

COPENHAGEN BUSINESS SCHOOL

CAND.MERC.MAT

KANDIDATAFHANDLING

---

# Optioner på Credit Default Swaps

---

OPTIONS ON CREDIT DEFAULT SWAPS

*Forfatter:*

Trine Vörts

*Vejleder:*

Mads Stenbo Nielsen

18. november 2015

Antal sider: 80

# Abstract

A few years before the financial crisis of 2008 the interest in CDS options increased, whilst during the financial crisis itself the trading of these instruments stood still. However, the market for CDS options has grown strongly and steadily ever since. The purpose of this thesis is to describe and investigate CDS options, trying to achieve a greater understanding of the growth in the market for CDS options.

I consider the underlying Credit Default Swap and the CDS option and discuss the market for CDS options and the use of these in practice. Based on Brigo's market model from 2005, I develop a price formula for CDS options. Empirically I find the survival probability of two different reference entities before and during the financial crisis of 2008 as well as today. Finally, I calculate the prices of CDS options and discuss the results.

From the calculated prices of CDS options I conclude that the spread has to increase relatively before the buyer of a payer CDS option profits from it. The possibility of making profit is higher when there is greater volatility in the market, which seems to be the case, especially in today's market. The results indicate the possibility for speculation.

# Indholdsfortegnelse

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Indledning</b>                                        | <b>4</b>  |
| 1.1      | Problemformulering . . . . .                             | 5         |
| 1.2      | Afgrænsning . . . . .                                    | 5         |
| 1.3      | Metode . . . . .                                         | 6         |
| 1.4      | Struktur . . . . .                                       | 7         |
| 1.4.1    | Teoretisk del . . . . .                                  | 7         |
| 1.4.2    | Empirisk del . . . . .                                   | 7         |
| 1.4.3    | Konklusion . . . . .                                     | 8         |
| <b>2</b> | <b>Credit Default Swaps</b>                              | <b>10</b> |
| 2.1      | Beskrivelse af en CDS kontrakt . . . . .                 | 10        |
| 2.1.1    | Definition af en kreditbegivenhed . . . . .              | 11        |
| 2.1.2    | Fastsættelse af udløbsdato for en CDS kontrakt . . . . . | 12        |
| 2.2      | Premium leg . . . . .                                    | 12        |
| 2.3      | Protection leg . . . . .                                 | 13        |
| 2.3.1    | Udløsning af protection leg . . . . .                    | 15        |
| 2.3.2    | Leverance optionen . . . . .                             | 16        |
| <b>3</b> | <b>CDS optioner</b>                                      | <b>18</b> |
| 3.1      | Beskrivelse af en CDS option . . . . .                   | 18        |
| 3.2      | Exercise af en CDS option . . . . .                      | 19        |
| 3.3      | Markedet for CDS optioner . . . . .                      | 21        |
| 3.4      | Brugen af CDS optioner i praksis . . . . .               | 21        |
| <b>4</b> | <b>Intensitetsmodeller og et teknisk værktøj</b>         | <b>23</b> |
| 4.1      | Intensitetsmodeller . . . . .                            | 23        |
| 4.1.1    | Cox processer . . . . .                                  | 24        |
| 4.1.2    | Tekniske resultater . . . . .                            | 25        |
| 4.1.3    | Martingale egenskaben . . . . .                          | 26        |
| 4.2      | Definitioner . . . . .                                   | 29        |
| 4.2.1    | Libor . . . . .                                          | 29        |
| 4.3      | Numeraire-skift . . . . .                                | 30        |

|           |                                                                 |           |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b>  | <b>Prisfastsættelse af CDS kontrakter og forward CDS-spænd</b>  | <b>33</b> |
| 5.1       | Notationer . . . . .                                            | 33        |
| 5.2       | Credit default swaps: Forskellige formuleringer . . . . .       | 34        |
| 5.2.1     | Running CDS kontrakt . . . . .                                  | 34        |
| 5.2.2     | Running CDS kontrakt med udskudte betalinger . . . . .          | 35        |
| 5.2.3     | Definition af forward CDS-spænd . . . . .                       | 36        |
| <b>6</b>  | <b>Ækvivalens mellem en CDS option og en konver-terbar DFRN</b> | <b>39</b> |
| 6.1       | DFRN og CDS kontrakt . . . . .                                  | 39        |
| 6.1.1     | En alternativ DFRN . . . . .                                    | 40        |
| 6.2       | CDS optioner og risikofyldte konverterbare floaters . . . . .   | 44        |
| <b>7</b>  | <b>Prisfastsættelse af CDS optioner</b>                         | <b>48</b> |
| 7.1       | En prisformel for CDS optioner . . . . .                        | 48        |
| 7.2       | En fuldkommen specificeret markedsmodel . . . . .               | 51        |
| <b>8</b>  | <b>Valg af data</b>                                             | <b>54</b> |
| 8.1       | Valg af CDS data . . . . .                                      | 54        |
| 8.2       | Valg af risikofri rente . . . . .                               | 57        |
| 8.3       | Opsummering . . . . .                                           | 58        |
| <b>9</b>  | <b>Overlevelsessandsynligheder</b>                              | <b>60</b> |
| 9.1       | Spot CDS-spænd . . . . .                                        | 60        |
| 9.2       | Diskontering . . . . .                                          | 61        |
| 9.3       | Beregning af overlevelsessandsynligheder . . . . .              | 62        |
| 9.4       | Resultater . . . . .                                            | 63        |
| <b>10</b> | <b>Priser på CDS optioner</b>                                   | <b>66</b> |
| 10.1      | Prisformlen for CDS optioner . . . . .                          | 67        |
| 10.2      | Forward CDS-spænd . . . . .                                     | 67        |
| 10.3      | Beregning af priser på CDS optioner . . . . .                   | 69        |
| 10.4      | Historisk volatilitet . . . . .                                 | 71        |
| 10.5      | Diskussion . . . . .                                            | 76        |
| 10.6      | Kritik . . . . .                                                | 78        |

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>11 Konklusion</b>                                                  | <b>80</b> |
| <b>12 Litteraturliste</b>                                             | <b>81</b> |
| <b>13 Bilag</b>                                                       | <b>84</b> |
| 13.1 Bilag A - Diskonteringsfaktorer . . . . .                        | 84        |
| 13.2 Bilag B - CDS options priser 2005 . . . . .                      | 85        |
| 13.3 Bilag C - Standard errors for estimerede volatiliteter . . . . . | 85        |
| 13.4 Bilag D - CDS options priser, historisk volatilitet . . . . .    | 86        |
| 13.5 Bilag E - CDS options priser, historisk volatilitet 2 . . . . .  | 88        |
| 13.6 Bilag F - Histogrammer . . . . .                                 | 90        |
| 13.7 Bilag G - Daglige ændringer i spænd . . . . .                    | 92        |
| 13.8 Bilag H - R kode . . . . .                                       | 93        |

# 1 Indledning

En Credit Default Swap (CDS) er en aftale mellem to parter om at handle kreditrisiko på en specifik virksomhed eller stat, der betegnes referenceenheden. Kontrakten beskytter køber mod, at referenceenheden går fallit eller ikke kan betale sine forpligtelser i en bestemt periode. Sælger af beskyttelsen modtager en løbende præmiebetaling af køber, da sælger påtager sig kreditrisikoen forbundet med den underliggende obligation udstedt af referenceenheden.

Før den finansielle krise oplevede man en kraftig vækst i markedet for CDS kontrakter. Det store CDS-marked var gennem krisen særdeles udskældt, men der har imidlertid været uenighed om, hvorvidt væksten i markedet var en medvirkende årsag til den finansielle krise eller om den forstærkede krisen<sup>1</sup>. Siden den finansielle krise er markedet for CDS kontrakter aftaget kraftigt<sup>2</sup>.

I denne afhandling betragter jeg optioner på Credit Default Swaps, også kaldet CDS optioner. En CDS option giver ejeren retten til at købe eller sælge en CDS kontrakt til et specifikt spænd på et fremtidigt tidspunkt. Ejeren af en *payer* CDS option har retten til at købe beskyttelse til et strike spænd  $K$ , hvorfor han vil exercise optionen, når markedsspændet er højere end  $K$ . CDS optioner kan anvendes til at hedge kreditrisiko eller til spekulation i CDS-spænd og volatilitet. Litteraturen på området er imidlertid begrænset.

I årene før den finansielle krise oplevede man en begyndende interesse for CDS optioner, men under krisen gik handlen med disse instrumenter imidlertid i stå<sup>3</sup>. Efterfølgende er markedet for CDS optioner vokset markant, særligt for de såkaldte CDS indeks optioner<sup>4</sup>. Denne tendens er selve motivationen for at forsøge at opnå en forståelse for den eksplosive vækst i markedet for CDS optioner i løbet af de seneste år.

---

<sup>1</sup>Erhvervs- og vækstministeriet, Den finansielle krise i Danmark - årsager, konsekvenser og læring

<sup>2</sup>ISDA Swapsinfo

<sup>3</sup>FT Alphaville, CDS options market multiplies alongside questions

<sup>4</sup>Bloomberg, Maybe Investors Love Credit Default Index Options a Little Too Much

## 1.1 Problemformulering

I denne afhandling vil CDS optioner blive beskrevet og undersøgt. Formålet med dette er således, at forsøge at give læseren en forståelse for denne opblomstring i markedet for CDS optioner, der har fundet sted i løbet af de seneste år.

Ovenstående problemformulering operationaliseres ved at opstille følgende hjælpespørgsmål, der vil fungere som et styringsredskab for afhandlingen:

**Hvorfor har vi set en eksplosiv vækst i markedet for CDS optioner gennem de seneste år?**

Det er væsentligt at bemærke, at afhandlingen ikke vil give et entydigt svar på ovenstående, men snarere, ved gennemgang af prisfastsættelse af CDS optioner, bidrage til at give en større forståelse for produktet, dets anvendelighed samt væksten i markedet.

På baggrund af ovenstående vil afhandlingen:

- Beskrive den underliggende CDS kontrakt
- Beskrive CDS optioner og diskutere anvendelsen af disse i praksis
- Udlede en prisformel for CDS optioner med udgangspunkt i Brigos markedsmode fra 2005<sup>5</sup>
- Bestemme priser på CDS optioner ud fra observeret data.

I afhandlingen prisfastsættes CDS optioner på The Royal Bank of Scotland samt Volvo. Datoerne for prisfastsættelsen er 1. oktober 2015, 12. december 2008 samt 3. oktober 2005.

## 1.2 Afgrænsning

Jeg afgrænser mig ved kun at betragte CDS kontrakter på virksomhedsobligationer og undlader dermed at se på CDS kontrakter på statsobligationer. Risikoen forbundet med virksomhedsobligationer er generelt højere end på statsobligationer<sup>6</sup>, og statsobligationer

---

<sup>5</sup>D. Brigo, Market model for CDS options and callable floaters

<sup>6</sup>Morningstar, Risici i virksomhedsobligationer

påvirkes endvidere af politiske forhold. Eksempelvis forbød EU i 2011 handel med de såkaldte naked CDS kontrakter på statsobligationer<sup>7</sup>.

For at kunne udregne priser på CDS optioner, må man kende overlevelsessandsynligheder. Man kan bestemme disse ved hjælp af affine modeller, men jeg finder det imidlertid tilstrækkeligt at udregne de implicitte overlevelsessandsynligheder ud fra en ligning for forward CDS-spændet.

Jeg afgrænser mig ved at fokusere på CDS optioner på enkelte virksomheder, og vil dermed kun kort nævne CDS indeks optioner i forbindelse med markedet for CDS optioner samt anvendelsen af disse instrumenter i praksis. I den empiriske del udregner jeg således CDS options priser på enkelte virksomheder, da jeg finder disse mest interessante med henblik på at undersøge problemformuleringen. Endvidere betragtes blot de såkaldte *knockout* CDS optioner i udledningen af prisformlen samt i den empiriske del, eftersom disse er standard for CDS optioner på enkelte virksomheder.

Det antages, at læseren er bekendt med fundamental finansieringsteori, hvorfor jeg ikke vil give en introduktion til dette.

### 1.3 Metode

For at undersøge problemformuleringen vil afhandlingen være inddelt i en teoretisk og en empirisk del. I den teoretiske del tager jeg udgangspunkt i en artikel af Brigo fra 2005. Denne artikel er blevet udgivet i Risk Magazine, som er et meget udbredt tidsskrift blandt praktikere. Prisformlen er baseret på Blacks formel, der er ækvivalent med den meget anerkendte Black-Scholes formel med undtagelse af, at prisen på det underliggende aktiv er angivet som en fremtidig pris og ikke som en spot pris. Afhandlingens empiriske del vil indeholde beregninger, der er foretaget på baggrund af observeret data, hvorfor valget af datakilde vil have betydning. Jeg har anvendt data fra Bloomberg til at bestemme priser på CDS optioner, da dette er en etableret datakilde. På baggrund af overstående vurderer jeg de valgte kilder som troværdige.

---

<sup>7</sup>Y. Che og R. Stehi, Credit Market Speculation and Cost of Capital



Den empiriske del vil overordnet set være baseret på den positivistiske tankegang. Positivisten vil mene, at en teori er sand, hvis den kan bekræftes af det virkeligt observerede, dvs. hvis teorien kan verificeres. *Verifikationsprincippet* har imidlertid det problem, at en teori kan erklæres sand, hvis det blot er det ”rigtige” data, der observeres. Det er derfor vigtigt, at have gjort sig nogle tanker omkring dette, da f.eks. rimeligheden af priser på CDS optioner kan være afhængig af, hvilken periode der betragtes. Kritikken af positivismen kommer fra flere sider. Ifølge Socialkonstruktivismen er det ikke muligt at finde en objektiv videnskabelig sandhed, da den større eller mindre grad vil være underlagt subjektive fænomener<sup>8</sup>.

## 1.4 Struktur

Afhandlingen er opdelt i en teoretisk og en empirisk del.

### 1.4.1 Teoretisk del

Kapitel 2 giver en detaljeret gennemgang af den underliggende CDS kontrakt. I kapitel 3 beskrives CDS optioner samt markedet for og brugen af disse instrumenter i praksis. Intensitetsmodeller anvendes til at prisfastsætte kreditrisiko. Disse modeller introduceres i kapitel 4 sammen med numeraire-skift teknikken, der benyttes til at prisfastsætte CDS optioner. Kapitel 5 betragter nutidsværdier af CDS kontrakter og udleder en ligning for et forward CDS-spænd, da dette indgår i prisformlen for CDS optionen. I kapitel 6 viser jeg, at der er en lighed mellem en konverterbar floater og en CDS option. Det sidste kapitel i den teoretiske del udleder en prisformel for CDS optioner og diskuterer kort et forsøg på at nå en fuldkommen markedsmodel.

### 1.4.2 Empirisk del

I kapitel 8 gennemgås de valg af data, der er truffet til den empiriske analyse. For at kunne udregne priser på CDS optioner, må man kende overlevelsessandsynligheder. Beregninger for disse gennemgås og præsenteres i kapitel 9. I kapitel 10 beregnes priser på CDS optioner ud fra de fundne overlevelsessandsynligheder og plausibiliteten af de fundne priser diskuteres. Herefter opstilles en række kritikpunkter af prisfastsættelsen.

---

<sup>8</sup>Brier, Informationsvidenskabsteori

### **1.4.3 Konklusion**

Til sidst i afhandlingen konkluderes på problemformuleringen.

# Del 1

## Teoretisk del

## 2 Credit Default Swaps

I dette kapitel beskriver jeg en Credit Default Swap, som er det underliggende aktiv i en CDS option. Jeg specificerer begrebet kreditbegivenhed, hvorefter jeg ser på mekanismerne for premium og protection leg, samt hvad der udløser betalingen af protection leg. Til sidst betragtes betydningen af en leverance option.

Kapitlet tager udgangspunkt i *Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates* af O’Kane.

### 2.1 Beskrivelse af en CDS kontrakt

En Credit Default Swap (CDS) er det mest populære kreditderivat. Det er en over-the-counter kontrakt, der beskytter en part, *protection buyer*, mod et tab fra pari af en angivet pålydende værdi af en obligation som følge af, at en bestemt virksomhed går fallit. Det at en virksomhed går fallit kaldes for en *kreditbegivenhed*<sup>1</sup> og virksomheden kaldes *referenceenheden*. Ved indgåelse af en CDS-kontrakt er protection buyer beskyttet den første kalenderdag efter handelsdagen, *effective date*, der foruden hverdage også kan falde på søndage eller helligdage<sup>2</sup>. Kontrakten løber indtil en bestemt fastsat udløbs dato. De specificerede obligationer i CDS-kontrakten, hvis tab fra pari af den pålydende værdi protection buyer er beskyttet imod i tilfælde af en kreditbegivenhed, kaldes for *leverance obligationerne*.

En CDS kontrakt har ingen initial omkostning, men består af to ben: *protection leg* og *premium leg*, som vist i figur 1.

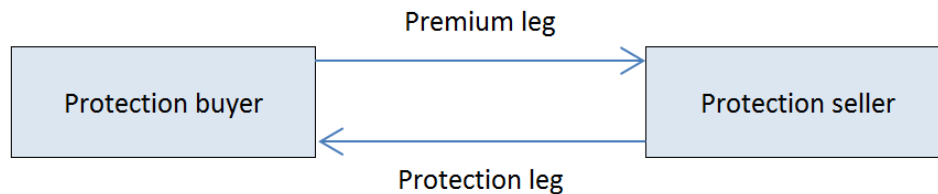
- *Protection leg*: I tilfælde af en kreditbegivenhed skal protection seller kompensere protection buyer for tabet fra pari af den pålydende værdi af leverance obligationerne.
- *Premium leg*: Protection buyer betaler regelmæssige, ofte kvartalsvise, betalinger til protection seller, da protection seller påtager sig kreditrisikoen forbundet med

---

<sup>1</sup>Begrebet kreditbegivenhed defineres i afsnit 2.1.1

<sup>2</sup>Virksomheder kan også gå fallit på søndage og helligdage

leverance obligationerne. Betalingerne fortsætter indtil kontrakten udløber eller indtil, at der indtræffer en kreditbegivenhed. Størrelsen på betalingerne bestemmes på markedet som et årligt spænd ved indgåelse af kontrakten og kaldes *CDS-spændet*.



Figur 1: Mekanisme for en CDS-kontrakt

Afviklingen af en CDS-kontrakt i tilfælde af en kreditbegivenhed sker enten ved fysisk levering af obligationerne eller ved kontant afregning.

### 2.1.1 Definition af en kreditbegivenhed

En kreditbegivenhed er en betegnelse for den begivenhed, der udløser betalingen af protection leg, og er dermed et centralt aspekt ved en CDS kontrakt. De mest almindelige kreditbegivenheder er:

- Konkurs: Referenceenheden bliver insolvent eller er ikke i stand til at betale dens gæld<sup>3</sup>.
- Manglende betaling: Referenceenheden betaler ikke de lovede kupon- og tilbagebetalinger.
- Omstrukturering: Referenceenheden omstrukturerer sin gæld (gælder ikke genforhandling til mere favorable lånevilkår).

Markedet skelner generelt mellem *hårde* og *bløde* kreditbegivenheder. De hårde kreditbegivenheder er dem, hvor hele gælden udløber og skal betales omgående. Her handles referenceenhedens aktiver til samme pris. De mest almindelige hårde kreditbegivenheder er konkurs og manglende betaling. Den eneste bløde kreditbegivenhed er omstrukturering, hvor gælden fortsat handles efter en prisstruktur. Aktiver med kortere løbetid og/eller højere kupon vil blive handlet til en højere pris.

---

<sup>3</sup>Denne kreditbegivenhed er ikke relevant for statsobligationer

### 2.1.2 Fastsættelse af udløbsdato for en CDS kontrakt

De mest likvide CDS kontrakter havde indtil 2003 en eksakt løbetid på enten 3, 5 eller 10 år fra effective date. Det gjorde det problematisk, hvis man ønskede at hedge nyligt handlede CDS kontrakter, medmindre de blev indgået på netop effective date. Problemet lå i den fremtidige krediteksponering, der ville opstå qua de forskellige løbetider på den originale CDS kontrakt og den modsatrettede CDS hedge<sup>4</sup>. Når den ene kontrakt udløb, ville man stå tilbage med kreditrisikoen på den anden. Problemstillingen betød, at man ændrede konventionen for fastsættelsen af udløbsdatoen for standard CDS kontrakter, således at kontrakterne i stedet blev handlet med kvartalsvise udløb. Den nye konvention, der blev inspireret af de såkaldte IMM<sup>5</sup> dage, som benyttes i markedet for rentefutures, betød, at udløbsdatoen for en CDS kontrakt kunne falde d. 20. marts, 20. juni, 20. september eller 20. december hvert år. Det er den dag i dag stadig markedspraksis for standard kontrakterne. Derfor er den mest likvide CDS kontrakt med udløb  $T$  den kontrakt, der udløber den første IMM dag  $T$  år efter.

## 2.2 Premium leg

Premium leg er de betalinger protection buyer betaler til protection seller for beskyttelse af leverance obligationerne, indtil kontrakten udløber eller til der indtræffer en kreditbeviggenhed. Betalingerne falder som tidligere nævnt typisk en gang i kvartalet, og størrelsen på betalingerne fastlægges ud fra CDS-spændet, der bestemmes på markedet ved indgåelse af kontrakten.

For at finde størrelsen af betalingerne i en CDS kontrakt med løbetid  $T$  benyttes følgende fremgangsmåde:

1. Udløbsdatoen fastsættes som den første "IMM" dag efter  $T$  års løbetid fra effective date.
2. De kvartalsvise betalingsdatoer findes ved at tage udgangspunkt i udløbsdatoen og derefter bevæge sig tilbage i tiden med kvartalsvise skridt, til tidligere IMM datoer, indtil effective date nås.

---

<sup>4</sup>En CDS kontrakt med samme udløb som den oprindelige kontrakt vil ikke være en standard kontrakt, hvorfor den vil have en højere pris i form af et højere spænd

<sup>5</sup>International Money Market

3. Disse betalingsdatoer tilpasses, så de ikke falder i weekender eller på helligdage ved typisk at rykke betalingen til den førstkommande bankdag. Denne dag kan imidlertid være forskellig fra land til land, da helligdage kan falde forskelligt, afhængig af hvilket land kontrakten er handlet i.
4. Betalingerne beregnes ved brug af aktuel/360 konventionen<sup>6</sup>, hvor størrelsen af præmiebetalingen til tidspunkt  $t_2$  per 1 kr. pålydende værdi af kontrakten er givet ved

$$S \times \frac{\text{DagDiff}(t_1, t_2)}{360}$$

hvor  $S$  angiver CDS-spændet og  $\text{DagDiff}(t_1, t_2)$  er antal kalenderdage mellem det tidligere præmiebetalings tidspunkt  $t_1$  og det nuværende præmiebetalings tidspunkt  $t_2$ . Præmiebetalingerne behøver dermed ikke at være ens, da der kan være forskel på tiden mellem betalingerne. Ydermere vil der typisk være en betydelig mindre betaling forbundet med det første betalingstidspunkt qua den kortere periode.

I en standard kontrakt vil protection buyer, såfremt der indtræffer en kreditbegivenhed, skulle betale en andel af præmiebetalingen som compensation for beskyttelse af leverance obligationerne fra den seneste præmiebetalingsdato og frem til kreditbegivenheden. Denne andel kaldes for den *påløbne præmiebetaling*.

## 2.3 Protection leg

Protection leg er den betingede betaling, protection seller betaler til protection buyer, såfremt der indtræffer en kreditbegivenhed, som compensation for tabet fra pari af den pålydende værdi af leverance obligationerne. Afviklingen af kontrakten ved forekomsten af en kreditbegivenhed kan ske på følgende to måder:

1. *Fysisk afvikling*: Protection buyer leverer de svækkede leverance obligationer til protection seller og modtager den pålydende værdi i kontanter fra protection seller.
2. *Kontant afvikling*: Protection seller betaler forskellen mellem den pålydende værdi af *reference obligationen* og recovery kontant til protection buyer.

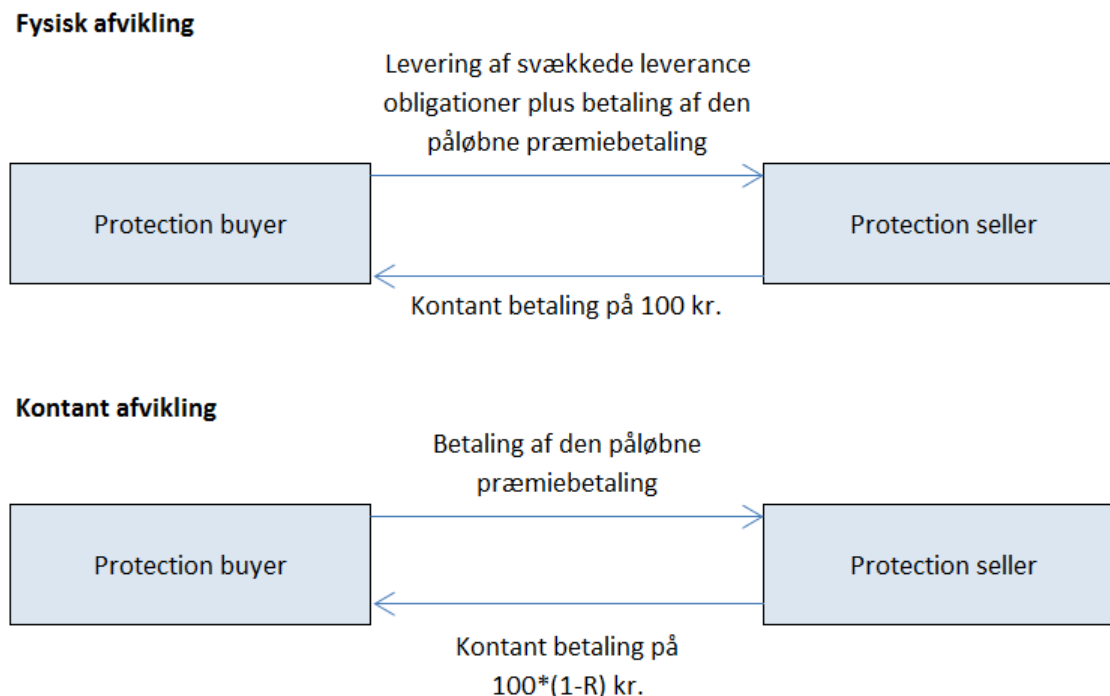
Der gælder for både fysisk og kontant afvikling, at protection buyer, i tilfælde af en kreditbegivenhed, skal betale den påløbne præmiebetaling.

---

<sup>6</sup>Det faktiske antal af dage i perioden i forhold til et år på 360 dage

Referenceobligationen er en specifik obligation udstedt af referenceenheden. Ved fysisk afvikling behøver protection buyer ikke nødvendigvis at levere referenceobligationen, såfremt der indtræffer en kreditbegivenhed. Han kan levere enhver leverance obligation, hvorfor det gælder, at alle leverance obligationerne må være *pari passu*, dvs. på lige fod eller senior til reference obligationen. Recovery er det, der er tilbage efter fallit, hvis værdi bestemmes på en to-trins auktion, hvor der først bestemmes en indikativ pris på obligationen, hvorefter den endelige pris fastsættes<sup>7</sup>.

Figur 2 er en illustration af de to former for afvikling efterfulgt af en kreditbegivenhed.  $R$  angiver recovery raten, og kontraktens pålydende værdi antages at være 100 kr.



Figur 2: De to former for afvikling af en CDS-kontrakt ved en kreditbegivenhed

De seneste år har der været en bevægelse mod kontant afvikling baseret på en auktionsordning. Det løser problemet med fysisk levering, da antallet af udestående CDS-kontrakter ofte er meget højere end antallet af leverance obligationer. Denne situation er opstået, fordi CDS-kontrakterne er gået fra at være et hedging værktøj til at blive brugt til spekulation. En CDS kontrakt siges at være *naked*, hvis protection buyer ikke ejer den underliggende obligation. En naked CDS kontrakt er en to-sidet spekulation, hvor protection buyer spekulerer i fallit, og protection seller spekulerer i ikke-fallit. Efter beskyldninger

<sup>7</sup>R. K. Sundaram, CDS Auctions and Recovery Rates: An Appraisal



om at spekulation i CDS kontrakter havde forværret finanskrisen, valgte EU i 2011 at forbyde handel med naked CDS kontrakter på statsobligationer<sup>8</sup>.

Typisk kan flere obligationer benyttes som leverance obligationer og dermed leveres ved fysisk afvikling. Fordelen ved dette er, at det forbedrer likviditeten, idet man kan benytte en standard kontrakt til at hedge flere forskellige obligationer, sålænge de kan karakteriseres som en leverance obligation. På den anden side betyder det også, at protection buyer har en *leverance option*, da han kan levere enhver obligation, der opfylder leverance obligationernes kriterier. Dette vil blive beskrevet nærmere i afsnit 2.3.2.

### 2.3.1 Udløsning af protection leg

Såfremt der opstår en kreditbegivenhed for en af udstederens obligationer, vil protection buyer øjeblikkelig udløse betalingen af protection leg. Ved fysisk afvikling vil tidslinjen efter udløsningen, bestå af følgende tre trin:

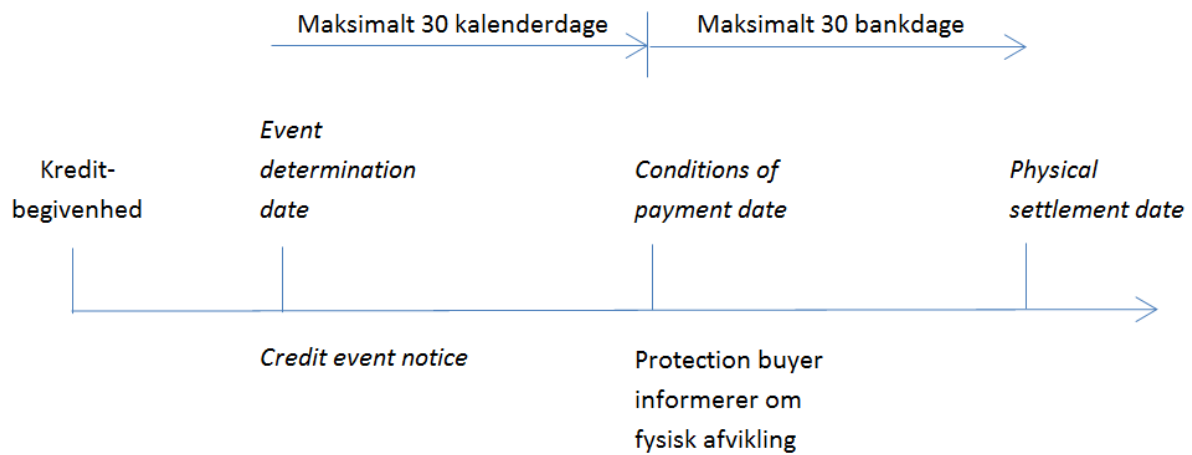
1. Protection buyer informerer protection seller om, at der er indtruffet en kreditbegivenhed ved at give en *Credit Event Notice* til protection seller. Den dag protection seller modtager Credit Event Notice kaldes for *Event Determination Date*. Kreditbegivenheden skal kunne dokumenteres af mindst to kilder fra offentlig tilgængelig information. Det kan eksempelvis være Reuters, Børsen, Wall Street Journal eller Financial Times.
2. Protection buyer skal indenfor 30 kalenderdage efter Event Determination Date informere om den fysiske afvikling, såsom hvilke leverance obligationer der vil blive leveret til protection seller. Den dag der informeres om den fysiske afvikling kaldes for *Conditions of Payment date*.
3. Protection buyer skal indenfor 30 bankdage gennemføre den fysiske afvikling, og denne dag kaldes for *Physical Settlement date*. Informationen omkring den fysiske afvikling kan ændres på ethvert tidspunkt mellem Conditions of Payment date og Physical Settlement date.

I nedenstående figur ses tidslinjen for fysisk afvikling efter en indtruffen kreditbegivenhed. Efter protection seller har modtaget Credit Event Notice og indtil den fysiske afvikling

---

<sup>8</sup>Y. Che og R. Stehi, Credit Market Speculation and Cost of Capital

gennemføres, kan der gå op til 72 kalenderdage (foruden helligdage).



Figur 3: Tidslinje for en CDS kontrakt ved fysisk afvikling

### 2.3.2 Leverance optionen

Når der er indtruffet en kreditbegivenhed, har protection buyer ved fysisk afvikling mulighed for at vælge mellem flere obligationer, der opfylder kriterierne for leverance obligationerne. Protection buyer har dermed en leverance option. Denne option vil kun have en værdi, hvis leverance obligationerne, efter en kreditbegivenhed, handles til forskellige priser. Forskellige priser forekommer dog kun i tilfælde af en blød kreditbegivenhed, fordi reference enhedens aktiver herefter fortsat handles efter en prisstruktur, til forskel fra de hårde kreditbegivenheder, hvor aktiverne handles til samme pris.

Hvis protection buyer benytter CDS kontrakten til at hedge en specifik obligation som han ejer, kan han efter en omstrukturering sælge den originale obligation og købe en billigere leverance obligation. Herefter leverer han den billigere leverance obligation til protection seller og modtager pari. Værdien af leverance optionen er derfor forskellen mellem værdien af den oprindelige obligation og værdien af den billigste leverance obligation. Leverance optionen har dermed positiv værdi for protection buyer og negativ værdi for protection seller, da protection seller risikerer at modtage en leverance obligation med en lavere værdi.

Med henblik på at minimere værdien af leverance optionen har det amerikanske og europæiske marked indført klausuler, der bl.a. begrænser løbetiden for leverance obligationerne efter en omstrukturering. Nogle kontrakter i USA handles desuden uden at inkludere omstrukturering som en kredit-begivenhed. Valget af klausul for omstrukturering påvirker CDS-spændet, idet leverance optionen har en værdi for protection buyer, hvorfor spændet må være højere hvis CDS kontrakten har en leverance option.

## 3 CDS optioner

I dette kapitel beskriver jeg en CDS option. Herefter vil jeg kort beskrive markedet for CDS optioner, hvorefter brugen af disse instrumenter i praksis diskuteres.

De to første afsnit tager udgangspunkt i *Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates* af O’Kane.

### 3.1 Beskrivelse af en CDS option

En CDS option er et over-the-counter produkt og kaldes også for en *default swaption*. Den giver ejeren retten, men ikke obligationen, til at indgå en CDS kontrakt til et specifikt spænd på et fremtidigt tidspunkt. De fleste CDS optioner er europæiske, hvorfor optionen kun kan exercises på udløbstidspunktet,  $t_E$ . Ejeren af en *payer* CDS option har retten til at købe beskyttelse på en given CDS kontrakt, og ved exercise betaler ejeren af optionen premium leg af strike CDS-spændet. Ejeren af en *receiver* CDS option har retten til at sælge beskyttelse på en given CDS kontrakt og modtage premium leg af strike CDS-spændet, såfremt optionen exercises. En CDS option har typisk en løbetid på en til seks måneder<sup>1</sup>.

Der findes to former for CDS optioner:

- En *knockout* CDS option: Optionen ophører, hvis der indtræffer en kreditbegivenhed før optionen udløber. Denne CDS option er typisk standard for CDS optioner på enkelte aktiver.
- En *non-knockout* CDS option: Optionen ophører ikke, hvis der indtræffer en kreditbegivenhed før optionen udløber. Denne CDS option er standard for CDS indeks optioner<sup>2</sup>.

Hvis der indtræffer en kreditbegivenhed, før optionen udløber, har ejeren af en payer non-knockout CDS option mulighed for at modtage den underliggende lange position i CDS kontrakten ved at exercise optionen på udløbstidspunktet. Ejeren af en receiver non-knockout CDS option vil derimod aldrig exercise CDS optionen, hvis reference enheden er

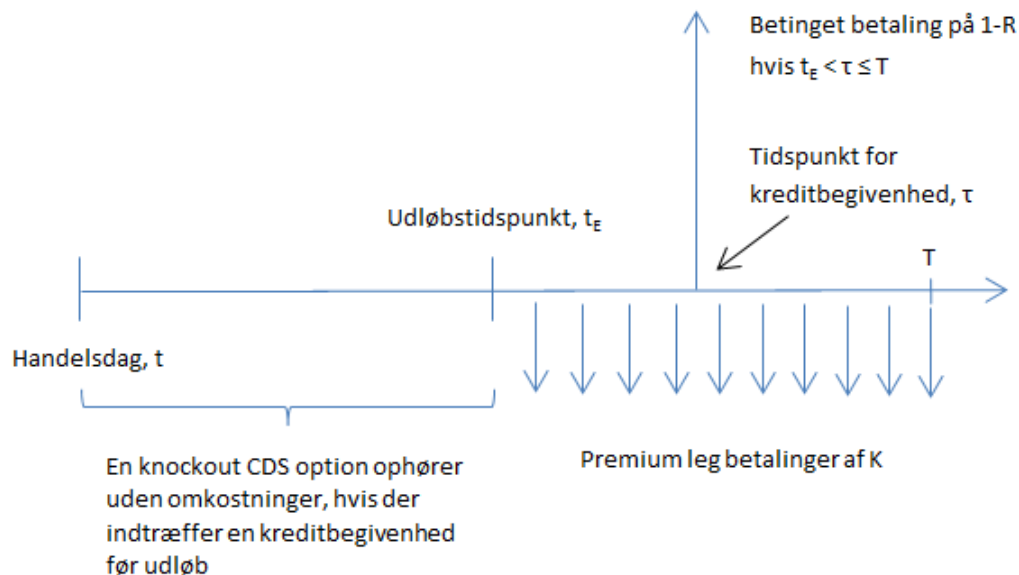
---

<sup>1</sup>Marketwatch, Despite reform push, CDS options go from toxic to tasty

<sup>2</sup>Liu & Jäckel, Options On Credit Default Index Swaps

gået fallit, da ejeren i dette tilfælde vil modtage den underliggende korte position i CDS kontrakten og realisere et tab på  $(1-R)$ .

Nedenstående figur er en illustration af de betalinger, der er forbundet med en payer knockout CDS option, når ejeren af optionen vælger at exercise. Strike CDS-spændet er angivet ved  $K$ , og tidspunktet hvor ejeren af optionen kan vælge at exercise er angivet ved  $t_E$ . Ved en receiver knockout CDS option ville pilene vende modsat, således at ejeren af optionen modtager premium leg af  $K$  ved exercise og betaler  $1 - R$ , såfremt kreditbe-  
givenheden indtræffer inden kontrakten udløber til tidspunkt  $T$ .



Figur 4: Payer knockout CDS option ved exercise

### 3.2 Exercise af en CDS option

Der betragtes en europæisk knockout CDS option med udløb  $t_E$ , hvor den underliggende CDS kontrakt har udløb  $T$ . Ejeren af optionen vil kun exercise, hvis værdien af CDS beskyttelsen, som han enten køber eller sælger, er mindre end omkostningerne ved tilsvarende kontrakt i markedet. Ved eksempelvis at betragte en payer CDS option, er værdien af

CDS beskyttelsen til tidspunkt  $t_E$  ved et fastsat spænd  $K$  givet ved

$$(S(t_E, T) - K) \times RPV01(t_E, T)$$

hvor  $S(t_E, T)$  er CDS markedsspændet til tidspunkt  $t_E$  og med udløb  $T$ .  $RPV01(t_E, T)$  angiver nutidsværdien til tidspunkt  $t_E$  af 1 bp betalt præmiebetaling i CDS kontrakten, indtil kontraktens udløb  $T$  eller fallit. Værdien er angivet til udløbstidspunktet  $t_E$  for optionen, hvorfor både  $S(t_E, T)$  og  $RPV01(t_E, T)$  er kendt, når optionen udløber. Omkostningerne forbundet med at indgå en CDS kontrakt i markedet fra  $t_E$  til  $T$  er nul ved markedsspændet  $S(t_E, T)$ . Derfor vil ejeren af optionen exercise, når

$$S(t_E, T) > K$$

Ejeren af optionen har retten til at købe beskyttelse til spændet  $K$ , hvorfor han vil exercise, hvis CDS markedsspændet er højere end  $K$ .

Ved i stedet at betragte en receiver CDS option, vil ejeren af optionen exercise, når

$$S(t_E, T) < K$$

Ejeren af optionen har retten til at sælge beskyttelse til spændet  $K$ , hvorfor han vil exercise, hvis CDS markedsspændet er mindre end  $K$ .

Ejeren af en payer knockout CDS option håber ikke, at der indtræffer en kreditbegivenhed før udløb. Ved et strike spænd på eksempelvis 100 bp samt et CDS markeds spænd, der handler til 1000 bp dagen før udløb, håber ejeren, at CDS-spændet bliver ved med at vokse. I tilfælde af, at der forekommer en kreditbegivenhed før udløb, vil optionen imidlertid ophøre uden betalinger. Hvis den i stedet indtræffer samme dag som optionen udløber, vil ejeren exercise optionen og modtage  $(1 - R)$  af optionens pålydende værdi. Der er derfor stor variation i de mulige udbetalinger. For ejeren af en receiver CDS option har det derimod ingen betydning, om optionen er knockout eller non-knockout, hvis der indtræffer en kreditbegivenhed før udløb, da ejeren aldrig vil vælge at exercise optionen.

### 3.3 Markedet for CDS optioner

I årene før den finansielle krise så man en begyndende interesse for CDS optioner. Under krisen gik handelen med disse instrumenter imidlertid helt i stå<sup>3</sup>, men markedet for CDS optioner er efterfølgende vokset betragteligt, særligt for de såkaldte CDS indeks optioner. CDS optioner giver ejeren retten til at købe eller sælge CDS indeks, som eksempelvis iTraxx eller Markit's CDX. Likviditeten for markedet på enkelte aktiver er særdeles begrænset, hvorimod markedet for CDS indeks optioner er blevet mere likvidt<sup>4</sup>.

Præcist data for størrelsen af markedet for CDS optioner er meget begrænset, men USA's tredjestørste bank<sup>5</sup>, Citigroup, estimerede i 2005, at der blev handlet CDS indeks optioner for omkring \$24 milliarder<sup>6</sup> i løbet af 2005. Citigroup lavede en tilsvarende estimering for 2013 og 2014, hvor tallene var henholdsvis \$574 milliarder og \$1,4 billioner. Hvis disse værdier er korrekte, betyder det, at aktiviteten i markedet for CDS indeks optioner er steget med over 5000% i løbet af 10 år<sup>7</sup>.

En rapport fra Barclays fra juli 2015 forsøger at sige noget om størrelsen på markedet for CDS indeks optioner ved at betragte volumen for CDS indeks optioner i forhold til volumen for CDS indeks. Rapporten viser, at volumen for CDS indeks optioner som en procentdel af volumen for CDS indeks i 2. kvartal 2015 var 80% for iTraxx Europe indekset. Til sammenligning var tallet for 4. kvartal 2014 55%<sup>8</sup>. Aktiviteten i CDS indeks optioner er altså vokset markant.

### 3.4 Brugen af CDS optioner i praksis

CDS optioner kan anvendes til hedging af kreditrisiko eller til spekulation i CDS-spænd og volatilitet. En typisk CDS option på en enkelt virksomhed handles som knockout, hvorfor optionen ophører, hvis der indtræffer en kreditbegivenhed, før optionen udløber. Hvis en investor køber en payer knockout CDS option med en løbetid på tre måneder, har

---

<sup>3</sup>FT Alphaville, CDS options market multiplies alongside questions

<sup>4</sup>O'Kane, Modeling Single-name and Multi-name Credit Derivates

<sup>5</sup>Relbanks, Top Bank in the World 2015

<sup>6</sup>Forklaringen bag disse estimater er ikke angivet i artiklen, hvorfor det antages at være den samlede udestående hovedstol af CDS indeks optioner

<sup>7</sup>Bloomberg, Maybe Investors Love Credit Default Index Options a Little Too Much

<sup>8</sup>Bloomberg, Maybe Investors Love Credit Default Index Options a Little Too Much

han retten til at købe den underliggende CDS kontrakt om tre måneder. Hvis formålet med CDS optionen er at risikoafdække, må det nødvendigvis være fordi, at han er rimelig sikker på at den underliggende virksomhed først går fallit efter de tre måneder samtidig med, at han ønsker at sikre sig mod større ændringer i CDS-spændet. Denne strategi kan foretrækkes frem for at købe den underliggende CDS kontrakt, da det maksimale tab er begrænset til prisen på optionen<sup>9</sup>.

Hvis CDS optionen i stedet er med et CDS indeks som underliggende aktiv, handles standard CDS optionen som non-knockout, hvorfor optionen ikke ophører, hvis der indtræffer en kreditbegivenhed før udløb. Ved at indgå en CDS indeks option kan man derfor, på en billigere måde, hedge et større antal fallitter end ved at købe CDS indekset direkte<sup>10</sup>. Da ejeren af en payer CDS indeks option modtager en compensation for enhver fallit mellem indgåelse og exercise tidspunktet, kan det i nogle tilfælde betale sig at exercise optionen, selvom strike spændet er lavere end spot spændet ved udløb<sup>11</sup>.

Spekulation forekommer, når investorer spekulerer i fremtidige bevægelser og handler med det formål at opnå profit og dermed ikke for at hedge kreditrisiko. I forbindelse med CDS optioner betyder spekulation, at investor spekulerer i CDS-spænd på enkelte virksomheder eller i CDS indeks. CDS indeks optioner kan derfor betragtes som en måde at købe eller sælge volatilitet, hvis man har en tro på at markedet vil være uroligt de næste måneders tid<sup>12</sup>. Ved eksempelvis at købe en at-the-money payer CDS option kan man opnå profit, hvis spændet på den underliggende CDS kontrakt er steget betragteligt.

Det vides ikke med sikkerhed, hvad der primært driver markedet for CDS optioner. Jeg ved imidlertid fra tidligere, at CDS optioner typisk har løbetider på mellem en til seks måneder. Hvis man ønsker at hedge kreditrisiko, kunne man måske lige så vel have købt den underliggende CDS kontrakt, hvilket kan indikere, at CDS optioner primært benyttes til spekulation. For at opnå en bedre forståelse for CDS optioner samt markedet for disse, vil jeg i det følgende gennemgå, hvorledes CDS optioner kan prisfastsættes samt beregne CDS options priser på enkelte aktiver ud fra observeret data.

---

<sup>9</sup>Globalcapital, Credit-Default Swap Index Options

<sup>10</sup>Bloomberg, Maybe Investors Love Credit Index Options a Little Too Much

<sup>11</sup>Globalcapital, Credit-Default Swap Index Options

<sup>12</sup>Marketwatch, Despite reform push, CDS options go from toxic to tasty



## 4 Intensitetsmodeller og et teknisk værktøj

I dette kapitel beskriver jeg idéen bag intensitetsmodeller, samt hvordan man kan anvende Cox processer til at beskrive sandsynligheden for overlevelse ved stokastisk intensitet. Herefter definerer jeg kort Libor, da jeg i kapitel 6 viser ligheden mellem en CDS option og en konverterbar DFRN. Til sidst gennemgår jeg *numeraire-skift*, som er et teknisk værktøj, der anvendes i prisfastsættelsen af CDS optioner.

Afsnittet om intensitetsmodeller tager udgangspunkt i D. Lando, *Credit Risk Modeling*.

### 4.1 Intensitetsmodeller

Der findes to forskellige modeller indenfor prisfastsættelse af kreditrisiko: Strukturelle modeller og intensitetsmodeller. De adskiller sig hovedsageligt fra hinanden ved deres definition af fallit. I strukturelle modeller afhænger fallit af virksomhedens kapitalstruktur, og fallit udløses, når værdien af virksomhedens aktiver rammer eller falder ned under en grænse. I intensitetsmodeller afhænger fallit af første gang, der forekommer et spring i en given springproces, og der er derfor ingen forklaring på, hvad der udløser fallit. Intensitetsmodellerne er nyttige, idet man kan anvende det matematiske setup fra rentestruktur modeller, hvorfor de er lettere at implementere. I denne afhandling benyttes intensitetsmodeller, hvorfor jeg vil beskrive disse.

*Hazard raten* er givet ved  $h(t)$  og defineres af Lando som

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{Q}(\tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t) = h(t)$$

hvor  $h(t)\Delta t$  er den tilnærmede sandsynlighed for fallit<sup>1</sup> i et lille tidsinterval fra tidspunkt  $t$  til tidspunkt  $t + \Delta t$  betinget af overlevelse til og med tidspunkt  $t$ . Den betingede fallitsandsynlighed er deterministisk, da den kun afhænger af tidens gang, hvorfor den kan beregnes for alle tidspunkter  $t$  til tidspunkt 0. Såfremt virksomheden ikke er gået fallit til tidspunkt  $t$ , vil der imidlertid være ny information i markedet, der ikke er tilgængeligt på tidspunkt 0, som kan ændre forventningen til virksomhedens overlevelse. Der ønskes derfor en model med stokastisk intensitet, hvorfor jeg i næste afsnit vil introducere *Cox*

---

<sup>1</sup>Det er den *tilnærmede* sandsynlighed for fallit på grund af grænsetilfældet

processer.

#### 4.1.1 Cox processer

Coxprocessen er en Poisson proces med stokastisk intensitet, hvorfor den også kaldes den dobbelt stokastiske Poisson proces.

Der antages at være givet et sandsynlighedsrum  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ , hvor  $\mathbb{Q}$  angiver det risikoneutrale eller martingale sandsynligheds mål, der medfører ingen arbitrage-muligheder. Under dette mål prisfastsættes alle aktiver som den forventede diskonterede værdi. Lad  $X$  være en stokastisk proces af fallit-frie tilstandsvariable i  $\mathbb{R}^d$  i det givne sandsynlighedsrum, og lad intensiteten  $\lambda$  være en ikke-negativ funktion. Der ønskes en konstruktion af en springproces  $N_t$ , således at  $\lambda(X_t)$  er  $\mathcal{G}_t$ -intensiteten af  $N$ . Der fokuseres på første gang processen springer, angivet ved  $\tau$ .

$\mathcal{F}_t$  er en filtrering genereret af  $X$ , hvor  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$ , og  $\mathcal{H}_t$  er en filtrering genereret af en  $N$ , hvor  $\mathcal{H}_t = \sigma\{N_s; 0 \leq s \leq t\}$ . Filtreringen  $\mathcal{G}_t$  er givet ved  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ , hvorfor  $\mathcal{G}_t$  både indeholder information omkring de fallit-frie tilstandsvariable  $X$  og om fallit er indtruffet i form af springprocessen  $N$ . Tidspunktet for fallit  $\tau$  defineres som

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda(X_s) ds \geq E_1 \right\}$$

hvor  $E_1$  er en eksponentiel stokastisk variabel med middelværdi 1.  $E_1$  er uafhængig af  $\mathcal{F}_t$  og er dermed uafhængig af de fallit-frie tilstandsvariable  $X$ . Definitionen af  $\tau$  betyder, at  $\lambda(X)$  er den stokastiske intensitet for fallittidspunktet. For at dette gælder kræves imidlertid, at  $1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t \lambda(X_s) 1_{\{\tau \geq s\}} ds$  er en martingale, der er tilpasset informationen  $\mathcal{G}_t$ , hvilket jeg vil vise i det følgende afsnit.

Hvis dette gælder, kan overlevelsessandsynligheden til og med tidspunkt  $t$  skrives som

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{Q} \left( \int_0^t \lambda(X_s) ds < E_1 \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^t \lambda(X_s) ds \right) \end{aligned}$$

Dette gælder fordi  $\int_0^t \lambda(X_s) ds$  er kendt, når  $\mathcal{F}_t$  er kendt, da det er en filtrering genereret af  $X$ , samt fordi  $E_1$  er eksponentialfordelt og uafhængig af  $\mathcal{F}_t$ .

#### 4.1.2 Tekniske resultater

For at kunne vise at  $1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t \lambda(X_s) 1_{\{\tau \geq s\}} ds$  er en martingale, vil jeg starte med at gennemgå nogle tekniske resultater.

Lad  $Z \in \mathcal{G}$  og antag  $\mathbb{E}|Z| < \infty$ . Der vil da eksistere en  $\mathcal{F}_t$ -målelig stokastisk variabel  $Y_t$ , således at

$$1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau > t\}} Y_t$$

da den forventede værdi af  $Z$  er 0 hvis  $\tau < t$ , hvorfor relevant information vil være når  $\tau > t$ . Det er derfor tilstrækkeligt, at  $Y_t$  er  $\mathcal{F}_t$ -målelig. Fra dette kan man vise, at

$$1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[Z 1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t]} \quad (1)$$

Her er den fuldkomne information  $\mathcal{G}$  erstattet af den delvise information  $\mathcal{F}$ , hvorfor (1) kan betegnes *formlen for filtreringsskift*. Det er ofte lettere at beregne forventninger, når der betinges på  $\mathcal{F}$  forventninger, hvorfor det kan være nyttigt at anvende denne formel<sup>2</sup>.

Ved at indsætte  $Z = 1_{\{\tau > T\}}$  i ligning (1) fås

$$\begin{aligned} 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{G}_t] &= 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} 1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t]} \Rightarrow \\ \mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{G}_t] &= 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t]} \end{aligned} \quad (2)$$

Det bemærkes, at

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{G}_t] &= \mathbb{Q}(1_{\{\tau > T\}} = 1 \mid \mathcal{G}_t) \cdot 1 + \mathbb{Q}(1_{\{\tau > T\}} = 0 \mid \mathcal{G}_t) \cdot 0 \\ &= \mathbb{Q}(1_{\{\tau > T\}} = 1 \mid \mathcal{G}_t) \\ &= \mathbb{Q}(\tau > T \mid \mathcal{G}_t) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice, The Filtration Switching Formula, side 777

Derfor kan ligning (2) omskrives til

$$\mathbb{Q}(\tau > T \mid \mathcal{G}_t) = 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t]} \quad (3)$$

Ved at anvende regnereglen  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$  for  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}^3$ , da  $\mathcal{F}_t$  er en delmængde af  $\mathcal{F}_T$  ( $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$ ), kan tælleren på højresiden omskrives

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[1_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(X_s) ds\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

hvor det benyttes, at når  $\mathcal{F}_t$  er kendt, er  $\int_0^t \lambda(X_s) ds$  også kendt, da  $\mathcal{F}_t$  er en filtrering generet af  $X$ , samt fordi  $E_1$  er eksponentialfordelt og uafhængig af  $\mathcal{F}_t$ . Hvis dette indsættes i ligning (3) fås

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau > T \mid \mathcal{G}_t) &= 1_{\{\tau > t\}} \frac{\exp\left(-\int_0^t \lambda(X_s) ds\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right]}{\exp\left(-\int_0^t \lambda(X_s) ds\right)} \\ &= 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

### 4.1.3 Martingale egenskaben

Jeg ønsker at vise at følgende er en martingale

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda(X_u) 1_{\{\tau > u\}} du$$

hvor  $N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ .  $M_t$  er en martingale hvis  $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{G}_s) = M_s$ , hvorfor jeg vil vise, at  $\mathbb{E}(M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s) = 0$ .

---

<sup>3</sup>G. F. Lawler, Introduction to Stochastic Processes

Ved at indsætte i  $\mathbb{E}(M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s)$ , fås

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}\left[N_t - \int_0^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du - \left(N_s - \int_0^s \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du\right) \mid \mathcal{G}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[N_t - N_s - \int_0^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du + \int_0^s \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{G}_s\right] \\
&= \mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{G}_s] - \mathbb{E}\left[\int_0^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du - \int_0^s \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{G}_s\right] \\
&= \mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{G}_s] - \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{G}_s\right]
\end{aligned}$$

For at  $M_t$  er en martingale skal  $\mathbb{E}[M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s] = 0$ , hvorfor jeg må vise, at

$$\mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{G}_s\right]$$

Først findes et udtryk for  $\mathbb{E}(N_t - N_s \mid \mathcal{G}_s)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}[1_{\{\tau \leq t\}} - 1_{\{\tau \leq s\}} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= \mathbb{E}[(1 - 1_{\{\tau > t\}}) - (1 - 1_{\{\tau > s\}}) \mid \mathcal{G}_s] \\
&= \mathbb{E}[1_{\{\tau > s\}} - 1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= 1_{\{\tau > s\}} - \mathbb{E}[1_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{G}_s] \\
&= 1_{\{\tau > s\}} - 1_{\{\tau > s\}}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t \lambda(X_u)du\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= 1_{\{\tau > s\}}\left(1 - \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t \lambda(X_u)du\right) \mid \mathcal{F}_s\right]\right)
\end{aligned}$$

hvor det tekniske resultat fra før benyttes. Der gælder, at

$$1_{\{\tau > s\}} \int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du = \int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du$$

Ved at benytte dette og ligning (1) kan jeg omskrive  $\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{G}_s\right]$

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{G}_s\right] = 1_{\{\tau > s\}} \frac{\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda(X_u)1_{\{\tau > u\}}du \mid \mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}[1_{\{\tau > s\}} \mid \mathcal{F}_s]} \quad (4)$$

Som før omskrives tælleren på højresiden

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_s^t \lambda(X_u) 1_{\{\tau > u\}} du \mid \mathcal{F}_s \right] &= \int_s^t \mathbb{E} [\lambda(X_u) 1_{\{\tau > u\}} \mid \mathcal{F}_s] du \\
&= \int_s^t \mathbb{E} [\mathbb{E} [\lambda(X_u) 1_{\{\tau > u\}} \mid \mathcal{F}_u] \mid \mathcal{F}_s] du \\
&= \int_s^t \mathbb{E} \left[ \lambda(X_u) \exp \left( - \int_0^u \lambda(X_v) dv \right) \mid \mathcal{F}_s \right] du \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_s^t \lambda(X_u) \exp \left( - \int_0^u \lambda(X_v) dv \right) du \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_s^t - \frac{\partial}{\partial u} \exp \left( - \int_0^u \lambda(X_v) dv \right) du \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \lambda(X_v) dv \right) - \exp \left( - \int_0^t \lambda(X_v) dv \right) \mid \mathcal{F}_s \right]
\end{aligned}$$

Ved at indsætte dette i ligning (4) fås

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_s^t \lambda(X_u) 1_{\{\tau > u\}} du \mid \mathcal{G}_s \right] &= 1_{\{\tau > s\}} \frac{\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^s \lambda(X_v) dv \right) - \exp \left( - \int_0^t \lambda(X_v) dv \right) \mid \mathcal{F}_s \right]}{\exp \left( - \int_0^s \lambda(X_v) dv \right)} \\
&= 1_{\{\tau > s\}} \frac{\exp \left( - \int_0^s \lambda(X_v) dv \right) - \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^t \lambda(X_v) dv \right) \mid \mathcal{F}_s \right]}{\exp \left( - \int_0^s \lambda(X_v) dv \right)} \\
&= 1_{\{\tau > s\}} \left( 1 - \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda(X_u) du \right) \mid \mathcal{F}_s \right] \right)
\end{aligned}$$

Jeg har nu vist, at

$$\mathbb{E} [N_t - N_s \mid \mathcal{G}_s] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t \lambda(X_u) 1_{\{\tau > u\}} du \mid \mathcal{G}_s \right] \Rightarrow \mathbb{E} [M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s] = 0$$

hvorfor  $M_t$  er en martingale. Der eksisterer derfor følgende intuitive fortolkning af intensiteten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{Q}(t < \tau \leq t + \Delta t \mid \mathcal{G}_t)}{\Delta t} &\approx \lambda(t) \Rightarrow \\
\mathbb{Q}(t < \tau \leq t + \Delta t \mid \mathcal{G}_t) &\approx \lambda(t) \Delta t
\end{aligned}$$

hvor intensiteten nu er stokastisk.

## 4.2 Definitioner

### 4.2.1 Libor

Libor står for London Interbank Offered Rate og er den rentesats, som større banker er villige til at udlåne til på interbank-markedet. Renten sættes dagligt af British Bankers Association (BBA), ved at de største banker på pengemarkedet indberetter den rentesats, de andre banker kan låne penge til. Når de højeste og laveste rentesatser er fjernet, beregnes Libor som et gennemsnit af de resterende indberettede satser. Libor fastsættes for løbetider op til et år<sup>4</sup>. Den tilsvarende interbank rente på den danske marked er Cibor.

I 2012 kom det frem, at en række storbanker havde manipuleret med Libor-renten omkring finanskrisen til egne fordele. Det var i bankernes interesse, at Libor-renten ikke var for høj, da det kunne blive tolket som et nervøst finansmarked og dermed skabe yderligere uro på markederne. Endvidere kan bankerne have tjent penge på manipulationen i form af spekulation i værdipapirer med Libor som referencerente. Taberne af Libor-skandalen var markedet, i form af mistillid til systemet. Ydermere har eksempelvis investorer og boligejere, der har spekuleret i Libor-renten, fået et lavere afkast eller endda tabt penge<sup>5</sup>.

---

<sup>4</sup>O’Kane, Modeling single-name and multi-name credit derivatives

<sup>5</sup>Business, Libor-skandalen: Sådan svindlede Barclays

### 4.3 Numeraire-skift

Normalt prisfastsætter man derivater under det risikoneutrale sandsynlighedsmål, hvor bankbogen benyttes som numeraire. Bankbogen er givet ved

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_u du\right) \quad (5)$$

hvor  $r$  angiver en spotrente, som eksempelvis Libor-renten. Det antages, at  $B(0)=1$ <sup>6</sup>. Det kan imidlertid være vanskeligt at prisfastsætte under det risikoneutrale sandsynlighedsmål, hvorfor skift af numeraire kan være hjælpsomt. Teknikken er derfor et vigtigt værktøj til at prisfastsætte derivater.

En numeraire kan være ethvert positivt ikke-dividende-betalende aktiv. Jeg vil i det følgende gennemgå konceptet for numeraire skift kombineret med konceptet for et martingalemål af Harrison og Kreps (1979) samt Harrison og Pliska (1981).

Lad  $X(t)$  være en prisproces og  $A(t)$  en numeraire. Ved at anvende  $A(t)$  som numeraire for prisprocessen  $X(t)$  kan man skabe en relativ prisproces  $\hat{X}(t)$  hvor

$$\hat{X}(t) = \frac{X(t)}{A(t)}$$

Der eksisterer en dynamik for  $X(t)$ , og ved at anvende  $A(t)$  som numeraire, skaber man en ny dynamik for  $\hat{X}(t)$ . Dynamikken for den relative prisproces  $\hat{X}(t)$  kan være meget forskellig fra dynamikken for  $X(t)$ , da dynamikken for  $\hat{X}(t)$  afhænger af processen for  $A(t)$  samt korrelationen mellem  $A(t)$  og  $X(t)$ .

Ved arbitragefri prisfastsættelse findes der for enhver numeraire et sandsynlighedsmål, under hvilket den relative prisproces er en *martingale*. Dvs. for alle valg af numeraire  $A(t)$  findes der et sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}^N$ , således at prisen på  $\hat{X}$  er en martingale under  $\mathbb{Q}^N$ . Altså

$$\hat{X}(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^N} [\hat{X}(T)]$$

---

<sup>6</sup>Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice



hvor  $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^N} [\cdot]$  angiver forventningen under sandsynlighedsmålet  $\mathbb{Q}^N$ , betinget på et informations-sæt, der typisk indeholder al markedsinformation op til og med tidspunkt  $t$ .

En martingale er statistisk set en stokastisk proces uden driftled, hvor de betingede forventede værdier af processen er defineret<sup>7</sup>. Inden for finansiering er en martingale et udtryk for, at et aktiv i gennemsnit ikke må give et højere afkast end ethvert andet - aktivets numeraire. Eksistensen af et martingalemål (eller risikoneutralt mål) medfører derfor ingen arbitragemuligheder<sup>8</sup>.

Prisen på et aktiv er invariant overfor valg af numeraire. Hvis man ændrer numeraire, skal man derfor ændre sandsynlighedsmålet, således at prisen forbliver uændret, samt at ingen-arbitrage princippet fortsat er opfyldt. Overgangen fra et sandsynlighedsmål til et andet er bestemt af den *Radon-Nikodym afledede*.

Lad  $\mathbb{Q}$  være det risikoneutrale sandsynlighedsmål, for hvilket numerairen er bankbogen  $B(t)$ . Hvis man ønsker at anvende numerairen  $A(t)$ , kan man ved brug af den Radon-Nikodym afledede ændre sandsynlighedsmålet fra  $\mathbb{Q}$  til  $\mathbb{Q}^N$ , under hvilket den relative pris også vil være en martingale. Den Radon-Nikodym afledede kan skrives som

$$\frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}} \Big|_t = \frac{A(t)B(0)}{A(0)B(t)}$$

Ved at betragte prisen på et derivat  $V$  til tidspunkt 0 med værdi  $H(T)$  til tidspunkt  $T$ , kan man vise overgangen i sandsynlighedsmålet ved hjælp af den Radon-Nikodym afledede

$$V(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{H(T)}{B(T)} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ H(T) \frac{A(0)}{A(T)} \frac{A(T)B(0)}{A(0)B(T)} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ H(T) \frac{A(0)}{A(T)} \frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}} \right] = A(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[ \frac{H(T)}{A(T)} \right]$$

hvor  $B(0)=1$ . Prisen på derivatet under sandsynlighedsmålet  $\mathbb{Q}$  med  $B(t)$  som numeraire, kan altså skrives under sandsynlighedsmålet  $\mathbb{Q}^N$  med  $A(t)$  som numeraire.

Tricket ved numeraire-skift består i at finde den numeraire, der letter prisfastsættelsen i form af et mere simpelt udtryk for nutidsværdien. Numeraire-skift benyttes i prisfast-

---

<sup>7</sup>G. F. Lawler, Introduction to Stochastic Processes

<sup>8</sup>Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice

sættelse af optioner<sup>9</sup>, og jeg vil senere i afhandlingen vise, hvordan værktøjet anvendes i prisfastsættelsen af CDS optioner.

---

<sup>9</sup>O’Kane, Modelling Single-name and Multi-names Credit Derivates

## 5 Prisfastsættelse af CDS kontrakter og forward CDS-spænd

I dette kapitel betragter jeg nutidsværdien af en standard running CDS kontrakt (RCDS) samt en running CDS kontrakt med udskudte betalinger (PRCDS). Herefter definerer jeg et forward CDS-spænd samt udleder en ligning for samme, da den indgår i prisformlen for en CDS option.

Kapitlet tager udgangspunkt i artiklen *Market models for CDS options and callable floaters* af Damiano Brigo (2005). Begreberne kreditbegivenhed og fallit benyttes i flæng.

### 5.1 Notationer

Der benyttes følgende notationer:

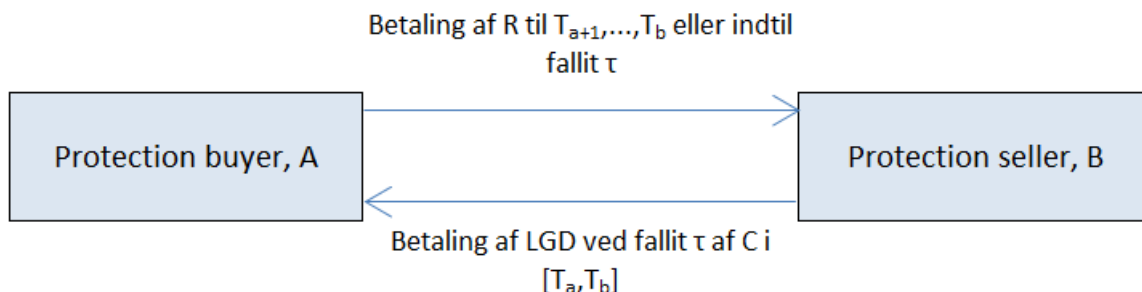
| Notation                              | Beskrivelse                                                                                         |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R$                                   | Præmiebetaling (premium leg)                                                                        |
| $\tau = \tau^C$                       | Fallittidspunkt for referenceenhed $C$                                                              |
| $T_a, (T_{a+1}, \dots, T_{b-1}), T_b$ | Tidspunkter hvorpå beskyttelse starter og ophører                                                   |
| $T_{\beta(t)}, T_{\beta(\tau)}$       | Første tidspunkt efter henholdsvis $t$ og $\tau$                                                    |
| $\Pi_{RCDS_{a,b}}(t)$                 | Nutidsværdi af en RCDS kontrakt set fra protection seller, $B$                                      |
| $\alpha_i$                            | Andel af år mellem tidspunkt $T_{i-1}$ og $T_i$                                                     |
| $D(t, T)$                             | Stokastisk diskonterings faktor til tidspunkt $t$ med udløb $T$                                     |
| $1_{\{\tau > T\}}$                    | Overlevelses indikatorfunktion, har værdi 1 hvis fallit indtræffer efter tidspunkt $T$ og 0 ellers  |
| $1_{\{\tau \leq T\}}$                 | Fallit indikatorfunktion, har værdi 1 hvis fallit indtræffer før eller på tidspunkt $T$ og 0 ellers |
| $LGD = 1 - REC$                       | Beskyttelsesbetaling (protection leg), givet at referenceenheden går fallit i perioden $[T_a, T_b]$ |
| $REC$                                 | Andel af recovery ved én enhed hovedstol                                                            |
| $CDS_{a,b}(t, R, LGD)$                | Pris på en RCDS kontrakt, set fra protection seller $B$                                             |

| Notation                | Beskrivelse                                                                                                |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{F}_t$         | Fallit-fri markedsinformation op til tidspunkt $t$                                                         |
| $\mathcal{G}_t$         | Fallit-fri markedsinformation op til tidspunkt $t$ <i>plus</i> monitorering af fallit op til tidspunkt $t$ |
| $P(t, T)$               | Pris på en nulkuponobligation til tidspunkt $t$ med udløb $T$                                              |
| $\bar{P}(t, T)$         | Pris på en risikofyldt nulkuponobligation til tidspunkt $t$ med udløb $T$                                  |
| $\Pi_{DFRN_{a,b}}(t)$   | Nutidsværdi af en floating-rate note (FRN) i perioden $[T_a, T_b]$                                         |
| $L(t, T)$               | Libor renten til tidspunkt $t$ med udløb $T$                                                               |
| $DFRN_{a,b}(t, X, REC)$ | Prisen på en risikofyldt floating-rate note (FRN) med spænd $X$ og recovery rate $REC$                     |

## 5.2 Credit default swaps: Forskellige formuleringer

### 5.2.1 Running CDS kontrakt

Jeg betragter først en standard running CDS (RCDS) kontrakt, som er den CDS kontrakt jeg beskrev i kapitel 2. I denne kontrakt betaler protection buyer  $A$  præmiebetalingen  $R$  (premium leg) til tidspunkterne  $T_{a+1}, \dots, T_b$  mod at modtage beskyttelsesbetalingen  $LGD^1$  (protection leg) i tilfælde af fallit. Hvis referenceenheden  $C$  går fallit, modtager  $A$  således beskyttelsesbetalingen  $LGD$  fra protection seller  $B$  på fallittidspunktet  $\tau$ , såfremt  $T_a < \tau \leq T_b$ . Ydermere ophører betalingerne af  $R$ . Betalingerne for kontrakten er opsummeret i figur 5.



Figur 5: Betalinger forbundet med en RCDS kontrakt

<sup>1</sup>LGD: loss-given default

Nutidsværdien af RCDS kontrakten er, for protection seller  $B$ , forskellen mellem nutidsværdien af premium leg og protection leg. Til tidspunkt  $t$  kan den skrives som

$$\begin{aligned} \Pi_{RCDS_{a,b}}(t) := & D(t, \tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1})R\mathbf{1}_{\{T_a < \tau < T_b\}} + \sum_{i=a+1}^b D(t, T_i)\alpha_i R\mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \\ & - \mathbf{1}_{\{T_a < \tau \leq T_b\}} D(t, \tau) LGD \end{aligned} \quad (6)$$

hvor  $T_{\beta(\tau)}$  er det første betalingstidspunkt  $T_i$  efterfulgt af  $\tau$ . Afstanden mellem tidspunkterne  $T_{i-1}$  og  $T_i$  er angivet ved  $\alpha_i$  og er opgivet i andel af et år. Ved kvartalsvise betalinger, vil størstedelen af  $\alpha_i$  være omtrent  $1/4$ .  $D(t, T)$  betegner en stokastisk diskonteringsfaktor til tidspunkt  $t$  med udløb  $T$ . Den er givet ved  $D(t, T) = B(t)/B(T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$ , hvor  $B(t)$  er bankbogen til tidspunkt  $t$  givet ved ligning (5).

Ligning (6) består af tre led. Det første led angiver nutidsværdien af den andel, der betales tilbage af præmiebetalingen fra det seneste præmiebetalings tidspunkt og frem til fallittidspunktet, såfremt referenceenheden går fallit (påløbne præmiebetaling). Andet led angiver summen af nutidsværdien af de præmiebetalinger, der betales indtil kontrakten udløber eller indtil fallit. Det sidste led angiver nutidsværdien af beskyttelsesbetalingen til protection buyer i tilfælde af fallit før udløbstidspunktet.

Det antages, at  $LGD$  er deterministisk, hvorfor  $LGD$  er kendt. Beskyttelsesbetalingen er typisk givet ved  $LGD = 1 - REC$ , hvor hovedstolen er sat til en.

### 5.2.2 Running CDS kontrakt med udskudte betalinger

I stedet for at betragte en værdi med eksakt fallittidspunkt  $\tau$ , kan man se på en CDS kontrakt, hvor den sidste præmiebetaling samt beskyttelsesbetalingen  $LGD$  udskydes til det første tidspunkt  $T_i$  efterfulgt af fallittidspunktet  $\tau$ , altså  $T_{\beta(\tau)}$ . Ved kvartalsvise eller halvårslige betalinger, kan  $T_{\beta(\tau)}$  være op til måneder efter fallittidspunktet, hvis fallit indtræffer kort tid efter seneste betalingstidspunkt. Denne definition af en RCDS kontrakt kaldes for en *postponed payments running CDS (PRCDS)* kontrakt, og nutidsværdien kan

skrives som

$$\Pi_{PRCDS_{a,b}}(t) := \sum_{i=a+1}^b D(t, T_i) \alpha_i R \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} - \sum_{i=a+1}^b \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} D(t, T_i) LGD \quad (7)$$

I sammenligning med (6) har nutidsværdien af PRCDS kontrakten den fordel, at alle betalinger falder præcis på tidspunkterne  $T_i$ . Det betyder, at første led i ligning (6), der angiver den påløbne præmiebetaling i tilfælde af fallit, ikke længere indgår. Endvidere ændres det diskonterede protection leg, idet beskyttelsesbetalingen  $LG D$  udskydes til det første tidspunkt  $T_i$  efter fallittidspunktet  $\tau$ .

RCDS kontrakten er den mest normale set i markedspraksis sammenhæng<sup>2</sup>, men når markedsmodellen for CDS optioner udledes anvendes ligning (7) qua lettere notation.

I de efterfølgende kapitler anvendes ”CDS” som udtryk for ”RCDS”.

### 5.2.3 Definition af forward CDS-spænd

Prisen på en CDS kontrakt, set fra protection seller  $B$ , er til tidspunkt  $t$  angivet ved  $CDS_{a,b}(t, R, LGD)$ , og bestemmes ved risikoneutral prisfastsættelse som

$$CDS_{a,b}(t, R, LGD) = \mathbb{E} \{ \Pi_{RCDS_{a,b}}(t) \mid \mathcal{G}_t \} \quad (8)$$

hvor  $\mathbb{E}$  angiver forventningen under det risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$ , og  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$ . Som tidligere nævnt, angiver  $\mathcal{F}_t$  filtreringen uden fallit og indeholder typisk informationssæt bestående af renter, intensiteter og andre ikke-fallit bestemte faktorer. Det andet led,  $\sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$ , indeholder information om fallit op til tidspunkt  $t$  samt præcis fallittidspunkt, såfremt dette er indtruffet.

Da det ofte er lettere at beregne den forventede værdi betinget på  $\mathcal{F}_t$  forventninger, anvender jeg formlen for filtreringsskift<sup>3</sup>, hvorfor prisen på CDS kontrakten omskrives til

$$CDS_{a,b}(t, R, LGD) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \{ \Pi_{RCDS_{a,b}}(t) \mid \mathcal{F}_t \} \quad (9)$$

---

<sup>2</sup>D. Brigo, Market and CIR++ models for CDS Options and Callable Floaters

<sup>3</sup>Se ligning (1)

Ved at indsætte nutidsværdien af CDS kontrakten, (2), fås

$$CDS_{a,b}(t, R, LGD) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \left\{ R \mathbb{E} \left[ D(t, \tau)(\tau - T_{\beta(t)-1}) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau < T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right. \\ \left. + R \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right] - LGD \mathbb{E} \left[ D(t, \tau) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau \leq T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right\} \quad (10)$$

Den tilsvarende pris på en PRCDS kontrakt er angivet ved

$$PRCDS_{a,b}(t, R, LGD) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \left\{ R \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right. \\ \left. - LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right\} \quad (11)$$

Et forward CDS-spænd,  $R_{a,b}(t)$ , kan defineres som den værdi af præmiebetalingen  $R$ , der medfører en CDS værdi på 0 til tidspunkt  $t$ , altså

$$CDS_{a,b}(t, R_{a,b}(t), LGD) = 0$$

For at finde et udtryk for  $R_{a,b}(t)$  sætter jeg ligning (10) lig 0, hvorefter  $R_{a,b}(t)$  udledes. Det vil kun være relevant for  $\{\tau > t\}$ , hvorfor blot leddet inde i Tuborgklammerne sættes lig 0

$$R_{a,b}(t) \mathbb{E} \left[ D(t, \tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1}) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau < T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right] + R_{a,b}(t) \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ - LGD \mathbb{E} \left[ D(t, \tau) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau \leq T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right] = 0 \Rightarrow \\ R_{a,b}(t) = \frac{LGD \mathbb{E} \left[ D(t, \tau) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau \leq T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E} \left[ D(t, \tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1}) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau < T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}$$

Det første led i nævneren ganges med  $\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)/\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)$ , hvorfor  $R_{a,b}(t)$  kan

skrives som

$$R_{a,b}(t) = \frac{LGD \mathbb{E} \left[ D(t, \tau) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau \leq T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \bar{P}(t, T_i) + \mathbb{E} \left[ D(t, \tau) (\tau - T_{\beta(t)-1}) \mathbf{1}_{\{T_a < \tau < T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \right]} \quad (12)$$

hvor  $\bar{P}(t, T) = \mathbb{E} [D(t, T) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t] / \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)$  og

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \bar{P}(t, T) &:= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} [D(t, T) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t] / \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E} [D(t, T) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{G}_t] \end{aligned}$$

Her er  $\bar{P}(t, T)$  prisen på en nul kupon obligation til tidspunkt  $t$  med udløb  $T$ , hvis udsteder kan gå fallit. Den tilsvarende fallit-frie nul kupon obligation er angivet ved  $P(t, T)$ . Det bemærkes at  $\mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}}$  erstattes med  $\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}$ , men qua antagelsen om kontinuerte processer for intensitet og rente vil det ikke have nogen betydning.

For at finde et udtryk for  $R_{a,b}$  blev den forventede værdi i ligning (10) sat lig 0, hvilket kan betragtes som at foretrække  $\mathcal{F}_t$  forventede værdier frem for  $\mathcal{G}_t$  forventede værdier. Dermed foretrækkes "delvis information" frem for "fuldkommen information", hvilket er muligt på grund af formelen for filtreringsskift.

En tilsvarende ligning for forward CDS-spændet i en PRCDS kontrakt, findes ved at sætte leddet indenfor Tuborgklammerne i ligning (11) lig 0, qua samme argument som før. Herefter løses for  $R_{a,b}^{PR}(t)$ , og der opnås følgende definition af forward CDS-spændet

$$R_{a,b}^{PR}(t) = \frac{LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \bar{P}(t, T_i)} \quad (13)$$



## 6 Ækvivalens mellem en CDS option og en konverterbar DFRN

I dette kapitel introducerer jeg *defaultable floating rate notes (DFRN)* og viser, at forward CDS-spændet for en PRCDs kontrakt er identisk med det fair spænd i en alternativ DFRN. Herefter viser jeg, at man kan fortolke en CDS option som konverteringsretten i en konverterbar DFRN.

Kapitlet tager udgangspunkt i artiklen *Market models for CDS options and callable floaters* af Damiano Brigo (2005).

### 6.1 DFRN og CDS kontrakt

En typisk *defaultable floating rate note (DFRN)* er en risikofyldt FRN. Den betaler Libor renten  $L$  plus et fast spænd  $X$  til fremtidige tidspunkter  $T_{a+1}, \dots, T_b$ , hvor Libor renten fastsættes til de foregående tidspunkter  $T_a, \dots, T_{b-1}$ . Betalingerne afhænger af, at virksomheden ikke er gået fallit før det relevante betalingstidspunkt. Til det sidste betalingstidspunkt  $T_b$  tilbagebetaler virksomheden den pålydende værdi af kontrakten, såfremt fallit ikke er indtruffet.

Recovery raten  $REC$  er defineret som den procentdel af den pålydende værdi, der betales til obligationsejeren i tilfælde af fallit. Det antages, at  $REC$  er deterministisk og dermed kendt, samt at den betales til det første tidspunkt  $T_i$  efter fallit før tidspunkt  $T_b$ . Hvis kontraktens værdi er lig den investerede pålydende værdi fra tidspunkt  $T_a$ , siges kontrakten at handle til pari, såfremt fallit endnu ikke er indtruffet. Det faste spænd  $X$  i en DFRN kan betragtes som et mål for udsteders kreditkvalitet, når obligationen udstedes<sup>1</sup>. En typisk FRN, altså uden fallit-elementet, vil således handle til pari og have et spænd på 0<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>O’Kane, Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivatives

<sup>2</sup>Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice

Nutidsværdien af en DFRN, set fra investor, kan skrives som

$$\begin{aligned} \Pi_{DFRN_{a,b}}(t) = & -D(t, T_a)1_{\{\tau > T_a\}} + \sum_{i=a+1}^b \alpha_i D(t, T_i) (L(T_{i-1}, T_i)1_{\{\tau > T_i\}} + X1_{\{\tau > T_i\}}) \\ & + D(t, T_b)1_{\{\tau > T_b\}} + REC \sum_{i=a+1}^b D(t, T_i)1_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \end{aligned} \quad (14)$$

Nutidsværdien består af fire led. Første led angiver nutidsværdien af den pålydende investering, der betales til tidspunkt  $T_a$ , såfremt fallit ikke er indtruffet. Andet led angiver summen af nutidsværdien af Libor renterne  $L$  plus spændet  $X$ , der afhænger af, at virksomheden ikke er gået fallit før det relevante betalingstidspunkt. Tredje led angiver nutidsværdien af den pålydende investering, der tilbagebetales til tidspunkt  $T_b$ , såfremt fallit ikke er indtruffet. Det sidste led angiver nutidsværdien af recovery raten, der betales til obligationsejeren som følge af, at virksomheden går fallit før det sidste betalingstidspunkt  $T_b$ .

Definitionen af kontrakten følger almindelig markedspraksis, idet monitoreringen af fallit forekommer på betalingstidspunkterne  $T_i$  og ikke på de tidspunkter  $T_{i-1}$ , hvor Libor renten fastsættes. Problemet med definitionen er imidlertid, at den ikke stemmer overens med CDS kontrakten. Det skyldes, at man ved brug af Cox processer i prisfastsættelsen ønsker at tage forventninger til en mængde, der består af rene stokastiske diskonteringsfaktorer samt indikatorfunktioner, men at det ved den givne definition af en DFRN vil være kompliceret at adskille Libor renten  $L$  fra disse. Det kan dog løses ved at erstatte  $1_{\{\tau > T_i\}}$  for  $L$  i andet led med  $1_{\{\tau > T_{i-1}\}}$ , hvilket svarer til, at monitoreringen af fallit forekommer på de tidspunkter, hvor Libor renten fastsættes i stedet for på betalingstidspunkterne.

### 6.1.1 En alternativ DFRN

Jeg betragter nu en alternativ DFRN, hvor  $T_i$  erstattes med  $T_{i-1}$  i indikatorfunktionen for Libor renten  $L$  i ligning (14), således at monitoreringen af fallit forekommer på de tidspunkter, hvor Libor renten fastsættes. Nutidsværdien af den alternative DFRN er

defineret ved

$$\begin{aligned}\Pi_{DFRN1_{a,b}}(t) = & -D(t, T_a)\mathbf{1}_{\{\tau > T_a\}} + \sum_{i=a+1}^b \alpha_i D(t, T_i) (L(T_{i-1}, T_i)\mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} + X\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}) \\ & + D(t, T_b)\mathbf{1}_{\{\tau > T_b\}} + REC \sum_{i=a+1}^b D(t, T_i)\mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}}\end{aligned}$$

Jeg vil nu finde prisen på den alternative DFRN til tidspunkt  $t$ , og herefter udlede det fair spænd<sup>3</sup>, som er den værdi af spændet  $X$ , der medfører en nutidsværdi af den alternative DFRN på 0.

Prisen på den alternative DFRN defineres som

$$\begin{aligned}DFRN1_{a,b}(t, X, REC) &= \mathbb{E} \{ \Pi_{DFRN1_{a,b}}(t) \mid \mathcal{G}_t \} \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \{ \Pi_{DFRN1_{a,b}}(t) \mid \mathcal{F}_t \} / \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)\end{aligned}\quad (15)$$

der kommer af formelen for filtreringsskift<sup>4</sup>. For at finde et udtryk for par spændet  $X_{a,b}^{(1)}(t)$  sættes prisen lig 0, hvorefter  $X_{a,b}^{(1)}(t)$  udledes. Jeg ønsker at opnå en nutidsværdi af den alternative DFRN, der ligner nutidsværdien af en CDS kontrakt, hvorfor jeg starter med at omskrive leddet, hvor Libor renten indgår.

$$\alpha_i \mathbb{E} [D(t, T_i)L(T_{i-1}, T_i)\mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] = \alpha_i \mathbb{E} [\mathbb{E} [D(t, T_i)L(T_{i-1}, T_i)\mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_t]$$

hvor der til omskrivningen er benyttet regnereglen  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G} \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$  for  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ , da  $\mathcal{F}_t$  er en delmængde af  $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$  ( $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{T_{i-1}}$ )<sup>5</sup>. Ved at anvende Cox processer<sup>6</sup> for fallitintensiteten  $\tau$ , kan der omskrives til

$$= \alpha_i \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds \right) \mathbb{E} [D(t, T_i)L(T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_t \right]$$

da jeg tidligere har vist, at  $\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}}] = \exp \left( - \int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds \right)$ , da  $\int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds$  er kendt, når  $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$  er kendt, fordi det er en filtrering af  $X$ , og fordi  $E_1$  er uafhængig af

---

<sup>3</sup>Et fair spænd medfører, at nutidsværdien af køber og sælgers betalinger er lig hinanden

<sup>4</sup>Se ligning (1)

<sup>5</sup>G. F. Lawler, Introduction to Stochastic Processes

<sup>6</sup>Se kapitel 4

$\mathcal{F}_{T_{i-1}}$ .

Diskonteringsfaktoren er, som tidligere nævnt, givet ved  $D(t, T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$ . Ved at anvende dette, samt at dele denne op i to, kan der omskrives til

$$\begin{aligned} &= \alpha_i \mathbb{E} \left[ D(t, T_{i-1}) L(T_{i-1}, T_i) \exp \left( - \int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds \right) \mathbb{E} [D(T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha_i \mathbb{E} \left[ D(t, T_{i-1}) L(T_{i-1}, T_i) \exp \left( - \int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds \right) P(T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

da  $P(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp(-\int_t^T r_s ds) \mid \mathcal{F}_t \right]^7$ .

Brigo definerer spot Libor renten  $L(t, T)$  til tidspunkt  $t$ , som den konstante rente til hvilken en investering på  $P(t, T)$  enheder til tidspunkt  $t$ , giver én enhed ved udløb  $T$ <sup>8</sup>

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\alpha(t, T)) = 1, \quad L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\alpha(t, T)P(t, T)}$$

Ved at anvende dette sammen med definitioner og regneregler fra før, kan der omskrives til

$$\begin{aligned} &= \alpha_i \mathbb{E} \left[ D(t, T_{i-1}) \frac{1 - P(T_{i-1}, T_i)}{\alpha_i P(T_{i-1}, T_i)} \exp \left( - \int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds \right) P(T_{i-1}, T_i) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ D(t, T_{i-1}) \exp \left( - \int_0^{T_{i-1}} \lambda(X_s) ds \right) (1 - P(T_{i-1}, T_i)) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} [D(t, T_{i-1})(1 - P(T_{i-1}, T_i)) \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [D(t, T_{i-1})(1 - P(T_{i-1}, T_i)) \mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [D(t, T_{i-1}) \mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] - \mathbb{E} [D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Leddene er nu omskrevet, således at det ikke længere indeholder Libor renten direkte, men kun består af diskonteringsfaktorer samt indikatorfunktioner. Det bemærkes imidlertid,

---

<sup>7</sup>Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice

<sup>8</sup>Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice, side 7

at Libor renten kan indgå i diskonteringsfaktorerne. Jeg indsætter nu dette i ligning (15)

$$\begin{aligned}
\text{DFRN}_{1a,b}(t, X, \text{REC}) = & \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \left[ -\mathbb{E} [D(t, T_a) 1_{\{\tau > T_a\}} \mid \mathcal{F}_t] \right. \\
& - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) - D(t, T_{i-1}) 1_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
& + X \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E} [D(t, T_b) 1_{\{\tau > T_b\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
& \left. + \text{REC} \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \right] \quad (16)
\end{aligned}$$

Jeg vil nu omskrive første, andet og fjerde led inde i de firkantede parenteser

$$\begin{aligned}
\dots = & -\mathbb{E} [D(t, T_a) 1_{\{\tau > T_a\}} \mid \mathcal{F}_t] - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
& + \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_{i-1}) 1_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E} [D(t, T_b) 1_{\{\tau > T_b\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
= & - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] + \sum_{i=a+2}^{b+1} \mathbb{E} [D(t, T_{i-1}) 1_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
= & - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{\tau > T_{i-1}\}} \mid \mathcal{F}_t] + \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
= & - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) (1_{\{\tau > T_{i-1}\}} - 1_{\{\tau > T_i\}}) \mid \mathcal{F}_t] \\
= & - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

Ved at indsætte dette i ligning (16) og benytte, at beskyttelsesbetalingen i en CDS kontrakt er givet ved  $LGD = 1 - REC \Rightarrow REC = 1 - LGD$ , kan der omskrives til

$$\begin{aligned}
DFRN1_{a,b}(t, X, REC) &= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \left[ - \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \right. \\
&\quad + X \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{E} [D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \\
&\quad \left. + (1 - LGD) \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \right] \\
&= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \left[ X \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{E} [D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \right. \\
&\quad \left. - LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} [D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] \right]
\end{aligned}$$

Det ses, at ligningen for prisen på den alternative DFRN er identisk med ligningen for prisen på en PRCDS kontrakt, (11)

$$DFRN1_{a,b}(t, X, REC) = PRCDS_{a,b}(t, X, 1 - REC) \quad (17)$$

Tidligere fandt jeg ligning (13) for forward CDS-spændet  $R_{a,b}^{PR}(t)$  ved at sætte prisen på en PRCDS kontrakt lig 0 og herefter udlede  $R_{a,b}^{PR}(t)$ . Da ligningerne for prisen på henholdsvis en alternativ DFRN og en PRCDS kontrakt er identiske, må det fair spænd i en alternativ DFRN være lig forward CDS-spændet i en PRCDS kontrakt, altså<sup>9</sup>

$$X_{a,b}^{(1)}(t) = R_{a,b}^{PR}(t) \quad (18)$$

Intuitionen bag denne ækvivalens er, at begge kan fortolkes som et mål for kreditkvalitet.

## 6.2 CDS optioner og risikofyldte konverterbare floaters

Som beskrevet i kapitel 3 giver en payer CDS option ejeren,  $A$ , retten til at købe beskyttelse på en given CDS kontrakt til et fremtidigt tidspunkt  $T_a > t$ . Ved exercise betaler  $A$  præmiebetalingen af et forudbestemt strikespænd  $R = K$  til  $B$  og modtager beskyttelsesbetalingen  $LGD$  af  $B$ , såfremt referenceenheden  $C$  går fallit i  $[T_a, T_b]$ .  $A$  vil kun

---

<sup>9</sup>D. Brigo, Market and CIR++ models for CDS Options and Callable Floaters

exercise CDS optionen, hvis værdien er positiv til tidspunkt  $T_a$ . Jeg betragter knock-out CDS optioner, hvorfor værdien af optionen er 0, såfremt referenceenheden går fallit inden optionen exercises.

Jeg vælger kun at betragte PRCDS kontrakten, da det vil lette notationen, hvorfor jeg nu angiver  $R_{a,b}^{PR}$  som  $R_{a,b}$ .

Nutidsværdien af en PRCDS call option<sup>10</sup>, til tidspunkt  $t$ , set fra part  $A$ , kan skrives som

$$\Pi_{CallPRCDS_{a,b}}(t; K) = D(t, T_a)[-PRCDS_{a,b}(T_a, K, LGD)]^+ \quad (19)$$

Det huskes fra tidligere, at CDS markedsspændet  $R_{a,b}(T_a)$  vil medføre en CDS værdi på 0 til tidspunkt  $T_a$ , altså  $PRCDS_{a,b}(T_a, R_{a,b}(T_a), LGD) = 0$ . Derfor kan nutidsværdien af PRCDS call optionen skrives som

$$\Pi_{CallPRCDS_{a,b}}(t; K) = D(t, T_a)[\underbrace{PRCDS_{a,b}(T_a, R_{a,b}(T_a), LGD)}_{=0} - PRCDS_{a,b}(T_a, K, LGD)]^+ \quad (20)$$

---

<sup>10</sup>En CDS call option er identisk med en payer CDS option

Ved at indsætte ligningen for prisen på en PRCDS kontrakt, (11), til tidspunkt  $t = T_a$  med de forskellige spænd  $R_{a,b}(T_a)$  og  $K$  fås

$$\begin{aligned}
\Pi_{CallPRCDS_{a,b}}(t; K) &= D(t, T_a) \left[ \frac{1_{\{\tau > T_a\}}}{\mathbb{Q}(\tau > T_a \mid \mathcal{F}_{T_a})} \left\{ R_{a,b}(T_a) \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(T_a, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(T_a, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1_{\{\tau > T_a\}}}{\mathbb{Q}(\tau > T_a \mid \mathcal{F}_{T_a})} \left\{ K \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(T_a, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(T_a, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right\} \right]^+ \\
&= \frac{1_{\{\tau > T_a\}}}{\mathbb{Q}(\tau > T_a \mid \mathcal{F}_{T_a})} D(t, T_a) \left[ R_{a,b}(T_a) \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(T_a, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right. \\
&\quad \left. - K \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(T_a, T_i) \alpha_i \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \right] \right]^+ \\
&= 1_{\{\tau > T_a\}} D(t, T_a) \left[ \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) \right] (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \tag{21}
\end{aligned}$$

Jeg har nu fundet en ligning for nutidsværdien af en PRCDS call option for forward CDS-spændet  $R_{a,b}(T_a)$ . Det bemærkes således, at CDS optionen kan betragtes som en option på forward CDS-spændet med en exercise pris lig det forudbestemte strike spænd  $K$ .

Leddene indenfor de firkantede parenteser i ligning (21) er en del af en *defaultable present value per basis point (DPVBP) numeraire*, der er givet ved

$$\hat{C}_{a,b}(t) := \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \bar{C}_{a,b}(t), \quad \bar{C}_{a,b}(t) = \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(t, T_i) \tag{22}$$

Det faktiske udtryk for DPVBP inkluderer en indikatorfunktion,  $1_{\{\tau > t\}} \hat{C}_{a,b}(t)$ , og er et udtryk for prisen på en portefølje bestående af risikofyldte nulkuponobligationer til tidspunkt  $t$ . Obligationerne har nul recovery samt forskellige udløbstidspunkter. DPVBP er derfor et udtryk for prisen på et aktiv, der kan handles på markedet. Jeg ved fra afsnit 4.3, at ethvert positivt ikke-dividende betalende aktiv kan anvendes som numeraire. Hvis indikatoren fra det faktiske udtryk undlades, bevares der en forbindelse til den kendte



pris på porteføljen, som vil være strengt positiv, hvorfor man kan anvende  $\hat{C}_{a,b}(t)$  som numeraire med tilhørende risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\hat{Q}^{a,b}$ . Dette vil jeg benytte i næste kapitel.

Jeg ved fra før, at ligningerne for prisen på henholdsvis en alternativ DFRN og en PRCDs kontrakt er identiske, (17). Jeg erstatter  $t$  med  $T_a$  i ligning (19) og omskriver til

$$\begin{aligned}\Pi_{CallPRCDs_{a,b}}(t; K) &= D(t, T_a)[-PRCDs_{a,b}(T_a, K, LGD)]^+ \\ &= D(t, T_a)[-DFRN1_{a,b}(T_a, K, REC)]^+\end{aligned}$$

hvor  $LGD = 1 - REC$ . Jeg ved fra tidligere, at  $DFRN1_{a,b}(T_a, X_{a,b}(T_a), REC) = 0$  og kan derfor, ligesom med PRCDs kontrakten, omskrive til

$$\begin{aligned}\Pi_{CallPRCDs_{a,b}}(t; K) &= D(t, T_a)[DFRN1_{a,b}(T_a, X_{a,b}(T_a), REC) - DFRN1_{a,b}(T_a, K, REC)]^+ \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > T_a\}} D(t, T_a) \left[ \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) \right] (X_{a,b}(T_a) - K)^+ \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > T_a\}} D(t, T_a) \left[ \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) \right] (R_{a,b}(T_a) - K)^+\end{aligned}\tag{23}$$

hvilket er identisk med ligning (21).

En konverterbar obligation består af en inkonverterbar obligation samt en solgt call option på den tilsvarende inkonverterbare obligation<sup>11</sup>. Således kan en option på en floater betragtes som den komponent i en konverterbar DFRN, der giver mulighed for opsigelse, altså *konverteringsretten*. Der er skabt følgende lighed:

$$\text{Konverteringsret for konverterbar DFRN1} = \text{Option på PRCDs kontrakt}$$

Man kan derfor fortolke en CDS option som konverteringsretten for en konverterbar alternativ DFRN.

---

<sup>11</sup>Michael Christensen, Obligations investering - Teoretiske overvejelser og praktisk anvendelse

## 7 Prisfastsættelse af CDS optioner

I dette kapitel udleder jeg en prisformel for CDS optioner under en antagelse om dynamikken for forward CDS-spændet  $R_{a,b}$  under det særlige sandsynlighedsmål  $\hat{\mathbb{Q}}^{a,b}$ . Normalt anvendes det "normale" risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$  ved prisfastsættelse, hvorfor jeg sidst giver en kort opsummering af, hvordan Brigo forsøger at nå en fuldkommen specificeret markedsmodel.

Kapitlet tager udgangspunkt i artiklen *Market models for CDS options and callable floaters* af Damiano Brigo (2005).

### 7.1 En prisformel for CDS optioner

Jeg vil nu udlede en markedsmodel for CDS optioner ved at anvende numeraire-skift teknikken<sup>1</sup> samt antage en passende dynamik for  $R_{a,b}$ . I forrige kapitel beskrev jeg ligheden mellem en CDS option og en konverterbar DFRN, hvorfor jeg ved at udlede en prisformel for CDS optionen også implicit udleder en prisformel for en konverterbar DFRN.

Det bemærkes, at nævneren i ligning (13) for forward CDS-spændet er identisk med ligning (22) for  $\hat{C}_{a,b}(t)$ , hvorfor forward CDS-spændet kan skrives som

$$\begin{aligned} R_{a,b}(t) &= \frac{\text{LGD} \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \bar{P}(t, T_i)} \\ &= \frac{\text{LGD} \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\hat{C}_{a,b}(t)}, \quad t \leq T_a \end{aligned} \quad (24)$$

hvor tælleren er et udtryk for prisen på en upfront CDS kontrakt med udskudte betalinger. En *upfront* CDS kontrakt adskiller sig fra running CDS kontrakt ved, at protection seller modtager premium leg som et enkelt upfront beløb frem for løbende betalinger. Protection leg ændres ikke<sup>2</sup>. Det vides fra forrige kapitel, at  $\hat{C}_{a,b}(t)$  kan anvendes som numeraire. Derfor kan  $R_{a,b}(t)$  fortolkes som forholdet mellem prisen på et handlet aktiv og numerairen  $\hat{C}_{a,b}(t)$ , hvorfor der findes et relevant sandsynlighedsmål, under hvilket det vil være en

---

<sup>1</sup>Se afsnit 4.3

<sup>2</sup>O’Kane, Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates

martingale. Dynamikken for  $R_{a,b}(t)$  kan derfor modelleres uden driftled.

Med udgangspunkt i nutidsværdien af CDS optionen, (21), kan prisen på en CDS option skrives som

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} \left\{ 1_{\{\tau > T_a\}} D(t, T_a) \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{G}_t \right\} \\ &= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \left\{ 1_{\{\tau > T_a\}} D(t, T_a) \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned}$$

hvor jeg har anvendt formelen for filtreringsskift<sup>3</sup>. Jeg benytter regnereglen fra tidligere om betingede forventninger,  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$  for  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ , og omskriver til

$$\begin{aligned} &= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left\{ 1_{\{\tau > T_a\}} D(t, T_a) \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_{T_a} \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \left[ D(t, T_a) \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mathbb{E} \{ 1_{\{\tau > T_a\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \left[ D(t, T_a) \mathbb{Q}(\tau > T_a \mid \mathcal{F}_{T_a}) \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \bar{P}(T_a, T_i) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

da det vides fra afsnittet om Cox processer<sup>4</sup>, at  $\mathbb{E} \{ 1_{\{\tau > T_a\}} \mid \mathcal{F}_{T_a} \} = \mathbb{Q}(\tau > T_a \mid \mathcal{F}_{T_a})$ . Fra definitionen af  $\hat{C}_{a,b}(T_a)$  kan der omskrives til

$$= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E} \left[ D(t, T_a) \hat{C}_{a,b}(T_a) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Jeg ved fra tidligere, at diskonteringsleddet kan skrives som  $D(t, T_a) = B(t)/B(T_a)$  samt at prisen på et aktiv er invariant overfor valg af numeraire, hvis sandsynligheds målet ændres<sup>5</sup>. Der ønskes en forsimpning af udtrykket, hvorfor  $\hat{C}_{a,b}(T_a)$  anvendes som numeraire

---

<sup>3</sup>Se ligning (1)

<sup>4</sup>Se kapitel 4

<sup>5</sup>Se evt. også Brigo, Interest Rate Models - Theory and Practice, A change of Numeraire Toolkit - FACT TWO, side 30

og der omskrives til

$$\begin{aligned}
&= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E}^B \left[ \frac{B(t)}{B(T_a)} \hat{C}_{a,b}(T_a) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \hat{\mathbb{E}}^{a,b} \left[ \frac{\hat{C}_{a,b}(t)}{\hat{C}_{a,b}(T_a)} \hat{C}_{a,b}(T_a) (R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \hat{C}_{a,b}(t) \hat{\mathbb{E}}^{a,b} [(R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{1_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \bar{C}_{a,b}(t) \hat{\mathbb{E}}^{a,b} [(R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \bar{C}_{a,b}(t) \hat{\mathbb{E}}^{a,b} [(R_{a,b}(T_a) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

Jeg har nu forsimplet udtrykket og fjernet den stokastiske diskonteringsfaktor ved at skifte numeraire og dermed ændret sandsynligheds målet, således at der ikke længere tages forventninger under det "almindelige" risikoneutrale sandsynligheds mål  $\mathbb{Q}$  men under det særlige sandsynligheds mål  $\hat{\mathbb{Q}}^{a,b}$ . Det antages, at dynamikken for  $R_{a,b}(t)$  kan skrives som

$$dR_{a,b}(t) = \sigma_{a,b} R_{a,b}(t) dW^{a,b}(t) \quad (25)$$

hvor  $W^{a,b}$  er en Brownsk bevægelse under sandsynligheds målet  $\hat{\mathbb{Q}}^{a,b}$ . Den lognormale proces sikrer, at  $R_{a,b}(t)$  ikke kan blive negativ. Endvidere er det en skæv fordeling, hvor der er større sandsynlighed for fremtidige høje spænd end for fremtidige lave spænd, hvilket stemmer rimelig godt overens med virkeligheden<sup>6</sup>. Antagelsen om dynamikken betyder, at, man ved at anvende Black's formel (1976)<sup>7</sup>, kan finde en prisformel for en CDS option. Prisen på en payer CDS option kan således skrives som

$$\begin{aligned}
CallPRCDS_{a,b}(t, K, LGD) &= \mathbb{E} [\Pi_{CallPRCDS_{a,b}}(t, K, LGD) \mid \mathcal{G}_t] \\
&= 1_{\{\tau > t\}} \bar{C}_{a,b}(t) [R_{a,b}(t) N(d_1(t)) - K N(d_2(t))] \quad (26)
\end{aligned}$$

hvor

$$d_{1,2} = \frac{\ln(R_{a,b}(t)/K) \pm (T_a - t)\sigma_{a,b}^2/2}{\sigma_{a,b}\sqrt{T_a - t}}$$

---

<sup>6</sup>O'Kane, Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates

<sup>7</sup>Black's formel er forskellig fra Black-Scholes formel, idet at prisen på det underliggende aktiv er angivet som en fremtidig pris og ikke som en spot pris

$N(x)$  er den kumulative normalfordeling, som er sandsynligheden for, at et tilfældigt tal fra standardnormalfordelingen vil være mindre end  $x$ . Formlen anvendes typisk ikke som en faktisk prisligning, men kan give en idé om mekanismen for optionen, hvorfra man ved et givet markedsspænd kan invertere forholdet, således at man opnår et udtryk for den implicitte volatilitet for det underliggende forward CDS-spænd  $R_{a,b}(t)$ .

## 7.2 En fuldkommen specificeret markedsmodel

I forrige afsnit blev prisformlen for en CDS option udledt under en antagelse om dynamikken for  $R_{a,b}(t)$  under det særlige sandsynlighedsmål  $\hat{\mathbb{Q}}^{a,b}$ .

Normalt beskriver man dynamikken for den underliggende variabel under det "almindelige" risikoneutrale sandsynlighedsmål  $\mathbb{Q}$ . Man har ofte en god forestilling om, hvordan dette sandsynlighedsmål ser ud, hvorfor man i visse tilfælde kan estimere parametrene i dynamikken ud fra data. Da dynamikken for  $R_{a,b}(t)$  ikke er beskrevet under det normale risikoneutrale sandsynlighedsmål, vil det ikke være klart hvordan parametrene i dynamikken skal estimeres, medmindre man er bekendt med sammenhængen mellem dynamikken under  $\mathbb{Q}$  og dynamikken under  $\hat{\mathbb{Q}}^{a,b}$ .

For at nå en fuldkommen specificeret markedsmodel, skal man således være bevidst om, hvordan dynamikken for  $R_{a,b}(t)$  ændrer sig, når man skifter numeraire og dermed beskriver dynamikken under et særligt sandsynlighedsmål. Dette forsøger Brigo at vise, hvilket jeg vil give en kort opsummering af.

Prisformlen for CDS optioner blev udledt ved at anvende  $\hat{C}_{a,b}(t)$  som numeraire, hvori det grundlæggende komponent er prisen på en risikofyldt nulkuponobligation,  $\bar{P}$ . Det kan vises, at  $\bar{P}$ 'erne kan reduceres til en funktion, der består af en initial værdi af  $\bar{P}$  (som forsvinder i de bagvedliggende udregninger) samt en- og to-perioders CDS-spænd

$$\bar{P}(t, T_i) = \bar{P}(t, T_{i-1}) \frac{\alpha_{i-1} (R_{i-1}^{PR}(t) - R_{i-2,i}^{PR}(t))}{\alpha_i (R_{i-2,i}^{PR}(t) - R_i^{PR}(t))} \quad (27)$$

hvor det antages, at  $R_{i-2,i}^{PR}(t) \neq R_i^{PR}(t)$ .

Brigo opskriver martingale dynamikken for en- og to-periodes spændene  $R_k, R_{k-2,k}$  under deres respektive sandsynlighedsmål  $\hat{\mathbb{Q}}^{k-1,k}$  og  $\hat{\mathbb{Q}}^{k-2,k}$ . Ved at anvende numeraire-skift teknikken, samt at benytte ligning (27), kommer Brigo frem til dynamikker for de relevante spænd  $R_k, R_{k-2,k}$  under et *fælles* sandsynlighedsmål  $\hat{\mathbb{Q}}^\cdots$ .

Det kan vises, at  $R_{a,b}$  kan skrives som

$$R_{a,b}(t) = \sum_{i=a+1}^b \bar{w}_i(t) R_i(t) \approx \sum_{i=a+1}^b \bar{w}_i(0) R_i(t), \quad \bar{w}_i(t) = \frac{\alpha_i \bar{P}(t, T_i)}{\sum_{j=a+1}^b \alpha_j \bar{P}(t, T_j)}$$

Sammen med ligning (27) kan  $R_{a,b}$  således specificeres udelukkende ved en- og to-periode spænd, hvorfor der vil eksistere en indirekte dynamik for  $R_{a,b}$  gennem dynamikkerne for en- og to-periode spændene  $R_k$  og  $R_{k-2,k}$ .

Lognormalfordelte spænd vil betyde, at man kan anvende Black's formel for CDS optionerne. Det vil imidlertid kun være en-periode spændene  $R_k$ , der kan siges at være lognormalfordelte under sandsynlighedsmålene  $\hat{\mathbb{Q}}^{k-1,k}$ . Resultatet af  $R_{a,b}$  vil derfor kun være tilnærmelsesvist lognormal fordelt, hvorfor det ikke er muligt at nå en fuldkommen specificeret markedsmodel<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>D. Brigo, Market and CIR++ models for CDS Options and Callable Floaters

# **Del 2**

## **Empirisk del**

## 8 Valg af data

I dette kapitel gennemgår jeg de datavalg, som jeg har truffet til den empiriske analyse. Først præsenterer jeg de valgte referenceenheder samt observationstidspunkter, hvorefter jeg argumenterer for mit valg af risikofri rente.

### 8.1 Valg af CDS data

Det er kun ganske få danske virksomheder, hvorpå der handles CDS kontrakter. Heraf kan nævnes eksempelvis Danske Bank og Carlsberg. Disse er imidlertid ikke blandt de mest likvide kontrakter, hvorfor jeg vælger to udenlandske virksomheder:

- *The Royal Bank of Scotland*: The Royal Bank of Scotland (RBS) er den største bank i Skotland og er en af Europas største banker. Under finanskrisen måtte den britiske regering træde til, for at redde banken fra et truende kollaps. Banken mødte efterfølgende hård kritik for sine forretningsmetoder op til finanskrisen og har tiltrukket sig en del opmærksomhed ifm. drastiske nedskæringer. Endvidere har banken de seneste par år været ramt af en del negative sager, eksempelvis kom banken i 2013 i modvind, da den blev anklaget for at have tvunget sunde og bæredygtige virksomheder til at lade sig erklære konkurs efter finanskrisen, med det formål at kunne overtage deres aktiver billigt<sup>1</sup>.
- *Volvo*: Volvo er en svensk industrivirksomhed, der er en af verdens førende fabrikanten af lastbiler, busser, entreprenørmaskiner og bådmotorer. Tidligere producerede Volvo også personbiler, men den del blev frasolgt i 1999<sup>2</sup>. Volvo var stærkt påvirket af finanskrisen, der truede koncernens eksistens. Det lykkedes imidlertid for Volvo allerede i slutningen af 2009 at trodse krisen og øge deres salg<sup>3</sup>.

De to virksomheder indgår i iTraxx Europe indekset, der består af de 125 mest likvide CDS kontrakter, og er valgt på baggrund af at repræsentere to forskellige sektorer: finans- og industrisektoren. Begge virksomheder er kreditvurderet "BBB"<sup>4</sup> af det internationale kreditvurderings S&P. CDS kontrakterne for begge referenceenheder har kvartalvis præmiebetalinger samt en recovery rate på 40%, som er en standard recovery rate

---

<sup>1</sup>Politikken, "Skruppeløse", "kvalmende" og "chokerende": Storbank kørte bevidst sine kunder i sæk

<sup>2</sup>Volvogroup

<sup>3</sup>Finans, Volvo tordner frem i USA

<sup>4</sup>Middel kreditvurdering



på Bloomberg<sup>5</sup>.

Jeg ved fra tidligere, at CDS optioner typisk har løbetider på en til seks måneder. Jeg ønsker at finde priser på CDS optioner med løbetider på 3 og 6 måneder for henholdsvis 1-, 3- samt 5-årige CDS kontrakter. Prisformlen for en CDS option afhænger af  $\overline{C}_{a,b}(t) = \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{E} [D(t, T_i) 1_{\{\tau > T_i\}} \mid \mathcal{F}_t] / \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)$  samt forwardspændet  $R_{a,b}(0)$ , hvorfor jeg vil bestemme overlevelsessandsynligheder på alle betalingstidspunkter  $T_i$  til og med  $5\frac{1}{2}$  år. Således betragtes spænd for CDS kontrakter med løbetider på henholdsvis 1, 3, 5 samt 7 år<sup>6</sup>, hvoraf de 5-årige CDS kontrakter er de mest likvide<sup>7</sup>.

Til at bestemme overlevelsessandsynligheder til og med  $5\frac{1}{2}$  år, anvender jeg, udover 7-årige CDS-spænd, også 1-, 3- samt 5-årige spænd, da disse indeholder nyttig information om overlevelsessandsynligheder på kortere sigt. Jeg anvender såkaldte *mid*-spænd, som er gennemsnittet af bid- og ask-spænd, da der kan være stor forskel på disse.

I figur 6 ses udviklingen i 5-årige CDS-spænd for RBS og Volvo over de seneste 10 år. CDS-spænd for begge referenceenheder lå i årene før finanskrisen på et stabilt lavt niveau. Den finansielle krise medførte kraftige stigninger i CDS-spændene. Her var særligt Volvo hårdt ramt, hvilket betød, at de 5-årige CDS kontrakter blev handlet til et spænd på over 650 basispunkter i december 2008. Efterfølgende faldt CDS-spændene betydeligt, men har siden været rimelig volatile. I august 2011 forekom en større stigning i CDS-spændene for begge referenceenheder. På dette tidspunkt var der stor bekymring omkring Europas gældskrise og amerikansk økonomi samt sænkningen af USA's kreditvurdering<sup>8</sup>. Selvom CDS-spændene er faldet væsentligt siden den finansielle krise, befinder de sig imidlertid på et højere niveau i dag end før krisen.

Jeg ønsker at finde overlevelsessandsynligheder på tre forskellige observationstidspunkter: før finanskrisen, under finanskrisen samt i dag. Jeg vælger datoerne 3. oktober 2005 og 1. oktober 2015 for at kunne sammenligne markedet i dag med markedet for 10 år siden.

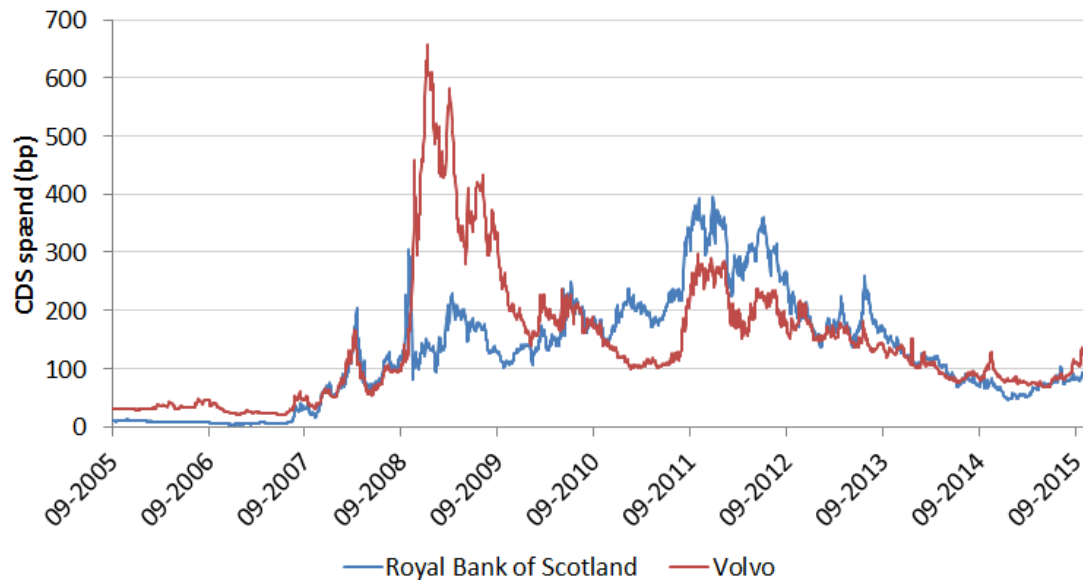
---

<sup>5</sup>Bloomberg

<sup>6</sup>Det havde i princippet været tilstrækkeligt at medtage data til og med 6-årige CDS kontrakter, men der er intet data for disse kontrakter på Bloomberg

<sup>7</sup>Flere, An Analysis of CDS Transactions: Implications for Public Reporting

<sup>8</sup>Børsen, Standard and Poor's nedgraderer USA



Figur 6: Udvikling i 5-årige CDS-spænd

Selvom der ikke var nogen form for aktiv handel med CDS optioner i løbet af krisen, finder jeg det interessant at undersøge priser på dette tidspunkt, da dette kan bidrage til forståelsen af produktet. På baggrund af figur 6 vælger jeg datoen 12. december 2008, da dette er et tidspunkt, hvor finanskrisen var på sit højeste. Det er ydermere den dato, hvor det 5-årige CDS-spænd for Volvo peakede. De observerede CDS-spænd ses i nedenstående tabel angivet i basispunkter. Det bemærkes, at den normale tendens er, at spændene stiger med løbetiden. Det er derimod ikke tilfældet for begge referenceenheder under finanskrisen, hvor spændene er aftagende. Jeg vil komme nærmere ind på dette i kapitel 9.

|      | 1. oktober 2015 |        | 12. december 2008 |        | 3. oktober 2005 |       |
|------|-----------------|--------|-------------------|--------|-----------------|-------|
|      | RBS             | Volvo  | RBS               | Volvo  | RBS             | Volvo |
| 1 år | 46,14           | 40,89  | 146,26            | 746,56 | 5,50            | 8,66  |
| 3 år | 66,86           | 79,02  | 142,53            | 685,92 | 7,17            | 18,42 |
| 5 år | 90,59           | 124,72 | 141,38            | 656,33 | 9,50            | 29,85 |
| 7 år | 109,37          | 150,65 | 140,35            | 606,42 | 17 (10-årig)    | 37,00 |

Tabel 1: Observerede CDS-spænd

Det skal hertil nævnes, at der ikke er data for 7-årige CDS kontrakter for RBS før 2006, hvorfor jeg anvender det 10-årige spænd<sup>9</sup> til at finde overlevelsessandsynligheder for ob-

<sup>9</sup>Jeg betragter derfor en 10-årig tidshorisont

servationstidspunktet 3. oktober 2005.

I udregningerne antager jeg eksakte løbetider på  $T$  år, og ser således bort fra de såkaldte IMM dage, hvorfor  $\alpha_i = 0,25$ .

## 8.2 Valg af risikofri rente

Til at finde de implicitte overlevelsessandsynligheder skal man bruge et mål for den risikofrie rente. I praksis eksisterer der ikke en fuldstændig risikofri rente, og der findes derfor ikke et entydigt svar på, hvilken rente man skal benytte som mål for den risikofrie.

Et eksempel på et mål for den risikofrie rente er statsobligationer, da sandsynligheden for at et land går fallit må betragtes som værende meget lille. Da statsobligationer er forholdsvis likvide og betragtes som et sikkert papir, vil der ofte være stor efterspørgsel efter disse, hvorfor statsobligationer handles til højere priser og dermed lavere renter end andre mål for den risikofrie rente. Endvidere har den europæiske gældskrise betydet, at ECB opkøber europæiske statsobligationer for mange milliarder euro om måneden for at styrke økonomien. Dette har medført en øget efterspørgsel efter europæiske statsobligationer og hermed lavere renter<sup>10</sup>. Der kan ydermere argumenteres for, at den europæiske gældskrise har betydet, at statsobligationer ikke betragtes som en risikofri investering i samme grad som tidligere, hvor Grækenland kan nævnes som eksempel. På baggrund af dette fravælger jeg statsobligationer som mål for den risikofrie rente.

Et andet mål for den risikofrie rente er swaprenten. Swaprenten er en fast rente som swappes med en variabel og fastsættes således, at værdien af kontrakten er 0 ved indgåelse. Den variable rente følger eksempelvis Libor renten, der er den rentesats større banker er villige til at udlåne til på interbank markedet<sup>11</sup>. Den variable rente indeholder derfor en risikopræmie, hvilket vil have indflydelse på swaprenten, der også vil indeholde et element af kreditrisiko. Det må imidlertid betragtes at være en meget lav kreditrisiko på grund af de store bankers høje kreditrating<sup>12</sup>.

---

<sup>10</sup>Børsen, ECB kaster redningskrans på 8500 milliarder

<sup>11</sup>Se afsnit 4.2.1

<sup>12</sup>O’Kane, Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates

Jeg vælger at anvende euro swaprenten som mål for den risikofrie rente, til trods for at der er kreditrisiko forbundet med denne. I figur 7 ses udviklingen i den 5-årige euro swaprente. Renteniveauet har generelt været faldende siden finanskrisen og er i dag på et ekstremt lavt niveau, der er meget lavere end niveauet før krisen.



Figur 7: Udvikling i 5-årig euro swaprente

Euro swaprenten på de valgte observationstidspunkter er angivet i nedenstående tabel.

|        | 1. oktober 2015 | 12. december 2008 | 3. oktober 2005 |
|--------|-----------------|-------------------|-----------------|
| 1-årig | 0,02%           | 3,08%             | 2,36%           |
| 2-årig | 0,04%           | 3,07%             | 2,53%           |
| 3-årig | 0,11%           | 3,25%             | 2,67%           |
| 4-årig | 0,21%           | 3,35%             | 2,77%           |
| 5-årig | 0,32%           | 3,47%             | 2,87%           |
| 6-årig | 0,45%           | 3,64%             | 2,96%           |
| 7-årig | 0,58%           | 3,74%             | 3,05%           |

Tabel 2: Observerede swaprenter

### 8.3 Opsummering

Jeg har valgt følgende data til beregning af overlevelsessandsynligheder:

- Referenceenheder: The Royal Bank of Scotland og Volvo
- 1-, 3-, 5- og 7-årige CDS-spænd for referenceenhederne<sup>13</sup>

<sup>13</sup>samt det 10-årige spænd for RBS

- 1-, 2-, 3-, 4-, 5-, 6- og 7-årige euro swaprenter
- Observationstidspunkter: 1. oktober 2015, 12. december 2008 samt 3. oktober 2005

Data er hentet på Bloomberg.

## 9 Overlevelsessandsynligheder

I dette kapitel bestemmer jeg implicitte overlevelsessandsynligheder ud fra observerede CDS-spænd, da disse skal bruges til at udregne priser på CDS optioner. Jeg finder de implicitte overlevelsessandsynligheder ved at observere CDS-spænd på de givne observationstidspunkter og antage stykkevis intensitet.

Jeg vil først gennemgå beregninger af overlevelsessandsynligheder, hvorefter de fundne intensiteter og overlevelsessandsynligheder præsenteres.

### 9.1 Spot CDS-spænd

For at kunne beregne implicitte overlevelsessandsynligheder skal jeg bruge en formel for spot CDS-spændet.

Jeg har tidligere vist, at forward CDS-spændet med udskudte betalinger kan skrives som

$$R_{a,b}(t) = \frac{LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(t, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) \bar{P}(t, T_i)}$$

Spot CDS-spændet kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} R_{0,T}(0) &= \frac{LGD \sum_{i=1}^T \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_0 \right]}{\sum_{i=1}^T \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > 0 \mid \mathcal{F}_0) \bar{P}(0, T_i)} \\ &= \frac{LGD \sum_{i=1}^T \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \right]}{\sum_{i=1}^T \alpha_i \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \right]} \\ &= \frac{LGD \left( \sum_{i=1}^T \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}} \right] - \sum_{i=1}^T \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \right] \right)}{\sum_{i=1}^T \alpha_i \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \right]} \end{aligned}$$

hvor jeg ved fra kapitel 5, at  $\bar{P}(t, T) = \mathbb{E} [D(t, T) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t] / \mathbb{Q}(\tau > t | \mathcal{F}_t)$ . Ved at antage uafhængighed mellem rente og fallitintensitet, kan der omskrives til

$$\begin{aligned} & LGD \left( \sum_{i=1}^T \mathbb{E} [D(0, T_i)] \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_{i-1}\}}] - \sum_{i=1}^T \mathbb{E} [D(0, T_i)] \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}] \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^T \alpha_i \mathbb{E} [D(0, T_i)] \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}]}{\sum_{i=1}^T \alpha_i \mathbb{E} [D(0, T_i)] \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}]} \\ &= \frac{LGD \left( \sum_{i=1}^T P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \sum_{i=1}^T P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) \right)}{\sum_{i=1}^T \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i)} \end{aligned}$$

hvor jeg ved fra kapitel 4 om Cox processer, at  $\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}] = \mathbb{Q}(\tau > T_i)$ , som netop er de overlevelsessandsynligheder, jeg ønsker at bestemme.  $P(0, T_i)$  er prisen på en nul kuponobligation til tidspunkt 0 med udløb  $T_i$ .

## 9.2 Diskontering

For at kunne bestemme implicitte overlevelsessandsynligheder må jeg kende diskonteringsfaktorer. Disse kan findes ved at udregne priser på nul kuponobligationer til tidspunkt 0 med udløb på ethvert betalingstidspunkt  $T_i$ . Til de ønskede observationstidspunkter kan jeg observere de årlige euro swaprenter fra 1 år til og med 7 år. Disse betegnes  $r_i$ , hvor  $i = 1, \dots, 7$  angiver år. Jeg udregner diskonteringsfaktorerne ved følgende funktion:

$$P(0, T_i) = \begin{cases} \exp(-r_1 \cdot T_i) & T_i \leq 1 \\ \exp(-r_2 \cdot T_i) & 1 < T_i \leq 2 \\ \exp(-r_3 \cdot T_i) & 2 < T_i \leq 3 \\ \exp(-r_4 \cdot T_i) & 3 < T_i \leq 4 \\ \exp(-r_5 \cdot T_i) & 4 < T_i \leq 5 \\ \exp(-r_6 \cdot T_i) & 5 < T_i \leq 6 \\ \exp(-r_7 \cdot T_i) & 6 < T_i \leq 7 \end{cases}$$

Diskonteringsfaktorerne til ethvert betalingstidspunkt for henholdsvis 1. oktober 2015, 12. december 2008 og 3. oktober 2005 kan ses i bilag A.

### 9.3 Beregning af overlevelsessandsynligheder

Når jeg har bestemt diskonteringsfaktorer, kan jeg udregne overlevelsessandsynligheder til ethvert betalingstidspunkt  $T_i$ . Det vides fra kapitel 4 om Cox processer, at når den fallit-frie information op til tidspunkt  $T_i$  er kendt, kan overlevelsessandsynligheden skrives som

$$\mathbb{Q}(\tau > T_i \mid \mathcal{F}_{T_i}) = \exp \left( - \int_0^{T_i} \lambda_s ds \right)$$

Hvis der i stedet betinges på  $\mathcal{F}_0$ , og den fallit-frie information op til tidspunkt  $T_i$  således ikke er kendt, er overlevelsessandsynligheden givet ved

$$\mathbb{Q}(\tau > T_i \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{T_i} \lambda_s ds \right) \right]$$

Jeg ønsker at bestemme overlevelsessandsynligheder på de valgte observationstidspunkter ved at anvende CDS-spænd for de 1-, 3-, 5- samt 7-årige kontrakter. Ved at antage stykkevis konstant intensitet kan overlevelsessandsynligheden skrives som

$$\mathbb{Q}(\tau > T_i) = \exp \left( - \int_0^1 \lambda_1 ds - \int_1^3 \lambda_3 ds - \int_3^5 \lambda_5 ds - \int_5^7 \lambda_7 ds \right)$$

der kan omskrives til

$$\mathbb{Q}(\tau > T_i) = \begin{cases} \exp(-\lambda_1 \cdot T_i) & T_i \leq 1 \\ \exp(-(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot (T_i - 1))) & 1 \leq T_i \leq 3 \\ \exp(-(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot (3 - 1) + \lambda_5 \cdot (T_i - 3))) & 3 \leq T_i \leq 5 \\ \exp(-(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot (3 - 1) + \lambda_5 \cdot (5 - 3) + \lambda_7 \cdot (T_i - 5))) & 5 \leq T_i \leq 7 \end{cases}$$

Ovenstående formel kan anvendes til at beregne overlevelsessandsynligheder til ethvert betalingstidspunkt  $T_i$ . For at kunne udregne disse må jeg imidlertid kende intensiteterne  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_5$  samt  $\lambda_7$ . Intensiteterne bestemmes ved at løse et minimeringsproblem, der tager udgangspunkt i de forskellige løbetider. For de forskellige løbetider sammenlignes værdien af formelen for spot CDS-spændet som funktion af intensiteterne med det observerede spot spænd og de kvadrerede afvigelser beregnes. Værdien af intensiteterne bestemmes således som de værdier af  $\lambda_i$ , der minimerer de kvadrerede afvigelser. Minimeringsproblemet kan



skrives som

$$\min \sum_{i=1}^7 (R(\lambda_i) - R_i^{obs})^2$$

hvor  $i = 1, 3, 5, 7$  er de forskellige løbetider for CDS kontrakten.  $R(\lambda_i)$  angiver formelen for spot CDS-spændet som funktion af  $\lambda_i$ , og  $R_i^{obs}$  angiver de observerede CDS-spænd. Jeg finder værdier af  $\lambda_i$  til de forskellige observationstidspunkter, således at hver referenceenhed har værdier for  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5$  og  $\lambda_7$  på hvert af de valgte observationstidspunkter. Der huskes på, at der anvendes et 10-årigt spænd for RBS før finanskrisen, hvorfor den fundne værdi til observationstidspunktet 3. oktober 2005 vil være  $\lambda_{10}$  og ikke  $\lambda_7$ .

Til at minimere de kvadrerede afvigelser anvendes værktøjet *Solver* i excel.

## 9.4 Resultater

I nedenstående tabel ses de værdier af  $\lambda_i$ , der løser minimeringsproblemerne.

|             | 1. oktober 2015 |        | 12. december 2008 |        | 3. oktober 2005 |        |
|-------------|-----------------|--------|-------------------|--------|-----------------|--------|
|             | RBS             | Volvo  | RBS               | Volvo  | RBS             | Volvo  |
| $\lambda_1$ | 0,0077          | 0,0068 | 0,0243            | 0,1225 | 0,0009          | 0,0014 |
| $\lambda_3$ | 0,0129          | 0,0164 | 0,0233            | 0,1066 | 0,0013          | 0,0039 |
| $\lambda_5$ | 0,0213          | 0,0329 | 0,0232            | 0,0977 | 0,0022          | 0,0081 |
| $\lambda_7$ | 0,0268          | 0,0373 | 0,0228            | 0,0671 | 0,0043*         | 0,0096 |

Tabel 3: Intensiteter

Som forventet er intensiteterne meget lave for begge referenceenheder i 2005. Finanskrisen medførte kraftige stigninger i CDS-spændene for begge referenceenheder, hvilket afspejles i de høje intensiteter i 2008. Spændene befinder sig i dag på et niveau, der er højere end før den finansielle krise, hvorfor det ikke er overraskende at intensiteterne i dag er større end for 10 år siden. Volvo har generelt lidt højere intensiteter end RBS, særligt i december 2008, hvor Volvo var hårdt ramt af finanskrisen.

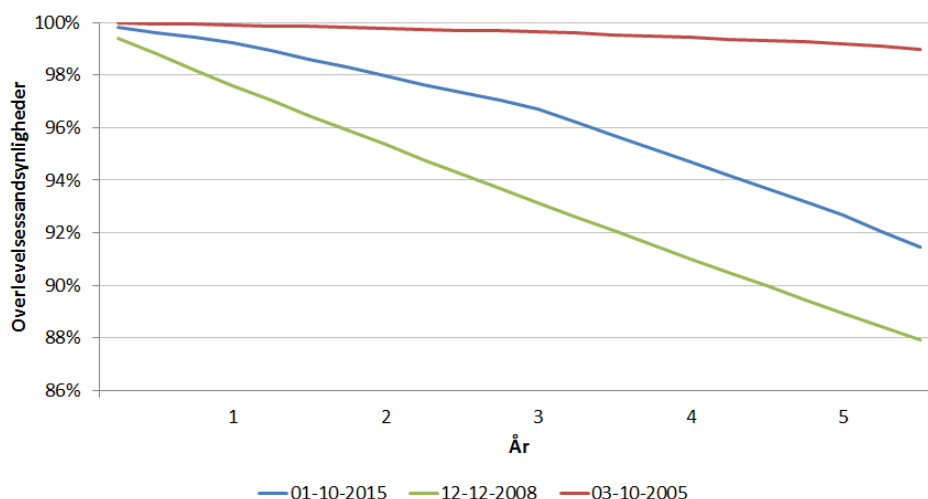
Generelt stiger intensiteten med løbetiden. Dette er imidlertid ikke tilfældet for begge referenceenheder under den finansielle krise, hvor intensiteten er faldende. Dette kommer af, at spændene for RBS og Volvo i 2008 er aftagende med løbetiden (se tabel 1). Et

5-årigt CDS-spænd er et udtryk for den gennemsnitlige kreditrisiko over 5 år. Normalt vil spændene vokse med løbetiden, da den gennemsnitlige risiko vil være større, jo længere tid man er forsikret. Når CDS-spændene er aftagende, er det et udtryk for, at der er mere kreditrisiko i den korte ende, og der er således størst bekymring omkring kreditrisikoen lige nu og her. Der vil imidlertid stadig være kreditrisiko på længere sigt, da der fortsat vil være en vis usikkerhed, selvom virksomheden ikke går fallit på kort sigt. Derfor, når der er meget kreditrisiko i den korte ende og mindre på længere sigt, vil gennemsnittet over en længere periode være lavt, hvilket forklarer de aftagende spænd samt intensiteter. Dette scenarie er Grækenland et godt eksempel på, hvor der i perioder har været stor usikkerhed på kort sigt.

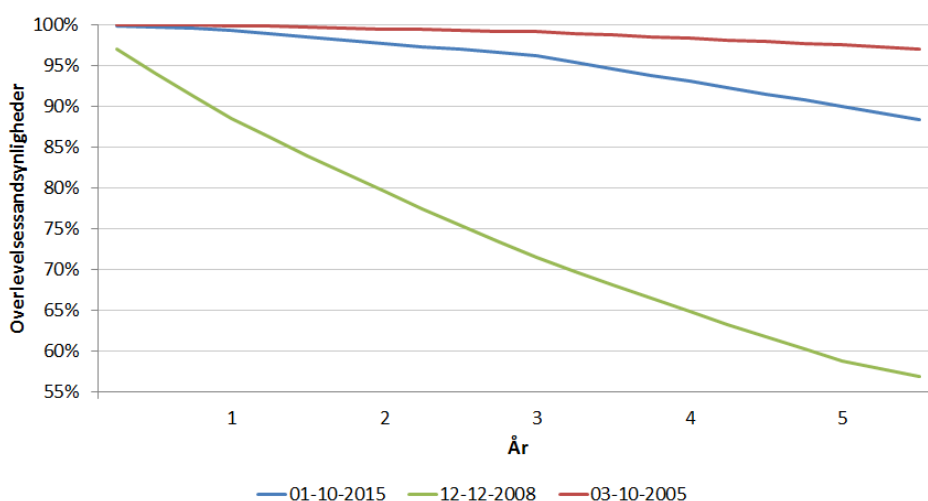
Fejlene ved minimeringsproblemerne er stort set 0 (afviger på 8. decimal), hvorfor overlevelsessandsynlighederne kan antages at stemme overens med markedets antagelser for de 1-, 3-, 5- og 7-årige CDS-spænd.

I figur 8 ses de fundne overlevelsessandsynligheder til og med  $5\frac{1}{2}$  år for RBS på de forskellige observationstidspunkter. Ikke overraskende er 2005 og 2008 årene med henholdsvis de højeste og laveste overlevelsessandsynligheder. Sandsynligheden for at der ikke indtræffer en kreditbegivenhed inden det første år på de forskellige observationstidspunkter er 99,2%, 97,6% og 99,9% for henholdsvis 2015, 2008 og 2005. Sandsynligheden for at der ikke indtræffer en kreditbegivenhed inden de  $5\frac{1}{2}$  år på de forskellige observationstidspunkter er 91,5%, 87,9% og 99,0% for henholdsvis 2015, 2008 og 2005.

Overlevelsessandsynlighederne for Volvo på de forskellige observationstidspunkter er angivet i figur 9. Igen er 2005 og 2008 årene med henholdsvis de højeste og laveste overlevelsessandsynligheder. Sandsynligheden for at der ikke indtræffer en kreditbegivenhed inden det første år på de forskellige observationstidspunkter er 99,3%, 88,5% og 99,9% for henholdsvis 2015, 2008 og 2005. Sandsynligheden for at der ikke indtræffer en kreditbegivenhed inden de  $5\frac{1}{2}$  år på de forskellige observationstidspunkter er 88,3%, 56,9% og 97,0% for henholdsvis 2015, 2008 og 2005. Det bemærkes, at Volvos overlevelsessandsynligheder er meget lave under finanskrisen, hvor koncernens eksistens var truet.



Figur 8: Overlevelsessandsynligheder for RBS



Figur 9: Overlevelsessandsynligheder for Volvo

Overlevelsessandsynligheder for alle betalingstidspunkter til og med  $5\frac{1}{2}$  år er angivet i tabel 4. Det er imidlertid nævneværdigt, at disse overlevelsessandsynligheder er beregnet på baggrund af en antagelse om en recovery rate på 40%. Eksempelvis ville en højere recovery rate medføre lavere implicitte overlevelsessandsynligheder ved faste CDS-spænd. Ydermere er overlevelsessandsynlighederne bestemt ud fra observerede spænd på markedet, som forventes at indeholde risikopræmier. Således må overlevelsessandsynlighederne udledt under ethvert risikoneutralt sandsynlighedsmål, forventes at være højere end de faktiske sandsynligheder (under  $\mathbb{P}$ -målet), fordi de faktiske overlevelsessandsynligheder indeholder en risikopræmie, der øger prisen på CDS-spændet i sammenligning med, hvis der ingen risikopræmie var.

|            | 1. oktober 2015 |        | 12. december 2008 |        | 3. oktober 2005 |        |
|------------|-----------------|--------|-------------------|--------|-----------------|--------|
|            | RBS             | Volvo  | RBS               | Volvo  | RBS             | Volvo  |
| $T_{0.25}$ | 99,81%          | 99,83% | 99,39%            | 96,98% | 99,98%          | 99,96% |
| $T_{0.5}$  | 99,62%          | 99,66% | 98,79%            | 94,06% | 99,95%          | 99,93% |
| $T_{0.75}$ | 99,43%          | 99,49% | 98,19%            | 91,22% | 99,93%          | 99,89% |
| $T_1$      | 99,23%          | 99,32% | 97,60%            | 88,47% | 99,91%          | 99,86% |
| $T_{1.25}$ | 98,92%          | 98,92% | 97,03%            | 86,14% | 99,87%          | 99,76% |
| $T_{1.5}$  | 98,60%          | 98,51% | 96,47%            | 83,87% | 99,84%          | 99,66% |
| $T_{1.75}$ | 98,28%          | 98,11% | 95,90%            | 81,67% | 99,81%          | 99,56% |
| $T_2$      | 97,96%          | 97,71% | 95,35%            | 79,52% | 99,77%          | 99,47% |
| $T_{2.25}$ | 97,65%          | 97,31% | 94,79%            | 77,43% | 99,74%          | 99,37% |
| $T_{2.5}$  | 97,34%          | 96,91% | 94,24%            | 75,39% | 99,71%          | 99,27% |
| $T_{2.75}$ | 97,02%          | 96,51% | 93,69%            | 73,41% | 99,67%          | 99,17% |
| $T_3$      | 96,71%          | 96,12% | 93,15%            | 71,48% | 99,64%          | 99,08% |
| $T_{3.25}$ | 96,20%          | 95,33% | 92,61%            | 69,75% | 99,59%          | 98,88% |
| $T_{3.5}$  | 95,69%          | 94,55% | 92,07%            | 68,07% | 99,53%          | 98,68% |
| $T_{3.75}$ | 95,18%          | 93,78% | 91,54%            | 66,43% | 99,48%          | 98,48% |
| $T_4$      | 94,67%          | 93,01% | 91,01%            | 64,83% | 99,42%          | 98,28% |
| $T_{4.25}$ | 94,17%          | 92,25% | 90,49%            | 63,26% | 99,37%          | 98,08% |
| $T_{4.5}$  | 93,67%          | 91,49% | 89,97%            | 61,74% | 99,31%          | 97,88% |
| $T_{4.75}$ | 93,17%          | 90,74% | 89,45%            | 60,25% | 99,26%          | 97,68% |
| $T_5$      | 92,68%          | 90,00% | 88,93%            | 58,79% | 99,20%          | 97,49% |
| $T_{5.25}$ | 92,06%          | 89,17% | 88,42%            | 57,82% | 99,09%          | 97,25% |
| $T_{5.5}$  | 91,45%          | 88,34% | 87,92%            | 56,85% | 98,99%          | 97,02% |

Tabel 4: Overlevelsessandsynligheder

## 10 Priser på CDS optioner

I forrige kapitel bestemte jeg overlevelsessandsynligheder for de to referenceenheder til de forskellige observationstidspunkter. Jeg vil i dette kapitel anvende disse til at udregne priser på CDS optioner.

I prisformlen for CDS optionen indgår volatiliteten. Først antages en volatilitet på 40% og det undersøges, hvorledes løbetiden på CDS optionen samt på den underliggende CDS kontrakt påvirker prisen på CDS optionen. Herefter udregnes historiske volatiliteter og det undersøges, hvordan forskellige estimater influerer priserne.

Da likviditeten på markedet for CDS optioner er særdeles begrænset, har det ikke været muligt at sammenligne de fundne priser med priser på markedet. Jeg vil imidlertid forsøge at kommentere på, om de fundne priser virker plausible. Til sidst i dette kapitel vil jeg

fremsætte en række kritikpunkter ved modellen samt ved implementeringen.

## 10.1 Prisformlen for CDS optioner

I kapitel 7 fandt jeg prisformlen for en CDS option, (26). Den er til tidspunkt 0 givet ved

$$\begin{aligned} CallPRCDS_{a,b}(0, K, LGD) &= 1_{\{\tau > 0\}} \bar{C}_{a,b}(0) [R_{a,b}(0)N(d_1(0)) - KN(d_2(0))] \\ &= 1_{\{\tau > 0\}} \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{E} [D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} | \mathcal{F}_0] / \mathbb{Q}(\tau > 0 | \mathcal{F}_0) \cdot \\ &\quad [R_{a,b}(0)N(d_1(0)) - KN(d_2(0))] \end{aligned}$$

hvor

$$d_{1,2} = \frac{\ln(R_{a,b}(0)/K) \pm (T_a - 0)\sigma_{a,b}^2/2}{\sigma_{a,b}\sqrt{T_a - 0}}$$

Det vides til tidspunkt 0, om virksomheden er gået fallit. Ved at benytte dette samt at antage uafhængighed mellem rente og fallitintensitet kan formelen omskrives til

$$\begin{aligned} CallPRCDS_{a,b}(0, K, LGD) &= \sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{E} [D(0, T_i)] \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}}] [R_{a,b}(0)N(d_1(0)) - KN(d_2(0))] \\ &= \sum_{i=a+1}^b \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) [R_{a,b}(0)N(d_1(0)) - KN(d_2(0))] \end{aligned}$$

hvor

$$d_{1,2} = \frac{\ln(R_{a,b}(0)/K) \pm T_a \sigma_{a,b}^2/2}{\sigma_{a,b}\sqrt{T_a}}$$

Jeg vil i det følgende afsnit vise, hvorledes jeg bestemmer værdier for forward CDS-spænd  $R_{a,b}(0)$ .

## 10.2 Forward CDS-spænd

Forward spændet indgår i prisformlen for CDS optionen, hvorfor jeg må finde værdier for disse. Ud fra de fundne diskonteringsfaktorer samt overlevelsessandsynligheder fra forrige kapitel kan jeg udregne forward CDS-spænd til tidspunkt 0. Formlen for forward spændet

til tidspunkt 0 er givet ved

$$R_{a,b}(0) = \frac{LGD \sum_{i=a+1}^b \mathbb{E} \left[ D(0, T_i) \mathbf{1}_{\{T_{i-1} < \tau \leq T_i\}} \mid \mathcal{F}_0 \right]}{\sum_{i=a+1}^b \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > 0 \mid \mathcal{F}_0) \bar{P}(0, T_i)}$$

Ved at antage uafhængighed mellem fallitintensitet og rente kan jeg, ligesom i forrige kapitel, omskrive til

$$= \frac{LGD \left( \sum_{i=a+1}^b P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \sum_{i=a+1}^b P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) \right)}{\sum_{i=a+1}^b \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i)}$$

Jeg definerer en  $m \times n$  kontrakt som retten til om  $m$  år at indgå en CDS kontrakt med en løbetid på  $n$  år. Da CDS optioner som tidligere nævnt har forholdsvis korte løbetider, vil jeg udregne priser, og dermed også forward CDS-spænd, på følgende kontrakter:  $0,25 \times 1$ ,  $0,25 \times 3$ ,  $0,25 \times 5$  samt  $0,5 \times 1$ ,  $0,5 \times 3$  og  $0,5 \times 5$  for begge referenceenheder til de forskellige observationstidspunkter. Forward spændet for eksempelvis kontrakten  $0,25 \times 1$  er spændet mellem tidspunkt  $a = 0,25$  og  $b = 1,25$ , hvorfor der summeres over  $i = 0,5$  til  $i = 1,25$ .

De fundne forward CDS-spænd ses i tabel 5 angivet i basispunkter.

|                 | <b>1. oktober 2015</b> |        | <b>12. december 2008</b> |        | <b>3. oktober 2005</b> |       |
|-----------------|------------------------|--------|--------------------------|--------|------------------------|-------|
|                 | RBS                    | Volvo  | RBS                      | Volvo  | RBS                    | Volvo |
| $0,25 \times 1$ | 53,93                  | 55,23  | 144,85                   | 723,35 | 6,13                   | 12,33 |
| $0,25 \times 3$ | 73,60                  | 91,89  | 141,95                   | 673,25 | 7,80                   | 21,67 |
| $0,25 \times 5$ | 96,22                  | 133,72 | 140,92                   | 641,05 | 10,48                  | 32,26 |
| $0,5 \times 1$  | 61,74                  | 69,60  | 143,42                   | 699,23 | 6,76                   | 16,03 |
| $0,5 \times 3$  | 80,35                  | 104,80 | 141,36                   | 660,13 | 8,44                   | 24,94 |
| $0,5 \times 5$  | 101,88                 | 142,79 | 140,44                   | 625,17 | 11,46                  | 34,70 |

Tabel 5: Forward CDS-spænd

Forward CDS-spændene er generelt en smule højere end de tilsvarende spot spænd, og er større jo længere løbetiden er for CDS optionen samt for den underliggende CDS kontrakt. Dette gælder imidlertid ikke for forward spændene under den finansielle krise. Disse forward spænd er højere end de tilsvarende spot spænd og er ydermere større for CDS optionerne med de korte løbetider på grund af større kreditrisiko i den korte ende.

### 10.3 Beregning af priser på CDS optioner

Jeg vil nu udregne priser på payer CDS optioner. I tabel 6 ses priser på at-the-money CDS optioner med forskellige løbetider på de forskellige observationstidspunkter. Priserne er angivet i basispoint. Jeg har i beregningerne antaget en volatilitet på forward spændene på 40%.

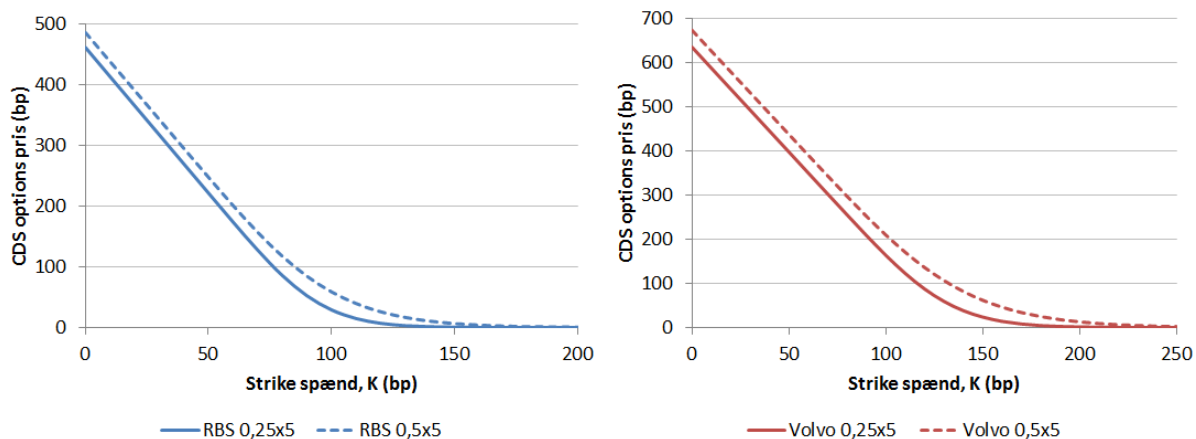
|                 | 1. oktober 2015 |       | 12. december 2008 |        | 3. oktober 2005 |       |
|-----------------|-----------------|-------|-------------------|--------|-----------------|-------|
|                 | RBS             | Volvo | RBS               | Volvo  | RBS             | Volvo |
| $0,25 \times 1$ | 4,26            | 4,37  | 11,00             | 50,48  | 0,48            | 0,96  |
| $0,25 \times 3$ | 17,22           | 21,44 | 30,59             | 123,18 | 1,77            | 4,91  |
| $0,25 \times 5$ | 36,72           | 50,52 | 45,06             | 172,37 | 3,84            | 11,75 |
| $0,5 \times 1$  | 6,87            | 7,75  | 15,17             | 66,43  | 0,74            | 1,75  |
| $0,5 \times 3$  | 26,44           | 34,36 | 42,40             | 164,56 | 2,69            | 7,91  |
| $0,5 \times 5$  | 54,59           | 75,62 | 66,25             | 229,24 | 5,89            | 17,69 |

Tabel 6: Priser på at-the-money CDS optioner

Af tabel 6 ses, at når løbetiden for optionen eller for den underliggende CDS kontrakt øges, da øges prisen på CDS optionen. Optionen er altså dyrere jo længere løbetid den har. Dette skyldes, at man ved længere options løbetider vil være påvirket af volatilitet i længere tid, hvilket medfører større sandsynlighed for, at optionen ender in-the-money. Optionen må derudover være dyrere jo længere løbetid den underliggende CDS kontrakt har, da en CDS kontrakt med en længere løbetid vil have flere løbende betalinger.

Som forventet er priserne lavest før den finansielle krise og højst under krisen. Endvidere er det dyrere at købe en CDS option på Volvo end på RBS, særligt under finanskrisen, hvilket ikke er overraskende, da Volvo har mindre overlevelsessandsynligheder end RBS. Jeg vil i resten af dette kapitel nøjes med at betragte CDS optioner med 5-årige underliggende CDS kontrakter, da disse er mest likvide.

Figur 10 viser priser på CDS optioner som funktion af strike-spændet til observationstidspunktet 1. oktober 2015 opdelt i underliggende referenceenheder. De fuldt optrukne linjer angiver CDS optioner med 3 måneders løbetid, og de stiplede linjer angiver CDS optioner med 6 måneders løbetid.



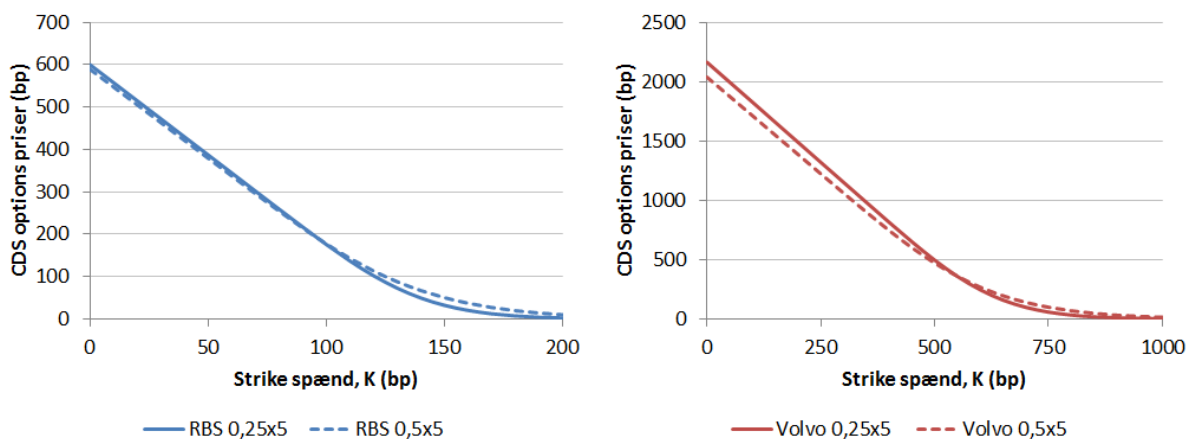
Figur 10: CDS options priser som funktion af strike spænd, 1. oktober 2015

Af figuren ses, at prisen på CDS optionerne er højere ved løbetiden på 6 måneder sammenlignet med 3 måneder, hvilket er gældende for samtlige strike spænd. Ved eksempelvis at betragte CDS optionen med RBS som underliggende referenceenhed og en løbetid på 3 måneder, ved jeg fra tabel 5, at forward spændet er 96 bp. Et strike spænd på 0 betyder, at man kan købe den underliggende CDS kontrakt til en pris på 0 bp. Givet at forward spændet er 96 bp, er optionen ved et strike spænd på 0 bp deep in-the-money, og prisen på optionen er 461 bp. Til sammenligning er prisen på at-the-money optionen 37 bp. Når man køber en payer CDS option med et strike spænd, der er lavere end forward spændet, er optionen in-the-money fra begyndelsen. Det betyder, at der er en større sandsynlighed for, at optionen ender in-the-money, hvorfor den nødvendigvis må have en højere pris. Hvis strike spændet er højere end 96 bp, er optionen out-of-the-money og prisen på optionen er lavere, da der vil være mindre sandsynlighed for, at optionen ender in-the-money. Således jo højere strike spænd desto lavere options pris. En tilsvarende figur for receiver CDS optioner havde vist, at prisen på CDS optionen er en voksende funktion af strike spændet.

Figur 11 viser tilsvarende grafer for observationstidspunktet 12. december 2008. Det bemærkes, at figuren adskiller sig fra figur 10, idet prisen på CDS optionen ikke nødvendigvis er højere jo længere løbetid optionen har.

For begge underliggende referenceenheder gælder, at ved lavere strike spænd er CDS optionen med en løbetid på 3 måneder dyrere end den tilsvarende CDS option med en løbetid





Figur 11: CDS options priser som funktion af strike spænd, 12. december 2008

på 6 måneder. Dette kan forklares ved, at forward spændene for CDS optionerne med 3 måneders løbetid er højere end forward spændene for optionen med 6 måneders løbetid, hvilket kommer af den større kreditrisiko i den korte ende. Dette gælder for strike spænd mindre end 96 bp og 548 bp for henholdsvis RBS og Volvo<sup>1</sup>.

Tilsvarende grafer for observationstidspunktet 3. oktober 2005 er angivet i bilag B. Af figur 15 ses for samtlige strike spænd, ligesom for 1. oktober 2015, at prisen på CDS optionerne er højere jo længere løbetiden er på optionen.

I dette afsnit har jeg antaget en volatilitet på 40% på forward spændene for både RBS og Volvo på alle observationstidspunkter. I det følgende afsnit vil jeg udregne priser på CDS optioner ud fra historiske volatiliteter.

## 10.4 Historisk volatilitet

Det har som tidligere nævnt ikke været muligt at skaffe priser på CDS optioner på grund af den meget begrænsede likviditet på markedet, hvorfor jeg ikke kan udregne de implicitte volatiliteter. Jeg vil derfor udregne historiske volatiliteter på spændet ud fra observerede CDS-spænd.

I prisformlen for CDS optionen indgår volatiliteten på forward spændet, hvorfor den historiske volatilitet i princippet skal beregnes ud fra en serie af CDS-spænd, hvor man

<sup>1</sup>Fundet ved hjælp af *Solver* i excel

til ethvert tidspunkt udregner forward CDS-spændet. I praksis beregnes volatiliteten imidlertid ud fra spot spænd, da volatiliteten på forward spænd vil være meget tæt på volatilitet på spot spænd<sup>2</sup>. På baggrund af dette vil jeg beregne volatiliteten på spændet ud fra observerede spot CDS-spænd.

Jeg anvender O'Kanes<sup>3</sup> fremgangsmåde, og betegner en serie af CDS-spænd  $R_j$ , hvor  $j = 1, \dots, N$  er antallet af daglige observationer. De kontinuerte afkast beregnes som

$$u_i = \ln \left( \frac{R_j}{R_{j-1}} \right)$$

Estimatet for den daglige volatilitet er givet ved

$$\sigma_{daglig} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (u_i - \hat{u})^2}$$

hvor  $\hat{u}$  er gennemsnittet af de kontinuerte afkast, som er givet ved

$$\hat{u} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_i$$

Da volatiliteten i prisformlen for CDS optioner er opgivet i år, omregnes den daglige volatilitet til den årlige på følgende måde

$$\sigma_{aarlig} = \sqrt{T} \sigma_{daglig}$$

hvor  $T$  er antallet af handelsdage på et år. Standard error for estimatet kan vises at være omkring  $\hat{\sigma}/\sqrt{2N}$ .<sup>4</sup>

Jeg ønsker at bestemme volatiliteter for CDS kontrakter med 5 års løbetid på de forskellige observationstidspunkter. Det kan imidlertid diskuteres hvor mange observationer, der er hensigtsmæssigt at medtage. Normalt vil et større antal observationer give en mindre standard error og dermed et mere præcist estimat, men da volatiliteten ændrer sig over

---

<sup>2</sup>O'Kane, Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates

<sup>3</sup>O'Kane, Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivates

<sup>4</sup>J. Hull, Options, futures, and other derivatives

tid, kan et stort antal observationer indeholde data, der ikke længere vil være relevant for den fremtidige volatilitet. På baggrund af dette vælger jeg at udregne volatiliteter for forskellige tidsperioder på 1, 3, 6 samt 12 måneder.

Nedenstående tabel angiver de estimerede volatiliteter for forskellige tidsperioder.

|            | <b>1. oktober 2015</b> |        | <b>12. december 2008</b> |         | <b>3. oktober 2005</b> |        |
|------------|------------------------|--------|--------------------------|---------|------------------------|--------|
|            | RBS                    | Volvo  | RBS                      | Volvo   | RBS                    | Volvo  |
| 1 måned    | 44,20%                 | 76,83% | 67,55%                   | 48,44%  | 23,19%                 | 20,84% |
| 3 måneder  | 56,02%                 | 53,04% | 218,56%                  | 115,13% | 32,38%                 | 23,86% |
| 6 måneder  | 53,44%                 | 41,27% | 160,97%                  | 89,71%  | 37,89%                 | 53,99% |
| 12 måneder | 53,75%                 | 40,15% | 140,92%                  | 86,38%  | 35,79%                 | 41,99% |

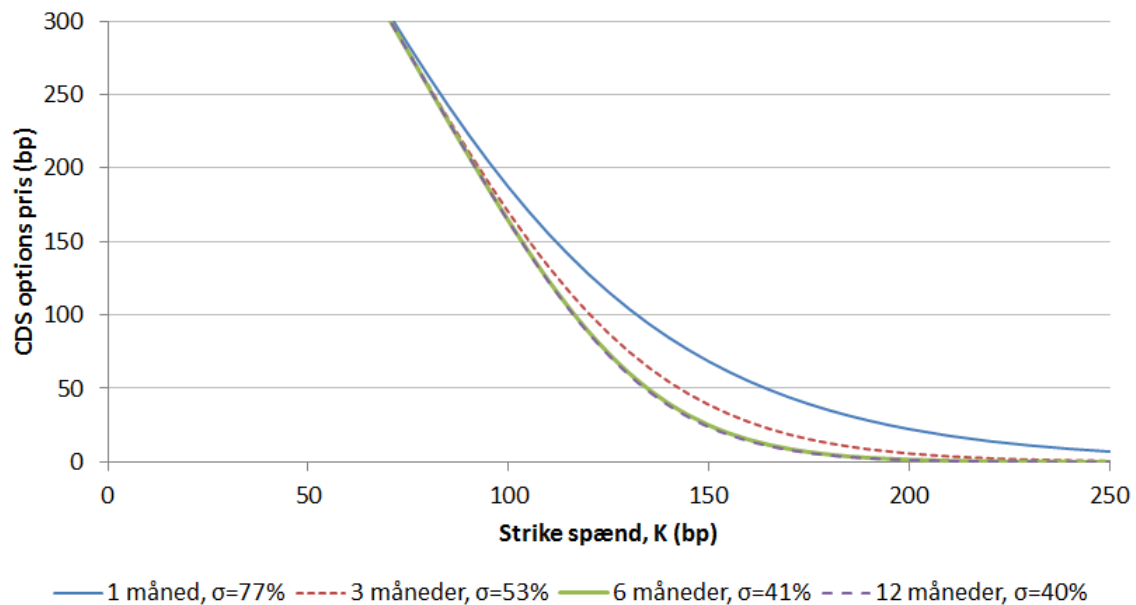
Tabel 7: Historiske volatiliteter for 5-årige CDS-spænd

Af tabellen ses tydeligt, at der er stor forskel på volatiliteten afhængig af, hvor mange observationer der medtages. På observationstidspunktet under den finansielle krise afviger estimerterne markant fra hinanden. Her bemærkes ydermere, at flere af estimerterne er over 100%. Volatiliteten for RBS baseret på en 3 måneders tidshorisont er sågar over 200%. Det kan af estimerterne konkluderes, at det nok ikke er helt rimeligt at antage en volatilitet på 40% på de forskellige observationstidspunkter. Der skal imidlertid huskes på, at den historiske volatilitet beregnes på baggrund af historisk data, som er under det faktiske sandsynlighedsmål ( $\mathbb{P}$ -målet), hvorfor data kan indeholde risikopræmier.

Standard errors for estimerterne kan ses i bilag C. Af tabellen ses, at standard errors generelt bliver mindre jo flere observationer der medtages. Det er imidlertid ikke tilfældet for estimerterne under den finansielle krise, hvor standard error for estimerterne baseret på 3 måneders observationer for begge referenceenheder er større end standard error for estimerterne baseret på 1 måneds observationer.

Jeg vil nu undersøge, hvorledes de forskellige estimer for volatiliteten påvirker prisen på CDS optionen. Jeg betragter en CDS option med en løbetid på 3 måneder d. 1. oktober 2015. Den underliggende CDS kontrakt har en løbetid på 5 år og Volvo som referenceenhed. Figur 12 viser prisen på denne CDS option som funktion af strike spændet for de forskellige estimer af volatiliteten fra tabel 7. Forward spændet blev tidligere

udregnet til 134 bp.

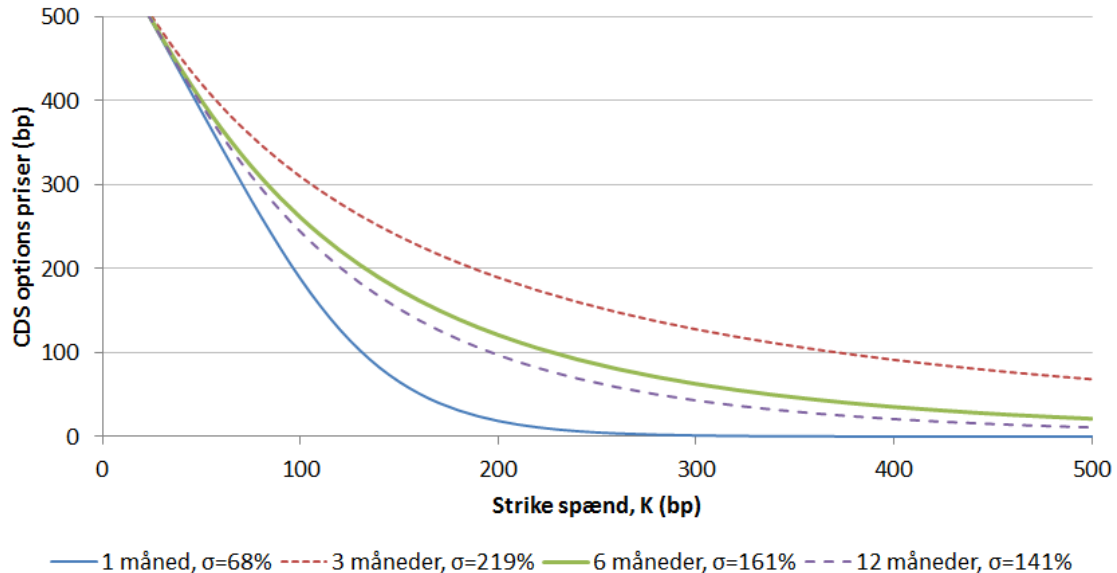


Figur 12: CDS options priser for forskellige volatiliteter, Volvo 2015

Af figuren ses, at CDS optionen er dyrere jo større volatiliteten er for CDS-spændet. Dette skyldes, at en højere volatilitet øger sandsynligheden for, at optionen ender deep in-the-money. Det øger dog samtidig sandsynligheden for, at optionen ender deep out-of-the-money, men da vil optionen ikke blive exerciset, hvorfor tabet vil være begrænset. Gevinsten er derimod ubegrænset. Prisen på en out-of-the-money CDS option med  $K = 150$  er 68 bp, 39 bp, 25 bp og 24 bp for volatiliteter på henholdsvis 77%, 53%, 41% og 40%. Der er derfor relativ stor forskel på prisen på CDS optionen afhængig af hvilken volatilitet, der benyttes i prisformlen.

Jeg betragter nu en CDS option med en løbetid på 3 måneder d. 12 december 2008 og med RBS som underliggende referenceenhed. Forward spændet blev for denne kontrakt tidligere udregnet til 141 bp. Figur 13 viser prisen på denne CDS option som funktion af strike spændet for de forskellige estimer af volatiliteten. Ligesom figur 12 er CDS optionen dyrere jo større volatiliteten er på CDS-spændet. Prisen på en in-the-money CDS option med  $K = 100$  er 188 bp, 309 bp, 261 bp og 244 bp for volatiliteter på henholdsvis 68%, 219%, 161% og 141%. For denne CDS option er der således stor forskel på, hvilket estimat der benyttes for volatiliteten, hvorfor det er særligt vigtigt at udvælge

det antal observationer, man mener er mest hensigtsmæssigt at medtage. Figurer for de resterende  $0,25 \times 5$  CDS optioner kan ses i bilag D.



Figur 13: CDS options priser for forskellige volatiliteter, RBS 2008

Hull<sup>5</sup> bruger en tommelfingerregel, der siger, at man skal sætte  $N$  lig det antal dage som volatiliteten skal anvendes. Dvs. hvis estimatet for volatiliteten skal benyttes til at prisfastsætte en 1-årig option, anvendes observationer fra det seneste år til at estimere volatiliteten. Ved at anvende denne tommelfingerregel, og benytte volatiliteten baseret på de seneste 3 måneders observationer, udregner jeg priser på at-the-money CDS optioner med en løbetid på 3 måneder:

|                 | 1. oktober 2015 |       | 12. december 2008 |        | 3. oktober 2005 |       |
|-----------------|-----------------|-------|-------------------|--------|-----------------|-------|
|                 | RBS             | Volvo | RBS               | Volvo  | RBS             | Volvo |
| $0,25 \times 5$ | 51,34           | 66,90 | 249,12            | 490,17 | 3,11            | 7,02  |

Tabel 8: Priser på at-the-money CDS optioner baseret på historisk volatilitet

Ikke overraskende er priserne generelt højere end de tilsvarende priser med en volatilitet på 40%, med undtagelse af CDS optioner på observationstidspunktet 3. oktober 2005. Til dette tidspunkt er priserne på begge optioner lavere på grund af lavere volatilitet. Figurer

<sup>5</sup>J. Hull, Options, futures, and other derivatives

for priser på CDS optionerne som funktion af strike-spændet med 3 og 6 måneders løbetid kan ses i bilag E.

## 10.5 Diskussion

På grund af særdeles begrænset likviditet på markedet for CDS optioner, har det ikke været muligt at sammenligne de fundne priser med handlede priser. Jeg vil imidlertid forsøge at vurdere, om de fundne priser fra tabel 8 virker plausible.

Prisen på en at-the-money CDS option med en løbetid på 3 måneder, for RBS 1. oktober 2015, er 51 bp, hvor  $K = 96$  bp. Ved køb af denne option har ejeren retten til at købe beskyttelse til 96 bp på en 5-årig CDS kontrakt om 3 måneder. Ejeren af optionen vil således exercise, hvis CDS-spændet om 3 måneder er større end strike spændet på 96. Hvis der exercises, er det imidlertid ikke ensbetydende med, at ejeren af optionen opnår profit, da der er betalt en pris for optionen på 51 bp. Man må derfor have en tro på, eller en frygt for, en større stigning i spændet for at finde CDS optionen interessant. Jeg vil i det følgende forsøge at sige noget om, hvor stor ændringen i spændet må være, for at ejeren af optionen opnår profit.

Den underliggende CDS kontrakt har en løbetid på 5 år, hvorfor prisen på 51 bp groft sagt vil medføre en "årlig pris" på  $51/5 \approx 10$  bp. Det vil sige, at spot spændet på exercise tidspunktet skal være større end  $96 + 10 = 106$  bp, for at ejeren af optionen har opnået profit. Jeg vil derfor undersøge, hvad sandsynligheden er for, at spændet kan nå at stige mindst 10 bp på 3 måneder.

Jeg betragter den daglige ændring i CDS-spændet de seneste tre måneder og antager en normalfordeling herfor

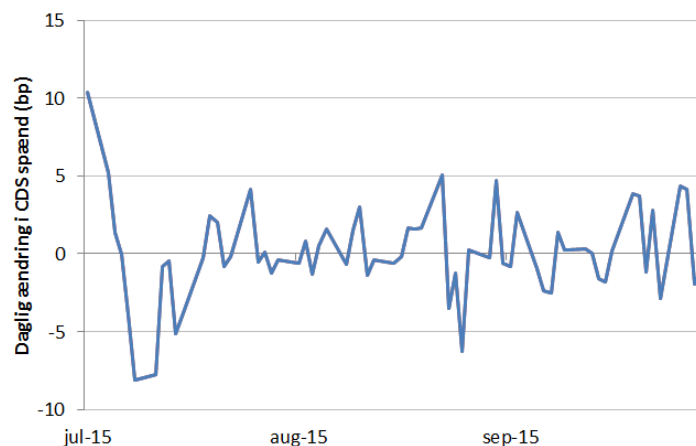
$$R_i - R_{i-1} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

hvor  $i = 1, \dots, 65$  er antallet af daglige observationer. Ud fra et histogram vurderes antagelsen om normalfordelte daglige ændringer som rimelig<sup>6</sup>. Nedenstående figur viser ændringen i de daglige spænd. Ved at estimere parametrene i normalfordelingen ud fra

---

<sup>6</sup>Se bilag F

de daglige ændringer<sup>7</sup> fås  $\mu = 0,062$  samt  $\sigma = 3,023$ .



Figur 14: Daglige ændringer i CDS-spænd de seneste 3 måneder. RBS, 1. oktober 2015

Det antages, at ændringerne er uafhængige fra dag til dag, hvorfor ændringen over tre måneder kan skrives som

$$R_i - R_{i-3m} \sim N(65\mu, 65\sigma^2)$$

Estimaterne for en 3 måneders ændring bliver derfor  $\mu_{3m} = 0,062 \cdot 65 = 4,056$  og  $\sigma_{3m} = 3,023 \cdot \sqrt{65} = 24,374$ . Sandsynligheden for at ændringen over 3 måneder vil være større end 10 er med disse estimater 40,37%. Set i sammenligning med figur 14 virker denne sandsynlighed rimelig, da ændringerne fra dag til dag er relativt store, hvilket indikerer en god sandsynlighed for, at ændringen over 3 måneder vil være større end 10 bp. Ud fra figur 14 kan det imidlertid diskuteres, om det er rimeligt at medtage ændringerne i starten af perioden, da disse ændringer skiller sig ud sammenlignet med det generelle billede. Disse ændringer vil ydermere have en forholdsvis stor påvirkning på estimaterne. Ved eksempelvis kun at betragte de seneste 2 måneders ændringer i CDS-spændet fås en sandsynlighed på 54,80%. Jeg kan derfor konkludere, at det er rimelig sandsynligt, at ændringen vil være mindst 10 bp i løbet af 3 måneder, hvorfor det ikke er urealistisk, at der er nogle der vil købe CDS optionen til en pris på 51 bp. Det bemærkes endvidere, at CDS-spændet er forholdsvis volatilt, hvilket giver grund til spekulation i CDS-spændet.

For at tage et andet eksempel er prisen på en at-the-money CDS option d. 12. december 2008 for Volvo 490 bp, hvor  $K = 641$  bp. Ejeren af optionen vil exercise optionen, hvis

<sup>7</sup>Parametre og de efterfølgende sandsynligheder bestemmes i RStudio, se bilag H for kode

CDS-spændet om 3 måneder er større end strike spændet på 641 bp. Prisen på 490 bp vil i grove træk medføre en årlig pris på  $490/5 \approx 98$  bp, hvorfor ændringen i spændet efter 3 måneder må være højere end 98 bp, for at ejeren af optionen opnår profit. De daglige ændringer kan ses i bilag G. Sandsynligheden for at spændet over 3 måneder vil stige 98 bp eller mere er hele 98,98%. Ved blot at medtage den seneste måneds observationer vil sandsynligheden i stedet være 97,60%. Ved disse ekstremt høje sandsynligheder er der formegentlig ikke mange der vil være interesserede i at sælge CDS optionen. Dette eksempel kan således være med til at forklare, hvorfor handlen med CDS optioner gik i stå under den finansielle krise.

D. 3. oktober 2005 er prisen på en at-the-money CDS option for RBS 3,11 bp, hvorfor den årlige pris groft sagt er  $3,11/5 \approx 0,6$  bp. De daglige ændringer kan ses i bilag G. Sandsynligheden for at ændringen er mindst 0,6 bp efter 3 måneder er 2,19%. Det er en meget lav sandsynlighed, hvorfor jeg på baggrund af bilag G i stedet estimerer på baggrund af de seneste 2 måneder. Her fås en sandsynlighed på 23,84%. Selvom sandsynlighederne afviger en del fra hinanden, må det vurderes som sandsynligt at ændringen i spændet i løbet af tre måneder er mindst 0,6 bp.

Jeg kan ud fra dette afsnit konkludere, at de fundne priser på CDS optionerne virker plausible med undtagelse af resultatet under den finansielle krise. Der kan ydermere argumenteres for, at den større volatilitet og sandsynlighed for opnåelse af profit til observationstidspunktet i dag indikerer, at spekulation kan være en drivende faktor i markedet for CDS optioner. Samtidig kan det være med til at forklare den øgede interesse for handel med disse instrumenter.

## 10.6 Kritik

Som tidligere nævnt findes der strukturelle modeller samt intensitetsmodeller indenfor pris-fastsættelse af kreditrisiko. Til prisfastsættelsen benytter jeg intensitetsmodeller, hvor fallit forekommer, første gang en given springproces springer. I disse modeller er der ingen forklaring på, hvad der udløser fallit til forskel fra de strukturelle modeller, hvor fallit afhænger af virksomhedens kapitalstruktur. Dette er en kritik af intensitetsmodeller, men disse anvendes imidlertid på grund af det nyttige matematiske setup.



Prisformlen udledes under et særligt risikoneutralt sandsynlighedsmål, og der antages en dynamik for spændet under dette særlige risikoneutrale mål. Det er måske ikke helt rimeligt at antage, at spændet udvikler sig under dette særlige sandsynlighedsmål, men det har imidlertid været en nødvendighed for at kunne beregne priser på CDS optionerne. Man skal dog være opmærksom på, at prisformlen ikke er et udtryk for den virkelige verden. Prisformlen for CDS optionen afhænger ydermere af en konstant volatilitet på forward CDS-spændet. Dette er ikke en realistisk antagelse, da volatiliteten vil ændre sig over tid, hvilket jeg eksempelvis så i tabel 7. Endvidere er der en række andre kritikpunkter forbundet med Black Scholes formel som eksempelvis, at der ses bort fra transaktionsomkostninger.

For at kunne udregne priser antages uafhængighed mellem fallitintensitet og rente, hvilket medfører en korrelation på 0 mellem disse. Denne antagelse er måske ikke helt rimelig, da man kan forestille sig, at et højt renteniveau kan medføre et højere antal fallitter i form af højere finansieringsomkostninger. O’Kane<sup>8</sup> argumenterer imidlertid for, at korrelationen mellem renten og fallitintensiteten er så lille, at det vil have minimal betydning for resultaterne.

I implementeringen anvender jeg den fundne prisformel, hvori den underliggende RCDS kontrakt har udskudte betalinger. Den almindelige RCDS kontrakt er den mest normale set i markedspraksis sammenhæng, men RCDS kontrakten med udskudte betalinger letter notationen. Det benyttede data er for almindelige RCDS kontrakter. Endvidere har jeg antaget en recovery rate på 40%. Det kan diskuteres om dette er en rimelig antagelse, men eftersom det kan være svært at sige noget om størrelsen, da den bestemmes på en to-trins auktion efter fallit er indtruffet, mener jeg, at det er rimeligt at anvende Bloombergs standard rate på 40%. Jeg har ydermere abstraheret fra de såkaldte IMM dage, hvilket kan have haft en mindre betydning for priserne på CDS optionerne.

---

<sup>8</sup>O’Kane, Modelling Single-name and Multi-name Derivates

## 11 Konklusion

Formålet med denne afhandling har været at beskrive og undersøge CDS optioner ved en prisfastsættelse. Dette med henblik på, at forsøge at give læseren en forståelse for den kraftige vækst i markedet, der har fundet sted i løbet af de seneste år.

Som det første i afhandlingen har jeg præsenteret en Credit Default Swap, som er det underliggende aktiv i en CDS option. En CDS kontrakt beskytter en køber mod et tab som følge af, at referenceenheden går fallit. Derefter har jeg beskrevet CDS optioner, der giver ejeren retten til at købe eller sælge en CDS kontrakt. Ejeren af en payer CDS option vil exercise optionen, hvis spot spændet er større end strike spændet på exercisetidspunktet. Således må køberen af en payer CDS option umiddelbart have et håb om eller en frygt for, at spændet stiger indenfor en kortere periode. CDS optioner kan i praksis bruges til at hedge kreditrisiko eller til spekulation. De har imidlertid relativt korte løbetider, hvilket indikerer, at spekulation er den primære drivende faktor i markedet. Jeg har derefter undersøgt, hvorledes man kan prisfastsætte en CDS option. Jeg har vist, at en CDS option kan betragtes som konverteringsretten i en konverterbar risikofyldt floater, hvorefter jeg har udledt en prisformel for CDS optioner. Denne prisformel er imidlertid udledt under en antagelse om dynamikken for forward CDS-spændet under et særligt risikoneutralt sandsynlighedsmål.

Jeg har ud fra den fundne prisformel bestemt overlevelsessandsynligheder for RBS og Volvo ud fra observeret data, og herefter udregnet priser på CDS optioner før og under krisen samt i dag. Priserne afhænger af volatiliteten på forward CDS-spændet, hvorfor valget af denne parameter har betydning for prisen. Til sidst har jeg diskuteret om de fundne priser virker plausible. Det er gennemgående for priserne, at CDS-spændet skal stige relativt meget, for at køberen af en payer CDS option opnår profit ved køb af optionen. Der synes, at være en del volatilitet på markedet for CDS kontrakter, særligt i dag sammenlignet med for 10 år siden, hvorfor der er en god sandsynlighed for, at spændet kan nå at ændre sig relativt meget inden udløb af optionen. Sammen med volatiliteten på markedet, indikerer niveauet af priserne, at markedet i høj grad kan være drevet af spekulation, da det på relativt kort sigt vil være muligt at opnå høj profit. Således kan høj volatilitet for CDS-spænd være medvirkende til at forklare en øget vækst.

## 12 Litteraturliste

Bloomberg. Maybe Investors Love Credit Index Options a Little Too Much. <http://www.bloomberg.com/news/articles/2015-07-17/maybe-investors-love-credit-index-options-a-little-too-much>, 2015

Brier, Søren. *Informationsvidenskabsteori*. Samfundslitteratur, 2006

Brigo, Damiano. *Candidate Market Models and the Calibrated CIR++ Stochastic Intensity Model for Credit Default Swap Options and Callable Floaters*. Wiley, 2005

Brigo, Damiano. *Interest rate models: theory and practice: with smile, inflation, and credit*. Springer, 2006

Brigo, Damiano. *Market models for CDS options and callable floaters*. Risk, 2005

Business. Libor-skandalen: Sådan svindlede Barclays. <http://www.business.dk/finans/libor-skandalen-saadan-svindledede-barclays>, 2012

Børsen. ECB kaster redningskrans på 8500 milliarder. [http://borsen.dk/nyheder/oekonomi/artikel/1/298046/ecb\\_kaster\\_redningskrans\\_paa\\_8500\\_milliardere.html](http://borsen.dk/nyheder/oekonomi/artikel/1/298046/ecb_kaster_redningskrans_paa_8500_milliardere.html), 2015

Børsen. Standard and Poor's nedgraderer USA. [http://borsen.dk/nyheder/oekonomi/artikel/1/212236/s\\_p\\_nedgraderer\\_usa.html](http://borsen.dk/nyheder/oekonomi/artikel/1/212236/s_p_nedgraderer_usa.html), 2011

Che, Yeon-Koo og Stehi, Rajiv. *Credit Market Speculation and Cost of Capital*. American Economic Journal, 2014

Christensen, Michael. *Obligationsinvestering: Teoretiske overvejelser og praktisk anvendelse*. Jurist- og Økonomforbundets Forlag, 2014

Erhvervs- og vækstministeriet. Den finansielle krise i Danmark - årsager, konsekvenser og læring. <http://www.evm.dk/publikationer/2013/18-09-13-den-finansielle-krise-i-danmark>, 2013

Federal Reserve Bank of New York Staff Reports. *An Analysis of CDS Transactions:*

*Implications for Public Reporting.* 2011

Finans, Volvo tordner frem i USA. <http://finans.dk/artikel/ECE4261441/Volvo-tordner-frem-i-USA/?ctxref=ext>, 2009

FT Alphaville. CDS options market multiplies alongside questions. <http://ftalphaville.ft.com/2011/03/28/528141/cds-options-market-multiplies-alongside-questions/>, 2011

GlobalCapital, Credit-Default Swap Index Options. <http://www.globalcapital.com/article/k64qvpzvn8ld/credit-default-swap-index-options>, 2006

Hull, John. *Options, futures, and other derivatives*. Prentice Hall, 2012

ISDA SwapsInfo, <http://www.swapsinfo.org/>

Lando, David. *Credit Risk Modeling: Theory and Practice*. Princeton University Press, 2008

Lawler, Gregory F. *Introduction to stochastic processes*. Chapman & Hall/CRC, 2006

Liu & Jäckel. *Options On Credit Default Index Swaps*. Willmott Magazine, 2005

Marketwatch. Despite reform push, CDS options go from toxic to tasty. <http://www.marketwatch.com/story/options-in-an-increasingly-volatile-market-2010-06-09>, 2010

Morningstar. Risici i virksomhedsobligationer. <http://www.morningstar.dk/dk/news/132075/risici-i-virksomhedsobligationer.aspx>, 2014

O'Kane, Dominic. *Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivatives*. John Wiley & Sons, 2011

Politikken, "Skruppeløse", "kvalmende" og "chokerende": Storbank kørte bevidst sine kunder i sæk. <http://politiken.dk/oekonomi/virksomheder/ECE2142834/skruppelloese-kvalme-og-chokerende-storbank-koerte-bevidst-sine-kunder-i-saenk/>, 2013

Relbanks, <http://www.relbanks.com/worlds-top-banks/assets>, 2015

Sundaram, Rangarajan K. *CDS Auctions and Recovery Rates: An Appraisal*. 2013

Volvogroup, <http://www.volvogroup.com>

## 13 Bilag

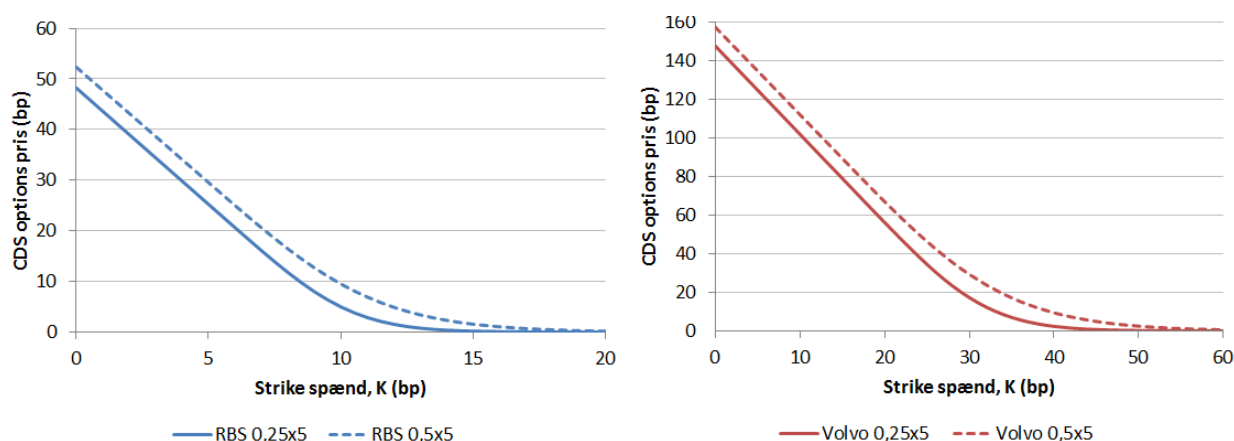
### 13.1 Bilag A - Diskonteringsfaktorer

Nedenstående diskonteringsfaktorer anvendes til at bestemme overlevelsessandsynligheder på betalingstidspunkterne for de valgte observationstidspunkter.

| $T_i$ | 1. oktober 2015 | 12. december 2008 | 3. oktober 2005 |
|-------|-----------------|-------------------|-----------------|
| 0,25  | 0,99995         | 0,99233           | 0,99412         |
| 0,5   | 0,99990         | 0,98472           | 0,98827         |
| 0,75  | 0,99984         | 0,97716           | 0,98245         |
| 1     | 0,99979         | 0,96966           | 0,97667         |
| 1,25  | 0,99949         | 0,96233           | 0,96891         |
| 1,5   | 0,99939         | 0,95497           | 0,96280         |
| 1,75  | 0,99928         | 0,94766           | 0,95674         |
| 2     | 0,99918         | 0,94041           | 0,95072         |
| 2,25  | 0,99751         | 0,92959           | 0,94176         |
| 2,5   | 0,99723         | 0,92208           | 0,93550         |
| 2,75  | 0,99695         | 0,91463           | 0,92928         |
| 3     | 0,99668         | 0,90724           | 0,92311         |
| 3,25  | 0,99318         | 0,89690           | 0,91385         |
| 3,5   | 0,99266         | 0,88943           | 0,90753         |
| 3,75  | 0,99214         | 0,88201           | 0,90127         |
| 4     | 0,99162         | 0,87466           | 0,89504         |
| 4,25  | 0,98640         | 0,86296           | 0,88524         |
| 4,5   | 0,98561         | 0,85551           | 0,87892         |
| 4,75  | 0,98482         | 0,84812           | 0,87264         |
| 5     | 0,98402         | 0,84080           | 0,86640         |
| 5,25  | 0,97658         | 0,82605           | 0,85594         |
| 5,5   | 0,97548         | 0,81857           | 0,84963         |

## 13.2 Bilag B - CDS options priser 2005

Nedenstående graf viser CDS options priser som funktion af strike spænd på observationstidspunktet 3. oktober 2005. Der er antaget en volatilitet på 40%.



Figur 15: CDS options priser som funktion af strike spænd, 3. oktober 2005

## 13.3 Bilag C - Standard errors for estimerede volatiliteter

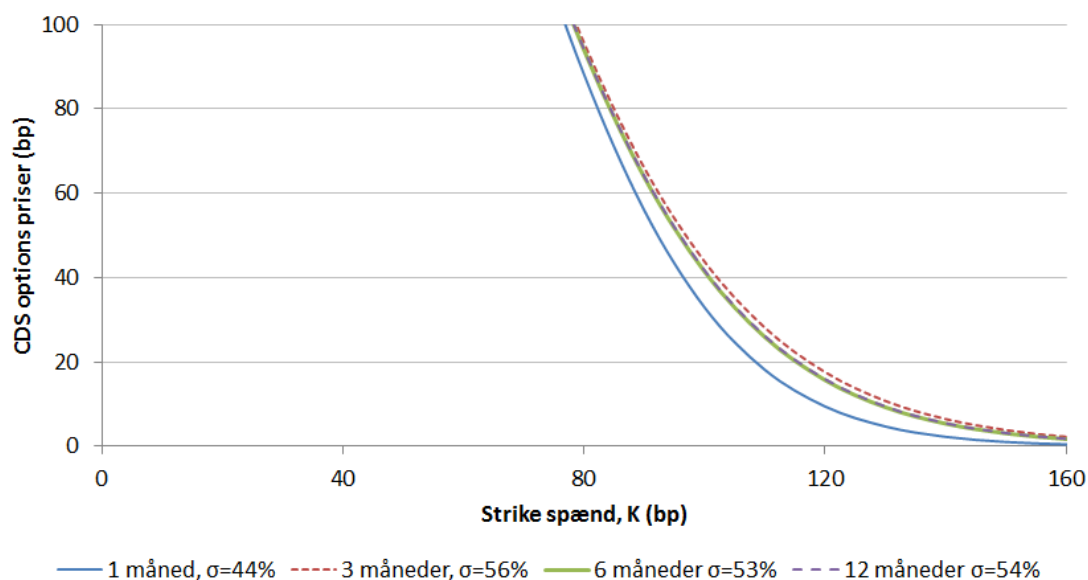
Nedenstående tabel angiver standard errors for de estimerede volatiliteter.

|            | 1. oktober 2015 |       | 12. december 2008 |       | 3. oktober 2005 |       |
|------------|-----------------|-------|-------------------|-------|-----------------|-------|
|            | RBS             | Volvo | RBS               | Volvo | RBS             | Volvo |
| 1 måned    | 0,067           | 0,116 | 0,102             | 0,073 | 0,036           | 0,032 |
| 3 måneder  | 0,049           | 0,046 | 0,192             | 0,101 | 0,028           | 0,021 |
| 6 måneder  | 0,033           | 0,025 | 0,099             | 0,055 | 0,023           | 0,033 |
| 12 måneder | 0,024           | 0,018 | 0,062             | 0,038 | 0,016           | 0,018 |

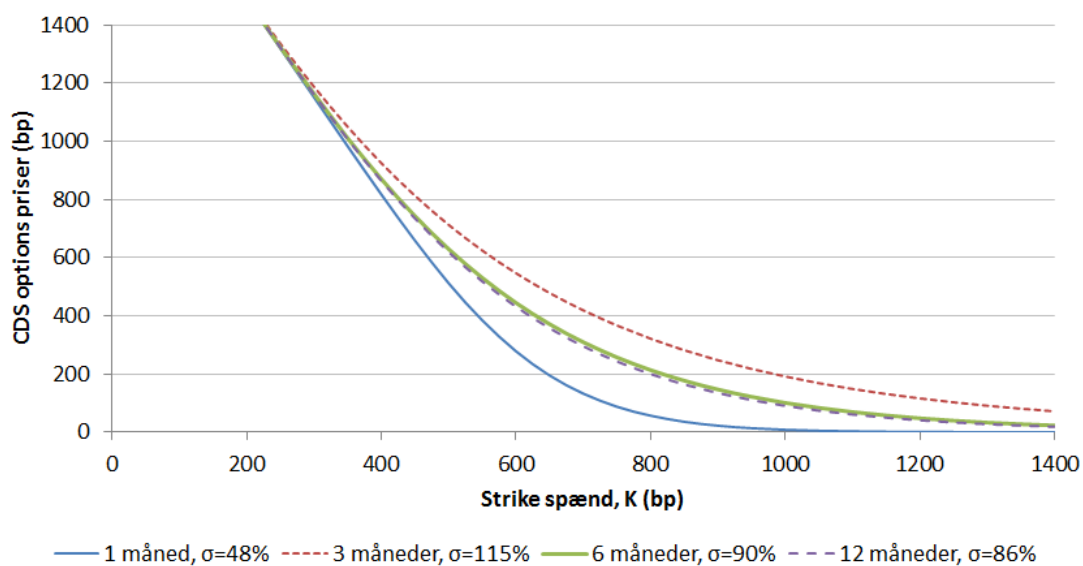
Tabel 9: Standard errors for de estimerede volatiliteter

### 13.4 Bilag D - CDS options priser, historisk volatilitet

Nedenstående figurer viser CDS options priser som funktion af strike spænd med forskellige estimer af volatiliteten for CDS-spændet. CDS optionerne har løbetider på 3 måneder og den underliggende CDS kontrakt har en løbetid på 5 år.

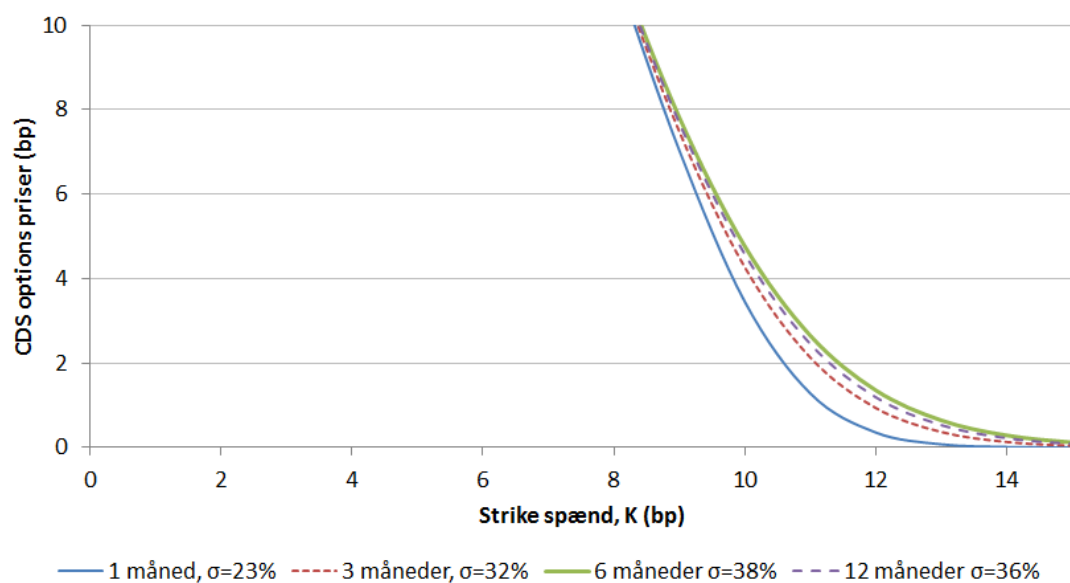


Figur 16: CDS options priser som funktion af strike spænd, 1. oktober 2015, RBS

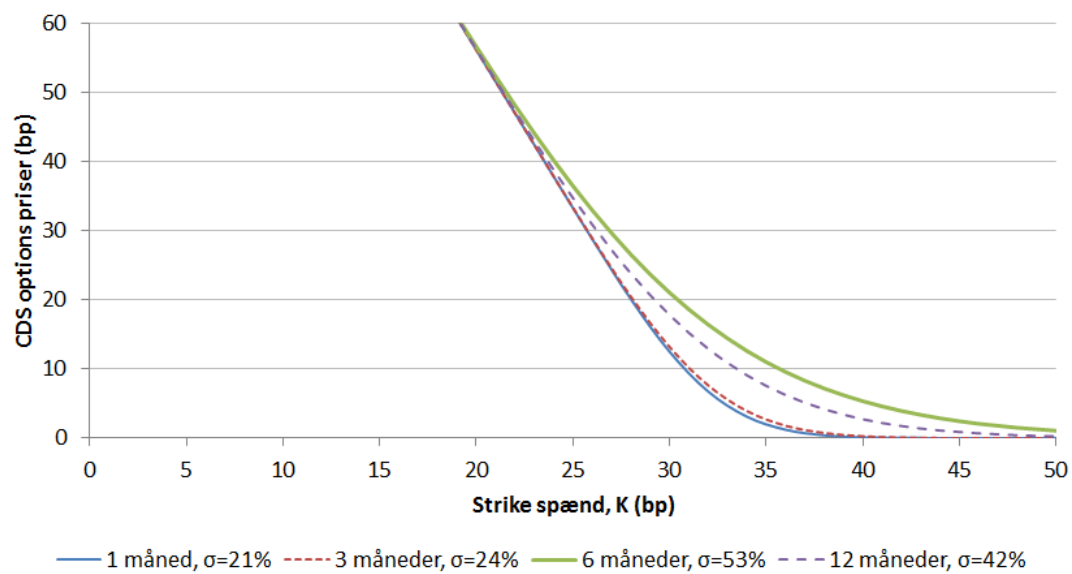


Figur 17: CDS options priser som funktion af strike spænd, 12. december 2008, Volvo





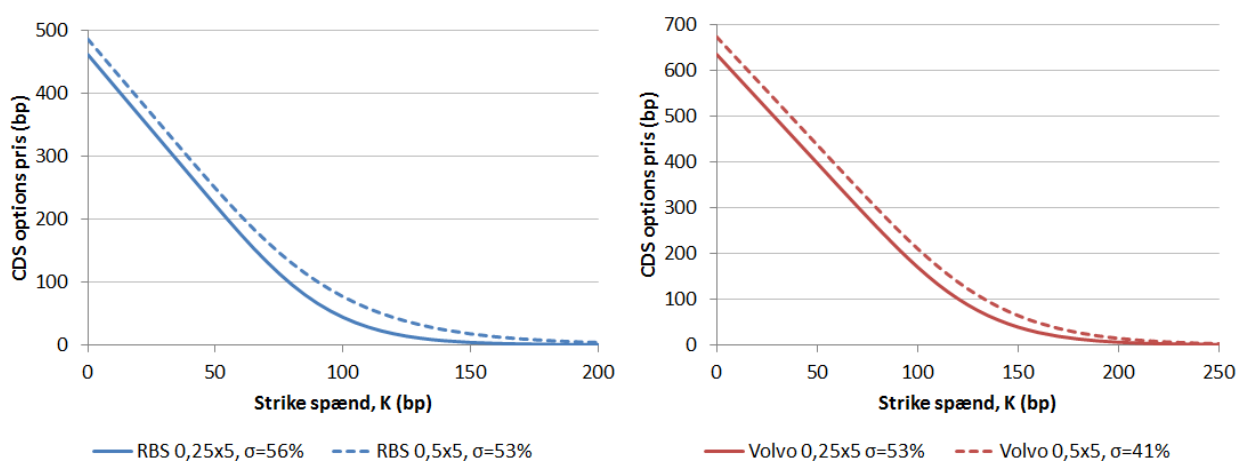
Figur 18: CDS options priser som funktion af strike spænd, 3. oktober 2005, RBS



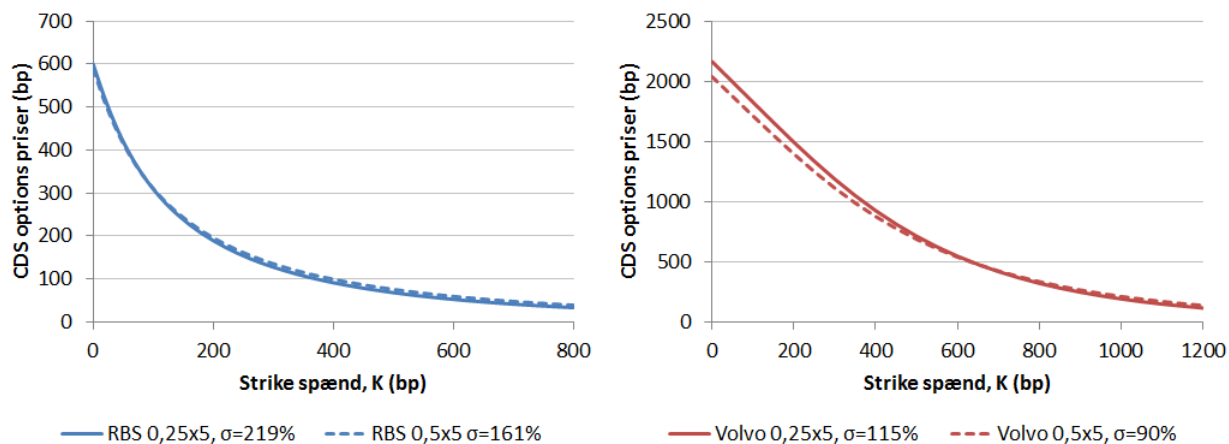
Figur 19: CDS options priser som funktion af strike spænd, 3. oktober 2005, Volvo

## 13.5 Bilag E - CDS options priser, historisk volatilitet 2

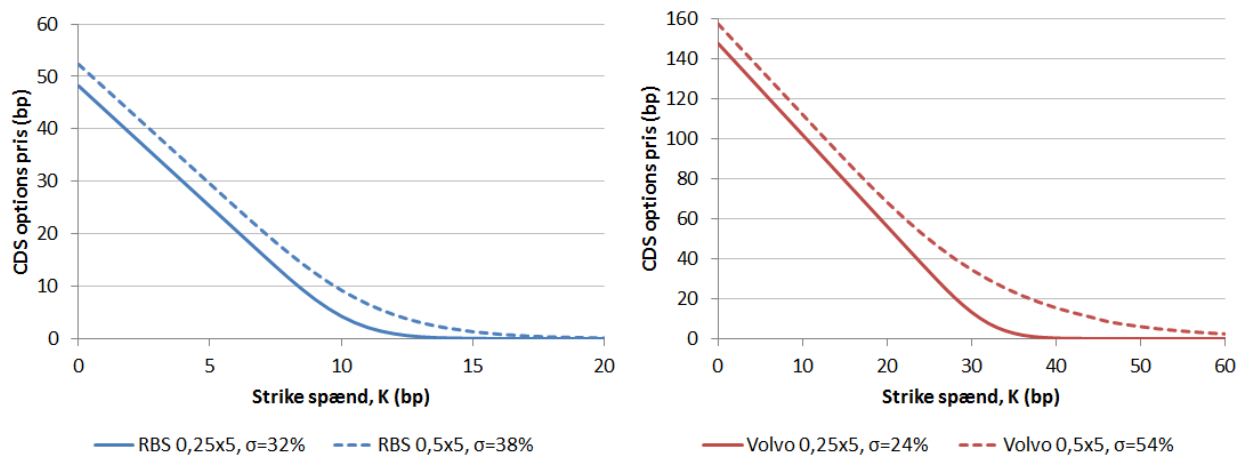
Nedenstående figurer viser CDS options priser som funktion af strike spænd, når Hull's tommelfingerregel anvendes. CDS optionerne har løbetider på 3 og 6 måneder og den underliggende CDS kontrakt har en løbetid på 5 år.



Figur 20: CDS options priser som funktion af strike spænd, 1. oktober 2015



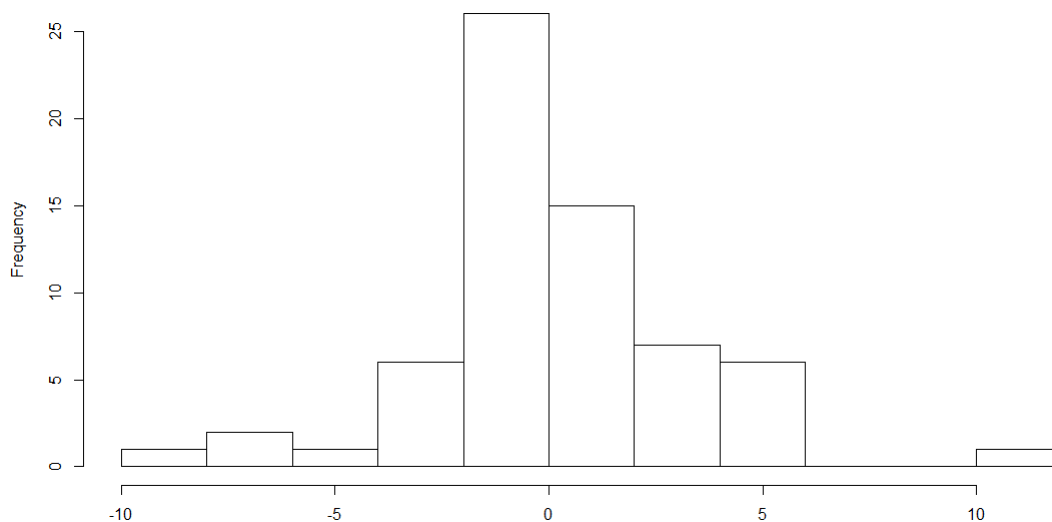
Figur 21: CDS options priser som funktion af strike spænd, 12. december 2008



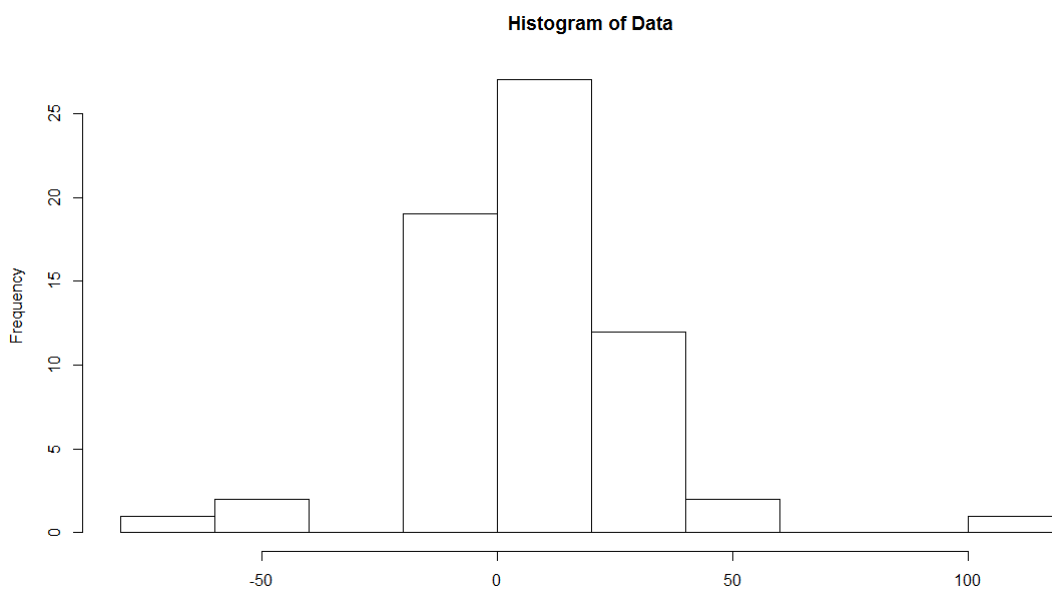
Figur 22: CDS options priser som funktion af strike spænd, 3. oktober 2005

## 13.6 Bilag F - Histogrammer

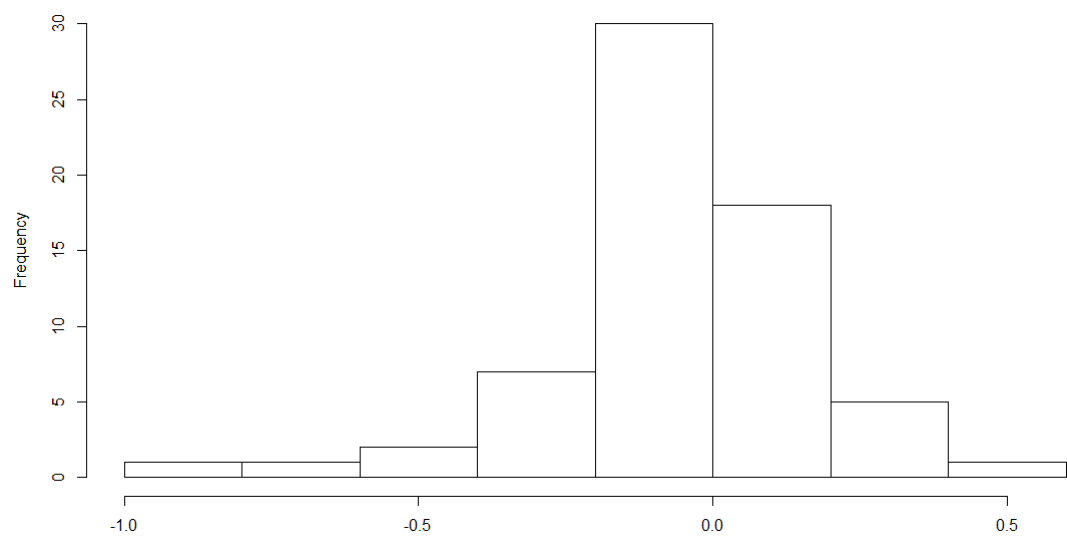
I nedenstående figur ses histogrammer over daglige ændringer de seneste 3 måneder.



Figur 23: Histogram, 1. oktober 2015, RBS



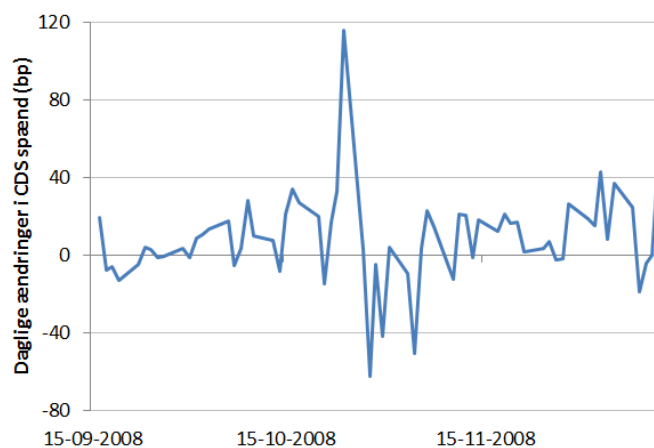
Figur 24: Histogram, 12. december 2008, Volvo



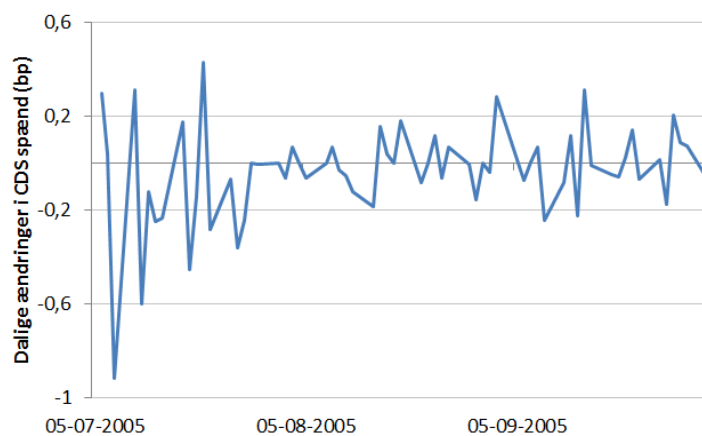
Figur 25: Histogram, 3. oktober 2005, RBS

### 13.7 Bilag G - Daglige ændringer i spænd

Nedenstående figurer angiver de daglige ændringer i spændene de seneste 3 måneder.



Figur 26: Daglige ændringer i spænd de seneste 3 måneder. Volvo, 12. december 2008



Figur 27: Daglige ændringer i spænd de seneste 3 måneder. RBS, 3. oktober 2005

## 13.8 Bilag H - R kode

Nedenstående angiver den anvendte kode tilhørende afsnit 10.5.

```
install.packages("fitdistrplus")
install.packages("MASS")
library(fitdistrplus)
library(MASS)

#RBS15
Dataj-RBS15[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
65*0.0624
sqrt(65)*3.0232
pnorm(10, mean=65*0.0624, sd=sqrt(65)*3.0232, lower.tail=FALSE)
#RBS15,2
Dataj-RBS15[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(10, mean=44*0.2699, sd=sqrt(44)*2.3426, lower.tail=FALSE)
#Volvo15
Dataj-Volvo15[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(14, mean=57*0.4587, sd=sqrt(57)*2.1798, lower.tail=FALSE)
#RBS08
Dataj-RBS08[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(50, mean=64*-0.3029, sd=sqrt(64)*23.0913, lower.tail=FALSE)
#RBS08,2
Dataj-RBS08[,1]
hist(Data)
```

```

fitdistr(Data,"normal")
pnorm(50, mean=44*1.06386, sd=sqrt(44)*6.2885, lower.tail=FALSE)
#Volvo08
Dataj-Volvo08[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(98, mean=64*8.3478, sd=sqrt(64)*23.5136, lower.tail=FALSE)
#Volvo08,2
Dataj-Volvo082[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(98, mean=31*9.8631, sd=sqrt(31)*18.8670, lower.tail=FALSE)
31*9.8631
sqrt(31)*18.8670
#RBS05
Dataj-RBS05[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(0.6, mean=64*-0.0451, sd=sqrt(64)*0.2147, lower.tail=FALSE)
#RBS05,2
Dataj-RBS052[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(0.6, mean=43*0.0010, sd=sqrt(43)*0.1194, lower.tail=FALSE)
43*0.0010
sqrt(43)*0.1194
#Volvo05
Dataj-Volvo05[,1]
hist(Data)
fitdistr(Data,"normal")
pnorm(1.4, mean=65*-0.1158, sd=sqrt(65)*0.4971, lower.tail=FALSE)
#Volvo05,2

```



```
Dataj-Volvo052[,1]  
hist(Data)  
fitdistr(Data,"normal")  
pnorm(1.4, mean=43*-0.0733, sd=sqrt(43)*0.3063, lower.tail=FALSE)
```