VAR-modellerne uden restriktioner er specificeret, kan der fortages en residualanalyse for de to valgte modeller. I bilag 8 er der for begge modeller hhv. grafer for residualerne for differensserierne, grafer med kryds- og autokorrelationer samt en residualanalyse fra CATS.

For begge modeller gælder det, at udsvingene i de fittede residualer for renten passer med udsvingene i de faktiske residualer. Samtidig ser der ikke ud til at være signifikant autokorrelation. For aktieafkastet bemærkes det derimod for i begge modeller, at de fittede residualer ikke har samme store udsving som de faktiske residualer. Samtidig er der for model A1 en signifikant autokorrelation mellem residualerne for lag 3. Denne signifikante autokorrelation i residualerne findes ikke i model B1.

For aktieafkastet bemærkes det for begge modeller, at histogrammet for de standardiserede residualer har samme form som tætheden for en standard normalfordeling (top i ca. 0,4 og haler der er 0 efter $|3|$). Det er også tilfældet i grafen for de standardiserede residualer, hvor alle ligger indenfor intervallet fra -3 til 3. Mht. renten kan det derimod for begge modeller ses, at histogrammet for de standardiserede residualer er lang fra at have samme form som tætheden for en standard normalfordeling. Her er toppunktet mellem 0,6 og 0,7, og det ser ud til, at der er flere observationer over $|3|$. Det betyder, at fordelingen bliver høj og tynd, samtidig med at halerne er for tykke. Det bemærkes tilsvarende på graferne for de standardiserede residualer, at et par af residualer er langt over $|3|$.

Fra korrelationsplottene for begge modeller bemærkes det hvorledes der er meget få signifikante krydskorrelationer. Det betyder, at den ene variable ikke kan benyttes til at forudsige den anden. Igen gælder det, at der for model A1 er en signifikant autokorrelation ved lag 3, mens denne ikke findes i plottet for model B1.

Fra residualanalysen for hver af de to modeller ses det, at krydskorrelationen mellem residualerne for ændringerne i de to variable er hhv. 0,022 for model A1 og 0,014 for model B1. Da begge værdier er tæt på nul, kan det konkluderes, at der ikke er signifikante krydskorrelationer mellem de forskellige lags i de to modeller.

I residualanalyserne for de to modeller er der to typer test for autokorrelation i residualerne. Den ene er Ljung-box teststørrelsen, som er baseret på de estimerede auto- og krydskorrelationer fra de

første $\frac{T}{4}$ lags. Idet de effektive samples er hhv. $T_{A1} = 155$ og $T_{B1} = 154$, er Ljung-box teststørrelserne således baseret på 38 lags. Det ses, at med hhv. 144 og 140 frihedsgrader er p-værdien i begge tilfælde stort set lig 0, og residualerne har dermed stadig signifikant autokorrelation. Den anden test er LM-teststørrelsen med hhv. 1 og 2 orden. Med 4 frihedsgrader bemærkes det, at begge teststørrelser for model B1 godkender, at residualerne er fri for signifikant autokorrelation. De tilsvarende teststørrelser for model A1 godkender kun lige, at residualerne er fri for signifikant autokorrelation.
Da der ikke kan stoles på Ljung-box teststørrelsen, når der testes på en multivariant model, kan det godkendes, at der ikke er signifikant autokorrelation i residualerne for model B1. Det er i overensstemmelse med de tidligere undersøgelser, hvor der ikke blev fundet signifikante autokorrelationer i plottene. Tilsvarende godkendes det kun lige at model A1 er fri for signifikant autokorrelation i residualerne, hvilket hænger godt sammen med, at der er signifikant autokorrelation ved lag 3 i plottet for aktieafkastet.

I residualanalysen testes der vha. en multivariate LM-teststørrelse af hhv. 1 og 2 orden om der er ARCH-effekter tilbage i residualerne. Med hhv. 9 og 18 frihedsgrader er p-værdierne for 1. og 2. orden begge lig 0 for begge modeller. Det betyder, at teststørrelserne forkaster hypotesen om at den varierende varians er fjernet fra residualerne. Dette stemmer overens med problematikken i plottene, hvor de fittede residualer for aktieafkastet ikke har lige så store udsving som de faktiske. Samtidig ses det for begge modeller, at det multivariate test for normalitet i residualerne har en p-værdi på 0, hvilket betyder, at modellens residualer ikke kan accepteres at være normalfordelte.

Ud fra de 4 momenter og de univariate teststørrelser, som beregnes for ændringerne i hver af variablene, opnås samme tendens som fremgik af histogrammerne for begge modeller. Ændringen i begge variable har i begge modeller middelværdier lig 0.
Det bemærkes, hvorledes at aktieafkastet har skewness på hhv. $S_{A1}^{A} = -0{,}039$ og $S_{B1}^{A} = -0{,}221$ og kurtosis på hhv. $K_{A1}^{A} = 3{,}183$ og $K_{B1}^{A} = 3{,}167$, hvilket stemmer overens med en standard normalfordeling. Samtidig viser den univariate test for normalitet, at p-værdien ligger fint over grænsen på p = 0,05 i begge modeller. Derudover bemærkes det, at renten har skewness på hhv. $S_{A1}^{R} = 0{,}159$ og $S_{B1}^{R} = 0{,}100$ og kurtosis på hhv. $K_{A1}^{R} = 9{,}075$ og $K_{B1}^{R} = 9{,}232$. Værdierne stemmer på ingen måde overens med en standard normalfordeling, idet specielt kurtosis er for stor. Samtidig viser den univariate test for normalitet, at p-værdien er lig 0 for begge modeller.

Yderligere viser det sig, at den univariate test for ARCH-effekter i aktieafkastet kun lige godkendes for model A1, mens teststørrelsen overbevisende godkendes for model B1. Den univariate test for ARCH-effekter i renten har for begge modeller en p-værdi lig 0.

Alt i alt betyder det, at VAR-modellerne ikke kan antages at være velspecificeret. Der er tydelige tegn på problemer, idet residualerne ikke kan antages at være normalfordelte, og idet der stadig er ARCH-effekter tilbage i residualerne. De univariate teststørrelser og graferne af residualerne for de 2 variable viser, at det hovedsagligt er serien for det risikofrie aktiv, der skaber problemer i den samlede model.

Som udgangspunkt er der flere muligheder for at korrigere i serierne. En af mulighederne er at korrigere for et eventuelt middelværdi skift i renten. En anden er at korrigere for store udsving. I næste afsnit undersøges disse muligheder, hvor også anvendelsen af forskellige dummies overvejes.

8.4.1 Statistisk korrektion af middelværdiskift og store residualer

I afsnit 8.1 blev indeks- og differensserier undersøgt for stationaritet. ADF-testet af aktieafkastet godkendte, at serien er stationær. Yderligere er der ikke tegn på middelværdiskift i grafen, hvorfor korrektion af middelværdiskift i aktieafkastet ikke er relevant. ADF-testet af renten blev godkendt på et 10%-niveau, og således er der muligvis et eller flere middelværdiskift i renten.

Ift. at identificere eventuelle middelværdiskift i renten, undersøges i første omgang graferne for hhv. den nominelle renteserie og inflationsserien[48]. Det virker til at den nominelle rente har et middelværdiskift i 94:Q2, hvor renten ændre sig fra en middelværdi på ca. 2,3% til en middelværdi på ca. 1,2%. Inflationen ser derimod ud til at have et middelværdi skift i 85:Q2, hvor den falder fra en værdi på ca. 2,3% til ca. 1,1%. Yderligere ser inflationen ud til at have endnu et middelværdiskift i 90:Q2, hvor værdien falder til ca. 0,6%.

I grafen for den reale rente kan de 3 mulige middelværdiskift accepteres, idet serien kan opdeles i op til 4 perioder:

70:Q1-85:Q1	med middelværdi på ca. 0,0%
85:Q2-89:Q2	med middelværdi på ca. 0,9%
89:Q3-94:Q1	med middelværdi på ca. 2,0%
94;Q2-08;Q4	med middelværdi på ca. 0,5%

[48] Se bilag 9

De to VAR-modeller indlæses i CATS med de forskellige kombinationer af middelværdiskift, og residualanalyserne kontrolleres[49]. Ingen af middelværdiskiftene har særlig effekt på de forskellige teststørrelser, så det kan konkluderes, at disse korrektioner ikke løser misspecifikations problemet.

I grafen for den reale rente ser det ud til, at der er outliers omkring perioden 74:Q2-75:Q2 og igen omkring perioden 92:Q3-92:Q4. For at identificere hvor der eventuelt skal korrigeres for store udsving i en eller begge serier, angives de store residualer i modellerne ved at benytte ”Find Large Residuals” i CATS. Grænseværdien sættes til 1,96 som er 95%-intervallet for en standard normal fordeling.

I residualerne er der flere muligheder for at korrigere modellerne ved hjælp af dummies. Begge modeller angiver de samme kvartaler med store residualer, hvor kun størrelsen på residualerne varierer lidt. Der kan korrigeres for følgende forskellige observationer:

Transitorisk impuls:

T1: 76:Q3-76:Q4 (to store residualer med først positiv så negativ fortegn for det risikofrie aktiv)

T2: 92:Q4-93:Q1 (to store residualer med først positiv så negativ fortegn for det risikofrie aktiv)

Permanent impuls:

B1: 75:Q4 (en store positiv residual for det risikofrie aktiv)

B2: 92:Q3 (en store positiv/negativ residual for det risikofrie aktiv/aktiemarkedet)

B3: 08:Q4 (en store positiv residual for aktiemarkedet)

VAR-modellerne med både $k = 2$ og $k = 3$, hvor de forskellige kombinationer af dummies er inkluderet, indlæses i CATS. Residualanalysen kontrolleres ift. om inkludering af en given dummy har en positiv indvirken på de respektive teststørrelser.

Først testes de transitoriske impuls dummies i begge modeller[50]. Det viser sig, at inkludering af den transitoriske impuls dummy T1 i begge modeller giver en stor reduktion af normalitetsteststørrelserne for såvel det risikofrie aktiv som den samlede model. Ved inkludering af den transitoriske impuls dummy T2 opnås der i begge modeller en reduktion af ARCH-teststørrelserne for såvel det risikofrie aktiv som den samlede model, mens teststørrelserne for normalitet forøges. Ved at inkludere begge transitoriske impuls dummies, opnås den bedste effekt i begge modeller, idet der nu kun mangler at blive korrigeret for normalitetsproblemet i det risikofrie aktiv.

[49] Tabeller for samtlige residualanalyser kan ses i bilag 10.
[50] Tabeller for samtlige residualanalyser kan ses i bilag 11.

Herefter testes de permanente impuls dummies i begge modeller, hvor både T1 og T2 er inkluderet[51]. Det viser sig, at den permanente impuls dummy B3 ikke her en signifikant effekt på de forskellige teststørrelser i residualanalysen for modellerne. Derimod har den permanente impuls dummy B1 en positiv påvirkning på kurtosis for det risikofrie aktiv, mens den permanente impuls dummy B2 har en positiv påvirkning på normalitetsteststørrelsen for det risikofrie aktiv. Ved at inkludere både B1 og B2 i modellerne ses det, at samtlige relevante teststørrelser i residualanalysen kan godkendes. For model A1 med dummies er p-værdien for LM(1)-autokorrelationsteststørrelsen på 0,07 og dermed kun lige godkendt, mens teststørrelsen for ARCH-effekter for aktiemarkedet ikke godkendes.
Problemerne findes ikke for model B1 med dummies, idet alle tests i residualanalysen godkendes.

Fra et statistisk synspunkt bør de endelige modeller derfor bestå af hhv. de 2 variable samt 2 transitoriske og 2 permanente korrektioner for specielle historiske hændelser. Den eneste forskel på de to VAR-modeller er således antallet af lags.

8.4.2 Økonomisk begrundelse for korrektioner

Ift. at modellerne skal benyttes til at beregne risikopræmien på det danske aktiemarked, bør det undersøges, om de 4 perioder som modellerne fremhæver, kan genkendes ud fra et økonomisk perspektiv. Fra det oprindelige datasæt undersøges bevægelserne i serierne på tidspunkterne for de 4 dummies. Fra definitionen af realrente (ligning (2.2)) ses det at:

1) Den permanente impuls dummy B1 i 75:Q4 opstår på baggrund af et stort fald i inflationen, samtidig med at den nominelle rente er uændret.
2) Den transitoriske impuls dummy T1 opstår som en kombination af hhv. en stigning i den nominelle rente i 76:Q3, hvor inflationen er stort set uændret, og herefter en stor stigning i inflationen i 76:Q4, hvor den nominelle rente er stort set uændret.
3) Den permanente impuls dummy B2 i 92:Q3 opstår på baggrund af en stigning i den nominelle rente, samtidig med at inflationen er uændret.
4) Den transitoriske impuls dummy T2 opstår på baggrund af ændringer i den nominelle rente. Først med en stor stigning i 92:Q4 og derefter et stort fald i 93:Q1, hvor inflationen i begge kvartaler stort set er uændret

Således opstår de 4 dummies på forskellige baggrunde, hvorfor det må undersøges, hvad der har forsaget disse ændringer.

[51] Tabeller for residualanalyserne med B1 og B2 ses i bilag 12.

Først undersøges konjunkturudviklingen samt de forskellige politiske lovændringer der blev foretaget i hhv. 1975 og 1976. Det gælder generelt, at en stigning i inflationen fremkommer af en stigning i forbrugerprisindekset, mens et fald i inflationen fremkommer af et fald i forbrugerprisindekset. Forbrugerprisindekset angiver det generelle prisniveau for varer og services for en almindelig husholdning og påvirkes således af de politiske tiltag der foretages i håb om at forbrugerne enten forbruger mere eller mindre.

I september 1975 blev der indgået et politisk forlig om at sænke momsen midlertidigt fra oktober 1975 til februar 1976[52]. I teorien er der følgende sammenhæng: når momsen sættes ned med 1%, så falder alle priser med 1%, hvorved forbrugerprisindekset vil falde med 1%[53]. Som følge af sænkelse af momsen falder udgifterne, hvorved prisen for forbrug falder. Det medfører et fald i forbrugerprisindekset, hvilket yderligere medfører et fald i inflationen. Kombineret med en uændret nominel rente opnås således den øgede reale rente, der i modellen forsager det positive udsving i 1975:Q4. I februar 1976 blev momsen reguleret, således at den vendte tilbage til niveauet før det politiske forlig. Det medførte, at realrenten også vendte tilbage til dens tidligere niveau. Det politiske forlig giver altså anledning til den permanente impuls dummie B1.
I august 1976 blev der vedtages endnu et politisk forlig om at forhøje forbrugerafgifterne på en del forbrugsgoder[54]. Afgifterne øges på benzin, cigaretter, spiritus, vin, øl, kaffe og te, hvilket medførte en stigning i priserne på disser varer. Der gik dog lidt tid før effekterne af disse prisstigninger trådte i kraft, og således medførte det først en stor inflationsstigning i 1976:Q4.
Den stigende efterspørgsel, før forliget blev vedtaget, havde medført et stort underskud på betalingsbalancen. Samtidig var der i årets løb uro på de internationale valutamarkeder. Begge situationer førte til forøget valutaefterspørgsel, hvorfor Nationalbanken i 1976;Q3 hævede diskontorenten i håb om at begrænse efterspørgslen[55]. Både Nationalbankens forøgelse af renten og effekten af det politiske forlig giver således anledning til den transitoriske impuls dummie T1.

De to sidste dummies er hovedsageligt skabt af renteændringer i perioden 1992-1993, hvorfor konjunkturudviklingen og politiske lovændringer nu undersøges for denne periode[56].

---

[52] Se Hansen, E.D., Jensen, S.E.H., Kjærsgaard, K., Rosted, J. (1994), s. 73
[53] Det antages at forhandlere ikke holder prisen på samme niveau og erstatter den 1 % momssænkelse med indtjening.
[54] Se Danmarks statistik (1976), samt de faktiske ændringer i Danmarks statistik (1997)
[55] Se Danmarks statistik (1976)
[56] Se Økonomiministeriet, Det økonomiske sekretariat (1993), afsnit 1.10

Der var stor valutauro i efteråret 1992, hvilket bl.a. skyldtes det danske nej til Maastricht-traktaten. Under denne uro flukturerede de korte renter kraftigt, hvilket ses af graferne for de nominelle renter, idet der er to store stigninger i både 1992:Q3 og 1992:Q4.
Yderligere var der en smule valutauro i februar 1993, hvorefter Nationalbanken foretog en række rentenedsættelser af pengemarkedsrenten. Rentenedsættelserne ses tydeligt af graferne for de nominelle renter, idet der er et stort fald i 1993:Q1 og endnu et i 1993:Q2, som imidlertid ikke er signifikant for den statistiske model. De store renteændringer kombineret med en uændret inflation i denne periode giver anledning til den permanente impuls dummie B2 og den transitoriske impuls dummie T2.

De 4 dummies fra den statistiske model kan således retfærdiggøres ud fra de enestående økonomiske påvirkninger i de omtalte kvartaler. De historiske begivenheder er således begrundelsen for, at der bør foretages statistiske korrektioner i netop disse kvartaler, ift. at den statistiske model stemmer overens med den finansielle situation omkring risikopræmien på det danske aktiemarked. De nye VAR-modeller med de 4 dummies ser ud som følger:

A2) $x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + K_0 + g_0 t + \Phi d_t + e_t$

$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1969:4;2008:4)$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \quad d_t = \begin{bmatrix} d_p 75_t \\ d_{tr} 76_t \\ d_p 92_t \\ d_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t \geq 1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} \\ 1_{\{t \geq 1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} \end{bmatrix}$$

B2) $x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + \Pi_3 x_{t-3} + K_0 + g_0 t + \Phi d_t + e_t$

$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1969:4;2008:4)$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \quad d_t = \begin{bmatrix} d_p 75_t \\ d_{tr} 76_t \\ d_p 92_t \\ d_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t \geq 1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} \\ 1_{\{t \geq 1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} \end{bmatrix}$$

Da samtlige misspecifikationstests for de to modeller undtaget grænse accepten af model A2 kan godkendes må modellerne klassificeres som velspecificerede. Ved endnu et test af lag længden, fremkommer samme problemstilling ift. om der skal benyttes 2 eller 3 lags. Det betyder, at der nu kan testes for kointegration mellem de to variable i begge VECM, og eventuelle kointegrationsrelationer og parametre kan fastslås.

8.5 Kointegrationsrelationer

Da der ikke er begrænsninger på rangen af Π-matricen, kan modellerne uden restriktioner omformes til VEC-modeller, idet skæringen i en eventuel kointegration angives med ab_0, og skæringen i differensligningerne angives med g_0:

$$\Delta x_t = \Gamma_1^{(m)} \Delta x_{t-1} + \Pi x_{t-m} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:1;2008:4) \quad m \in (1,2)$$

A3) $x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}$

$$D_t = d_t - d_{t-1} = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_t = \Gamma_1^{(m)} \Delta x_{t-1} + \Gamma_2^{(m)} \Delta x_{t-2} + \Pi x_{t-m} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:2;2008:4) \quad m \in (1,2,3)$$

B3) $x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}$

$$D_t = d_t - d_{t-1} = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

Idet venstresiden af de to modeller Δx_t tidligere er bestemt til at være I(0) og dermed stationær, skal højre siden også være stationær. Er der kointegration mellem de to variable, vil Π-matricen ifølge teorien, have en reduceret rang. Inden det undersøges, skal modellerne først specificeres med en værdi for m.

8.5.1 Valg af m til modellen

Variablen m angiver hvilket lag, ligevægts korrektions leddet er placeret ved. Da $k=2$ og $k=3$ i de to VEC-modeller kan m have værdien 1,2 eller 3. Som beskrevet i afsnit 4.2 er Π-matricen uafhængig af størrelsen på m. Det betyder, at koefficienterne til ligevægts korrektions leddet er ens, uanset hvilket lag korrektionsleddet placeres ved.
Til gengæld er det således at $\Gamma_1^{(m)}$-matricen er afhængig af valget af m. Eksempelvis gælder det, at $\Gamma_1^{(1)} \neq \Gamma_1^{(2)}$, hvor $\Gamma_1^{(1)}$ beskriver de ”rene” transitoriske effekter ved den laggede ændring i variablene, mens $\Gamma_1^{(2)}$ måler de kumulerede langsigtede transitoriske effekter i modellens 2 første led. Koefficienterne til Δx_{t-1} vil således variere, alt efter hvilken størrelse af m der vælges. Generelt vil både loglikelihoodværdien og forklaringsgraden for de to tilfælde er ens[57]. Så konsekvensen af valget af m er derfor hvorledes, de estimerede koefficienter skal fortolkes.

I CATS er m som standard sat til 1, således at de rene transitoriske effekter fremkommer. Denne fortolkning af parametrene er den mest anvendelige ift. beregning af risikopræmien på det danske aktiemarked, idet de estimerede parametre først skal benyttes til at beregne risikopræmierne i hvert kvartal, før den gennemsnitlige risikopræmie kan beregnes. Efter at parametrene er estimeret, skal de fortolkes ud fra denne viden og herefter kan de direkte benyttes i beregningen af risikopræmien. De 2 VEC-modeller, der skal testes, er:

[57] Juselius (2006), s. 61-63

A4)
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Pi x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:1;2008:4)$$
$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}$$
$$D_t = d_t - d_{t-1} = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

B4)
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \Pi x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:2;2008:4)$$
$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}$$
$$D_t = d_t - d_{t-1} = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

8.5.2 Valg af rang

I CATS testes kointegrationsrang for de to modeller ved Trace Testet under punktet "I(1) - Rank Test Statistics". For både rang 1 og 2 fremkommer informationer om egenværdier, teststørrelser, 95% grænsen samt p-værdier. I CATS benyttes som udgangspunkt en Γ-fordeling til at approksimere den kritiske værdi (95%-fraktilen) i Trace testet, men idet der er dummies inkluderede i modellen, er disse 95%-fraktiler ikke korrekte, i forhold til de modeller der testes. Derfor simuleres de asymptotiske fordelinger for Trace Testet under punktet "I(1) - Simulate Critical Values". I CATS[58] implementeres eventuelle impuls dummies under approksimationen af den brownske bevægelse, idet approksimationen afhænger af det deterministiske led i modellen. Da impuls dummies indgår i det deterministiske led, vil de automatiske indgå i simulering af fordelingen.

Ved simulering af de asymptotiske fordelinger for de to modeller hhv. med og uden dummies bemærkes det[59], at der opstå problemer med den asymptotiske fordeling i testet for kointegration. Givet at trende er DRIFT, simulerer CATS, at alle fraktiler i den asymptotiske fordeling er lig nul. For modellerne uden dummies er dette specielt et problem, idet simuleringen bør angive en reproduktion af kendte asymptotiske tabeller[60]. Heraf må det konkluderes, at de asymptotiske fordelinger, som programmet simulerer, når trenden er DRIFT, ikke kan benyttes til at bestemme kointegrationsrangen. I stedet testes rangen i de to modeller, hvor trenden enten varieres til CIMEAN (konstant i relation og ingen trend i dataserier) eller CIDRIFT (lineære trends i både relation og dataserier) og hvor modellerne undersøges hhv. med og uden dummies[61].

---

[58] Dennis, J.G. (2006), s. 145
[59] Se tabeller med teststørrelser og asymptotiske fordelinger i bilag 13.
[60] Se reproduktion af tabel i Juselius, K. (2006) Appendix A, case 3
[61] Se tabeller med teststørrelser og asymptotiske fordelinger i bilag 13.

Idet modellerne med de to alternative typer af trends og uden dummies sagtens kan simulere de asymptotiske fordelinger, så de svarer til de kendte asymptotiske tabeller[62], kan det konkluderes, at der er en programfejl i CATS for trenden DRIFT.
Samtlige modeller uden dummies og uanset trendes godkender, at der er to kointegrationsrelationer, mens modellerne med dummies godkender forskellige antal kointegrationsrelationer. For trenden CIMEAN i model A4 godkendes to kointegrationsrelationer med en grænseværdi for p-værdien på 0,08, mens i model B4 godkendes en kointegrationsrelation tydeligt men ikke to. For trenden CIDRIFT i model A4 godkendes en kointegrationsrelation med en grænseværdi for p-værdien på 0,06, mens i model B4 godkendes ingen kointegrationsrelationer. Idet trenden CIMEAN anses for at være en stærkere begrænsning og trenden CIDRIFT en svagere begrænsning end trenden DRIFT, må godkendelsen af kointgrationer for trenden DRIFT ligge mellem de to andre tilfælde. Modellerne med CIMEAN godkender klart en kointegration, mens modellerne med CIDRIFT er på grænsen ift. at godkende en kointegration. Samtidig er det tidligere indikeret, at der er mindst en kointegrationsrelation mellem de to indeksserier ved Engle-Granger proceduren. Det betyder, at der må antages at være en, men tydeligvis ikke to kointegrationer, når trenden er DRIFT.

For at være sikker på, at der er en kointegrationsrelation i hver af model, undersøges enhedsrødderne i companion matricen for de to modeller. Undersøgelsen foretages i CATS ved "Graphics - Roots of Companion matrix" og for hver af modellerne undersøges tilfældet hvor rangen af Π-matricen er hhv. 2 og 1[63].
Når Π-matricen har fuld rang, er én rod meget tæt på enhedscirklen i begge tilfælde. De to rødder har modulus på hhv. 0,9991 for model A4 og 0,9987 for model B4. Herefter har de rødder, der er kandidater til at angive en anden fælles stokastisk trend modulus på hhv. 0,905 for model A4 og 0,913 for model B4. Ved at sætte en restriktion på modellerne således at Π-matricen har rang 1, opnås at kandidaterne til en anden fælles stokastiske trend har mindre modulus (på 3. decimal).
Ud fra rødderne i companion matricen kan det accepteres, at variablene i de to modeller har en fælles stokastisk trend.

Begge metoder til at bestemme af rangen for Π-matricen angiver, at Π-matricerne har en reduceret rang på 1. Dette betyder at de to variable har en fælles stokastisk trend, som kan beskrives ved én relation i hver model.

[62] Se reproduktion af tabel i Juselius, K. (2006) Appendix A, case 2,4
[63] Se graf med enhedscirkel og rødder samt tabel med værdier for rødderne i bilag 14.

Når der lægges restriktioner på Π-matricen, og der dermed er kointegration mellem variablene, omskrives VEC-modellerne idet Π-matricen nu består af to vektorer a og b. Da $\Pi = ab'$, er a en 2×1 matrix og b' en 1×2 matrix. Hermed kan de to VEC-modeller omskrives til:

A5)
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + ab' x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_A & b_R \end{pmatrix} x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:1;2008:4)$$
$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}$$
$$D_t = d_t - d_{t-1} = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

B5)
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + ab' x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \begin{pmatrix} a_A \\ a_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_A & b_R \end{pmatrix} x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:2;2008:4)$$
$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix}$$
$$D_t = d_t - d_{t-1} = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

Statistisk er der en kointegrationsrelation mellem de to variable. Det giver mening økonomisk set, idet relationen beskriver definitionen på en tidsvarierende risikopræmie. I det følgende afsnit estimeres parametrene, således at risikopræmien kan beregnes.

8.5.3 Kointegrationsrelationer og test af hypoteser for parametrene

Tidligere i analysen blev det konkluderet, at Π-matricen har rang 1, og at der således kun er én kointegrationsrelation. I CATS sættes rangen lig med 1 under punktet "I(1) – Set Rank of Pi". Kointegrationsvektoren normeres efter parameteren for aktieindeksserien, da det stemmer overens med definitionen af risikopræmien i ligning (2.1). De langsigtede parametre er estimeret i CATS og de to VEC-modeller er givet, idet standardafvigelserne for parametrene er angivet i parenteser, ved:

A6)
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \begin{pmatrix} -0{,}063_{(0{,}023)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}000_{(0{,}000)} & -2{,}482_{(0{,}252)} \end{pmatrix} x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \begin{pmatrix} -0{,}063_{(0{,}023)} & 0{,}157_{(0{,}252)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} & -0{,}004_{(0{,}001)} \end{pmatrix} x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$
$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:1;2008:4)$$
$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \qquad D_t = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \begin{pmatrix} -0{,}080_{(0{,}023)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{(0{,}000)} & -2{,}240_{(0{,}228)} \end{pmatrix} x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t \quad \Leftrightarrow$$

B6)
$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \begin{pmatrix} -0{,}080_{(0{,}023)} & 0{,}194_{(0{,}056)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} & -0{,}004_{(0{,}001)} \end{pmatrix} x_{t-1} + ab_0 + g_0 + \Phi D_t + e_t$$

$$e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:2;2008:4)$$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \qquad D_t = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix}$$

Det bør bemærkes, at CATS ikke estimerer konstanten ab_0 som en del af de resterende langsigtede parametre. CATS estimerer derimod en samlet konstant under de kortsigtede parametre, som angiver summen af ab_0 og g_0. Da der ikke er brug for at opdele konstanten ift. beregningen af en tidsvarierende risikopræmie, indsættes værdien blot efter de kortsigtede parametre er estimeret.

Det ses, at a_R er ens for de to modeller. Parametrene er meget tæt på nul og derfor bør det testes, om det kan godkendes, at parametrene kan sættes lig nul.
Værdierne af a_A er derimod forskellige i de to modeller, men de har samme standardafvigelse. Ud fra 95%-konfidensintervallet virker det ikke til, at parametrene kan sættes lig nul. Til trods for det, bør der alligevel foretages et test for, om det kan godkendes, at parametrene sættes lig nul.
I begge tilfælde er b_A ved normering defineret til 1, mens b_R har forskellige værdier i de to modeller. For b_R bemærkes det, at standardafvigelserne ikke er ens, men ud fra 95%-konfidensintervallerne er det tydeligt at parametrene ikke kan sættes til nul.
Som udgangspunkt dækker 95%-konfidensintervallet for b_R'erne ikke -1, men hypotesen om at kointegrationsvektoren er $(1 \quad -1)$ bør alligevel testes.

Først testes de to hypoteser om a parametrene, nemlig om a har nul-rækker. Dette betyder at der testes for, om variablene er svagt eksogene overfor til hinanden. Hypoteserne kan opskrives som:

Rente svagt eksogen:
$$a = H_2^a a^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_A^c \\ a_R^c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_{At} \\ \Delta x_{Rt} \end{pmatrix} = \mathbf{K} + \begin{pmatrix} a_A^c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{At-1} \\ x_{Rt-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{At} \\ e_{Rt} \end{pmatrix}$$

Aktieafkast svagt eksogen:
$$a = H_2^a a^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_A^c \\ a_R^c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_{At} \\ \Delta x_{Rt} \end{pmatrix} = \mathbf{K} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{At-1} \\ x_{Rt-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{At} \\ e_{Rt} \end{pmatrix}$$

I CATS testes hypotesen under punktet "I(1) – Test for Weak Exogeneity". Der vælges én svag eksogen variable af gangen, og den variabel, som skal testes, angives med værdien 1. Teststørrelser og p-værdier for modellerne er samlet i tabel 2.

Model	Variabel der testes	Teststørrelse	P-værdi ved χ^2 -fordelingen
A6	Aktie	7,310	0,007
A6	Risikofri	8,825	0,003
B6	Aktie	11,342	0,001
B6	Risikofri	7,336	0,007

Tabel 2

Det ses, at restriktionerne ikke kan godkendes. Det betyder, at der ikke er nul-rækker i α og at ingen af de to variable er svagt eksogene. Variablene har derfor indflydelse på hinanden.

Det er tydeligt, at β parametrene ikke er i nærheden af at være lig nul, hvorfor det ikke er nødvendigt at teste hypotesen om stationaritet. Derfor udgør ingen af variablene kointegrationen i sig selv og dermed er ingen af variablene ekskluderet. Denne konklusion understøttes af de indledende Dickey-Fuller-tests, som fandt, at indeksserierne ikke er stationære.

En anden hypotese er, om kointegrationsvektoren er $(1 \quad -1)$, hvilket betyder at der er langsigtet homogenitet mellem de to variable. Da $\varphi_1 = 1$ pga. den valgte normering, opskrives hypotesen som:

Homogenitet: $$\beta = H^{\beta}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_{At} \\ \Delta x_{Rt} \end{pmatrix} = \mathbf{K} + \begin{pmatrix} \alpha_A \\ \alpha_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{At-1} \\ x_{Rt-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{At} \\ \varepsilon_{Rt} \end{pmatrix}$$

I CATS testes hypotesen under punktet "I(1) – Restrictions on Each Beta vector". H^{β} transponeret indtastes, hvilket vil sige $(1 \quad -1)$. Herefter normeres kointegrationsvektoren efter parameteren for aktieindeksserien. Teststørrelser og p-værdier for modellerne er samlet i tabel 3.

Model	Teststørrelse	P-værdi ved χ^2 -fordelingen
A6	11,130	0,001
B6	12,030	0,001

Tabel 3

Restriktionen på kointegrationsvektoren om at de to parametre skal have samme størrelse, godkendes heraf ikke for de to modeller. Det betyder, at kointegrationsvektoren i de to tilfælde ikke kan være $(1 \quad -1)$, og dermed er der ikke langsigtet homogenitet mellem de to variable.

Således er de langsigtede parametre estimeret, og forskellige hypoteser omkring parametrene er blevet testet. Ingen af hypoteserne kan godkendes, hvilket betyder, at der ikke kan sættes restriktioner på vektorerne α og β. De langsigtede parametre i de to modeller er derfor givet ved de oprindeligt estimerede værdier, som kan ses i modellerne A6 og B6. I følgende underafsnit undersøges de kortsigtede effekter.

8.5.4 De kortsigtede parametre

De kortsigtede parametre estimeres i CATS under punktet ”Misc – Short Run Parameters”. De to VEC-modeller er givet, idet standardafvigelserne for parametrene er angivet i parenteser, som:

$$\Delta x_t = \begin{pmatrix} 0{,}366_{(0{,}078)} & 0{,}754_{(0{,}958)} \\ 0{,}003_{(0{,}002)} & 0{,}916_{(0{,}022)} \end{pmatrix} \Delta x_{t-1} + \begin{pmatrix} -0{,}063_{(0{,}023)} & 0{,}157_{(0{,}252)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} & -0{,}004_{(0{,}001)} \end{pmatrix} x_{t-1}$$

A7)
$$+ \begin{pmatrix} -0{,}410_{(0{,}153)} \\ 0{,}011_{(0{,}004)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}010_{(0{,}065)} & 0{,}021_{(0{,}065)} & 0{,}059_{(0{,}092)} & -0{,}231_{(0{,}093)} \\ 0{,}010_{(0{,}002)} & 0{,}009_{(0{,}002)} & 0{,}011_{(0{,}002)} & 0{,}013_{0{,}002} \end{pmatrix} D_t + e_t$$

hvor

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \qquad D_t = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix} \quad e_t \sim NI_2(0, \Omega) \quad t \in (1970:1; 2008:4)$$

$$\Delta x_t = \begin{pmatrix} 0{,}303_{(0{,}079)} & 0{,}500_{(2{,}463)} \\ 0{,}002_{(0{,}002)} & 0{,}971_{(0{,}059)} \end{pmatrix} \Delta x_{t-1} + \begin{pmatrix} 0{,}229_{(0{,}082)} & 0{,}296_{(2{,}459)} \\ 0{,}000_{(0{,}002)} & -0{,}061_{(0{,}059)} \end{pmatrix} \Delta x_{t-2} + \begin{pmatrix} -0{,}080_{(0{,}023)} & 0{,}194_{(0{,}056)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} & -0{,}004_{(0{,}001)} \end{pmatrix} x_{t-1}$$

B7)
$$+ \begin{pmatrix} -0{,}498_{(0{,}147)} \\ 0{,}010_{(0{,}001)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}000_{(0{,}065)} & -0{,}007_{(0{,}065)} & 0{,}040_{(0{,}091)} & -0{,}213_{(0{,}091)} \\ 0{,}011_{(0{,}002)} & 0{,}009_{(0{,}002)} & 0{,}011_{(0{,}002)} & 0{,}013_{(0{,}002)} \end{pmatrix} D_t + e_t$$

hvor

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \qquad D_t = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix} \quad e_t \sim NI_2(0, \Omega) \quad t \in (1970:2; 2008:4)$$

Parametrene for hhv. konstanterne, dummierne og Γ_1-parametrene ligger på samme niveau, hvilket betyder, at påvirkningen fra variablene er beskrevet ens. For model B7, viser det sig, at 95%-konfidensintervallet for de to Γ_2-parametre der ganges på renten, tydeligvis indeholder nul. Det betyder, at parametrene i Γ_2 for renten kan sættes lig nul. Til gengæld bemærkes det, at de tilsvarende parametre i Γ_2 for aktieafkastet er signifikant forskellige fra nul. Overordnet betyder dette, at renten på kort sigt skal beskrives ved en AR(2)-proces, mens aktieafkastet på kort sigt skal beskrives ved en AR(3)-proces.

I CATS indsættes begrænsningerne på Γ_2 under punktet ”CATS – Model”. Her ændres lag strukturen, idet lag t-2 fravælges for DRISIKOFRI, mens de resterende lags bibeholdes. De tidligere restriktioner på modellen bevares, således at modellen med reestimerede parametre bliver:

$$\Delta x_t = \begin{pmatrix} 0{,}302_{(0{,}082)} & 0{,}759_{(0{,}936)} \\ 0{,}003_{(0{,}002)} & 0{,}915_{(0{,}022)} \end{pmatrix} \Delta x_{t-1} + \begin{pmatrix} 0{,}229_{(0{,}082)} & 0{,}000_{(0{,}000)} \\ 0{,}000_{(0{,}002)} & 0{,}000_{(0{,}000)} \end{pmatrix} \Delta x_{t-2} + \begin{pmatrix} -0{,}080_{(0{,}023)} & 0{,}196_{(0{,}057)} \\ 0{,}002_{(0{,}001)} & -0{,}004_{(0{,}001)} \end{pmatrix} x_{t-1}$$

C)

$$+ \begin{pmatrix} -0{,}509_{(0{,}149)} \\ 0{,}010_{(0{,}004)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}002_{(0{,}063)} & -0{,}007_{(0{,}065)} & 0{,}039_{(0{,}090)} & -0{,}213_{(0{,}091)} \\ 0{,}010_{(0{,}002)} & 0{,}009_{(0{,}002)} & 0{,}011_{(0{,}002)} & 0{,}013_{(0{,}002)} \end{pmatrix} D_t + e_t$$

hvor

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Aktie,t} \\ I_{Risikofri,t} \end{bmatrix} \qquad D_t = \begin{bmatrix} D_p 75_t \\ D_{tr} 76_t \\ D_p 92_t \\ D_{tr} 93_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\{t=1975:Q4\}} \\ 1_{\{t=1976:Q3\}} - 1_{\{t=1976:Q4\}} \\ 1_{\{t=1992:Q3\}} \\ 1_{\{t=1992:Q4\}} - 1_{\{t=1993:Q1\}} \end{bmatrix} \quad e_t \sim NI_2(0,\Omega) \quad t \in (1970:2;2008:4)$$

Ved at sammenligne med model B7 bemærkes det, at den største ændring sker i øverste ligning for parameteren i Γ_1 der ganges på renten. Parameteren har en værdi på 0,500 før begrænsningen på Γ_2 (model B7), mens den får værdien 0,759 når begrænsningen på Γ_2 indføres (model C). Det skyldes, at effekten fra koefficienten i Γ_2, overføres til den tilbageblivende koefficient. Tilsvarende overføres effekten i nederste ligning, men da denne effekt ikke var særlig stor i Γ_2 før begrænsningen, får den ikke betydelig effekt på koefficienten i Γ_1, efter at begrænsningen er indført (parameterændring fra 0,971 til 0,915). Resten af parametrene og deres standardafvigelser ændres meget lidt ved den ekstra begrænsning for modellen. Det giver god mening, idet begrænsningen ikke påvirker de områder der beskrives ved konstantvektoren, dummierne og Π.

Ved at sammenligne residualanalyserne[64] for modellerne A7, B7 og C ses det, at samtlige p-værdier for de forskellige tests er stort set ens for modellerne B7 og C. Derimod indeholder teststørrelserne for model A7 de tidligere nævnte problemstillinger omkring ARCH-effekterne for aktieafkastet og autokorrelationen for den samlede model. Det betyder, at der er en klar forbedring i teststørrelserne fra model A7 til model C, mens teststørrelserne ser stort set uændrede fra model B7 til model C. Derfor er den endelige model til beregning af den tidsvarierende risikopræmie model C, hvor der indsættes restriktioner om at parametrene i Γ_2 for det risikofrie aktiv lig nul.

8.6 Beregning af den tidsvarierende risikopræmie på det danske aktiemarked

Den endelige model for sammenhængen mellem ændringen i de to serier er bestemt og den tidsvarierende risikopræmie på det danske aktiemarked kan nu beregnes. Parametrene for den endelige model gemmes som en output-csv.fil fra CATS. Denne åbnes i Excel, hvorved beregninger på modellen kan gennemføres[65].

[64] Tabeller for residualanalyserne ses i bilag 15.

[65]Se beregningerne af de de tidsvarierende risikopræmier i Excel-filen på vedlagte CD-ROM under fanebladene ”Finansiel præmie” og ”Statistisk præmie”.

I første del af afsnit 8 beskrives to metoder, som risikopræmien kan beregnes ud fra givet den valgte VECM. Den finansielle metode antager, at $\Delta x_{Risikofri,t-1}$ kan erstattes med $\Delta x_{Risikofri,t}$, uden at de estimerede parametre påvirkes, hvorimod den statistiske metode indfører kausalbetingelser, således at renten bliver eksogen.

Idet den endelige VECM indeholder dummies, skal der generelt tages stilling til, hvordan effekterne fra disse passer i forhold til teorien bag risikopræmien. De 4 dummies blev indført i den statistiske model for at opfyldte normalitetsbetingelserne for modellens støj. Det viste sig, at på hver af de tidspunkter, hvor der blev indført en dummy, var der ekstraordinære hændelser, der skulle tages højde for. Derfor giver det mening at investorerne i disse perioder enten blev ekstra kompenseret eller ekstra "straffet" via risikopræmien. Da formålet med denne analyse er at beregne den generelle langsigtede risikopræmie på det danske aktiemarked, må disse enkeltsituationer betragtes som undtagelser fra den almindelige tendens. Derfor giver det mest mening, at effekterne fra de 4 dummies tilhører støjleddet og således ikke påvirker risikopræmien.

8.6.1 Den finansielle metode

I dette underafsnit beregnes risikopræmien ud fra den finansielle metode. VECM opskrives i Excel-fanebladet ud fra de estimerede parametre. Input-serierne, bestående af hhv. dataserierne i såvel niveau som differens samt 0-1 serier for de 4 dummies opskrives. Herefter beregnes hvert led i den øverste ECM-ligning for hver tidsperiode. Risikopræmien til hvert kvartal beregnes herefter som summen af de beregnede led til hvert tidspunkt, hvor der hhv. ses bort fra leddet med $\Delta x_{Risikofri,t}$, leddet med dummierne og støjleddet.

Kvartalsrisikopræmierne plottes i et histogram, hvor de ser ud til at være normalfordelt[66]. De årlige risikopræmier beregnes ved at gange med 4. Da risikopræmien antages normalfordelt, kan spændet for hhv. den kvartalsvise og den årlige tidsvarierende risikopræmie beregnes som 95%-konfidensintervallet for de to periodeangivelser. Udviklingen for risikopræmien over tid er illustreret i graf 16.2 på bilag 16, mens middelværdi, standardafvigelse og spænd er samlet i tabel 4:

	Middelværdi	Std.afv.	Spænd	
Kvartal	1,11%	4,24%	-7,21%	9,43%
Årlig	4,44%	16,98%	-28,83%	37,71%

Tabel 4

[66] Se graf 16.1 på bilag 16

8.6.2 Den statistiske metode

I dette underafsnit beregnes risikopræmien ud fra den statistiske metode, idet det antages, at renten er eksogen. Den endelige VECM opskrives i Excel-fanebladet ud fra de estimerede parametre. Vha. korrelationsmatricen, som er angivet i residualanalysen, udledes kovariansmatricen. Den nedre Choleski dekomponering $\hat{\Omega}^{1/2}$ beregnes vha. en VBA-funktion[67] og herfra kan den øvre Choleski dekomponering beregnes ved at gange matricer sammen ud fra følgende definition:

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^{1/2}\left(\hat{\Omega}^{1/2}\right)' \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Omega}^{-1/2}\hat{\Omega} = \left(\hat{\Omega}^{1/2}\right)'$$

Den øvre Choleski dekomponering ganges på samtlige koefficient matricer i VECM og den korrigerede model opskrives i Excel-arket. Input-serierne, bestående af hhv. dataserierne i såvel niveau som differens samt 0-1 serier for de 4 dummies opskrives. Herefter beregnes hvert led i øverste ECM-ligning for hver tidsperiode. Risikopræmierne til hvert kvartal beregnes som summen af de beregnede led til hvert tidspunkt, idet der til sidst deles med koefficienten til $\Delta x_{Aktie,t}$. Herved er ligningen normeret, således at $\Delta x_{Aktie,t}$ har koefficienten 1.

Kvartalsrisikopræmierne plottes i et histogram, hvorfra de ser ud til at være normalfordelt[68]. De årlige risikopræmier beregnes ved at gange med 4. Da risikopræmien antages normalfordelt, kan spændet for hhv. de kvartalsvise og de årlige tidsvarierende risikopræmier beregnes som 95%-konfidensintervallet for de to periodeangivelser. Udviklingen for risikopræmien over tid er illustreret i graf 18.2 på bilag 18, mens middelværdi, standardafvigelse og spænd er samlet i tabel 5:

	Middelværdi	Std.afv.	Spænd	
Kvartal	1,41%	4,25%	-6,91%	9,73%
Årlig	5.62%	16,98%	-27,66%	38,91%

Tabel 5

8.6.3 Sammenligning af de tidsvarierende risikopræmier

I dette underafsnit sammenlignes risikopræmien og spændet for de 2 beregningsmetoder. De gennemsnitlige kvartalsvise risikopræmier er nogenlunde ens med værdier på hhv. 1,11% og 1,41%. Tilsvarende ligger de gennemsnitlige årlige risikopræmier på hhv. 4,44% og 5,62%. Det betyder, at der stort set opnås samme niveau for den langsigtede risikopræmie ved begge beregningsmetoder.

Standardafvigelserne for begge tilfælde viser sig at være ens, hvilket betyder, at spændene er forskellige på grund af middelværdierne. De kvartalsvise spænd er i intervallet -7% til 10%, mens de årlige spænd er i intervallet ca. -28% til 38%. Den årlige risikopræmie kan således variere meget,

[67] Se bilag 17.

[68] Se graf 18.1 på bilag 18

hvorfor en investering i aktiemarkedet i et enkelt år er utrolig usikker. Det betyder, at merafkastet i forhold til at have pengene stående på en bankkonto i et år ligger i intervallet -30% til 40%.
De 2 plots over risikopræmiernes udvikling virker stort set til at være ens, og de ser ud til at have konstante middelværdier og en nogenlunde konstant varians over hele perioden (hvilket svarer til, at de er antaget normalfordelte). Det betyder, at investeres der i aktiemarkedet over en længere periode, så vil der opnås et gennemsnitligt merafkast på det beregnede niveau, uanset hvad niveauet er, når investeringen hhv. startes og sluttes.

Overordnet ser det ud til, at de to metoder, som benyttes til at beregne den tidvarierende risikopræmie, angiver samme langsigtede niveau med samme spænd for risikopræmien. Der er dog problemer ved begge beregningsmetoder. Den finansielle metode antager, at renten er persistent og at det således ikke betyder noget, om der vælges en observation på tid t eller tid t+1. Dette er i modstrid med den tidligere I(0)-analyse, hvor det kun var på en 10%-grænse, at renten blev accepteret at være stationær. Yderligere tages der ikke højde for en tilbageværende korrelation mellem støjleddene, hvorfor støjleddet i ECM-ligningen kan indeholde vigtig information, som ikke medtages i beregningen af den tidsvarierende risikopræmie.
Den statistiske metode fjerner korrelationen mellem støjleddene, men antager til gengæld, at renten er eksogen i forhold til aktieafkastet. Dette er i markant modstrid med den finansielle virkelighed, hvor de to aktiver skiftevis påvirker hinanden og dermed bestemmes samtidig. Yderligere kunne renten ikke antages at være svagt eksogen som følge af den tidligere testede hypotese om a .
Begge beregningsmetoder indeholder således alvorlige problemstillinger i forhold til de grundlæggende finansielle og statistiske antagelser. Derfor kan ingen af metoderne foretrækkes frem for den anden. Således kan det konkluderes, at den tidsvarierende årlige risikopræmie er ca. 5% med et spænd, der ligger i intervallet fra -28% til 38%.

8.7 Diskussion af empiriske resultater

8.7.1 Konstant risikopræmie

En vurdering af niveauet for den tidsvarierende risikopræmie opnås, ved at sammenligne med niveauet for den konstante risikopræmie fra afsnit 7. Den konstante risikopræmie viste sig hhv. at være 1,28% pr. kvartal og 5,13% p.a. Det betyder, at såvel de 2 tidsvarierende risikopræmier som den konstante risikopræmie alle har et årligt 5%-niveau. Den finansielle tidsvarierende risikopræmie er mindre end den konstante risikopræmie, mens den statistiske tidsvarierende risikopræmie er større end den konstante risikopræmie.

Generelt kan en beregning, ud fra antagelsen om at risikopræmien er konstant over tid, således angive et approksimeret niveau for risikopræmien. Men skal der benyttes et mere præcist niveau for risikopræmien, er antagelsen om at risikopræmien er konstant over tid ikke acceptabel. Dette var tydeligt i afsnit 7.2, hvor inkludering af 4 ekstra år medførte et stort niveauskift for den konstante risikopræmie. De beregnede spænd for de tidsvarierende risikopræmier viser, at antagelsen om konstanthed over tid ikke er acceptabel, idet spændet svinger mellem ca. -30% og 40% p.a. Overordnet betyder det, at med en meget lang investeringshorisont er den konstante risikopræmie en acceptabel approksimation af niveauet for risikopræmien. Ved kortere investeringshorisonter derimod vil forskellen være stor, idet et enkelt års investering kan medføre en risikopræmie i intervallet -30% og 40%.

8.7.2 Niveau ift. andre undersøgelser af det danske aktiemarked

Line Isager-Nielsen[69] har som tidligere nævnt beregnet en historisk risikopræmie over perioden 1. januar 1971- 31. december 2005 på 9,3%. Dette niveau blev i afsnit 7.2 diskuteret i forhold til den konstante risikopræmie. Idet niveauet for såvel den konstante risikopræmie som de 2 tidsvarierende risikopræmier i denne analyse er nogenlunde ens, opstår samme problemstilling omkring niveauet for den tidsvarierende risikopræmie og niveauet for Line Isager-Nielsens risikopræmie. Da det har vist sig, at ændringen af tidsperioden betød en del for størrelsen af den konstante risikopræmie, undersøges også en tidsvarierende risikopræmie over intervallet 1. januar 1971- 31. december 2005. Modelspecifikationen[70] angiver samme endelige VAR-model med en AR(2)-proces for renten og en AR(3)-proces for aktieafkastet for de kortsigtede parametre. Estimationen af parametrene og beregningen af den tidsvarierende risikopræmie medfører middelværdier, standardafvigelser og spænd, som vist i tabel 6:

Finansiel metode					Statistisk metode				
	Middelværdi	Std.afv.	Spænd			Middelværdi	Std.afv.	Spænd	
Kvartal	1,42%	4,23%	-6,86%	9,71%	Kvartal	1,70%	4,23%	-6,59%	9,99%
Årlig	5,69%	16,91%	-27,45%	38,84%	Årlig	6,82%	16,92%	-26,34%	39,97%

Tabel 6

Niveauet for den årlige tidsvarierende risikopræmie ved de 2 metoder er således lidt højere, når perioden forkortes. Samtidig er spændet stort set uændret på mellem -27% og 39%. Niveauskiftet

[69] Isager-Nielsen, L. (2006)

[70] Der er samme problemer omkring laglængden. Derudover opstår problemstillingen omkring ARCH-effekterne i residualanalysen for modellen med 2 lags igen. De store residualer angiver samme tidspunkter for dummie-korrektioner, og antallet af kointegrationer bestemmes igen ud fra test ved ændringer i trenden og undersøgelser af rødderne i companion matricen.

for den tidsvarierende risikopræmie er ikke så markant, som det var tilfældet for den konstante risikopræmie. Det viser, at niveauet for den tidsvarierende risikopræmie er mere stabil end niveauet for den konstante risikopræmie. Yderligere angiver spændet for den tidsvarierende risikopræmien troværdige maksimum- og minimumgrænser, idet de ikke forandres, når perioden ændres.

Der er foretaget flere undersøgelser af risikopræmien på det danske aktiemarked ud fra antagelsen om, at risikopræmie er konstant over tid. Engsted og Tanggard[71] har undersøgt risikopræmien over en periode fra 1922 til 1996, hvor de opnår en risikopræmie på de danske aktier på 3,7% p.a. Dimson, Marsh og Staunton[72] har lavet analyser af det danske aktiemarked over flere forskellige delintervaller, hvor de opnår en risikopræmie fra 1970-2000 på 1,4% p.a. og en risikopræmie fra 1920-2000 på 1,0% p.a. De 3 undersøgelser angiver således et niveau, der er noget lavere end risikopræmieniveauet i denne analyse. Det er tidligere påvist, at tidshorisonten har en vis effekt på niveauet af risikopræmie. Tidshorisonterne alene er dog ikke nok til at forklare det gennemgående lavere niveau for de 3 undersøgelser.

Undersøgelser af dataserierne for de forskellige analyser viser, at Dimson, Marsh og Staunton i første del af perioden benytter en aktiemarkedsserie, der hovedsagligt er beregnet af Claus Parum[73] og i den sidste del af perioden benyttes KAX-indekset. Selvom såvel aktieserien i Dimson, Marsh og Staunton som aktieserien i denne analyse har et forskelligt syn på det samlede aktiemarked, er denne forskel alene ikke nok til at forklare niveauforskellen mellem de to undersøgelser, idet begge serier beskriver samme approksimative udvikling i aktiemarkedet.
Som risikofrit aktiv benytter Dimson, Marsh og Staunton en realkreditobligationsserie beregnet af Claus Parum[74], som har fokus på konkrete åbne likvide realkreditobligationer, der er homogene over tid. De enkelte obligationer udskiftes løbende, således at løbetiden forbliver nogenlunde konstant, samt at konverteringsrisikoen reduceres. Idet risikoen på en realkreditobligation er højere end risikoen på en statsobligation, vil realkreditobligationsrenten være højere end eksempelvis diskontorenten. Sammenholdes dette med definitionen på risikopræmien i ligning (2.1), bemærkes det, hvorledes en højere rente på det risikofrie aktiv medfører en lavere risikopræmie, når aktieafkastet antages at være uændret. Det betyder, at det lavere niveau for risikopræmien opnået af Dimson, Marsh og Staunton på mellem 1,0% og 1,4%, kan forklares i forhold til 5%-niveauet for risikopræmien i denne analyse ud fra forskellen på definitionen af det risikofrie aktiv.

[71] Engsted, T. Og Tanggard, C. (1999)
[72] Dimson, E., March, P., Staunton, M. (2002)
[73] Parum, C. (1999a)
[74] Parum, C. (1999b)

Engsted og Tanggard benytter en aktieserie beregnet af J. Lund, som er baseret på 16 store selskaber. Det betyder, at der er en vis sandsynlighed for at stikprøven i serien ikke er repræsentativ, hvorimod data i serien må anses for at have høj kvalitet[75]. I serien for det risikofrie aktiv benyttes først diskontorenten fra Danmarks statistik frem til 1975. Herefter benyttes der nulkuponrenter frem til 1991 og til sidst benyttes den årlige CIBOR-rente. Det betyder, at begge serier er anderledes defineret end de serier der benyttes i denne analyse, dog uden at der er markante forskelle. Engsted og Tanggard opnår såvel gennemsnitlige reale aktie afkast som risikofrie afkast på hhv. 6,23% og 2,51%, mens disse afkast i undersøgelsen for den konstante risikopræmie i denne analyse viser sig at være på hhv. 7,00% og 1,87%. Det betyder således, at det lavere niveau på 3,7% for risikopræmien opnået af Engsted og Tanggard i forhold til 5%-niveauet for risikopræmien i denne analyse, eventuelt kan forklares ud fra et lidt lavere gennemsnitligt realafkast for aktiemarkedet og et lidt højere gennemsnitlig realafkast for det risikofrie aktiv. Alternativt skyldes niveauforskellen blot forskellen i de to benyttede beregningsperioder.

Generelt er niveauforskellen mellem risikopræmien i denne analyse og Dimson, Marsh og Staunton's risikopræmie (5 – 1,4 = 3,6%) større end niveauforskellen mellem risikopræmien i denne analyse og Engsted og Tanggard's risikopræmie (5 - 3,7 = 1,3%). Således giver det mening, at den første forskel mellem risikopræmierne kan forklares ved forskellige valg af risikofrie aktiver, mens den sidste forskel enten kan forklares ved mindre forskelle i de to realafkastserier eller forskelle i beregningsperioderne.

8.7.3 Niveau ift. risikopræmier fra andre kointegrationsanalyse

Det eneste kendte eksempel på at der benyttes kointegrationsanalyser til beregning af risikopræmien på et aktiemarked, er Jan Overgaard Olesens analyse af forholdet mellem det danske aktie- og obligations marked i perioden 1927-1997[76]. Der er ikke fundet analyser fra andre lande, hvor risikopræmien på et aktiemarked er bestemt ved kointegrationsanalyser. Derfor kan denne analyses beregningsmetoder og resultater kun sammenlignes med Jan Overgaard Olesens analyse.

Jan Overgaard Olesen benytter serier af rullende afkast og renter med en horisont på hhv. 5 og 10 år til at forme multivariate kointegrationsrelationer mellem de to serier. Fra bl.a. ADF-tests finder han, at serierne med de rullende afkast og renter kan antages at være I(1), hvorfor han undersøger

[75] Parum, C. (1999a), s.4
[76] Olesen, J.O. (2000)

multivariate kointegration mellem disse serier. Han afgrænser med at der er en konstant i kointegrationsrummet og finder således frem til, at der kun er 1 kointegration mellem renten og aktieafkastet på hver af tidshorisonterne. Risikopræmien defineres ud fra den langsigtede ligevægt, som angives i b -vektoren fra kointegrationen, hvor risikopræmiens størrelse p.a. svarer til den konstant, der opstår i b -vektoren ud fra begrænsningerne på den deterministiske komponent. Jan Overgaard Olesens analyse angiver hhv. en risikopræmie på 2,6% p.a. på baggrund af data med 5 års horisont og en risikopræmie på 3,5% p.a. på baggrund af data med 10 års horisont.

Som udgangspunkt er niveauet for de to risikopræmier fra Jan Overgaard Olesens analyse således lavere end det niveau, som er opnået i denne analyse. Der må dog stilles flere spørgsmålstegn ved Jan Overgaard Olesens analyse. Den største problemstilling er, at aktieafkastet presses til at være I(1), hvilket ikke er tilfældet i denne analyse. Yderligere er aktieafkastet stationært per finansiel definition og burde dermed være I(0). Til trods for, at der benyttes en sum af aktieafkast over de to forskellige horisonter, burde serien stadigvæk være I(0) og ikke I(1), idet summen af I(0)-variable er I(0). Således er der et grundlæggende definitionsproblem i Jan Overgaard Olesens analyse.
En anden problemstilling er vedrørende definitionen af risikopræmien. I de tilfælde, hvor der alene benyttes en langsigtet ligevægt ud fra b -vektoren ses der bort fra de kortsigtede påvirkninger af niveauet. Vigtigere er det, at der i Jan Overgaard Olesens beregning af risikopræmien, ikke rettes op på den korrelation der er tilbage i støjleddet. Statistisk er definitionen af risikopræmien ud fra b -vektoren alene yderligere et problem i Jan Overgaard Olesens analyse.

I denne analyse er der fundet stærke tegn på lineære trends i de to indeksserier, som ikke alene kan tilskrives stokastiske påvirkninger. I forhold til hhv. at beregne niveauet for risikopræmien ud fra den langsigtede ligevægt i b -vektoren, samt at beregne niveauet på den tidsvarierende risikopræmie på baggrund af metoderne i denne analyse, gennemføres kointegrationsanalysen igen over hele tidsperioden fra 1. januar 1970 til 31. december 2008, hvor den deterministiske komponent defineres som tilfælde 2) i afsnit 4.4. Modelspecifikationen[77] angiver samme endelige VECM med en AR(2)-proces for renten og en AR(3)-proces for aktieafkastet for de kortsigtede parametre. Estimation af parametre og beregningen af den tidsvarierende risikopræmie medfører middelværdier, standardafvigelser og spænd, som ses i tabel 7:

[77] Der er samme problemer omkring laglængden. Derudover opstå problemstillingen omkring ARCH-effekterne i residualanalysen for modellen med 2 lags igen. De store residualer angiver samme tidspunkter for dummie-korrektioner, og antallet af kointegrationer bestemmes igen ud fra test ved ændringer i trenden og undersøgelse af rødderne i companion matricen.

Finansiel metode					Statistisk metode				
	Middelværdi	Std.afv	Spænd			Middelværdi	Std.afv	Spænd	
Kvartal	0,65%	4,30%	-7,95%	9,26%	Kvartal	1,07%	4,32%	-7,58%	9,71%
årlig	2,61%	17,21%	-31,82%	37,04%	årlig	4,27%	17,28%	-30,30%	38,83%

Tabel 7

Det bemærkes, hvorledes niveauet for den tidsvarierende risikopræmie ved de to metoder nu er noget lavere, end i det tilfælde hvor den deterministiske trend tillader såvel konstanter som trends i indeksserierne. Det ”nye” niveau svarer til niveauet fra Jan Overgaard Olesens analyse. Dette kan imidlertidigt være tilfældigt, idet den grundlæggende antagelse vedrørende den deterministiske komponent ikke stemmer overens med grafen for indeksserierne. b -vektoren i den endeligt estimerede VECM angiver en langsigtet risikopræmie på 6,4%, hvilket er et helt andet niveau end det der hidtil er opnået på baggrund af den oprindelige dataperiode.

Alt i alt er der en del problematiske elementer forbundet med Jan Overgaard Olesens analyse, idet der bl.a. indgår flere antagelser, der modstrider de statistiske og finansielle definitioner. Niveauet for risikopræmien bestemt i Jan Overgaard Olesens analyse er således ikke validt at benytte som benchmark ift. det niveau for risikopræmien, der er opnået i denne analyse.

8.8 Opsummering

De multivariate kointegrationsanalyser i denne analyse har vist, at aktiemarkedet og det risikofrie aktiv kointegrerer, og at parametrene fra den samlede VECM kan benyttes til at beregne en tidsvarierende risikopræmie. Det viser sig yderligere, at niveauet for denne tidsvariernde risikopræmie er på ca. 5%. Det er ikke muligt at angive størrelsen nærmere, idet der opstår problemer ift. de statistiske og finansielle definitioner ved begge de anvendte beregningsmetoder. Spændet for den tidsvarierende risikopræmie spræder sig over et stort interval fra ca. -30% til 40%, hvorfor timingen af en investors investeringer kan være af stor betydning, hvis investeringshorisonten er lille.

Risikopræmien er, under antagelsen af at den er konstant over tid, beregnet i flere undersøgelser.
I de forskellige undersøgelser har niveauet enten ligget højere eller lavere end det niveau for risikopræmien, som fremgår af denne analyse. Forskellene kan delvist forklares på baggrund af forskellen i tidshorisonterne og delvist forklares på baggrund af de forskellige definitioner af hhv. aktiemarkedet og det risikofrie aktiv. Kun i én tidligere analyse er den langsigtede risikopræmie beregnet vha. kointegrationsanalyser. Denne analyse indeholder dog flere definitionsproblemer, hvilket bevirker, at den beregnede risikopræmie er uholdbar som benchmark.

9.0 Konklusion

Målsætningen med denne analyse har været at skabe et overblik over, hvordan risikopræmien på det danske aktiemarked kan beregnes i praksis på baggrund af den gængse teori.
Teorien i afsnit 2 angiver at risikopræmien kan beregnes som differensen mellem et arithmetrisk gennemsnit af et aktiemarkedsafkast og et arithmetrisk gennemsnit af afkastet på et risikofrit aktiv. Et grundlæggende element i denne teori er, at risikopræmien antages at være konstant over tid. Ved sammenligning af flere analyser har det vist sig, at denne antagelse ikke nødvendigvis er acceptabel. Specifikt for denne analyse er der i afsnit 7.2 foretaget en sammenligning mellem to risikopræmier med samme datasæt men beregnet på baggrund af perioder med 4 års forskel. Det viser sig, at inkluderingen af de 4 ekstra år medfører et fald af risikopræmien på 2% (7%-5%). På denne baggrund må det konkluderes, at antagelsen om at risikopræmien er konstant over tid, ikke stemmer overens med det danske værdipapirmarked.

Det viser sig, at den tidsvariernde risikopræmie på det danske aktiemarked kan beregnes ud fra flere step. Først opstilles en veldefineret VAR-model uden restriktioner, således at informationerne i de valgte dataserier fra afsnit 3 er afbilledet i modellen. Fra teorien i afsnit 6 viser det sig, at de vigtigste forudsætninger for en veldefineret VAR-model er, at residualerne fra modellen er multivariate normalfordelt, samt at de er uden ARCH-effekter og signifikant autokorrelation. Derfor måtte specifikationen af modellen behandles indgående, således at forudsætningerne blev opfyldt. Specielt for det danske rentemarked har det vist sig nødvendigt, at tilføje 4 dummier før residualerne kan antages at være multivariate normalfordelt. De 4 dummies blev identificeret ud fra de statistiske analyser, og herefter blev hver dummy begrundet ud fra et økonomisk synspunkt.
Idet der ikke blev opnået et entydigt testresultat for laglængden i modellen, blev det besluttet, sideløbende at analyserer to modeller med forskellige antal lags.

Andet step i beregningen af den tidsvarierende risikopræmie var at undersøge, om der findes kointegration mellem variablene i modellen. Afsnit 4 beskriver hhv. hvorledes kointegrationer mellem variablene i en VECM opstår som en I(0)-linearkombinationer, og hvorledes kointegrationsrangen i modellen bestemmes ifølge teorien ved både at beregne Trace-tests samt sideløbende at undersøge rødderne i companion matricen. I forhold til denne analyse kan det konkluderes at der opstår problemer med Trace-testet, idet det anvendte program indeholder en programfejl for den definerede deterministiske komponent. Ved at undersøge såvel en mere begrænset som en mindre begrænset deterministisk komponent viser det sig, at der er én

kointegrationsrelation mellem variablene i modellen. Dette bliver bekræftet i undersøgelsen af rødderne i companion matricen, hvorfor det kan konkluderes at rangen af Π er lig 1.
Efter estimationen af de langsigtede parametre blev det konkluderet, at der ikke kan sættes yderligere restriktioner på parametrene, idet ingen af de umiddelbare hypoteser godkendes. Ved estimationen af de kortsigtede parametre løses problematikken angående de sideløbende modeller, og det konkluderes, at den endelig model består af hhv. en AR(2)- og en AR(3)-process for hhv. det risikofri aktiv og aktiemarkedet.

Sidste step i beregningen af den tidsvarierende risikopræmie og spændet for denne udføres ved to forskellige beregningsmetoder. Begge beregningsmetoder har problemer i forhold til hhv. de statistiske og de finansielle definitioner, men det konkluderes, at et overordnet niveau for den tidsvarierende risikopræmie bestemmes ved at sammenligne de to beregnede risikopræmier og deres spænd. Niveauet for den tidsvarierende risikopræmie viser sig at være 5% p.a. Dette stemmer overens med den konstante risikopræmie, der blev beregnet i afsnit 7. Derimod viste der sig en vis niveauforskel, når der sammenlignes med andre analyser af det danske værdipapirmarked. Det konkluderes, at disse niveauforskelle til dels kan tilskrives forskelle i beregningsperioder og til dels kan tilskrives forskelle på definitioner af hhv. aktiemarkedet og det risikofrie aktiv. Spændet for risikopræmien er ikke blevet beregnet i tidligere undersøgelser, hvorfor der ikke er et sammenligningsgrundlag. Spændet beregnes til at være intervallet fra -30% til 40%.

Hermed er hovedspørgsmålet i specialet besvaret, da det er blevet påvist, hvordan risikopræmien på det danske aktiemarked kan beregnes ved brug af multivariate kointegrationsanalyser. Ved at have besvaret delspørgsmålene er de forskellige modeller og beregningsmetoder blevet beskrevet, og herfra viser det sig, at en periode på 39 år medfører en tidsvarierende risikopræmie på 5% p.a. Det betyder, at en langsigtet investering i aktiemarkedet forventes at give 5% p.a. mere i afkast, end hvis pengene sættes ind på en bankkonto med en kendt risikofri rente. Spændet for den tidsvarierende risikopræmie er beregnet til at være intervallet fra -30% til 40%, hvorved vigtigheden af timingen ved kortere investeringer påpeges.

Alle konklusioner i denne analyse er baseret på baggrund af den grundlæggende antagelse om, at den fremtidige risikopræmie er en afspejling af den historiske risikopræmie. Derfor kan en investor ikke være sikker på, at han i fremtiden vil opnå et merafkast på ca. 5% p.a. ved risikofyldte investeringer frem for den risikofrie rente.

Litteraturliste

Chan K.C., Norribin S.C, Lai Pikki (1997),
Are stock and bond prices collinear in the long run?
Published in International Review of Economics and Finance, 6(2): 193-201
Published by JAI Press Inc.

Cornell, B. (1999) The Equity Risk premium, the long-run future of the stock market.
Published by John Wiley & sons. Inc.

Danmarks statistik (1976),
Statistiske efterretninger, Konjunkturoversigter, 1976 Nr.4

Danmarks statistik (1997),
Told og forbrugsafgifter
http://www.dst.dk/asp2xml/puk/udgivelser/get_file.asp?id=4321&sid=kap8

Dimson, E., Marsh, P., Staunton, M. (2002)
Trumph of the optimists: 101 Years of Global Investment Returns.
Published by Princeton University Press

Engsted, T. og Tanggard, C. (1999)
Risikopræmien på danske aktier.
Udgivet i Nationaløkonomisk tidssrkift, Bd.137/Nr.2/Oktober, s.164-177
Udgivet af nationaløkonomisk Forening

Hansen, E.D., Jensen, S.E.H., Kjærsgaard, K., Rosted, J. (1994)
Dansk økonomisk politik, Teorier og erfaringer, 3.udgave
Udgivet af Handelshøjskolens Forlag

Isager-Nielsen, L. (2006)
Explaning the Equity Premium Puzzle Using Myopic Loss Aversion
Speciale på linjen Applied Economics and Finance
Ved Institut for Økonomi, CBS

Jensen, B.A. (2005) Rentes regning, 4. udgave, 1. oplag
Udgivet af Jurist- og Økonomforbundets Forlag
Afsnit: 12.1

Johansen, S. (1996), Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models.
Published by OXFORD University Press
Afsnit: 1-4, 5.8

Juselius, K. (2006), The Cointegrated VAR Model: Methodology and applications.
Advanced Tests in Econometrics.
Published by OXFORD University Press
Afsnit: 1-22

Mehra, R. and Prescott, E.C. (1985)
The Equity Premium: A Puzzle
Published in Journal of Monetary Economics, 15 (1985), p. 145-161

Mehra, R. and Prescott, E.C. (2008)
The Equity Premium: ABCs
Fra Handbook of the Equity Risk Premium

Nielsen, H.B. (2008) Cointegration and common trends
Quantitativ Methods 3, Lecture Notes 6
January 30, 2008

Nielsen, S. and Risager, O. (2001)
Stock Returns and Bond Yields in Denmark, 1922-1999.
Scandinavian Economic History Review

Olesen, J.O. (2000), Empirical Studies of Price Behavior in the Danish Stock Market
Ph.D.-Dissertation
Afsnit 3: On the Relationship between the Danish Stock and Bond Market in the Medium and Long Term
Trykt af Tekst og Tryk, Vedbæk

Parum, C. (1999a), Historisk afkast af aktier og obligationer i Danmark
Finans Invest III, 1999. S. 4-13

Parum, C. (1999b), Estimation af Realkreditobligationsafkast i Danmark i perioden 1925-1998
Finans Invest VII, 1999. S. 12-15

Patterson, K. (2000), An Introduction to Applied Econometrics: A Time Series Approach.
Published by PALGRAVE.
Afsnit: 2.6, 8.3.1, 8.4.4, 14.1 – 15.9

Økonomiministeriet, Det økonomiske sekretariat (1993),
Økonomisk Oversigt, August 1993

<u>Program:</u>

Estima, RATS Version 7, Getting Started

Estima(2007), RATS Version 7, User's Guide
Published by Estima
Afsnit: 1

Dennis, J.G. (2006), CATS in RATS: cointegration Analysis of Time Series
Version 2
Published by Estima
Afsnit: (1-4,6)

Bilag 1 -18

Bilag 1

Aktiv:	**Tidsperiode:**	**Beskrivelse:**	**Kilde:**
Aktieindeks	31. januar 1969 – 31. december 2008	Morgan Stanley Capital International Ink. Net dividends Reinvested	Bloomberg (NDDUDE index)
Renteserie	31. januar 1969 – 31. marts 1988	Nationalbankens diskontosats	Nationalbanken
	31. marts 1998 – 31. december 2008	Copenhagen Interbank Offered Rate 3 måneder	Bloomberg (CIBO03M index)
Inflation	31. januar 1969 – 31. december 2008	DK CHANGE IN CPI (%YOY) NADJ	IMF International Financial Statistics (DKQ64..XF)
Valutakurs	31. januar 1969 – 31. december 2008	MSCI FX Rates Denmark	Bloomberg (MSFXDKK index)

Bilag 2

Forskellen på markedskapitalen og den free float justerede markedskapital vises ved at benytte A.P.Møller Mærsk som eksempel. I årsregnskabet for 2007 ses en oversigt over aktie struktur fra A.P. Møller - Mærsk A/S annual report 2007[78]:

	Votes (%)	**Share Capital (%)**
The A.P. Møller og Hustru Chastine Mc-Kinney Møllers Fond til almene Formaal, Copenhagen, Denmark	50,38	41,08
A.P. Møller og Hustru Chastine Mc-Kinney Møllers Familiefond, Copenhagen, Denmark	13,53	9,85
Mærsk Mc-Kinney Møller, Copenhagen, Denmark	6,46	3,66
Den A.P. Møllerske Støttefond, Copenhagen, Denmark	5,86	2,94
Companies in the A.P. Moller- Maersk Group (own shares)	0	6,39
Number of A-shares	2.197.800	
Number of B-shares	2.197.800	
Total	4.395.600	

Idet det kun er lovpligtigt at oplyse en ejerandel på over 5%, vises kun de aktieejere der har større andel end dette. De anførte aktieejere har 63,92% af aktierne, mens de resterende 36,08% må antages at være små investorer. Den samlede andel af aktier i selskabet er anført til 4.395.600, og svarer til 100% af markedskapitalen i selskabet.

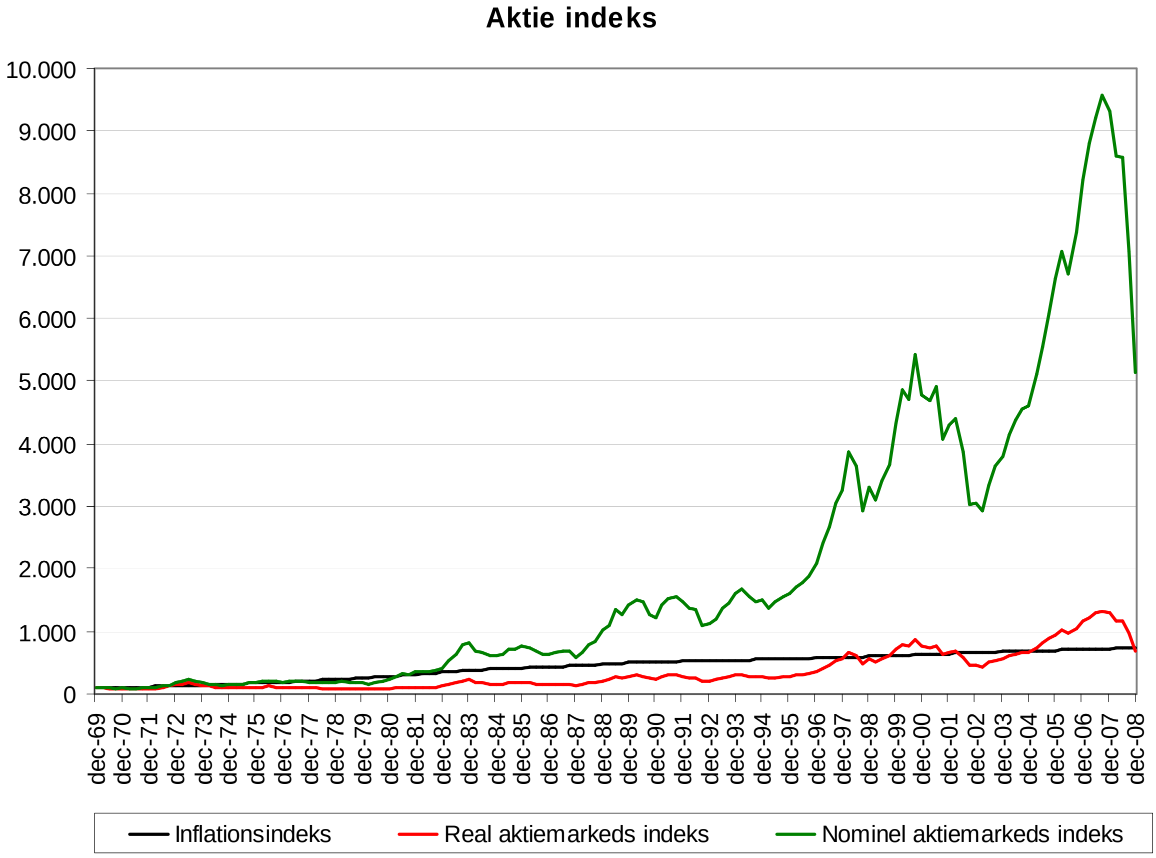
Free float er subjektivt bestemt, idet der skal vurderes om de enkelte aktieandele holdes af investorer, som ikke vil sælge ud. I tilfældet med A.P.Møller Mærsk vurderes det, ud fra et historisk perspektiv, at det er usandsynligt at de 3 fonde eller selve Mærsk Mc-Kinney Møller sælger ud af deres andel af aktierne, hvorfor andelen af de samlede aktier der ikke omsættes beregnes til 57,5%, mens de resterende 42,5% vurderes til at blive omsat på OMX Danmark. Den free float justerede markedskapital er 42,5% af den samlede markedskapital, og vægtningen af A.P.Møller Mærsk i hhv. C20 og MSCI Danmark vil være forskellig. Selskabet vil indgå med 100% af markedskapitalen i C20, mens den kun vil indgå med ca. 42,5% i MSCI Danmark. Dette betyder at MSCI Danmark vil give et mere reelt billede af det danske aktiemarked for en almindelig investor, idet den uopnåelige del af aktiemarkedet er sorteret fra ved at free float justering.

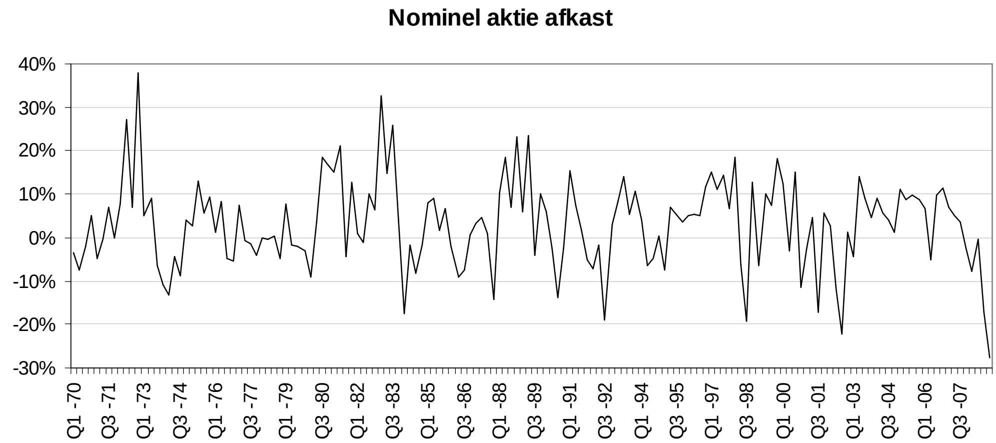
Eksempel på beregning af Free float, idet det antages at der ikke er intension om at sælge aktier fra de 3 fonde eller fra Mærsk Mc-Kinney Møller:

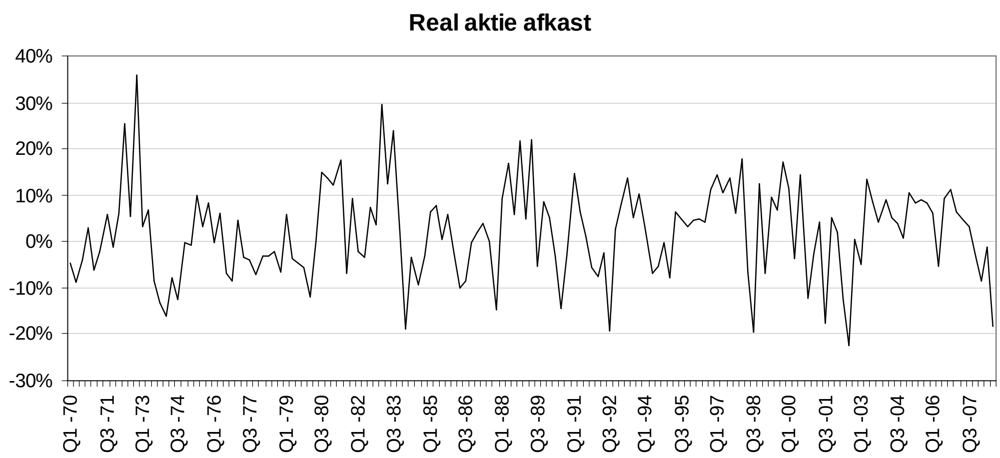
Markedskapital	100%
Fast markedskapital der ikke omsættes på OMX	41,08% + 9,85% + 3,66% + 2,94% = 57,53%
Free float justeret markedskapital	100% - 57,53% = 42,47%

[78] http://shareholders.maersk.com/da/FinancialReports/AnnualInterimReports/2007/Documents/AnnualReport2007-UK.pdf, s. 12

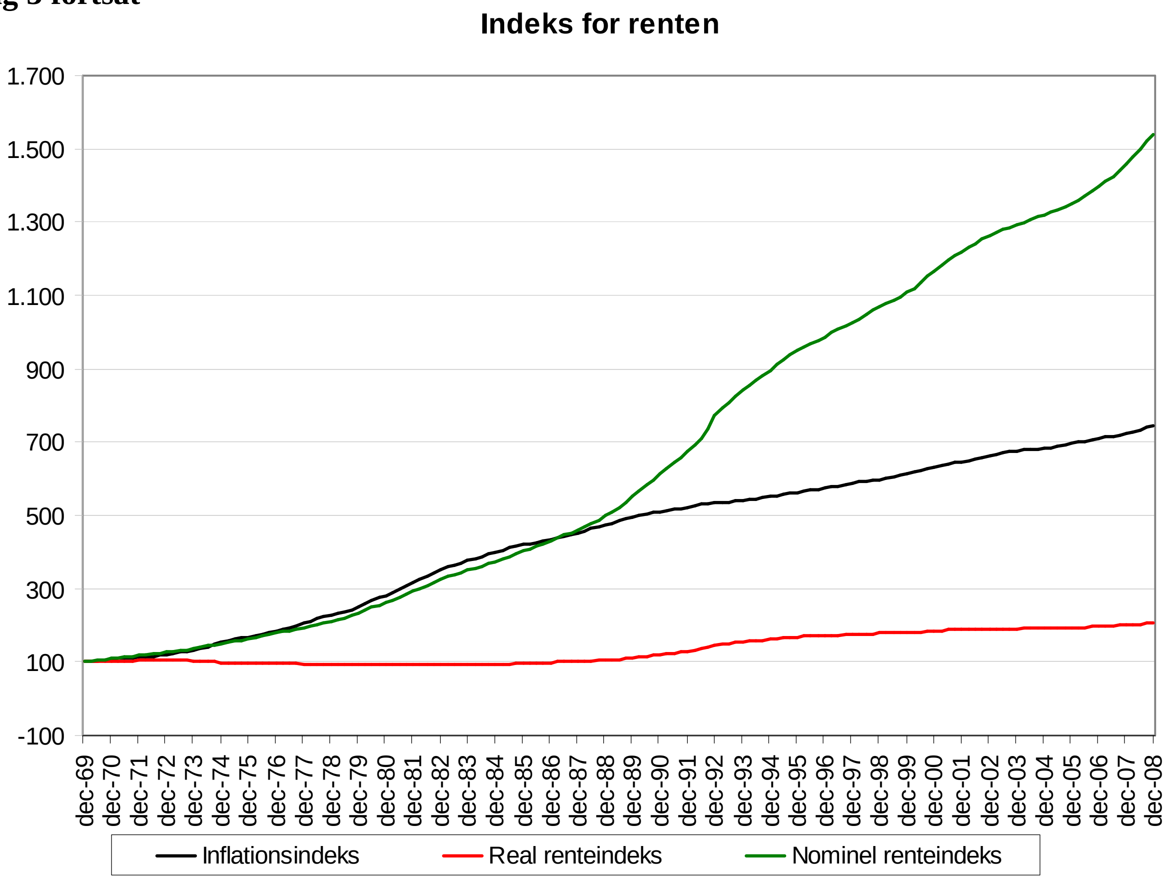
Bilag 3

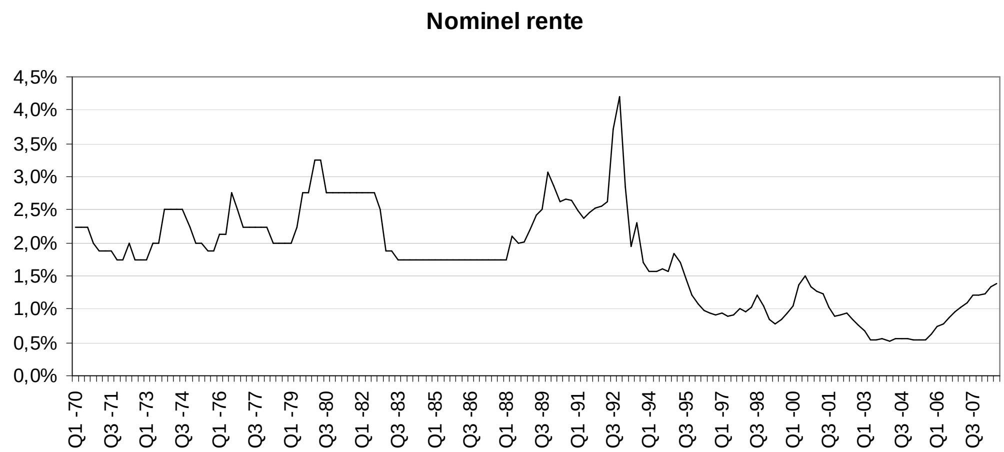

Aktie indeks
10.000
9.000
8.000
7.000
6.000
5.000
4.000
3.000
2.000
1.000
0
dec-69 dec-70 dec-71 dec-72 dec-73 dec-74 dec-75 dec-76 dec-77 dec-78 dec-79 dec-80 dec-81 dec-82 dec-83 dec-84 dec-85 dec-86 dec-87 dec-88 dec-89 dec-90 dec-91 dec-92 dec-93 dec-94 dec-95 dec-96 dec-97 dec-98 dec-99 dec-00 dec-01 dec-02 dec-03 dec-04 dec-05 dec-06 dec-07 dec-08
Inflationsindeks
Real aktiemarkeds indeks
Nominel aktiemarkeds indeks

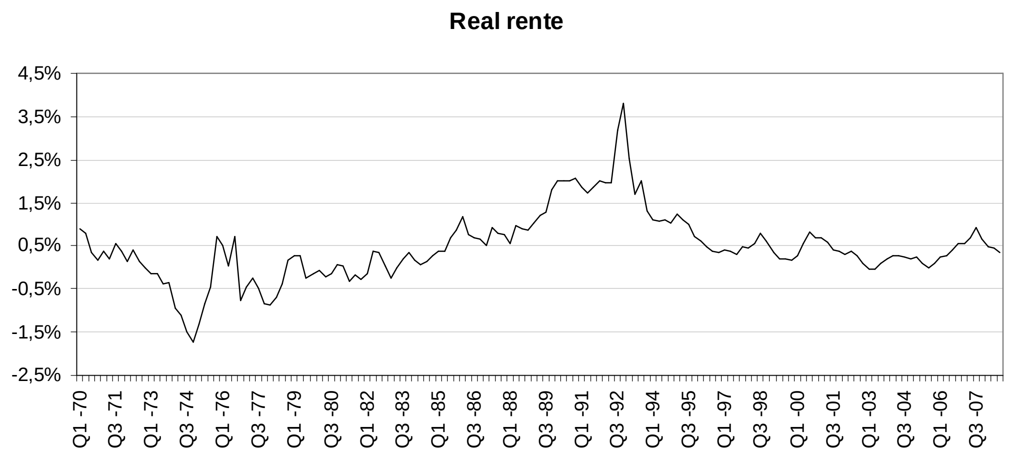

Nominel aktie afkast
40%
30%
20%
10%
0%
-10%
-20%
-30%
Q1 -70 Q3 -71 Q1 -73 Q3 -74 Q1 -76 Q3 -77 Q1 -79 Q3 -80 Q1 -82 Q3 -83 Q1 -85 Q3 -86 Q1 -88 Q3 -89 Q1 -91 Q3 -92 Q1 -94 Q3 -95 Q1 -97 Q3 -98 Q1 -00 Q3 -01 Q1 -03 Q3 -04 Q1 -06 Q3 -07


Real aktie afkast
40%
30%
20%
10%
0%
-10%
-20%
-30%
Q1 -70 Q3 -71 Q1 -73 Q3 -74 Q1 -76 Q3 -77 Q1 -79 Q3 -80 Q1 -82 Q3 -83 Q1 -85 Q3 -86 Q1 -88 Q3 -89 Q1 -91 Q3 -92 Q1 -94 Q3 -95 Q1 -97 Q3 -98 Q1 -00 Q3 -01 Q1 -03 Q3 -04 Q1 -06 Q3 -07

Bilag 3 fortsat







Bilag 4

Omskrivning fra VAR til VECM for VAR(2)-tilfælde, hvor $e_t \sim NI_2(0,\Omega)$

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + e_t - x_{t-1}$$

$(\Pi_2 x_{t-1} - \Pi_2 x_{t-1}) = 0$ indsættes

$$\Delta x_t = \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-2} + e_t - x_{t-1} + (\Pi_2 x_{t-1} - \Pi_2 x_{t-1}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta x_t = (-x_{t-1} + \Pi_1 x_{t-1} + \Pi_2 x_{t-1}) + (\Pi_2 x_{t-2} - \Pi_2 x_{t-1}) + e_t \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta x_t = (-I + \Pi_1 + \Pi_2) x_{t-1} + \Pi_2 (x_{t-2} - x_{t-1}) + e_t \quad \Leftrightarrow$$
$$\Delta x_t = -(I - \Pi_1 - \Pi_2) x_{t-1} - \Pi_2 (x_{t-1} - x_{t-2}) + e_t$$

$\Pi = -(I - \Pi_1 - \Pi_2)$, $\Gamma_1 = -\Pi_2$ indsættes

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \Gamma_1 (x_{t-1} - x_{t-2}) + e_t$$

Bilag 5

Kode til indlæsning af data

```
calendar(q) 1969:4
allocate 2008:4
open data F:\skole\Afhandling\praktisk\Data.xls
data(format=xls,org=obs)

diff AKTIE / dAktie
diff RISIKOFRI /dRisikofri
```

Kode til graf for de to indeksserier

```
graph(key=below,header="indeks Serier") 2
#AKTIE
#RISIKOFRI
```

Kode til Dickey-Fuller-test på de to indeksserier

```
source c:\cats2\dfunit.src
@dfunit(trend) AKTIE
@dfunit(trend) RISIKOFRI
```

Output fra Dickey-Fuller-test på indeksserier

```
Dickey-Fuller Unit Root Test, Series AKTIE
Regression Run From 1970:01 to 2008:04
Observations 157
With intercept and trend with 0 lags on the differences
T-test statistic      -2.37895
Critical values: 1%= -4.019 5%= -3.439 10%= -3.144

Dickey-Fuller Unit Root Test, Series RISIKOFRI
Regression Run From 1970:01 to 2008:04
Observations 157
With intercept and trend with 0 lags on the differences
T-test statistic      -2.51960
Critical values: 1%= -4.019 5%= -3.439 10%= -3.144
```

Kode til graf for de to differensserier

```
graph(key=below,header="differens Serier") 2
#dAktie
#dRisikofri
```

Kode til Dickey-Fuller-test på de to differensserier

```
source c:\cats2\dfunit.src
@dfunit(intercept) dAktie
@dfunit(intercept) dRisikofri
```

Output fra Dickey-Fuller-test på differensserier

```
Dickey-Fuller Unit Root Test, Series DAKTIE
Regression Run From 1970:02 to 2008:04
Observations 156
With intercept with 0 lags on the differences
T-test statistic      -8.40836
Critical values: 1%= -3.473 5%= -2.880 10%= -2.577

Dickey-Fuller Unit Root Test, Series DRISIKOFRI
Regression Run From 1970:02 to 2008:04
Observations 156
With intercept with 0 lags on the differences
T-test statistic      -2.52491
Critical values: 1%= -3.473 5%= -2.880 10%= -2.577
```

Bilag 6

Kode til Engle-Granger procedure på indeksserier

```
source c:\cats2\egtest.src
source c:\cats2\mackinnoncv.src
@egtest
#AKTIE RISIKOFRI
```

Output fra Engle-Granger procedure på indeksserier

```
Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable AKTIE
Quarterly Data From 1969:04 To 2008:04
Usable Observations    157      Degrees of Freedom   155
Centered R**2     0.851985      R Bar **2   0.851030
Uncentered R**2   0.996591      T x R**2     156.465
Mean of Dependent Variable      5.4824826378
Std Error of Dependent Variable 0.8444209179
Standard Error of Estimate      0.3259175761
Sum of Squared Residuals        16.464451293
Regression F(1,155)             892.1937
Significance Level of F         0.00000000
Log Likelihood                 -45.75254
Durbin-Watson Statistic          0.099322

   Variable            Coeff             Std Error      T-Stat       Signif
*******************************************************************************
1.  RISIKOFRI        2.565068521       0.085875525    29.86961      0.00000000
2.  Constant        -6.971606034       0.417759028   -16.68810      0.00000000


Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable DU
Quarterly Data From 1970:03 To 2008:04
Usable Observations    154      Degrees of Freedom   151
Centered R**2     0.206865      R Bar **2   0.196359
Uncentered R**2   0.207077      T x R**2      31.890
Mean of Dependent Variable      0.0016763722
Std Error of Dependent Variable 0.1028079340
Standard Error of Estimate      0.0921632023
Sum of Squared Residuals        1.2826024339
Log Likelihood                 150.16420
Durbin-Watson Statistic          1.964936

   Variable            Coeff             Std Error      T-Stat       Signif
*******************************************************************************
1.  U{1}            -0.086736913       0.023672927    -3.66397      0.00034314
2.  DU{1}            0.311938316       0.078916735     3.95275      0.00011834
3.  DU{2}            0.243656218       0.081756109     2.98028      0.00335745

Engle-Granger Cointegration Test
Test Statistic      -3.66397
Critical Values    1%       5%       10%
                 -3.97    -3.38     -3.07
```

Bilag 7

5 lags

LAG LENGTH DETERMINATION
Effective Sample: 1971:01 to 2008:04

MODEL SUMMARY

Model	k	T	Regr	Log-Lik	SC	H-Q	LM(1)	LM(k)
VAR(5)	5	152	11	1252.00209	-15.74657	-16.00644	0.12286	0.55249
VAR(4)	4	152	9	1247.88015	-15.82454	-16.03716	0.09970	0.03651
VAR(3)	3	152	7	1246.49396	-15.93851	-16.10388	0.39784	0.52906
VAR(2)	2	152	5	1242.07748	**-16.01261**	**-16.13073**	0.07919	0.06394
VAR(1)	1	152	3	1090.75540	-14.15373	-14.22461	0.00000	0.00000

Lag Reduction Tests:
VAR(4) << VAR(5) : ChiSqr(4) = 8.24389 [0.08304]
VAR(3) << VAR(5) : ChiSqr(8) = 11.01627 [0.20078]
VAR(3) << VAR(4) : ChiSqr(4) = 2.77238 [0.59661]
VAR(2) << VAR(5) : ChiSqr(12) = 19.84923 [0.06999]
VAR(2) << VAR(4) : ChiSqr(8) = 11.60534 [0.16970]
VAR(2) << VAR(3) : ChiSqr(4) = 8.83296 [0.06541]
VAR(1) << VAR(5) : ChiSqr(16) = 322.49340 [0.00000]
VAR(1) << VAR(4) : ChiSqr(12) = 314.24951 [0.00000]
VAR(1) << VAR(3) : ChiSqr(8) = 311.47713 [0.00000]
VAR(1) << VAR(2) : ChiSqr(4) = 302.64417 [0.00000]

3 lags

LAG LENGTH DETERMINATION
Effective Sample: 1970:03 to 2008:04

MODEL SUMMARY

Model	k	T	Regr	Log-Lik	SC	H-Q	LM(1)	LM(k)
VAR(3)	3	154	7	1264.13381	-15.95942	-16.12336	0.56821	0.50773
VAR(2)	2	154	5	1259.64508	**-16.03195**	**-16.14905**	0.06185	0.05256
VAR(1)	1	154	3	1106.80464	-14.17784	-14.24810	0.00000	0.00000

Lag Reduction Tests:
VAR(2) << VAR(3) : ChiSqr(4) = 8.97746 [0.06167]
VAR(1) << VAR(3) : ChiSqr(8) = 314.65836 [0.00000]
VAR(1) << VAR(2) : ChiSqr(4) = 305.68090 [0.00000]

2 lags

LAG LENGTH DETERMINATION
Effective Sample: 1970:02 to 2008:04

MODEL SUMMARY

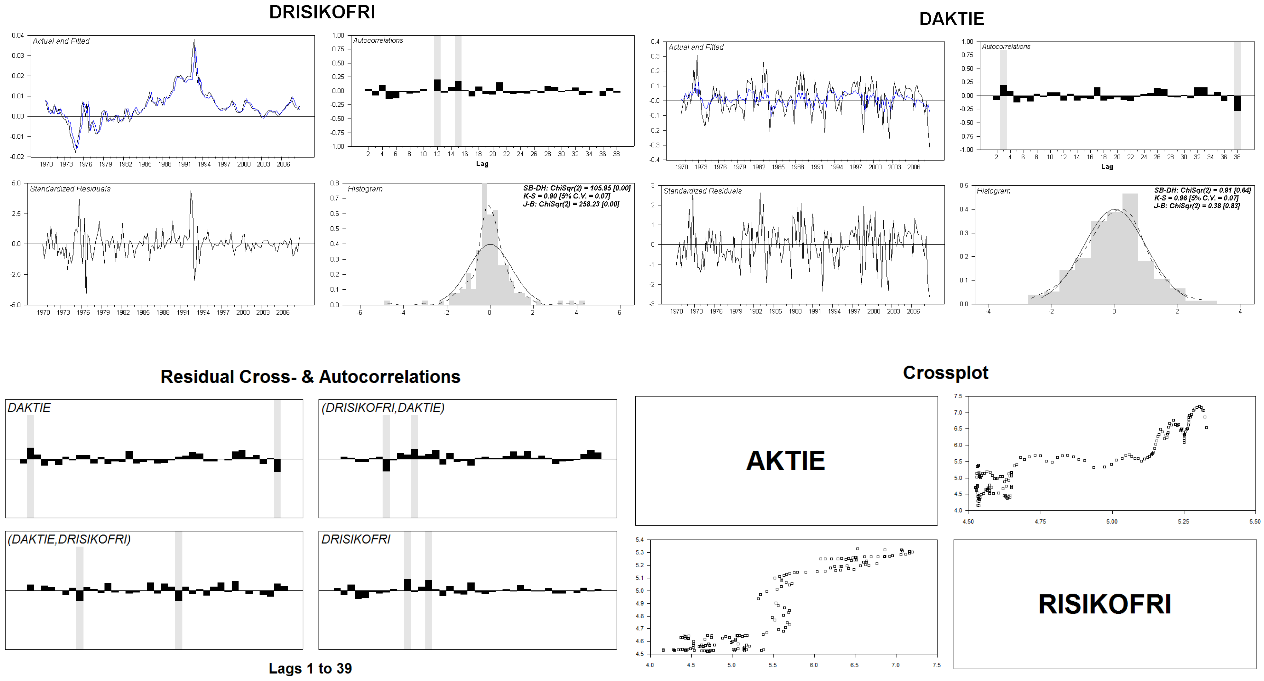
Model	k	T	Regr	Log-Lik	SC	H-Q	LM(1)	LM(k)
VAR(2)	2	155	5	1268.20074	-16.03850	-16.15510	0.05277	0.05560
VAR(1)	1	155	3	1113.94784	-14.17829	-14.24825	0.00000	0.00000

Lag Reduction Tests:
VAR(1) << VAR(2) : ChiSqr(4) = 308.50579 [0.00000]

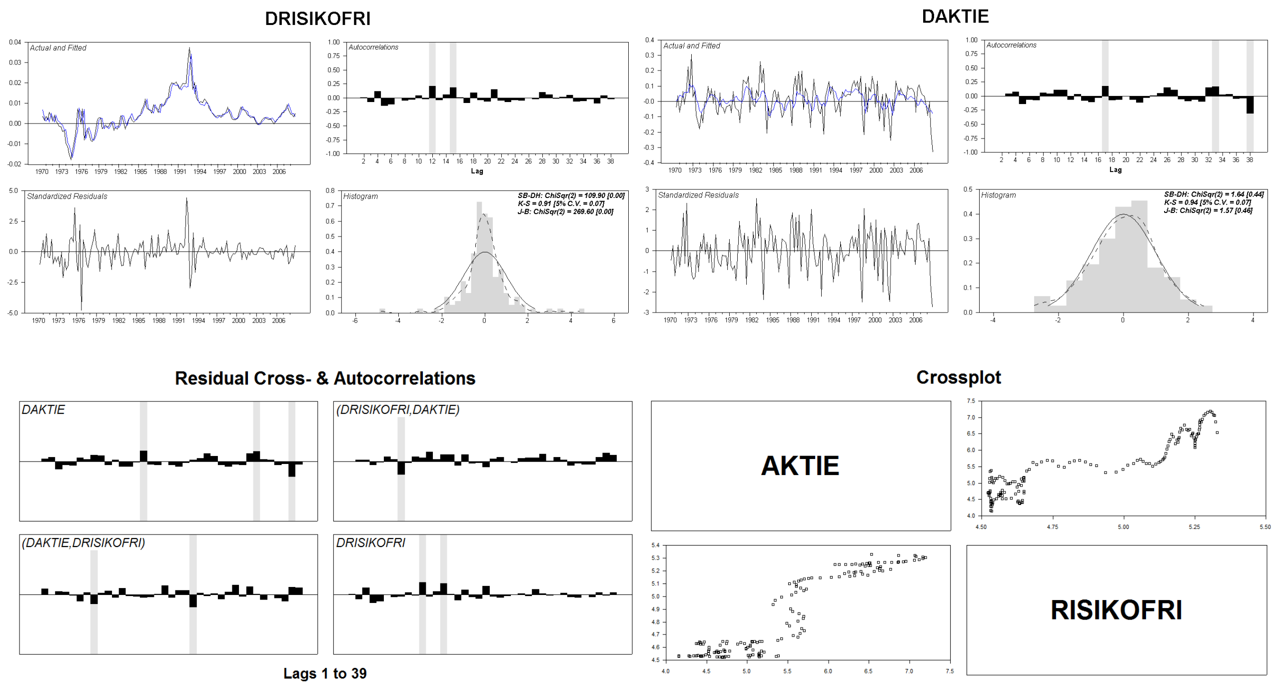
SC : Schwarz Criterion
H-Q : Hannan-Quinn Criterion
LM(k): LM-Test for autocorrelation of order k

Bilag 8

A1: Model med 2 lags



B1: Model med 3 lags



Bilag 8 fortsat

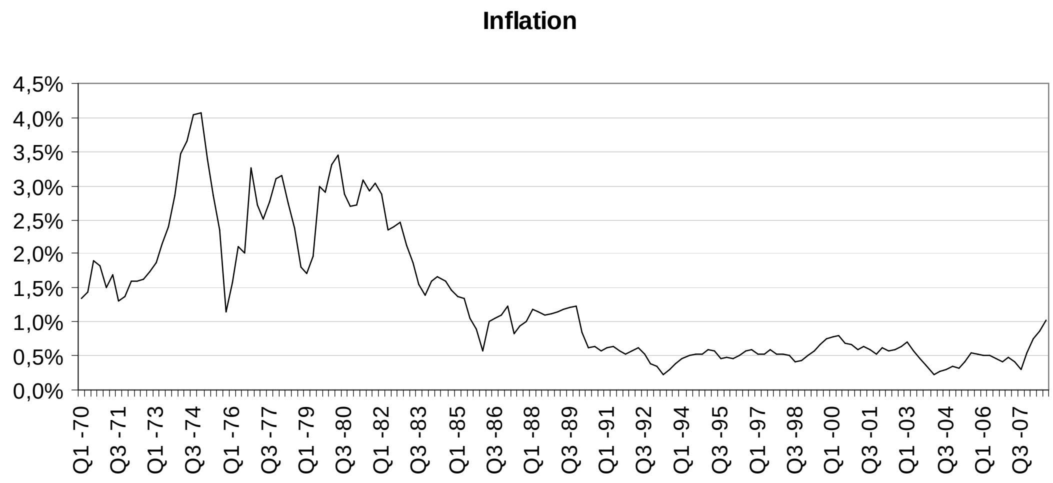
A1: Model med 2 lags

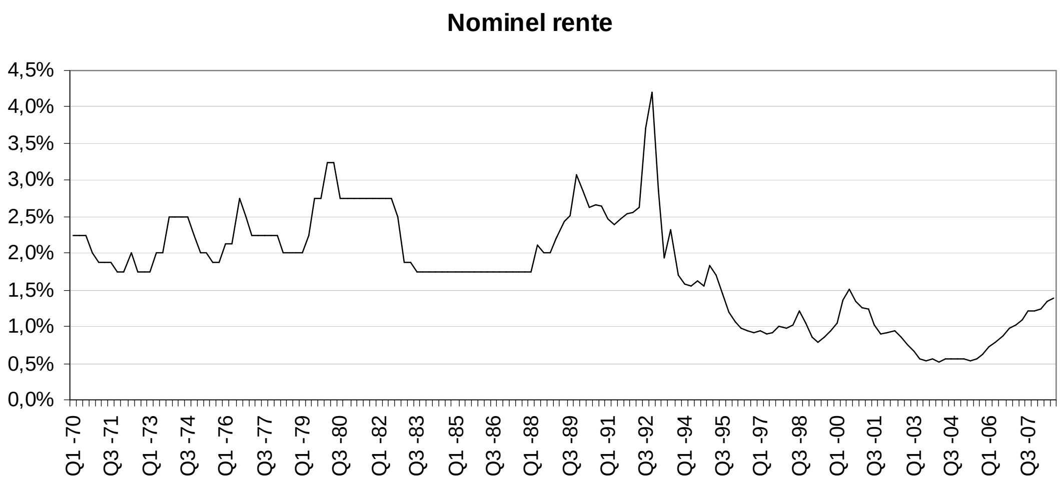
```
RESIDUAL ANALYSIS

Residual S.E. and Cross-Correlations
             DAKTIE    DRISIKOFRI
           0.09342551 0.00299415
DAKTIE       1.000
DRISIKOFRI   0.022       1.000


LOG(|Sigma|)                      = -16.364
Information Criteria: SC          = -16.038
                      H-Q         = -16.155
Trace Correlation                 =   0.497

Tests for Autocorrelation
Ljung-Box(38):        ChiSqr(144) = 180.708 [0.021]
LM(1):                ChiSqr(4)   =   9.357 [0.053]
LM(2):                ChiSqr(4)   =   9.230 [0.056]

Test for Normality:   ChiSqr(4)   = 107.265 [0.000]

Test for ARCH:
LM(1):                ChiSqr(9)   =  29.375 [0.001]
LM(2):                ChiSqr(18)  =  46.026 [0.000]


Univariate Statistics

           Mean   Std.Dev Skewness Kurtosis Maximum Minimum
DAKTIE     -0.000  0.093    -0.039   3.183    0.266  -0.249
DRISIKOFRI  0.000  0.003     0.159   9.075    0.013  -0.014

           ARCH(2)         Normality          R-Squared
DAKTIE      5.102 [0.078]    0.906  [0.636]    0.139
DRISIKOFRI 15.073 [0.001]  105.946  [0.000]    0.856
```

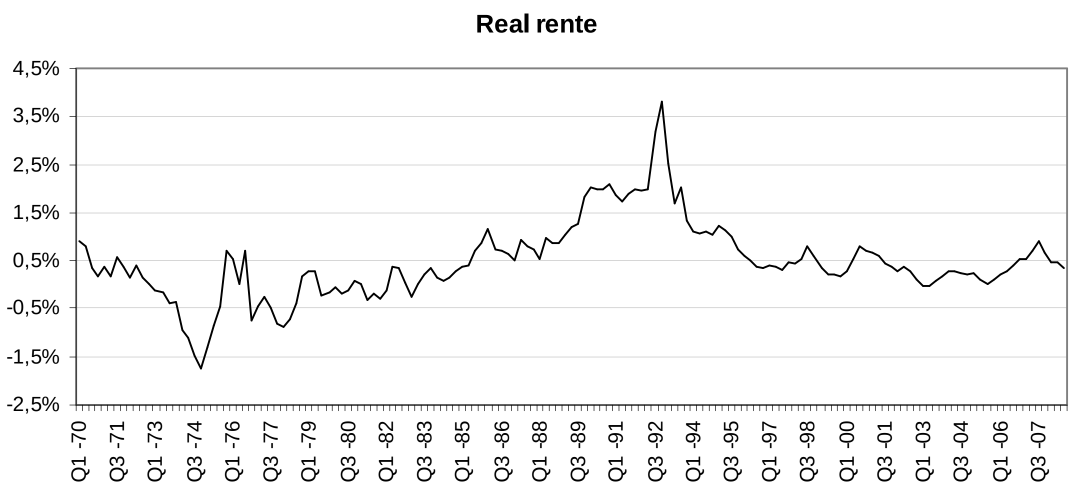
B1: Model med 3 lags

```
RESIDUAL ANALYSIS

Residual S.E. and Cross-Correlations
             DAKTIE    DRISIKOFRI
           0.09077765 0.00299977
DAKTIE       1.000
DRISIKOFRI   0.014       1.000


LOG(|Sigma|)                      = -16.417
Information Criteria: SC          = -15.959
                      H-Q         = -16.123
Trace Correlation                 =   0.521

Tests for Autocorrelation
Ljung-Box(38):        ChiSqr(140) = 193.096 [0.002]
LM(1):                ChiSqr(4)   =   2.938 [0.568]
LM(2):                ChiSqr(4)   =   4.342 [0.362]

Test for Normality:   ChiSqr(4)   = 111.759 [0.000]

Test for ARCH:
LM(1):                ChiSqr(9)   =  26.722 [0.002]
LM(2):                ChiSqr(18)  =  38.726 [0.003]


Univariate Statistics

           Mean   Std.Dev Skewness Kurtosis Maximum Minimum
DAKTIE     -0.000  0.091    -0.221   3.167    0.233  -0.249
DRISIKOFRI  0.000  0.003     0.100   9.232    0.013  -0.015

           ARCH(3)         Normality          R-Squared
DAKTIE      3.029 [0.387]    1.641  [0.440]    0.187
DRISIKOFRI 13.902 [0.003]  109.900  [0.000]    0.856
```

Bilag 9


Inflation
4,5%
4,0%
3,5%
3,0%
2,5%
2,0%
1,5%
1,0%
0,5%
0,0%
Q1 -70
Q3 -71
Q1 -73
Q3 -74
Q1 -76
Q3 -77
Q1 -79
Q3 -80
Q1 -82
Q3 -83
Q1 -85
Q3 -86
Q1 -88
Q3 -89
Q1 -91
Q3 -92
Q1 -94
Q3 -95
Q1 -97
Q3 -98
Q1 -00
Q3 -01
Q1 -03
Q3 -04
Q1 -06
Q3 -07


Nominel rente
4,5%
4,0%
3,5%
3,0%
2,5%
2,0%
1,5%
1,0%
0,5%
0,0%
Q1 -70
Q3 -71
Q1 -73
Q3 -74
Q1 -76
Q3 -77
Q1 -79
Q3 -80
Q1 -82
Q3 -83
Q1 -85
Q3 -86
Q1 -88
Q3 -89
Q1 -91
Q3 -92
Q1 -94
Q3 -95
Q1 -97
Q3 -98
Q1 -00
Q3 -01
Q1 -03
Q3 -04
Q1 -06
Q3 -07


Real rente
4,5%
3,5%
2,5%
1,5%
0,5%
-0,5%
-1,5%
-2,5%
Q1 -70
Q3 -71
Q1 -73
Q3 -74
Q1 -76
Q3 -77
Q1 -79
Q3 -80
Q1 -82
Q3 -83
Q1 -85
Q3 -86
Q1 -88
Q3 -89
Q1 -91
Q3 -92
Q1 -94
Q3 -95
Q1 -97
Q3 -98
Q1 -00
Q3 -01
Q1 -03
Q3 -04
Q1 -06
Q3 -07

Bilag 10

Skema 10.1

	Shift	Residual Std.afv.				Informationskriterier			Test for Autokorrelation (p-værdier)			Test for Normalitet	Test for ARCH (p-værdier)	
Model	**Dummies**	**Daktie**	**Drisikofri**	**Krydskorrelation**	**Log(sigma)**	**SC**	**H-Q**	**Trace korrelation**	**Ljung-Box**	**LM(1)**	**LM(2)**	**(p-værdi)**	**LM(1)**	**LM(2)**
2 lags	Ingen	0,0934	0,0030	0,022	-16,364	-16,038	-16,155	0,497	0,021	0,053	0,056	0,000	0,001	0,000
2 lags	85:2	0,0927	0,0029	-0,002	-16,434	-15,979	-16,142	0,508	0,027	0,035	0,058	0,000	0,000	0,000
2 lags	89:2	0,0930	0,0029	0,027	-16,459	-16,003	-16,166	0,507	0,010	0,100	0,056	0,000	0,000	0,000
2 lags	94:2	0,0923	0,0030	0,025	-16,375	-15,92	-16,083	0,502	0,038	0,027	0,070	0,000	0,001	0,000
2 lags	85:2,89:2	0,0922	0,0028	0,000	-16,529	-15,944	-16,154	0,518	0,011	0,070	0,056	0,000	0,000	0,000
2 lags	85:2,94:2	0,0922	0,0029	-0,001	-16,448	-15,863	-16,073	0,513	0,060	0,016	0,066	0,000	0,000	0,000
2 lags	89:2,94:2	0,0925	0,0029	0,027	-16,469	-15,883	-16,093	0,511	0,017	0,058	0,069	0,000	0,000	0,000
2 lags	85:2,89:2,94:2	0,0918	0,0028	0,000	-16,541	-15,826	-16,082	0,522	0,017	0,037	0,061	0,000	0,000	0,000
3 lags	Ingen	0,0908	0,0030	0,014	-16,417	-15,959	-16,123	0,521	0,002	0,568	0,362	0,000	0,002	0,003
3 lags	85:2	0,0899	0,0029	-0,014	-16,498	-15,909	-16,120	0,534	0,003	0,754	0,565	0,000	0,000	0,001
3 lags	89:2	0,0904	0,0029	0,022	-16,516	-15,927	-16,138	0,531	0,001	0,831	0,340	0,000	0,000	0,002
3 lags	94:2	0,0901	0,0030	0,017	-16,435	-15,846	-16,057	0,528	0,008	0,916	0,483	0,000	0,002	0,003
3 lags	85:2,89:2	0,0895	0,0028	-0,010	-16,601	-15,882	-16,139	0,543	0,002	0,969	0,510	0,000	0,000	0,000
3 lags	85:2,94:2	0,0892	0,0029	-0,013	16,522	-15,802	-16,060	0,540	0,016	0,837	0,721	0,000	0,000	0,001
3 lags	89:2,94:2	0,0897	0,0029	0,023	-16,532	-15,812	-16,070	0,537	0,005	0,778	0,450	0,000	0,000	0,002
3 lags	85:2,89:2,94:2	0,0888	0,0028	-0,011	-16,623	-15,773	-16,077	0,550	0,005	0,951	0,656	0,000	0,000	0,000

Skema 10.2

	Shift								ARCH(2)	Normalitet	
Model	**Dummies**	**Variabel**	**Middelværdi**	**Std.afv**	**Skewness**	**Kurtosis**	**Maximum**	**Minimum**	**p-værdi**	**p-værdi**	**R^2**
2 lags	Ingen	Aktie	0,000	0,093	-0,039	3,183	0,266	-0,249	0,078	0,636	0,139
2 lags	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	0,159	9,075	0,013	-0,014	0,001	0,000	0,856
2 lags	85:2	Aktie	0,000	0,093	0,017	3,304	0,278	-0,244	0,066	0,456	0,153
2 lags	85:2	Risikofri	0,000	0,003	0,509	9,179	0,013	-0,013	0,000	0,000	0,863
2 lags	89:2	Aktie	0,000	0,093	-0,055	3,196	0,264	-0,248	0,086	0,609	0,147
2 lags	89:2	Risikofri	0,000	0,003	0,299	8,734	0,012	-0,013	0,001	0,000	0,867
2 lags	94:2	Aktie	0,000	0,093	-0,043	3,217	0,268	-0,246	0,067	0,580	0,148
2 lags	94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,124	8,940	0,013	-0,014	0,001	0,000	0,856
2 lags	85:2,89:2	Aktie	0,000	0,092	0,004	3,324	0,276	-0,242	0,074	0,427	0,161
2 lags	85:2,89:2	Risikofri	0,000	0,003	0,642	9,084	0,012	-0,012	0,000	0,000	0,874
2 lags	85:2,94:2	Aktie	0,000	0,092	0,010	3,351	0,279	-0,242	0,058	0,391	0,161
2 lags	85:2,94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,435	8,856	0,013	-0,013	0,000	0,000	0,864
2 lags	89:2,94:2	Aktie	0,000	0,093	-0,059	3,235	0,267	-0,244	0,071	0,548	0,155
2 lags	89:2,94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,288	8,699	0,012	-0,013	0,001	0,000	0,867
2 lags	85:2,89:2,94:2	Aktie	0,000	0,092	0,000	3,376	0,278	-0,240	0,062	0,358	0,170
2 lags	85:2,89:2,94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,584	8,876	0,012	-0,012	0,000	0,000	0,875
3 lags	Ingen	Aktie	0,000	0,091	-0,221	3,167	0,233	-0,249	0,387	0,440	0,187
3 lags	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	0,100	9,232	0,013	-0,015	0,003	0,000	0,856
3 lags	85:2	Aktie	0,000	0,090	-0,171	3,268	0,244	-0,244	0,294	0,423	0,203
3 lags	85:2	Risikofri	0,000	0,003	0,443	9,422	0,013	0,014	0,001	0,000	0,864
3 lags	89:2	Aktie	0,000	0,090	-0,241	3,189	0,232	-0,249	0,415	0,390	0,193
3 lags	89:2	Risikofri	0,000	0,003	0,234	8,972	0,012	-0,014	0,004	0,000	0,868
3 lags	94:2	Aktie	0,000	0,090	-0,239	3,221	0,229	-0,247	0,304	0,374	0,200
3 lags	94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,029	9,077	0,013	-0,015	0,003	0,000	0,856
3 lags	85:2,89:2	Aktie	0,000	0,089	-0,186	3,301	0,243	-0,243	0,323	0,375	0,210
3 lags	85:2,89:2	Risikofri	0,000	0,003	0,586	9,381	0,012	-0,013	0,000	0,000	0,876
3 lags	85:2,94:2	Aktie	0,000	0,089	-0,184	3,336	0,242	-0,242	0,221	0,343	0,216
3 lags	85:2,94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,301	9,015	0,013	-0,013	0,001	0,000	0,865
3 lags	89:2,94:2	Aktie	0,000	0,090	-0,257	3,244	0,228	-0,246	0,323	0,333	0,205
3 lags	89:2,94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,185	8,862	0,012	-0,014	0,004	0,000	0,868
3 lags	85:2,89:2,94:2	Aktie	0,000	0,089	-0,107	3,370	0,242	-0,243	0,240	0,303	0,223
3 lags	85:2,89:2,94:2	Risikofri	0,000	0,003	0,453	9,027	0,012	-0,013	0,000	0,000	0,877

Bilag 11

Skema 11.1

	Trans	Residual Std.afv.				Informationskriterier			Test for Autokorrelation (p-værdier)			Test for Normalitet	Test for ARCH (p-værdier)	
Model	**Dummies**	**Daktie**	**Drisikofri**	**Krydskorrelation**	**Log(sigma)**	**SC**	**H-Q**	**Trace korrelation**	**Ljung-Box**	**LM(1)**	**LM(2)**	**(p-værdi)**	**LM(1)**	**LM(2)**
2 lags	Ingen	0,0934	0,0030	0,022	-16,364	-16,038	-16,155	0,497	0,021	0,053	0,056	0,000	0,001	0,000
2 lags	T1	0,0934	0,0028	0,031	-16,532	-16,142	-16,282	0,509	0,13	0,002	0,019	0,000	0,000	0,000
2 lags	T2	0,0934	0,0028	0,015	-16,499	-16,109	-16,249	0,507	0,357	0,053	0,095	0,000	0,866	0,692
2 lags	T1,T2	0,0934	0,0025	0,023	-16,691	-16,235	-16,399	0,518	0,494	0,016	0,152	0,000	0,994	0,568
3 lags	Ingen	0,0908	0,0030	0,014	-16,417	-15,959	-16,123	0,521	0,002	0,568	0,362	0,000	0,002	0,003
3 lags	T1	0,0908	0,0027	0,015	-16,606	-16,082	-16,270	0,534	0,027	0,016	0,13	0,000	0,018	0,004
3 lags	T2	0,0908	0,0028	0,020	-16,550	-16,027	-16,214	0,530	0,102	0,422	0,563	0,000	0,836	0,973
3 lags	T1,T2	0,0908	0,0025	0,021	-16,752	-16,163	-16,374	0,542	0,202	0,517	0,720	0,000	0,954	0,924

Skema 11.2

	Trans								ARCH(2)	Normalitet	
Model	**Dummies**	**Variabel**	**Middelværdi**	**Std.afv**	**Skewness**	**Kurtosis**	**Maximum**	**Minimum**	**p-værdi**	**p-værdi**	**R^2**
2 lags	Ingen	Aktie	0,000	0,093	-0,039	3,183	0,266	-0,249	0,078	0,636	0,139
2 lags	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	0,159	9,075	0,013	-0,014	0,001	0,000	0,856
2 lags	T1	Aktie	0,000	0,093	-0,038	3,182	0,266	-0,249	0,077	0,638	-0,139
2 lags	T1	Risikofri	0,000	0,003	0,893	7,844	0,013	-0,009	0,000	0,000	0,878
2 lags	T2	Aktie	0,000	0,093	-0,037	3,180	0,266	-0,248	0,073	0,641	0,140
2 lags	T2	Risikofri	0,000	0,003	0,183	10,174	0,013	-0,014	0,565	0,000	0,874
2 lags	T1,T2	Aktie	0,000	0,093	-0,036	3,179	0,266	-0,248	0,072	0,644	0,140
2 lags	T1,T2	Risikofri	0,000	0,003	1,168	8,526	0,013	-0,006	0,699	0,000	0,896
3 lags	Ingen	Aktie	0,000	0,091	-0,221	3,167	0,233	-0,249	0,387	0,440	0,187
3 lags	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	0,100	9,232	0,013	-0,015	0,003	0,000	0,856
3 lags	T1	Aktie	0,000	0,091	-0,221	3,167	0,233	-0,249	0,387	0,440	0,187
3 lags	T1	Risikofri	0,000	0,003	0,817	7,706	0,013	-0,009	0,000	0,000	0,880
3 lags	T2	Aktie	0,000	0,091	-0,224	3,172	0,233	-0,250	0,396	0,432	0,187
3 lags	T2	Risikofri	0,000	0,003	0,192	10,037	0,013	-0,014	0,513	0,000	0,874
3 lags	T1,T2	Aktie	0,000	0,091	-0,224	3,172	0,233	-0,250	0,396	0,432	0,187
3 lags	T1,T2	Risikofri	0,000	0,003	1,182	8,375	0,013	-0,006	0,615	0,000	0,897

Bilag 12

Skema 12.1

	Impuls	Residual Std.afv.				Informationskriterier			Test for Autokorrelation (p-værdier)			Test for Normalitet	Test for ARCH (p-værdier)	
Model	**Dummies**	**Daktie**	**Drisikofri**	**Krydskorrelation**	**Log(sigma)**	**SC**	**H-Q**	**Trace korrelation**	**Ljung-Box**	**LM(1)**	**LM(2)**	**(p-værdi)**	**LM(1)**	**LM(2)**
2 lags, T2	Ingen	0,0934	0,0028	0,015	-16,499	-16,109	-16,249	0,507	0,357	0,053	0,095	0,000	0,866	0,692
2 lags, T2	B1	0,0930	0,0026	-0,001	-16,611	-16,155	-16,319	0,514	0,510	0,05	0,104	0,000	0,811	0,663
2 lags, T2	B2	0,0916	0,0026	0,098	-16,705	-16,249	-16,413	0,533	0,031	0,152	0,110	0,000	0,036	0,031
2 lags, T2	B1,B2	0,0915	0,0024	0,086	-16,832	-16,312	-16,498	0,54	0,045	0,133	0,109	0,000	0,003	0,006
2 lags, T1,T2	Ingen	0,0934	0,0025	0,023	-16,691	-16,235	-16,399	0,518	0,494	0,016	0,152	0,000	0,994	0,568
2 lags, T1,T2	B1	0,0933	0,0024	0,006	-16,829	-16,308	-16,495	0,526	0,441	0,022	0,185	0,000	0,992	0,697
2 lags, T1,T2	B2	0,0916	0,0023	0,116	-16,932	-16,411	-16,598	0,543	0,338	0,059	0,158	0,000	0,988	0,256
2 lags, T1,T2	B1,B2	0,0915	0,0021	0,104	-17,096	-16,510	-16,72	0,551	0,116	0,076	0,183	0,344	0,804	0,436
3 lags, T2	Ingen	0,0908	0,0028	0,020	-16,550	-16,027	-16,214	0,530	0,102	0,422	0,563	0,000	0,836	0,973
3 lags, T2	B1	0,0907	0,0027	0,01	-16,664	-16,075	-16,286	0,537	0,243	0,708	0,587	0,000	0,815	0,974
3 lags, T2	B2	0,0892	0,0026	0,099	-16,752	-16,164	-16,374	0,554	0,017	0,525	0,518	0,000	0,027	0,153
3 lags, T2	B1,B2	0,0891	0,0024	0,093	-16,881	-16,227	-16,461	0,561	0,051	0,680	0,514	0,000	0,003	0,048
3 lags, T1,T2	Ingen	0,0908	0,0025	0,021	-16,752	-16,163	-16,374	0,542	0,202	0,517	0,720	0,000	0,954	0,924
3 lags, T1,T2	B1	0,0907	0,0024	0,011	-16,883	-16,228	-16,463	0,549	0,181	0,298	0,752	0,000	0,933	0,967
3 lags, T1,T2	B2	0,0892	0,0230	0,111	-16,994	-16,340	-16,574	0,565	0,202	0,799	0,693	0,000	0,921	0,759
3 lags, T1,T2	B1,B2	0,0891	0,0021	0,106	-17,149	-16,429	-16,687	0,572	0,076	0,533	0,690	0,365	0,632	0,811

Skema 12.2

	Impuls								ARCH(2)	Normalitet	
Model	**Dummies**	**Variabel**	**Middelværdi**	**Std.afv**	**Skewness**	**Kurtosis**	**Maximum**	**Minimum**	**p-værdi**	**p-værdi**	**R^2**
2 lags, T2	Ingen	Aktie	0,000	0,093	-0,037	3,180	0,266	-0,248	0,073	0,641	0,140
2 lags, T2	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	0,183	10,174	0,013	-0,014	0,565	0,000	0,874
2 lags, T2	B1	Aktie	0,000	0,093	-0,028	3,207	0,267	-0,248	0,067	0,602	0,142
2 lags, T2	B1	Risikofri	0,000	0,003	-0,176	10,481	0,013	-0,014	0,478	0,000	0,887
2 lags, T2	B2	Aktie	0,000	0,092	0,013	3,204	0,265	-0,249	0,023	0,608	0,172
2 lags, T2	B2	Risikofri	0,000	0,002	-0,503	9,288	0,011	-0,014	0,142	0,000	0,892
2 lags, T2	B1,B2	Aktie	0,000	0,091	0,023	3,232	0,266	-0,249	0,021	0,563	0,175
2 lags, T2	B1,B2	Risikofri	0,000	0,002	-1,089	9,095	0,007	-0,014	0,053	0,000	0,905
2 lags, T1,T2	Ingen	Aktie	0,000	0,093	-0,036	3,179	0,266	-0,248	0,072	0,644	0,140
2 lags, T1,T2	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	1,168	8,526	0,013	-0,006	0,699	0,000	0,896
2 lags, T1,T2	B1	Aktie	0,000	0,093	-0,027	3,205	0,267	-0,248	0,066	0,605	0,142
2 lags, T1,T2	B1	Risikofri	0,000	0,002	0,848	7,894	0,013	-0,006	0,978	0,000	0,909
2 lags, T1,T2	B2	Aktie	0,000	0,092	0,014	3,203	0,265	-0,249	0,023	0,610	0,173
2 lags, T1,T2	B2	Risikofri	0,000	0,002	0,506	5,942	0,011	-0,006	0,040	0,000	0,914
2 lags, T1,T2	B1,B2	Aktie	0,000	0,091	0,024	3,231	0,266	-0,249	0,021	0,565	0,175
2 lags, T1,T2	B1,B2	Risikofri	0,000	0,002	-0,117	3,500	0,006	-0,006	0,191	0,213	0,927
3 lags, T2	Ingen	Aktie	0,000	0,091	-0,224	3,172	0,233	-0,250	0,396	0,432	0,187
3 lags, T2	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	0,192	10,037	0,013	-0,014	0,513	0,000	0,874
3 lags, T2	B1	Aktie	0,000	0,091	-0,218	3,181	0,233	-0,250	0,386	0,437	0,188
3 lags, T2	B1	Risikofri	0,000	0,003	-0,152	9,889	0,013	-0,014	0,644	0,000	0,887
3 lags, T2	B2	Aktie	0,000	0,089	-0,192	3,208	0,233	-0,251	0,263	0,455	0,215
3 lags, T2	B2	Risikofri	0,000	0,003	-0,516	9,277	0,011	-0,014	0,229	0,000	0,892
3 lags, T2	B1,B2	Aktie	0,000	0,089	-0,185	3,217	0,234	-0,251	0,252	0,458	0,216
3 lags, T2	B1,B2	Risikofri	0,000	0,002	-1,048	8,651	0,006	-0,014	0,145	0,000	0,905
3 lags, T1,T2	Ingen	Aktie	0,000	0,091	-0,224	3,172	0,233	-0,250	0,396	0,432	0,187
3 lags, T1,T2	Ingen	Risikofri	0,000	0,003	1,182	8,375	0,013	-0,006	0,615	0,000	0,897
3 lags, T1,T2	B1	Aktie	0,000	0,091	-0,218	3,181	0,233	-0,250	0,386	0,437	0,188
3 lags, T1,T2	B1	Risikofri	0,000	0,002	0,881	7,820	0,013	-0,006	0,580	0,000	0,909
3 lags, T1,T2	B2	Aktie	0,000	0,089	-0,192	3,208	0,330	-0,251	0,263	0,455	0,215
3 lags, T1,T2	B2	Risikofri	0,000	0,002	0,476	5,487	0,011	-0,006	0,113	0,000	0,915
3 lags, T1,T2	B1,B2	Aktie	0,000	0,089	-0,185	3,217	0,234	-0,251	0,252	0,458	0,216
3 lags, T1,T2	B1,B2	Risikofri	0,000	0,002	-0,074	3,450	0,005	-0,006	0,375	0,268	0,927

Bilag 13
Der benyttes N=5000 og T=2000 i samtlige tests

Skema 13.1

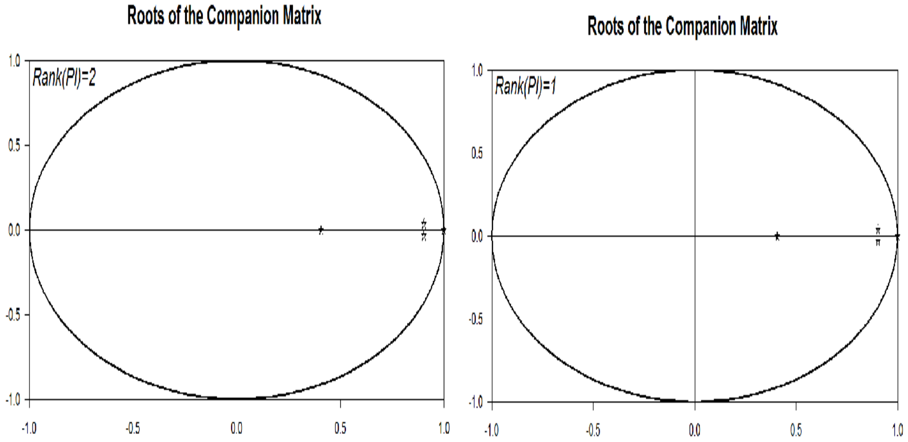
				I(1)-ANALYSIS								Quantiles of the Simulated Rank Test Distribution							
Lags	**Trend**	**Dummies**	**Fraktil**	**p-r**	**r**	**Eig.Value**	**Trace**	**Trace***	**Frac95**	**P-Value**	**P-Value***	**Mean**	**S.E.**	**50%**	**75%**	**80%**	**85**	**90%**	**95%**
				2	0	0,107	17,484	14,432	15,408	0,023	0,071								
2	DRIFT	Med	Faktisk	1	1	0,000	0,009	0,008	3,841	0,925	0,930								
				2	0	0,107	17,484	14,432	9,911	0,003	0,009	4,064	3,008	3,407	5,582	6,172	6,984	8,108	9,911
2	DRIFT	Med	Simuleret	1	1	0,000	0,009	0,008	0,000	.NA	.NA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
				2	0	0,071	11,452	9,582	15,408	0,188	0,320								
2	DRIFT	Uden	Faktisk	1	1	0,000	0,066	0,060	3,841	0,797	0,806								
				2	0	0,071	11,452	9,582	9,487	0,025	0,052	3,926	2,958	3,315	5,458	6,043	6,802	7,832	9,487
2	DRIFT	Uden	Simuleret	1	1	0,000	0,066	0,060	0,000	.NA	.NA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
				2	0	0,123	20,184	16,861	15,408	0,008	0,029								
3	DRIFT	Med	Faktisk	1	1	0,000	0,019	0,017	3,841	0,889	0,895								
				2	0	0,123	20,184	16,861	9,798	0,001	0,003	4,070	2,998	3,445	5,625	6,261	6,985	8,048	9,798
3	DRIFT	Med	Simuleret	1	1	0,000	0,019	0,017	0,000	.NA	.NA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
				2	0	0,090	14,641	12,308	15,408	0,066	0,144								
3	DRIFT	Uden	Faktisk	1	1	0,001	0,124	0,112	3,841	0,725	0,738								
				2	0	0,090	14,641	12,308	9,919	0,008	0,021	4,129	3,027	3,539	5,627	6,279	7,061	8,072	9,919
3	DRIFT	Uden	Simuleret	1	1	0,001	0,124	0,112	0,000	.NA	.NA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Skema 13.2

				I(1)-ANALYSIS								Quantiles of the Simulated Rank Test Distribution							
Lags	**Trend**	**Dummies**	**Fraktil**	**p-r**	**r**	**Eig.Value**	**Trace**	**Trace***	**Frac95**	**P-Value**	**P-Value***	**Mean**	**S.E.**	**50%**	**75%**	**80%**	**85**	**90%**	**95%**
				2	0	0,107	18,384	15,099	20,164	0,088	0,225								
2	CIMEAN	Med	Faktisk	1	1	0,006	0,887	0,770	9,142	0,950	0,963								
				2	0	0,107	18,384	15,099	19,775	0,083	0,217	11,954	4,377	11,356	14,406	15,333	16,374	17,636	19,775
2	CIMEAN	Med	Simuleret	1	1	0,006	0,887	0,770	9,032	0,945	0,959	4,019	2,645	3,383	5,289	5,903	6,559	7,461	9,032
				2	0	0,071	13,358	10,863	20,164	0,344	0,563								
2	CIMEAN	Uden	Faktisk	1	1	0,013	1,973	1,754	9,142	0,779	0,819								
				2	0	0,071	13,358	10,863	20,209	0,341	0,558	12,037	4,469	11,363	14,607	15,461	16,615	18,051	20,209
2	CIMEAN	Uden	Simuleret	1	1	0,013	1,973	1,754	9,154	0,774	0,814	4,061	2,661	3,473	5,298	5,831	6,549	7,562	9,154
				2	0	0,110	30,097	24,842	25,731	0,012	0,065								
2	CIDRIFT	Med	Faktisk	1	1	0,074	11,998	10,733	12,448	0,060	0,098								
				2	0	0,110	30,097	24,842	25,872	0,012	0,065	16,530	5,102	15,890	19,439	20,472	21,681	23,343	25,872
2	CIDRIFT	Med	Simuleret	1	1	0,074	11,998	10,733	12,537	0,058	0,096	6,287	3,230	5,638	8,022	8,707	9,606	10,823	12,537
				2	0	0,077	20,228	16,926	25,731	0,218	0,429								
2	CIDRIFT	Uden	Faktisk	1	1	0,049	7,828	7,002	12,448	0,274	0,354								
				2	0	0,077	20,228	16,926	25,286	0,206	0,418	16,391	4,947	15,830	19,362	20,383	21,550	22,985	25,286
2	CIDRIFT	Uden	Simuleret	1	1	0,049	7,828	7,002	12,452	0,279	0,359	6,358	3,284	5,670	8,074	8,731	9,656	10,876	12,452
				2	0	0,123	20,994	17,304	20,164	0,038	0,123								
3	CIMEAN	Med	Faktisk	1	1	0,005	0,824	0,717	9,142	0,957	0,968								
				2	0	0,123	20,994	17,304	19,980	0,037	0,119	11,948	4,455	11,304	14,539	15,427	16,561	17,959	19,980
3	CIMEAN	Med	Simuleret	1	1	0,005	0,824	0,717	8,884	0,956	0,967	3,986	2,567	3,379	5,251	5,801	6,490	7,322	8,884
				2	0	0,090	16,256	13,207	20,164	0,165	0,355								
3	CIMEAN	Uden	Faktisk	1	1	0,011	1,731	1,513	9,142	0,823	0,860								
				2	0	0,090	16,256	13,207	20,180	0,162	0,347	11,961	4,467	11,236	14,486	15,371	16,553	18,027	20,180
3	CIMEAN	Uden	Simuleret	1	1	0,011	1,731	1,513	9,158	0,826	0,863	4,095	2,646	3,491	5,390	5,940	6,652	7,575	9,158
				2	0	0,123	34,460	28,786	25,731	0,003	0,019								
3	CIDRIFT	Med	Faktisk	1	1	0,088	14,179	12,590	12,448	0,024	0,047								
				2	0	0,123	34,460	28,786	25,892	0,003	0,019	16,462	5,123	15,833	19,424	20,485	21,696	23,405	25,892
3	CIDRIFT	Med	Simuleret	1	1	0,088	14,179	12,590	12,226	0,022	0,043	6,265	3,180	5,686	7,989	8,656	9,444	10,546	12,226
				2	0	0,109	25,265	21,239	25,731	0,057	0,172								
3	CIDRIFT	Uden	Faktisk	1	1	0,047	7,489	6,664	12,448	0,305	0,391								
				2	0	0,109	25,265	21,239	25,943	0,056	0,169	16,465	5,105	15,786	19,481	20,451	21,570	23,187	25,943
3	CIDRIFT	Uden	Simuleret	1	1	0,047	7,489	6,664	12,280	0,297	0,384	6,254	3,186	5,637	7,967	8,662	9,507	10,504	12,280

Bilag 14

A4: Model med 2 lags, DRIFT og dummies



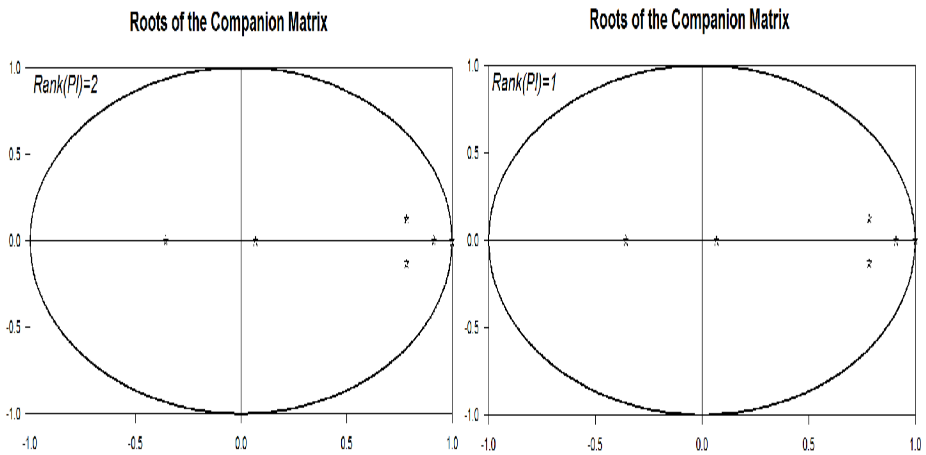
The Roots of the COMPANION MATRIX // Model: H(2)

	Real	Imaginary	Modulus	Argument
Root1	0.99911	0.00000	0.99911	0.00000
Root2	0.90412	0.03384	0.90475	0.03741
Root3	0.90412	-0.03384	0.90475	-0.03741
Root4	0.40758	-0.00000	0.40758	-0.00000

The Roots of the COMPANION MATRIX // Model: H(1)

	Real	Imaginary	Modulus	Argument
Root1	1.00000	-0.00000	1.00000	-0.00000
Root2	0.90345	0.03493	0.90412	0.03865
Root3	0.90345	-0.03493	0.90412	-0.03865
Root4	0.40749	-0.00000	0.40749	-0.00000

B4: Model med 3 lags, DRIFT og dummies



The Roots of the COMPANION MATRIX // Model: H(2)

	Real	Imaginary	Modulus	Argument
Root1	0.99872	-0.00000	0.99872	-0.00000
Root2	0.91277	0.00000	0.91277	0.00000
Root3	0.78468	0.12866	0.79516	0.16252
Root4	0.78468	-0.12866	0.79516	-0.16252
Root5	-0.35806	-0.00000	0.35806	-3.14159
Root6	0.06751	-0.00000	0.06751	-0.00000

The Roots of the COMPANION MATRIX // Model: H(1)

	Real	Imaginary	Modulus	Argument
Root1	1.00000	-0.00000	1.00000	-0.00000
Root2	0.91003	0.00000	0.91003	0.00000
Root3	0.78487	0.12887	0.79538	0.16275
Root4	0.78487	-0.12887	0.79538	-0.16275
Root5	-0.35791	0.00000	0.35791	3.14159
Root6	0.06838	-0.00000	0.06838	-0.00000

Bilag 15

Skema 15.1

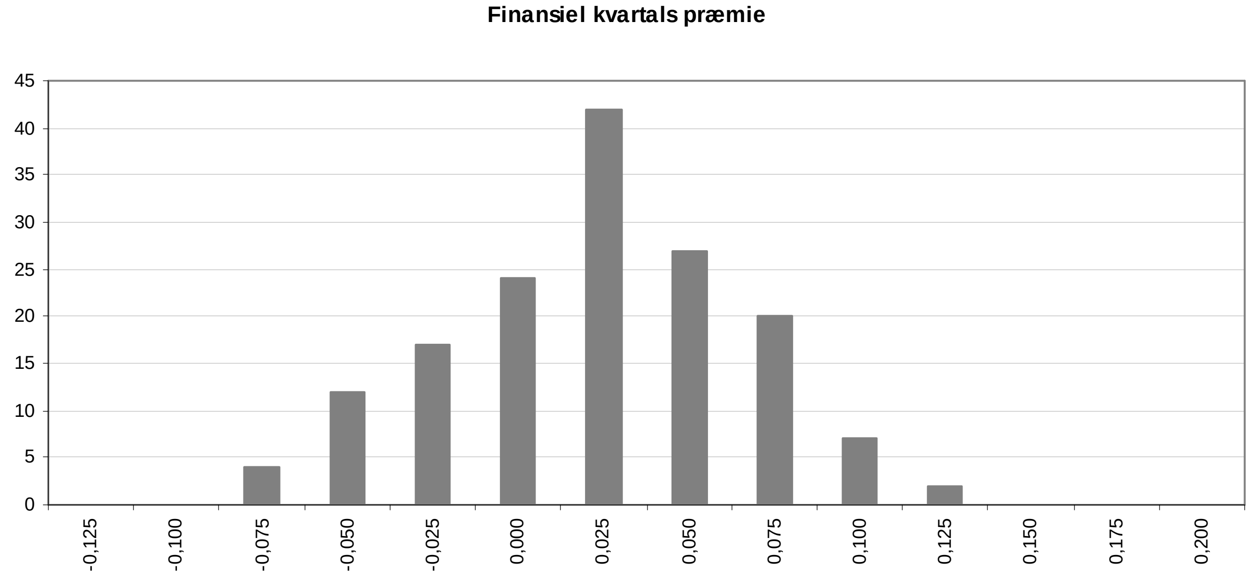
	Kortsigtende	Residual Std.afv.				Informationskriterier			Test for Autokorrelation (p-værdier)			Test for Normalitet	Test for ARCH (p-værdier)	
Model	**Parametre**	**Daktie**	**Drisikofri**	**Krydskorrelation**	**Log(sigma)**	**SC**	**H-Q**	**Trace korrelation**	**Ljung-Box**	**LM(1)**	**LM(2)**	**(p-værdi)**	**LM(1)**	**LM(2)**
2 lags, T1,T2	G1	0,0915	0,0021	0,104	-17,096	-16,510	-16,72	0,551	0,116	0,076	0,183	0,344	0,804	0,436
3 lags, T1,T2	G1,G2	0,0891	0,0021	0,106	-17,149	-16,429	-16,687	0,572	0,076	0,533	0,690	0,365	0,632	0,811
3 lags, T1,T2	G1	0,0892	0,0021	0,105	-17,141	-16,520	-16,742	0,571	0,057	0,541	0,665	0,305	0,693	0,854

Skema 15.2

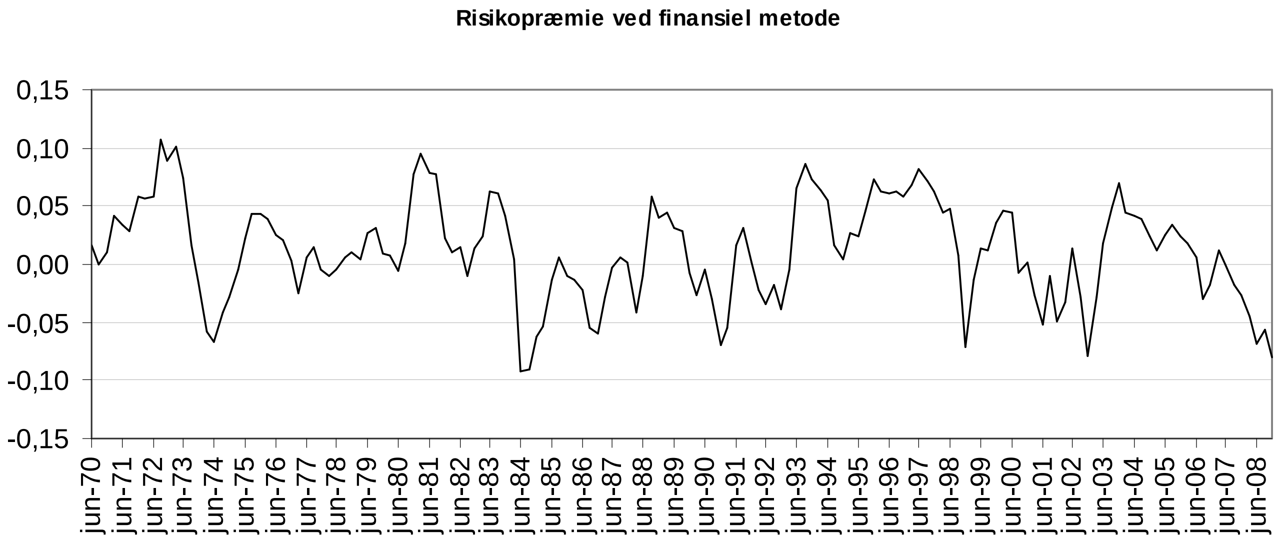
	Kortsigtende								ARCH(2)	Normalitet	
Model	**Parametre**	**Variabel**	**Middelværdi**	**Std.afv**	**Skewness**	**Kurtosis**	**Maximum**	**Minimum**	**p-værdi**	**p-værdi**	**R^2**
2 lags, T1,T2	G1	Aktie	0,000	0,091	0,024	3,231	0,266	-0,249	0,021	0,565	0,175
2 lags, T1,T2	G1	Risikofri	0,000	0,002	-0,117	3,500	0,006	-0,006	0,191	0,213	0,927
3 lags, T1,T2	G1,G2	Aktie	0,000	0,089	-0,185	3,217	0,234	-0,251	0,252	0,458	0,216
3 lags, T1,T2	G1,G2	Risikofri	0,000	0,002	-0,074	3,450	0,005	-0,006	0,375	0,268	0,927
3 lags, T1,T2	G1	Aktie	0,000	0,089	-0,185	3,252	0,236	-0,253	0,242	0,423	0,216
3 lags, T1,T2	G1	Risikofri	0,000	0,002	-0,100	3,474	0,006	-0,006	0,357	0,240	0,927

Bilag 16

Graf 16.1



Graf 16.2



Bilag 17

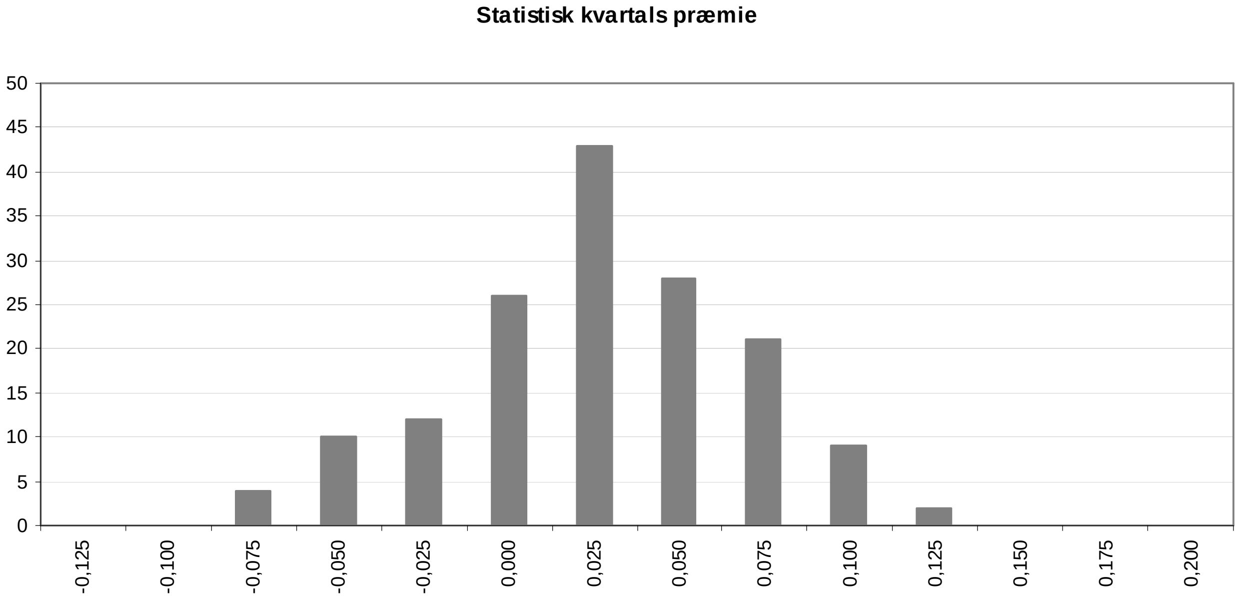
Koden til cholesky dekomponering af kovariansmatricen kommer fra på hjemmesiden:
http://www.vbnumericalmethods.com/math/

Koden indsættes i et modul tilhørende excelarket med data og beregninger.

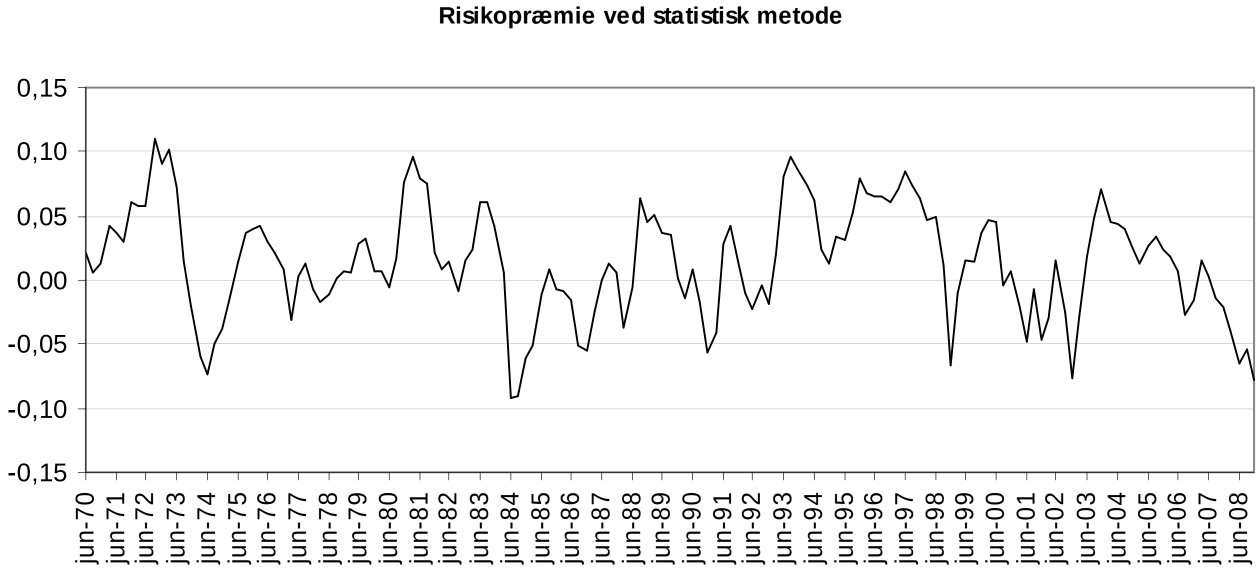
```
Function Cholesky(Mat As Range)
Dim A, L() As Double, s As Double
A = Mat
n = Mat.Rows.Count
M = Mat.Columns.Count
If n <> M Then
   Cholesky = "?"
   Exit Function
End If

ReDim L(1 To n, 1 To n)
For j = 1 To n
   s = 0
   For k = 1 To j - 1
      s = s + L(j, k) ^ 2
   Next k
   L(j, j) = A(j, j) - s
   If L(j, j) <= 0 Then Exit For
   L(j, j) = Sqr(L(j, j))

   For i = j + 1 To n
      s = 0
      For k = 1 To j - 1
         s = s + L(i, k) * L(j, k)
      Next k
      L(i, j) = (A(i, j) - s) / L(j, j)
   Next i
Next j
Cholesky = L
End Function
```

Bilag 18

Graf 18.1



Graf 18.2



Dato	Aktie	Risikofri
31-12-1969	4,60517	4,60517
31-03-1970	4,556298	4,614134
30-06-1970	4,464525	4,622038
30-09-1970	4,424614	4,625492
31-12-1970	4,454029	4,627209
31-03-1971	4,391019	4,630848
30-06-1971	4,369871	4,632714
30-09-1971	4,425664	4,638251
31-12-1971	4,412723	4,641919
31-03-1972	4,471202	4,643369
30-06-1972	4,696831	4,647348
30-09-1972	4,749535	4,648602
31-12-1972	5,055304	4,6487
31-03-1973	5,086673	4,647399
30-06-1973	5,152148	4,645929
30-09-1973	5,062657	4,642064
31-12-1973	4,920855	4,63868
31-03-1974	4,744655	4,629188
30-06-1974	4,663984	4,617959
30-09-1974	4,530495	4,602998
31-12-1974	4,529419	4,585403
31-03-1975	4,521801	4,572061
30-06-1975	4,615978	4,563617
30-09-1975	4,646555	4,55894
31-12-1975	4,725233	4,566058
31-03-1976	4,72346	4,571335
30-06-1976	4,782845	4,571531
30-09-1976	4,712827	4,578661
31-12-1976	4,626124	4,571128
31-03-1977	4,671022	4,566469
30-06-1977	4,637976	4,563881
30-09-1977	4,596535	4,558881
31-12-1977	4,523234	4,550554
31-03-1978	4,490611	4,541718
30-06-1978	4,459081	4,534586
30-09-1978	4,438727	4,530819
31-12-1978	4,371471	4,532659
31-03-1979	4,428062	4,535408
30-06-1979	4,390842	4,538272
30-09-1979	4,341508	4,535891
31-12-1979	4,282634	4,534408
31-03-1980	4,154363	4,53373
30-06-1980	4,156194	4,531698
30-09-1980	4,295778	4,530385
31-12-1980	4,423854	4,531018
31-03-1981	4,537826	4,531237
30-06-1981	4,698767	4,527933
30-09-1981	4,626268	4,526183
31-12-1981	4,715063	4,523413
31-03-1982	4,694514	4,522076
30-06-1982	4,659968	4,525928
30-09-1982	4,730699	4,529364
31-12-1982	4,766523	4,529657
31-03-1983	5,026344	4,527182
30-06-1983	5,144893	4,527255

30-09-1983	5,358449	4,529297
31-12-1983	5,382551	4,532718
31-03-1984	5,173892	4,534291
30-06-1984	5,138494	4,535102
30-09-1984	5,038923	4,536529
31-12-1984	5,007672	4,539333
31-03-1985	5,069708	4,543026
30-06-1985	5,143471	4,54694
30-09-1985	5,148039	4,553819
31-12-1985	5,204606	4,562381
31-03-1986	5,176614	4,574046
30-06-1986	5,072475	4,581469
30-09-1986	4,985541	4,588397
31-12-1986	4,982132	4,594806
31-03-1987	5,00124	4,599855
30-06-1987	5,038348	4,609087
30-09-1987	5,039899	4,61703
31-12-1987	4,878971	4,624478
31-03-1988	4,967034	4,629997
30-06-1988	5,124129	4,63956
30-09-1988	5,179453	4,648311
31-12-1988	5,375466	4,657038
31-03-1989	5,423698	4,667367
30-06-1989	5,622043	4,679393
30-09-1989	5,566667	4,692085
31-12-1989	5,650464	4,710039
31-03-1990	5,701155	4,729943
30-06-1990	5,67123	4,749647
30-09-1990	5,516537	4,769458
31-12-1990	5,4852	4,789989
31-03-1991	5,621973	4,808398
30-06-1991	5,685633	4,825429
30-09-1991	5,6962	4,844045
31-12-1991	5,637067	4,863782
31-03-1992	5,557571	4,883301
30-06-1992	5,532555	4,902981
30-09-1992	5,317249	4,934283
31-12-1992	5,341658	4,971687
31-03-1993	5,419831	4,996459
30-06-1993	5,548021	5,013343
30-09-1993	5,59823	5,033279
31-12-1993	5,694913	5,046413
31-03-1994	5,728019	5,057489
30-06-1994	5,6568	5,067976
30-09-1994	5,603198	5,07881
31-12-1994	5,601721	5,089142
31-03-1995	5,518531	5,10137
30-06-1995	5,581081	5,112494
30-09-1995	5,628793	5,122294
31-12-1995	5,659358	5,129529
31-03-1996	5,703843	5,135582
30-06-1996	5,750614	5,140465
30-09-1996	5,79267	5,144187
31-12-1996	5,897833	5,147438
31-03-1997	6,031978	5,151379
30-06-1997	6,131789	5,155167

30-09-1997	6,260886	5,158347
31-12-1997	6,321558	5,162987
31-03-1998	6,484833	5,167518
30-06-1998	6,417399	5,172834
30-09-1998	6,199027	5,180756
31-12-1998	6,315969	5,186899
31-03-1999	6,24613	5,190369
30-06-1999	6,33708	5,192536
30-09-1999	6,401396	5,194446
31-12-1999	6,559222	5,196256
31-03-2000	6,667132	5,198925
30-06-2000	6,627812	5,204403
30-09-2000	6,761715	5,212508
31-12-2000	6,632305	5,219359
31-03-2001	6,603264	5,226065
30-06-2001	6,643189	5,232022
30-09-2001	6,448656	5,236262
31-12-2001	6,497792	5,240091
31-03-2002	6,517002	5,242988
30-06-2002	6,384252	5,246586
30-09-2002	6,128782	5,249322
31-12-2002	6,133679	5,250371
31-03-2003	6,081422	5,250055
30-06-2003	6,207683	5,2498
30-09-2003	6,290284	5,250633
31-12-2003	6,33173	5,252531
31-03-2004	6,41654	5,255389
30-06-2004	6,468019	5,258196
30-09-2004	6,505067	5,260666
31-12-2004	6,513002	5,26267
31-03-2005	6,613606	5,265016
30-06-2005	6,692238	5,266169
30-09-2005	6,779312	5,266098
31-12-2005	6,8586	5,267118
31-03-2006	6,918542	5,269325
30-06-2006	6,862735	5,272202
30-09-2006	6,950705	5,276399
31-12-2006	7,055321	5,281877
31-03-2007	7,117907	5,287365
30-06-2007	7,161169	5,294218
30-09-2007	7,194305	5,303349
31-12-2007	7,163136	5,31002
31-03-2008	7,075629	5,314703
30-06-2008	7,062687	5,319273
30-09-2008	6,862078	5,322665
31-12-2008	6,532491	5,327596