

Copenhagen Business School

Cand.merc.mat.

Kandidatafhandling

Fordelingsproblematik i kooperative spil

Allocation problems in cooperative games

Dato for aflevering af opgaven 31. maj 2016

Afhandlingens antal sider/anslag: 75 sider/101.610 anslag inkl. mellemrum.

Udarbejdet af

Christian Svenningsen

Vejleder

Jens Leth Hougaard

Summary

This thesis presents theories of allocation problems, starting with the basic definitions of an allocation problem and ending with the characterization of the methods, which can be used as solutions to these problems.

The five sections of this thesis start with the first part introducing the chosen subject, explaining what motivated me to this choice and to what length and depth I chose to delve into the subject.

The second section is divided into two chapters; the first chapter deals with the basic definitions of allocation problems and the second chapter shows some of the classes, allocation problems can belong to if they fulfill certain properties.

The third section belongs to allocation rules, which are seen as the solutions to the allocation problems. Like the second section, the third section is divided into two chapters, where the first chapter explains four known allocation rules and closes with an allocation rule of my own invention, dubbed “the alternative allocation rule”. The second chapter of this section explains properties of allocation rules which are chosen with the four known allocation rules in mind. The third chapter explains different kinds of monotonicity of allocation rules.

Classes of problems and properties of allocation rules are shown and proved in connection with the Shapley allocation rule and the alternative allocation rule in the fourth section to characterize them. These two allocation rules are compared according to which properties they meet to get a picture of how they differ exactly.

The last and fifth section closes this thesis with remarks on how the alternative allocation rule fared and discusses which theories of allocation problems could be explored to further characterize the alternative allocation rule.

Indhold

Afsnit 1.....	5
<i>Kapitel 1 - Indledning</i>	5
<i>Baggrund og motivation</i>	5
<i>Problemformulering, struktur og emneafgrænsning</i>	6
Afsnit 2.....	8
<i>Kapitel 2 - Kooperative spil</i>	8
<i>Kooperative spil kontra simple spil</i>	8
<i>Transferable Utility og Non-transferable Utility</i>	8
<i>Generelle definitioner</i>	9
<i>Kernefangere</i>	18
<i>Kapitel 3 - Klasser af spil</i>	26
<i>Balancerede vægte</i>	26
<i>Konkave og konvekse spil</i>	29
<i>Reducerede spil</i>	32
Afsnit 3.....	36
<i>Kapitel 4 - 4+1 fordelingsregler</i>	36
<i>Shapley-værdien</i>	36
<i>τ-værdien</i>	38
<i>Nucleolus-fordelingen</i>	40
<i>Lorenz-fordelingen</i>	43
<i>Et alternativ til Shapley-fordelingen</i>	44
<i>Kapitel 5 - Fordelingsreglers egenskaber</i>	49
<i>Effektivitet</i>	49
<i>Symmetri</i>	49
<i>Kovarians under strategisk ækvivalens</i>	51

<i>Nul-agenten</i>	52
<i>Additivitet</i>	53
<i>Marginalitet</i>	53
<i>Konsistens i reducerede spil</i>	54
<i>Kapitel 6 - Monotoniforhold</i>	56
<i>Koalitionsmonotoni</i>	56
<i>S-monotoni</i>	57
<i>Svag S-monotoni</i>	57
<i>N-monotoni</i>	58
<i>Populationsmonotoni</i>	59
<i>Afsnit 4</i>	61
<i>Kapitel 7 - Karakterisering af fordelingsreglerne</i>	61
<i>Shapley-værdien</i>	61
<i>Den alternative fordelingsregel</i>	70
<i>Afsnit 5</i>	74
<i>Kapitel 8 – Afsluttende bemærkninger</i>	74

Afsnit 1

Kapitel 1 - Indledning

Dette indledende kapitel omhandler mit valg af emne og min motivation bag valget. Desuden præsenterer jeg den mere konkrete problemformulering og forklarer, hvordan jeg har valgt at gribe emnerne an, og til sidst, hvor og hvordan disse emner er afgrænset.

Baggrund og motivation

Som det oftest er tilfældet for en kandidatafhandling, var valget af emne en løbende proces for mig, men jeg har fra start været slået fast på det overordnede emne, spilteori. At et emne kan bygge på et begreb som rationalitet, der ikke kan betragtes som noget helt konkret, men må defineres i niveauer af rationalitet, har altid fascineret mig.

På trods af visse ”mangler” som jeg mener, at spilteori har på samme måde som emner, som statistik har, er disse emner imponerende nyttige, og netop dette er interessant og spændende at udforske. Det, der jo i virkeligheden undersøges i spilteori, er menneskers opførsel, valg og ageren; dvs. hvad matematikere og økonomer faktisk kalder ”spilteori”, kalder psykologer for ”sociale situationer”, hvilket, for mig, kan give stof til eftertanke, hver gang en konklusion fremlægges i spilteori.

Jeg gav mig selv valget mellem konflikt eller samarbejde, ikke-kooperativ eller kooperativ spilteori. Disse to emner overlapper hinanden på det intuitive plan, men jeg har altid fundet kooperativ spilteori sværere at strukturere pænt i forhold til niveauet af den anvendte rationalitet, så denne satte jeg mig for at strukturere efter mit hoved.

Problemformulering, struktur og emneafgrænsning

Denne afhandling sigter at give en oversigt og forklaring af den kooperative spilteoris begreber og definitioner, hvor der fokuseres lige meget på omkostningsspil som på overskudsspil. Nye begreber dukker jævnligt op i kooperativ spilteori, så jeg valgte først fire fordelingsregler:

- Shapley-værdien
- Tau-værdien
- Nucleolus
- Lorenz-fordelingen

som skulle være baggrunden for valget af yderligere begreber. Da fordelingsreglerne var valgt, kunne der vælges egenskaber for spil og fordelingsregler. For spil blev det tre begreber, tre klasser, som kan relateres til de valgte fordelingsregler:

- Balancerede vægte
- Konkavitet og konveksitet
- Reducerede spil

og for fordelingsreglernes direkte egenskaber blev det:

- Monotoniforhold
- Effektivitet
- Symmetri
- Kovarians under strategisk ækvivalens
- Nul-agent egenskaben
- Additivitet
- Marginalitet
- Konsistensitet

Disse klasser og egenskaber er forklaret og i afsnit 4 er nogle blevet udvalgt til at karakterisere Shapley-værdien, da jeg finder Shapley-værdien mest interessant af de fire fordelingsregler.

Netop på baggrund af Shapley-værdien har jeg også defineret en femte fordelingsregel, og pga. dennes baggrund, satte jeg mig for at karakterisere den gennem nogle af de egenskaber, som også testes på Shapley-værdien.

De valgte punkter og fremgangsmåden inden for hvert emne er delvist og løst inspireret af følgende værker, som også kan forstås som kildefortegnelse:

- Shapley L.S., Cores of Convex Games, International Journal of Game Theory, December 1971, Volume 1, Issue 1, pp 11-26
- Jens Leth Hougaard, An Introduction to Allocation Rules, 2009, Berlin, Springer-Verlag
- Michael Maschler, Eilon Solan, Shmuel Zamir, Game Theory, 2013, Cambridge University Press
- Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, Stef Tijs, Models in Cooperative Game Theory, 2005, Springer-Verlag

Afsnit 2

Kapitel 2 - Kooperative spil

I dette kapitel fokuseres der på selve spillet, eller problemet om man vil, som skal løses ved en fordeling af dets værdier. Der startes fra bunden med at definere og forklare grundlæggende begreber for spillet, således at en egentlig model dannes. Disse begreber starter med at være simple, men som de løbende former spillet i større og større grad, bliver de også mere komplekse.

Kooperative spil kontra simple spil

Et "simpelt spil" er et spil, der består af en værdi, der kan betragtes enten som en omkostning eller som et overskud, og som skal allokeres blandt alle spillerne i spillet. Dette kan gøres på flere måder, alt efter hvad man finder intuitivt, fair eller rationelt, da der for ingen allokeringsregel, -metode eller -algoritme kan argumenteres for at skulle være den entydigt korrekte regel.

Begrebet "fair fordeling" er også et relativt begreb for kooperative spil - måske endda i endnu større grad for med indførelsen af kooperative spil åbnes der op for en ny dimension af begreber, da denne type spil indeholder værdier for alle mulige sammensætninger af spillere - ikke kun sammensætningen af alle spillets spillere.

Værdier til alle mulige sammensætninger af spillere giver anledning til, at spillerne har et valg modsat deres situation i et simpelt spil, hvor de blev allokeret en værdi uden at have indflydelse. I kooperative spil kan det ikke forventes, at hvilken som helst fordeling kan anvendes, da spillerne har mulighed for at indgå i en anden gruppe, end den initialt tiltænkte, for at sikre sig en værdi, der er højere. Dette betyder, at der skal tages mere hensyn, og derved bliver begreber af kooperative spil og dets fordelingsregler mere komplicerede.

Transferable Utility og Non-transferable Utility

Kooperative spil kan deles op i kategorierne, TU og NTU - overdragelig nytte og ikke-overdragelig nytte, hvor nytte, i denne sammenhæng, er værdierne af sammensætningen af spillerne, hvor en sammensætning af agenter fremover kaldes for en koalition. Spil med ikke-overdragelig nytte, er selvfølgelig ikke særlig interessante, når det kommer til kooperative spil, da det netop er nytten i koalitionerne, som er interessant at fordele mellem spillerne, fremover kaldt agenterne; dette ville

ikke være muligt, hvis nytten ikke måtte frit og omkostningsfrit overdrages fra den ene agent til den anden.

Dog må det siges, at TU-spillene, spil med overdragelig nytte, kan forekomme ikke at være så nær virkeligheden alligevel. Hvis eksempelvis penge er emnet, som betragtes at være den overdragelige nytte, og har vi at gøre med agenter, der har vidt forskellige mængder penge i forvejen, må det være rimeligt at antage, at selvom alle agenter kan bruge flere penge, så kan det sagtens differentiere mellem agenterne, hvor stort et beløb skal være, før det har en vis betydning, og derfor kan man nødvendigvis ikke antage, at der er en simpel lineær sammenhæng mellem penge og nytte, som gælder for alle agenter.

Generelle definitioner

Modellen består af storkoalitionen og koalitioner, som igen består af agenter, så lad $N = \{1, 2, \dots, n\}$ være sættet af alle n agenter, kaldet storkoalitionen, og lad $\mathcal{P}(N)$ være sættet af alle koalitioner af N inklusiv storkoalitionen; dette giver i alt $2^n - 1$ koalitioner, hvis den tomme mængde ikke medregnes. Storkoalitionen og koalitioner af ethvert antal agenter giver hver anledning til en værdi, så hvis udgangspunktet er et omkostningsspil, hvor målet er at minimere omkostningerne, så lad $c: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ være en ikke-kontinuerlig funktion, kaldet den karakteristiske funktion, hvor $c(S)$ er omkostningen for den tilhørende koalition $S \subseteq \mathcal{P}(N)$, og hvor det defineres at $c(\emptyset) = 0$. Dette kan summeres til, at (N, c) er de nødvendige oplysninger til et omkostningsspil.

Et tilsvarende problem, hvor der i stedet skal maksimeres, er overskudsspillet, (N, v) , hvor det her er $v: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$, der er den karakteristiske funktion, og hvor det igen defineres at $v(\emptyset) = 0$. Omkostningsspillet og overskudsspillet er hinandens skyggespil, da de kan omregnes fra det ene til det andet, og de siges derfor at være ækvivalente. Eksempelvis kan et overskudsspil beregnes ved $v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S)$ for $S \subseteq N$, hvorved overskudsspillet bliver et nul-normaliseret spil, da værdierne for koalitionerne bestående af én agent alle er nul.

Da $S \subseteq \mathcal{P}(N)$ reelt betyder, at S er en delmængde af N , vil der fremover i stedet blive brugt $S \subseteq N$.

Essentialitet

Definition 2.1.1

Et omkostningsspil, (N, c) , siges at være **essentielt**, hvis der gælder, at $c(N) < \sum_{i \in N} c(i)$, dvs. at omkostningen for storkoalitionen i et omkostningsspil skal være mindre end de summerede omkostninger for hver enkelt agent i omkostningsspillet.

Definition 2.1.2

Et overskudsspil, (N, v) , siges at være **essentielt**, hvis der gælder, at $v(N) > \sum_{i \in N} v(i)$, dvs. at overskuddet for storkoalitionen i et overskudsspil skal være større end de summerede overskud for hver enkelt agent i overskudsspillet.

Hele pointen med disse spil er at udforske mulighederne for et samarbejde mellem agenterne; ikke kun nogle få af dem – dem alle. Dermed må det siges, at det er essentielt for et spil at skulle opfylde definition 2.1.1 eller 2.1.2. Skulle definition 2.1.1 eller 2.1.2 ikke være tilfældet, er der intet at styre mod, da kun et samarbejde bestående af storkoalitionen er af interesse; spillet, der ikke er essentielt, er simpelthen ikke interessant, da ingen større nytte kan komme ud af det.

Monotoni

Definition 2.2.1

Et omkostningsspil, (N, c) , siges at være **monotont**, hvis der for $S' \subset S \subset N$ gælder, at $c(S') \leq c(S) \leq c(N)$, dvs. at omkostningen for koalitionerne ikke falder med størrelsen af koalitionerne, hvor størrelsen er antallet af agenter.

Definition 2.2.2

Et overskudsspil, (N, v) , siges at være **monotont**, hvis der for $S' \subset S \subset N$ gælder, at $v(S') \leq v(S) \leq v(N)$, dvs. at overskuddet for koalitionerne ikke falder med størrelsen af koalitionerne, hvor størrelsen er antallet af agenter.

Definition 2.3.1

Et omkostningsspil, (N, c) , siges at være **strengt monotont**, hvis der for $S' \subset S \subset N$ gælder at $c(S') < c(S) < c(N)$, dvs. at omkostningen for koalitionerne stiger med størrelsen af koalitionerne, hvor størrelsen er antallet af agenter.

Definition 2.3.2

Et overskudsspil, (N, v) , siges at være **strengt monotont**, hvis der for $S' \subset S \subset N$ gælder at $v(S') < v(S) < v(N)$, dvs. at overskuddet for koalitionerne stiger med størrelsen af koalitionerne, hvor størrelsen er antallet af agenter.

Den egenskab, som monotoni giver, er altså, at den karakteristiske funktion er monotont voksende med antallet af agenter. Som det ses er definitionerne for monotoni ens for omkostningsspil og overskudsspil, hvilket går hen på forskellige betydninger for hver type, da det ene spil fokuserer på at minimere og det andet på at maksimere.

Man kan sige, at monotoni er en mere essentiel egenskab for overskudsspil, end det er for omkostningsspil, da det nærmest er definitionen for, om et overskudsspil er essentielt udvidet til alle størrelser koalitioner og ikke kun storkoalitionen.

For omkostningsspil, derimod, fortæller det, at selvom sådan et spil skulle være essentielt, dvs. at omkostningen af storkoalitionen er mindre end de summerede omkostninger af hver agent, så betyder det ikke, at omkostningen for hvilken som helst koalition kan være mindre end omkostningen af en koalition bestående af færre agenter.

Derved viser monotoni sig at give værdien af storkoalitionen i et omkostningsspil et lukket interval, vis mindste værdi er den højeste omkostning for en koalition med én agent færre end storkoalitionen, og den højeste værdi er den summerede omkostning af alle enkelt-agent koalitioner.

Additivitet

Ræsonnementet for at en form for samarbejde vil opstå, hvis spillet er essentielt, monotont eller strengt monotont bruges også mellem koalitionerne, som det ses i de følgende definitioner.

Definition 2.4.1

Et omkostningsspil, (N, c) , siges at være **subadditivt**, hvis der for $S', S \subseteq N$ og $S' \cap S = \emptyset$ gælder, at $c(S' \cup S) \leq c(S') + c(S)$, dvs. at omkostningen for to koalitioner er mindst lige så stor, som hvis de to koalitioner slog sig sammen til én koalition.

Definition 2.4.2

Et overskudsspil, (N, v) , siges at være **superadditivt**, hvis der for $S', S \subseteq N$ og $S' \cap S = \emptyset$ gælder, at $v(S' \cup S) \geq v(S') + v(S)$, dvs. at overskuddet for to koalitioner er højest lige så stor, som hvis de to koalitioner slog sig sammen til én koalition.

Allerede ved et simpelt og relativt fair krav som subadditivitet og superadditivitet, som lader til at være nemt og rimeligt at opnå, kan virkeligheden være en helt anden. På den ene side kan Anti-trust love træde ind og begrænse profitten, der kan opnås ved koalitionen $S' \cup S$, sådan at konkurrencen på et marked ikke bliver forvrænget. På den anden side kan begrebet ”for mange kokke fordærver maden” være tilfældet, hvis samarbejdet bliver for stort og ustruktureret; folk går i vejen for hinanden, eller det bliver sværere at komme til enighed, hvis der er for mange, som skal have et ord indført.

Konkavitet

Definition 2.5.1

Et omkostningsspil, (N, c) , siges at være **konkavt**, hvis der for $S', S \subseteq N$ gælder, at $c(S' \cup S) + c(S' \cap S) \leq c(S') + c(S)$, dvs. at skulle der forekomme agenter, som indgår i begge af koalitionerne S' og S , så skal omkostningen, for koalitionen bestående af disse agenter adderet med omkostningen for hvis S' og S slog sig sammen til én koalition, være højest lige så stor som den summerede omkostning for S' og S hver for sig.

Definition 2.5.2

Et overskudsspil, (N, v) , siges at være **konvekst**, hvis der for $S', S \subseteq N$ gælder, at $v(S' \cup S) + v(S' \cap S) \geq v(S') + v(S)$, dvs. at skulle der forekomme agenter, som indgår i begge af koalitionerne S' og S , så skal overskuddet, for koalitionen bestående af disse agenter adderet med overskuddet for hvis S' og S slog sig sammen til én koalition, være højest lige så stor som det summerede overskud for S' og S hver for sig.

Ergo er definitionerne 2.4.1 til 2.5.2 konstrueret således, at følgende gælder

$$(N, c): \text{konkavt} \rightarrow (N, c): \text{subadditivt}$$

$$(N, v): \text{konvekst} \rightarrow (N, v): \text{superadditivt}$$

Dvs. at alle konkave spil er subadditive og alle konvekse spil er superadditive, da ulighederne for konkavitet og konveksitet overholdes i hhv. subadditive og superadditive spil, hvor koalitionerne S og T er disjunkte. Da subadditivitet og superadditivitet ikke defineres for alle koalitioner af S og T , kan det altså hænde, at subadditive og superadditive spil ikke er hhv. konkave eller konvekse; dette resulterer i, at mængden af konkave spil er en delmængde af mængden af subadditive spil, og at mængden af konvekse spil er en delmængde af mængden af superadditive spil.

Med muligheden for at $S' \cap S \neq \emptyset$ er det altså nødvendigt at introducere konkavitet og konveksitet og igen må det siges, at selvom disse to begreber ligner hinanden som subadditivitet og superadditivitet, så er der forskel på deres betydning for deres respektive spil.

Da $S' \cap S \neq \emptyset$ kan være tilfældet, giver det mening at indføre leddene, $c(S' \cap S)$ og $v(S' \cap S)$, da agenterne i $S' \cap S$ indgår to gange på den anden side af ulighedstegnet, men da ulighedstegnene vender, som de gør, må det siges, at konkavitet er et hårdere krav til et omkostningsspil end konveksitet er til et overskudsspil. Den side af ulighedstegnet, som skal være mindst bliver jo tilført et positivt led i definitionen for konkavitet, hvorimod det er den side af ulighedstegnet, som skal være størst i definitionen for konveksitet, som får tilført et positivt led.

Svag additivitet

Som essentialitet er et svagere krav til et spil end monotoni, ligeså har der været brug for et svagere krav end subadditivitet og superadditivitet, hvor det svagere krav kommer til udtryk ved at ændre definitionerne, således at en koalition ændres til en enkelt agent.

Definition 2.6.1

Et omkostningsspil, (N, c) , siges at være **svagt subadditivt**, hvis der for $S \subseteq N$ og $i \notin S$ gælder, at $c(S \cup i) \leq c(S) + c(i)$, dvs. at omkostningen for en koalition og en enkelt agent er mindst lige så stor, som hvis koalitionen og agenten slog sig sammen.

Definition 2.6.2

Et overskudsspil, (N, v) , siges at være **svagt superadditivt**, hvis der for $S \subseteq N$ og $i \notin S$ gælder, at $v(S \cup i) \geq v(S) + v(i)$, dvs. at overskuddet for en koalition og en enkelt agent er højest lige så stor, som hvis koalitionen og agenten slog sig sammen.

Fordelingsregel

Yderligere begreber, som er med til at definere de grundlæggende definitioner, er begreber, som er definerede i forhold til en fordeling, og bag en fordeling er der en fordelingsregel. En fordelingsregel er en funktion, procedure eller algoritme, der vil frembringe en fordeling, sådan at en vis størrelse omkostning eller overskud, i hhv. et omkostningsspil eller overskudsspil, bliver fordelt blandt alle agenterne i denne storkoalition.

Definition 2.7.1

ϕ er en omkostningsfordelingsregel, hvor der, for sættet, Γ , af alle omkostningsspil, gælder, at $\phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor n er antallet af agenter i det pågældende omkostningsspil.

Definition 2.7.2

$\hat{\phi}$ er en overskudsfordelingsregel, hvor der, for sættet, $\hat{\Gamma}$, af alle overskudsspil, gælder, at $\hat{\phi}: \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor n er antallet af agenter i det pågældende overskudsspil.

Hvor det ovenstående er til for at definere fordelingsregler generelt, er de to følgende definitioner her for at navngive de enkelte fordelinger af spillene.

Definition 2.7.3

x er en **omkostningsfordeling**, for omkostningsspillet, (N, c) , hvis der for, $x \in \mathbb{R}^n$, gælder, at sættet $x \in \phi(N, c)$.

Definition 2.7.4

y er en **overskudsfordeling**, for overskudsspillet, (N, v) , hvis der for, $y \in \mathbb{R}^n$, gælder, at sættet $y \in \phi(N, v)$.

Entydighed

Alt efter hvilken algoritme en fordelingsregel er defineret ud fra, kan den indeholde en eller flere løsninger; i denne afhandling vil der kun blive fokuseret på fordelingsregler med en enkelt løsning.

Definition 2.8.1

En omkostningsfordelingsregel, ϕ , er entydig, hvis sættet, $\phi(N, c)$, består af et enkelt element, således at $x_i(N, c) = \phi_i(N, c)$.

Definition 2.8.2

En overskudsfordelingsregel, $\hat{\phi}$, er entydig, hvis sættet, $\hat{\phi}(N, v)$, består af et enkelt element, således at $y_i(N, c) = \hat{\phi}_i(N, c)$.

Nu hvor de to typer fordelinger er defineret, kan der defineres nogle begreber og egenskaber, som synes essentielle for hvilken mængde, der er fair at tildele en agent eller en gruppe af agenter.

Stand-alone princippet

Definition 2.9.1

Stand-alone omkostningsprincippet siger, at omkostningsfordelingen til agenterne i et omkostningsspil skal være sådan, at agenterne, tilhørende hver koalition, ikke må tildeles en summeret omkostning højere end den omkostning, som hver af disse koalitioner giver anledning til; dvs. for (N, c) , den tilhørende omkostningsfordeling, x , og $S \subset N$ gælder der, at $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$.

Definition 2.9.2

Stand-alone overskudsprincippet siger, at overskudsfordelingen til agenterne i et overskudsspil skal være sådan, at agenterne, tilhørende hver koalition, ikke må tildeles et summeret overskud lavere end det overskud, som hver af disse koalitioner giver anledning til; dvs. for (N, v) , den tilhørende overskudsfordeling, y , og $S \subset N$ gælder der, at $\sum_{i \in S} y_i \geq v(S)$.

Dvs. skulle en fordeling overholde stand-alone princippet, har ingen koalition incitament for at blokere for et samarbejde i storkoalitionen, da ingen koalition kan opnå et bedre resultat.

Marginalprincippet

Hvor stand-alone principperne definerer, hvad der er fair, at en gruppe af agenter højest må tildeles af omkostninger, eller mindst må tildeles af overskud, så definerer marginal principperne, hvad der er fair, at en gruppe af agenter mindst må tildeles af omkostninger, eller højest må tildeles af overskud.

Definition 2.10.1

Marginal omkostningsprincippet siger, at omkostningsfordelingen til agenterne i et omkostningsspil skal være sådan, at agenterne, tilhørende hver koalition, ikke må tildeles en summeret omkostning lavere end den marginalomkostning, som hver af disse koalitioner giver anledning til i forhold til storkoalitionen; dvs. for (N, c) , den tilhørende omkostningsfordeling, x , og $S \subset N$ gælder der, at $\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S)$.

Definition 2.10.2

Marginal overskudsprincippet siger, at overskudsfordelingen til agenterne i et overskudsspil skal være sådan, at agenterne, tilhørende hver koalition, ikke må tildeles et summeret overskud højere end det marginaloverskud, som hver af disse koalitioner giver anledning til i forhold til storkoalitionen; dvs. for (N, v) , den tilhørende overskudsfordeling, y , og $S \subset N$ gælder der, at $\sum_{i \in S} y_i \leq v(N) - v(N \setminus S)$.

Kernen

Disse øvre og nedre grænser for de to fordelinger kan beregnes ud fra hinanden, da grænserne er definerede ud fra de samme variable.

Da definition 2.8.1 siger, at $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$, og definition 2.10.1 siger, at $\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S)$, så

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S) &\Leftrightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in N} x_i - c(N \setminus S) \Leftrightarrow c(N \setminus S) \geq \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in S} x_i \Leftrightarrow \\ &c(N \setminus S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} x_i \end{aligned}$$

Samme fremgangsmåde kan selvfølgelig bruges for overskudsspillene. Intervallerne for hver agent udgør kernen, som betragtes som det generelt vigtigste løsningskoncept for kooperative spil.

Definition 2.11.1

Kernen af et omkostningsspil er defineret af de grænser, som stand-alone omkostningsprincippet og marginal omkostningsprincippet udgør; dvs. der gælder, at

$$K(N, c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N), \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \forall S \subset N \right\}$$

Definition 2.11.2

Kernen af et overskudsspil er defineret af de grænser, som stand-alone overskudsprincippet og marginal overskudsprincippet udgør; dvs. der gælder, at

$$K(N, v) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} y_i = v(N), \sum_{i \in S} y_i \geq v(S), \forall S \subset N \right\}$$

Der er en lille historie i forbindelse med opfattelsen af kerne-begrebet: Når nu kernen betragtes som et løsningskoncept, bliver dét, som er skyld i, at en fordeling i kernen ikke opnås, opfattet som et værktøj eller en fordel for de pågældende, til at forhandle sig til en bedre fordeling; får de ikke denne bedre fordeling, vil de blokere for et samarbejde i storkoalitionen. Denne opfattelse har Lloyd

S. Shapley været utilfreds med, som han nævner i Shapley 1971: International Journal of Game Theory, December 1971, Volume 1, Issue 1, pp 11-26:

*The core is sometimes incorrectly described as the set of outcomes "that cannot be blocked by any coalition". This, unfortunately misleading description, has arisen as a result of the counterintuitive use of the word "block" in the technical terminology of several early papers. (The present author must bear part of the blame!) In fact, the core is concerned with what coalitions can **do**, not what they can **prevent**. The distinction is especially striking in economic game models, where the bargaining power that certain groups may acquire through their ability to **obstruct** trade or production is completely ignored in the essentially **constructive** conditions that define the core.*

Kernefangere

Der findes andre sæt af intervaller end kernen, hvori kernen indgår; dette er altså sæt, vis intervaller er lig med eller større end intervallerne, som kernen udgør - disse sæt kaldes for kernefangere. Tre af disse sæt defineres, bevises og forklares intuitivt og relaterende til hinanden.

Kerneomfanget

Det første sæt kaldes for kerneomfanget, da dette sæts intervaller angiver grænserne for kernen. Kerneomfanget findes på stort set samme måde som kernen selv, så derfor virker den lidt triviell. Den ene grænse er defineret ud fra marginalprincippernes definitioner 2.10.1 og 2.10.2, da koalition S i definitionerne erstattes med agent i .

På samme måde som kernens grænser kan findes ud fra hinanden, ligeledes kan kerneomfangets grænser også findes, da man kan antage, at hvis alle andre agenter end agent i har fået tildelt det minimale i et omkostningsspil eller det maksimale i et overskudsspil, så må det resterende være det maksimale eller minimale til agent i for hhv. omkostningsspil og overskudsspil.

Definition 2.12.1

Kerneomfanget, $KO(N, c)$, for et omkostningsspil (N, c) er defineret ved

$$KO(N, c) := \{x \in I(N, c) \mid M(N, c) \leq x \leq m(N, c)\}$$

hvor $I(N, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N); x_i \leq c(i) \forall i \in N\}$,

$M_i(N, c) = c(N) - c(N \setminus i)$ og

$m_i(N, c) := \min_{S: i \in S} R(S, i)$, og hvor $R(S, i) := c(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, c)$ for $S \subset N$.

Definition 2.12.2

Kerneomfanget, $KO(N, v)$, for et overskudsspil (N, v) er defineret ved

$$KO(N, v) := \{y \in I(N, v) \mid m(N, v) \leq y \leq M(N, v)\}, \text{ hvor}$$

$I(N, v) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} y_i = v(N); y_i \geq v(i) \forall i \in N\}$, $m_i(N, v) := \max_{S: i \in S} R(S, i)$
og $M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus i)$, og hvor $R(S, i) := v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, v)$ for $S \subset N$.

Der fokuseres altså på det, der kaldes utopi-tilstandene, da den bedst mulige tilstand for en agent bliver udgangspunktet for den dårligste tilstand for agenten; skulle agent i eksempelvis tage en mindre omkostning end $M_i(N, c) = c(N) - c(N \setminus i)$, vil de resterende agenter, $N \setminus i$, modtage en større omkostning end $c(N \setminus i)$ og derfor have incitament til at gå ud af storkoalition.

Tankegangen er lige modsat den, som er bag kernen, da der dér tages udgangspunkt i, hvad en agent ved, hvad han kan nøjes med. Uden at have defineret yderligere måtte der jo antages, at $c(i)$ og $v(i)$ er værdier, som en agent ved, at han hhv. ikke kan få mere eller mindre af i det pågældende spil, jf. stand-alone princippernes definitioner 2.9.1 og 2.9.2.

Ved at sammenligne tankegangene bag disse sæt kan det allerede her ses, at sættet, som udgør kernen, må ligge i det større sæt, som udgør kerneomfanget, da begge sæt har den egenskab, at jo længere væk en grænse ligger fra centrum af sættet, jo længere væk vil den anden grænse også ligge; vil det ene sæts minimale grænse altid ligge længere fra centrum end den tilsvarende grænse i det andet sæt, så vil den maksimale grænse også gøre det.

Beviset af det følgende teorem viser, at kerneomfangene er kernens grænser; der tages udgangspunkt i et omkostningsspil, men det kan selvfølgelig bevises lige så let for et overskudsspil.

Teorem 2.1

Lad (N, c) være et hvilket som helst omkostningsspil og $x \in K(N, c)$, så er

$$M(N, c) \leq x \leq m(N, c), \text{ og derved } K(N, c) \subseteq KO(N, c).$$

Bevis: Kernens nedre grænse kontra kerneomfangets nedre grænse vises først. De følgende ligninger er gældende.

$$x_i = \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus i} x_j = c(N) - \sum_{j \in N \setminus i} x_j$$

$$M_i(N, c) = c(N) - c(N \setminus i)$$

Da stand-alone princippet definition 2.9.1 siger, at $\sum_{j \in N \setminus i} x_j \leq c(N \setminus i)$, så er

$$c(N) - \sum_{j \in N \setminus i} x_j \geq c(N) - c(N \setminus i)$$

og så må $x_i \geq M_i(N, c)$ være tilfældet, og derved er den nedre grænse for kernen bevist. Den øvre grænse for kernen bevises ved, at der for $i \in S$ og $S \subseteq N$ gælder, at

$$x_i = \sum_{j \in S} x_j - \sum_{j \in S \setminus i} x_j$$

I kerneomfangets definition 2.12.1 står der, at $R(S, i) := c(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, c)$ og

$m_i(N, c) := \min_{S: i \in S} R(S, i)$. Da $\sum_{j \in S} x_j \leq c(S)$ og $\sum_{j \in S \setminus i} x_j \geq \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, c)$, da må

$$\sum_{j \in S} x_j - \sum_{j \in S \setminus i} x_j \leq c(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, c)$$

Da denne ulighed drejer sig om den enkelte omkostning for den enkelte agent i , da må det være tilfældet, at den begrænsning på den højre side af ulighedstegnet er den øvre grænse, og alle koalitioner i spillet skal tages i betragtning, da giver det kun

mening at fokusere på den laveste værdi, og derfor skrives den øvre grænse som $m_i(N, c) := \min_{S: i \in S} R(S, i)$. Dermed er teorem 2.1 bevist.

Det rimelige sæt

Det næste sæt kaldes for "det rimelige sæt", hvilket skal forstås fra et simpelt synspunkt, da en af grænserne er stand-alone princippet for koalitionen med en enkelt agent.

Definition 2.13.1

Det rimelige sæt, $R(N, c)$, for et omkostningsspil, (N, c) , er defineret ved

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \min_{S: i \in S} (c(S) - c(S \setminus i)) \leq x_i \leq c(i)\}$$

for $S \subseteq N$.

Definition 2.13.2

Det rimelige sæt, $R(N, v)$, for et overskudsspil, (N, v) , er defineret ved

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid v(i) \leq y_i \leq \max_{S: i \in S} (v(S) - v(S \setminus i))\}$$

for $S \subseteq N$.

Som der vil blive vist, læner det rimelige sæt sig meget op ad kerneomfanget men rykker grænserne endnu længere væk fra kernens grænser ved netop at være yderst rimelige over for agenter, der må få tildelt fra det rimelige sæt; ergo er det den nedre grænse for omkostningsspillet og den øvre grænse for overskudsspillet, som vækker mest opsigt i dette sæt.

Et argument til kerneomfangets øvre grænse til et overskudsspil var eksempelvis, at der ikke kan forlanges mere end utopi-tilstanden, $M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus i)$, for i så fald vil mængden, $N \setminus i$, med fordel gå ud af storkoalitionen. Denne grænse er nu rykket til at være den maksimale af alle marginalbidragene i overskudsspillet, hvilket derved ikke kan være mindre end før. Beviset af det følgende teorem viser, at kernen er en delmængde af det rimelige sæt; der tages udgangspunkt i et omkostningsspil.

Teorem 2.2

Lad (N, c) være et hvilket som helst omkostningsspil og $K(N, c) \neq \emptyset$, så er

$$K(N, c) \subseteq KO(N, c) \subseteq R(N, c)$$

Bevis: Kerneomfangets kontra det rimelige sæts nedre grænse vises først. De følgende ligninger er hhv. kerneomfangets og det rimelige sæts nedre grænser for agent i .

$$c(N) - c(N \setminus i) \text{ og } \min_{S: i \in S} (c(S) - c(S \setminus i))$$

Som beskrevet ovenover vil der for $S \subseteq N$ gælde, at

$$\min_{S: i \in S} (c(S) - c(S \setminus i)) \leq c(N) - c(N \setminus i)$$

da venstre side af ulighedstegnet kan antage flere værdier, heriblandt værdien af højresiden. De følgende ligninger er hhv. kerneomfangets og det rimelige sæts øvre grænser for agent i .

$$\min_{S: i \in S} (c(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, c)) \text{ og } c(i)$$

For $S = i$ bliver kerneomfangets øvre grænse

$$c(i) - \sum_{j \in i \setminus i} M_j(N, c)$$

Da $j \in i \setminus i$ bliver $\sum_{j \in i \setminus i} M_j(N, c) = 0$, så den øvre grænse i dette tilfælde bliver $c(i)$.

Da denne værdi, for alle agenter, altid vil være en del af mængden, der udgør kerneomfangets øvre grænse, vil den mindste værdi i samme mængde aldrig være større, og derfor

$$\min_{S: i \in S} \left(c(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, c) \right) \leq c(i)$$

hvilket afslutter beviset for teorem 2.2.

Weber-sættet

Den tredje og sidste kernefanger, som vil blive vist her, er Weber-sættet, som, modsat de to forrige kernefangere, forstås bedre ved at forestille sig kernen og kernefangerne som tre-dimensionelle konvekse former frem for at se dem som rationelle tilbud og krav mellem agenter.

Definition 2.14.1

Weber-sættet, $W(N, c)$, for et omkostningsspil, (N, c) , er defineret af den konvekse form, som dannes af $n!$ punkter, som er de $n!$ vektorer, $m^\sigma(N, c)$, hvor $\sigma \in \Omega$, og hvor Ω er sættet af alle $n!$ ordninger af N .

De $n!$ vektorer, $m^\sigma(N, c)$, er definerede ved $m^\sigma(N, c) := (m_{\sigma(1)}^\sigma, m_{\sigma(2)}^\sigma, \dots, m_{\sigma(n)}^\sigma)$, så

$$W(N, c) = m^\Omega(N, c)$$

hvor $\sigma(1)$ er den første agent i ordningen, $m^\sigma(N, c)$, $\sigma(2)$ er den næste osv. Værdierne $m_{\sigma(i)}^\sigma$, hvor $i \in N$, er definerede ved

$$m_{\sigma(i)}^\sigma := c(\sigma(i) \cap \dots \cap \sigma(1)) - c(\sigma(i-1) \cap \dots \cap \sigma(1))$$

Definition 2.14.2

Weber-sættet, $W(N, v)$, for et overskudsspil, (N, v) , er defineret af den konvekse form, som dannes af $n!$ punkter, som er de $n!$ vektorer, $m^\sigma(N, v)$, hvor $\sigma \in \Omega$, og hvor Ω er sættet af alle $n!$ ordninger af N .

De $n!$ vektorer, $m^\sigma(N, v)$, er definerede ved $m^\sigma(N, v) := (m_{\sigma(1)}^\sigma, m_{\sigma(2)}^\sigma, \dots, m_{\sigma(n)}^\sigma)$, så

$$W(N, v) = m^\Omega(N, v)$$

hvor $\sigma(1)$ er den første agent i ordningen, $m^\sigma(N, v)$, $\sigma(2)$ er den næste osv. Værdierne $m_{\sigma(i)}^\sigma$, hvor $i \in N$, er definerede ved

$$m_{\sigma(i)}^\sigma := v(\sigma(i) \cap \dots \cap \sigma(1)) - v(\sigma(i-1) \cap \dots \cap \sigma(1))$$

Dvs. hvis man forestiller sig, at agenterne én ad gangen stiller sig på en linje fra venstre mod højre og derved danner en koalition med de agenter, som står der i forvejen, vil agenterne modtage den marginale omkostning eller det marginale overskud, i tilfældet af et overskudsspil, til koalitionen,

som agenten danner; marginalbidragene og den rækkefølge, de danner, bliver til en m^σ -vektor. Beviset for om kernen er en del af Weber-sættet vil blive delt op i, om et spil har en, to eller flere end to agenter.

Teorem 2.3

Lad (N, v) være et hvilket som helst overskudsspil, så er $K(N, v) \subseteq W(N, v)$.

Bevis: Hvis $|N| = 1$, så $I(N, v) = K(N, v) = W(N, v)$, da

$W(N, v) = \{v(1)\} = I(N, v)$, hvor

$$I(N, v) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} y_i = v(N); y_i \geq v(i) \forall i \in N \right\}$$

For $|N| = 2$, ses der på to tilfælde; det første hvor $I(N, v) = \emptyset$, som kun kan lade sig gøre, hvis $v(N) < \sum_{i \in N} v(i)$, og derved er spillet ikke engang essentielt, hvilket naturligvis leder til $\emptyset = I(N, v) = K(N, v) \subseteq W(N, v)$. Det andet tilfælde er, hvor $I(N, v) \neq \emptyset$, så ved to agenter bliver $W(N, v)$ disse to

$$y' = (v(1), v(1, 2) - v(1)) \quad \text{og} \quad y'' = (v(2), v(1, 2) - v(2))$$

For et konvekst sæt, C , kaldes et punkt, y , for et ekstremumpunkt, hvis der ikke eksisterer $y_1, y_2 \in C$, hvor $y_1, y_2 \neq y$ og $\alpha \in [0, 1]$ sådan, at $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 = y$. Sættet med alle ekstremumpunkter for sættet, C , betegnes som $EKS(C)$.

y' og y'' danner både $EKS(K)$ og $EKS(W)$, og da $EKS(K) = EKS(W)$, så er $K(N, v) = W(N, v)$.

For $|N| < 2$ vil det blive bevist, at hvis $y \in EKS(K(N, v))$, vil det betyde, at $y \in (W(N, v))$. Hvis $y \in EKS(K(N, v))$ kan det bevises, at der må eksistere en koalition $T \subset N$, hvor $\sum_{i \in T} y_i = v(T)$, og hvor $|T| = t$. Der kan så laves to spil af (N, v) -spillet, (T, u) og $(N \setminus T, w)$, som er definerede af

$$u(S) = v(S) \text{ for hver } S \in T$$

$$w(S) = v(T \cup S) - v(T) \text{ for hver } S \in N \setminus T$$

Da der ikke er ændret på noget, men at spillet kun er delt op, så er kernerne for hvert spil stadig ikke-tomme. Yderligere ses det via induktion, at da $t, n - t < n$, så er $y^T \in W(u)$ og $y^{N \setminus T} \in W(w)$, da man kan blive ved med at dele et tilfældigt stort spil op, så man til sidst ender med spil med én eller to agenter, og for disse spil er det netop bevist, at kernen er en del af Weber-sættet.

Da $EKS(W(T, u))$ og $EKS(W(N \setminus T, w))$ er af formen, (m^ρ, m^τ) , hvor $\rho: \{1, \dots, t\} \rightarrow T$ og $\tau: \{1, \dots, n - t\} \rightarrow N \setminus T$, som begge er bijektive, svarer (m^ρ, m^τ) til m^σ , som er $EKS(W(N, v))$. m^σ kan dannes ved

$$\sigma(i) := \begin{cases} \rho(i) & \text{hvis } 1 \leq i \leq t \\ \tau(i - t) & \text{hvis } t + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Da $EKS(W(T, u)) \cap EKS(W(N \setminus T, w)) = EKS(W(N, v))$, er $(W(T, u)) \cap (W(N \setminus T, w)) = (W(N, v))$, da $W(N, v)$ er en konveks form. Dermed er det bevist, at hvis $y \in EKS(K(N, v))$, vil det betyde, at $y \in (W(N, v))$, som afslutter beviset for teorem 2.3.

Kapitel 3 - Klasser af spil

Spil, som ikke er generelle, men som opfylder visse krav, inddeles i klasser. Disse klasser af spil kan hver især naturligvis ikke rumme alle spil, men de kan i stedet lede til nye egenskaber og karakteristika både for den pågældende klasse af spil men også for fordelingsregler, der bliver brugt i sådanne spil.

Balancerede vægte

Da den egenskab, at være essentiel, ikke er nok til at garantere, at kernen af et spil er ikke-tom, da essentialitet ikke omhandler fordelingen af værdien af storkoalitionen, men kun forholdet mellem værdien af storkoalitionen og værdierne af enkelt-agent koalitionerne, er der brug for at finde yderligere egenskaber, der kan garantere, at et spil har en kerne.

Definition 2.15.1

Lad $\mathcal{P}(N)$ betegnes som $\mathcal{B}$ og **balanceret**, hvis der eksisterer $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$, hvor m er antallet af ikke-tomme delmængder af N , sådan at der for hvert $i \in N$ gælder, at

$$\sum_{j: i \in S_j} \delta_j = 1$$

Samlingen af δ til et spil kaldes for et system af **balancerede vægte**, og et spil kaldes ligeså **balanceret**, hvis dets tilhørende sæt $\mathcal{P}(N)$ er balanceret. Er et spil balanceret, er alle dets koalitioner i $\mathcal{P}(N)$ også balancerede.

Det, at et spil er balanceret, medfører, at spillet har en ikke-tom kerne, som det kan ses af beviset af det følgende teorem.

Teorem 2.4

Der eksisterer mindst én omkostningsfordeling, der tilfredsstiller stand-alone princippet for et omkostningsspil (N, c) , hvis og kun hvis der for alle omkostningsspillet systemer af balancerede vægte gælder, at

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S c(S) \geq c(N)$$

Bevis: Beviset af teorem 2.4 kommer af, at man kan betragte fordelingen af et omkostningsspil som en fordeling, som skal maksimeres under bibetingelse af stand-alone princippet, dvs.

$$\text{Max } z = \sum_{i \in N} x_i$$

Ubb.

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \quad \forall S \subseteq N \quad S \neq \emptyset$$

Pga. bibetingelsen er løsningen altid i kernen, og deraf kan det fra definition 2.5.1 udledes, at $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$, hvorfor optimum må være $z^* \geq c(N)$. Maksimeringsproblemet, som her kaldes for det primære problem, ser mere præcist sådan ud

$$\text{Max } b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$$

$$\text{Ubb. } a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq c(S_1)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq c(S_m)$$

Det ses, at koefficientmatricen $A = \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$ udelukkende består af 0 og 1 for at bibetingelserne afspejler stand-alone princippet korrekt.

Ud fra det primære problem kan det duale problem opstilles

$$\text{Min } c(S_1) \delta_1 + \dots + c(S_m) \delta_m$$

$$\text{Ubb. } a_{11} \delta_1 + \dots + a_{m1} \delta_m \geq b_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1n} \delta_1 + \dots + a_{mn} \delta_m \geq b_n$$

I omkostningsspil bruges der som regel kun positive værdier til koalitionerens omkostninger, så fordelingen derved også bliver udelukkende positive værdier, men matematisk korrekt er der ingen begrænsning på de enkelte fordelinger; dette skrives

som, at $x_1, \dots, x_n$ er frie variable, og dette betyder, at ulighedstegnene i det duale problem er lighedstegn. Derudover bestemmes det, at koefficienterne $b_1, \dots, b_n$ alle er lig 1, og derved kan det duale problem mere præcist opstilles således

$$\text{Min } c(S_1)\delta_1 + \dots + c(S_m)\delta_m$$

$$\text{Ubb. } a_{11}\delta_1 + \dots + a_{m1}\delta_m = 1$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{1n}\delta_1 + \dots + a_{mn}\delta_m = 1$$

Da alle bibetingelserne i det primære problem er med $\leq$, gælder der for variablene i det duale problem, at $\delta_1, \dots, \delta_m \geq 0$, hvor striden med at definition 2.6.1 betegner disse som $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$ ikke er af betydning.

Hovedsætningen for lineær programmering siger, at hvis der eksisterer mulige løsninger til både det primære og det duale problem, da eksisterer der en optimal løsning til begge problemer, hvor de optimale kriterieværdier er ens. Dette leder til, at hvis

$$c(S_1)\delta_1 + \dots + c(S_m)\delta_m = \sum_{S \subseteq B} \delta_S c(S) = d$$

hvor d^* er optimum for det duale problem, så må det være tilfældet, at

$$\sum_{S \subseteq B} \delta_S c(S) = d^* = z^* \geq c(N)$$

Det kan konstateres, at hvis det duale problems bibetingelser er overholdt, er spillet balanceret, da det duale problems bibetingelse er identisk med definitionen af et balanceret spil – definition 2.6.1. Da bibetingelsen til det primære problem er, at fordelingen ligger i kernen, så $\text{kerne}(N, c) \neq \emptyset$, og bibetingelsen til det duale problem er, at spillet, (N, c) , er balanceret, kan det afsluttende konstateres, at hvis et spil har en ikke-tom kerne, er spillet balanceret, og hvis et spil er balanceret, må det have en ikke-tom kerne.

Hvis definition 2.15.1 udforskes nærmere, kan det ses, at $\sum_{j:i \in S_j} \delta_j = 1$ er konstrueret således, at der kan laves simple systemer af balancerede vægte, sådan at $\delta_S = \delta_{S'} = 1$ og $\delta_{T \setminus S, S'} = 0$ hvor $S \cap S' = \emptyset$ og $S \cup S' = T$ for $\forall T \subseteq N$, da definition 2.15.1 også definerer alle koalitioner af N til at have en samling af balancerede vægte. Indsættes disse simple systemer af balancerede vægte i $\sum_{S \subseteq B} \delta_S c(S) \geq c(N)$ fås $c(S) + c(S') \geq c(T)$, som netop er definitionen på subadditivitet; ergo må subadditivitet eller superadditivitet være en nødvendighed for, at en kerne er ikke-tom.

Et eksempel med $n = 3$ kan have et system af balancerede vægte, hvor $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0,5$ og $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, sådan at

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot c(1, 2) + 0,5 \cdot c(1, 3) + 0,5 \cdot c(2, 3) &\geq c(1, 2, 3) \Leftrightarrow c(1, 2) + c(1, 3) + c(2, 3) \\ &\geq 2 \cdot c(1, 2, 3) \end{aligned}$$

Konkaviteten giver eksempelvis $c(1, 2) + c(2, 3) \geq c(1, 2, 3) + c(2) \Leftrightarrow$

$$c(1, 2) + c(2, 3) + c(1, 3) \geq c(1, 2, 3) + c(2) + c(1, 3)$$

Da det er bevist, at subadditivitet er en nødvendighed for en ikke-tom kerne udnyttes det, at $c(2) + c(1, 3) \geq c(1, 2, 3)$. Da $c(1, 2, 3)$ er den mindste værdi, som $c(2) + c(1, 3)$ kan antage, vil ulighedstegnet ikke brydes ved at indsætte $c(1, 2, 3)$ i stedet for $c(2) + c(1, 3)$, hvorved der fås

$$c(1, 2) + c(2, 3) + c(1, 3) \geq c(1, 2, 3) + c(1, 2, 3)$$

Derved er det bevist, at hvis et spil er konkavt eller konvekst er kernen ikke-tom, da der gælder, at alle mulige systemer af balancerede vægte skal opfylde $\sum_{S \subseteq B} \delta_S c(S) \geq c(N)$.

Konkave og konvekse spil

Her tages der fat på definitionerne 2.5.1 og 2.5.2, som blev præsenteret i forrige kapitel. Konkave og konvekse spil er karakteriserede af, at agenter har incitament til at indgå i større og større koalitioner; det følgende teorem viser fire egenskaber, som et spil har, hvis det også er konvekst.

Teorem 2.5

For hvert overskudsspil, (N, v) , er de fem følgende påstande ækvivalente.

1. (N, v) er et konvekst spil.
2. For $S_1, S_2, U \subseteq N$ og $S_1 \subseteq S_2 \subseteq N \setminus U$ er

$$v(S_1 \cup U) - v(S_1) \leq v(S_2 \cup U) - v(S_2)$$

3. For $S_1, S_2 \subseteq N$, $i \in N$ og $S_1 \subseteq S_2 \subseteq N \setminus \{i\}$ er

$$v(S_1 \cup \{i\}) - v(S_1) \leq v(S_2 \cup \{i\}) - v(S_2)$$

4. For $\sigma \in \Omega$ er $m^\sigma(N, v) \subseteq K(N, v)$, hvor Ω er sættet af alle $n!$ ordninger af N , og hvor $m^\sigma(N, v) := (m_{\sigma(1)}^\sigma, m_{\sigma(2)}^\sigma, \dots, m_{\sigma(n)}^\sigma)$

5. $W(N, v) = K(N, v)$

Bevis: Beviset er opstillet sådan, at 12) betyder at påstand 1. er ækvivalent med 2., 23) betyder at påstand 2. er ækvivalent med 3. osv.

12) Hvis $S_1 \cup U = S'$ og $S_2 = S$ indsættes i ligningsdefinitionen for konveksitet, så

$$v(S' \cup S) + v(S' \cap S) \geq v(S') + v(S) \Leftrightarrow$$

$$v(S_1 \cup U \cup S_2) + v(S_1 \cup U \cap S_2) \geq v(S_1 \cup U) + v(S_2)$$

Da $S_1 \subseteq S_2$ må der gælde, at $S_1 \cup U \cup S_2 = S_2 \cup U$ og $S_1 \cup U \cap S_2 = S_1$ så

$$v(S_1 \cup U \cup S_2) + v(S_1 \cup U \cap S_2) \geq v(S_1 \cup U) + v(S_2) \Leftrightarrow$$

$$v(S_2 \cup U) + v(S_1) \geq v(S_1 \cup U) + v(S_2) \Leftrightarrow$$

$$v(S_2 \cup U) - v(S_2) \geq v(S_1 \cup U) - v(S_1)$$

Hvilket viser, at påstand 1. er ækvivalent med 2.

23) At 2. er ækvivalent med 3. kan vises på samme måde som ved 12) med $U = \{i\}$.

34) For hver σ er $\sum_{k=1}^n m_{\sigma(k)}^\sigma = v(N)$. For $S \subseteq N$ og $S = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$, hvor $i_1 < \dots < i_k$, så $v(S) = \sum_{r=1}^k v(\sigma(i_1) \cap \dots \cap \sigma(i_r)) - v(\sigma(i_1) \cap \dots \cap \sigma(i_{r-1}))$.

Hvis $i := \sigma(i_r)$, $S_1 := \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{r-1})\}$ og $S_2 := \{\sigma(1), \dots, \sigma(i_{r-1})\}$, så $S_1 \subseteq S_2$, og så må der ifølge 3. gælde, at $\sum_{r=1}^k v(\sigma(i_1) \cap \dots \cap \sigma(i_r)) - v(\sigma(i_1) \cap \dots \cap \sigma(i_{r-1})) \leq$

$$\sum_{r=1}^k v(\sigma(1) \cap \dots \cap \sigma(i_r)) - v(\sigma(i_1) \cap \dots \cap \sigma(i_{r-1})).$$

Da $\sum_{r=1}^k v(\sigma(1) \cap \dots \cap \sigma(i_r)) - v(\sigma(i_1) \cap \dots \cap \sigma(i_{r-1}))$ kan skrives som $\sum_{r=1}^k m_{\sigma(i_r)}^\sigma$ og $\sum_{k \in S} m_k^\sigma$, kan uligheden skrives som $v(S) \leq \sum_{k \in S} m_k^\sigma$; da denne ulighed er stand-alone princippet må $m^\Omega(N, v) \subseteq K(N, v)$, hvilket blev bevist på baggrund af 3.

45) Definition 2.14.2 giver sammen med 4., at $m^\Omega(N, v) = W(N, v) \subseteq K(N, v)$. Da teorem 2.3 siger, at $W(N, v) \supseteq K(N, v)$, må det resultere i $W(N, v) = K(N, v)$.

51) Lad $S, T \subseteq N$, $\sigma \in \Omega$ og $d, t, u \in \mathbb{N}$, hvor $0 \leq d \leq t \leq u \leq n$, sådan at $S \cap T = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_d)\}$, $T \setminus S = \{\sigma(d+1), \dots, \sigma(t)\}$, $S \setminus T = \{\sigma(t+1), \dots, \sigma(u)\}$ og $N \setminus (S \cup T) = \{\sigma(u+1), \dots, \sigma(n)\}$.

Yderligere dannes følgende sæt for at forenkle de efterfølgende ligninger

$A_r = \{\sigma(1), \dots, \sigma(r)\}$, $A_{r-1} = A_r \setminus \{\sigma(r)\}$, $B_{t+k} = \{\sigma(t+1), \dots, \sigma(t+k)\}$ og $B_{t+k-1} = B_{t+k} \setminus \{\sigma(t+k)\}$; af disse mængder kan $\sum_{i \in S} m_i^\sigma$ skrives som

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} m_i^\sigma &= \sum_{r=1}^d (v(A_r) - v(A_{r-1})) + \sum_{k=1}^{u-t} v(T \cup B_{t+k}) - v(T \cup B_{t+k-1}) \\ &= v(S \cap T) + v(S \cup T) - v(T) \end{aligned}$$

Fra 5. og 45) ses det, at da $m^\Omega(N, v) = W(N, v) = K(N, v)$, så må $m^\sigma(N, v) \in K(N, v)$, hvilket betyder, at $v(S) \leq \sum_{i \in S} m_i^\sigma$ (hvilket også står i 34)), dvs.

$v(S) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T) - v(T) \Leftrightarrow v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$,
 hvilket fuldender beviset for at påstandene 1. til 5. er ækvivalente.

Reducerede spil

Denne klasse af spil drejer sig om reducerede spil, og hvordan de ændres efter en reduktion. Selve reduktionen er en reduktion af antal agenter i spillet, hvor et antal agenter altså har forladt spillet og efterlader mængden, T , af agenter. Med sig tager mængden, $N \setminus T$, en del af værdien, som storkoalitionen udgjorde; det er denne værdi, som de efterlader mængden, T , som kan udledes alt efter hvad der menes at være fair og rimeligt. Hver enkelt koalition i det reducerede spil kan også antage en ny værdi alt efter, algoritmen i formen af det reducerede spil. I dette underkapitel vil der blive præsenteret to former for reducerede spil.

Det er også uklart, om en fordelingsregel vil fordele det samme til de resterende agenter i det nye spil, som den tildelte dem i det gamle spil; til dette bliver der defineret en egenskab i afsnit 3.

Davis-Maschler

Det Davis-Maschler-reducerede spil bygger på, at én fordelingsregel har været taget i brug inden spil-reduktionen, således at de agenter, som forlader spillet, tager deres tildelte værdier med sig. Det kan opfattes som, at mængden, $N \setminus T$, er blevet købt ud, sådan at hver af disse agenter er tilfredse med, hvad de nu er blevet købt ud for; mængden, $N \setminus T$, danner altså ikke et nyt og reduceret problem – i hvert fald ikke et som har betydning for det reducerede problem bestående af mængden, T .

Mængden, T , som er storkoalitionen i det reducerede, spil får altså værdien, som summen af tildelingen til agenterne i T , i spillet bestående af n agenter, udgør. Hver ikke-tom koalition, S , i det reducerede spil er defineret ud fra de større koalitioner, som indeholdte S og en eller flere agenter fra $N \setminus T$. Den bedst mulige værdi, som fremkommer, når tildelingen til de relevante agenter fra $N \setminus T$ fratrækkes koalitionen bestående af S og disse agenter, er, hvad S får af værdi; dvs. det er den mindste værdi for omkostningsspil og den største værdi for overskudsspil.

Definition 2.16.1

For et omkostningsspil, (N, c) , og en omkostningsregel, $\phi(N, c) = x$ er det Davis-Maschler-reducerede spil, (T, c_T^ϕ) , hvor $T \subset N$, defineret ved

$$c_T^\phi(S) = \min_{S' \subseteq N \setminus T} \left\{ c(S \cup S') - \sum_{i \in S'} \phi_i(N, c) \right\}$$

for $\emptyset \neq S \subset T$. For $\emptyset = S$ er $c_T^\phi(S) = 0$ og for $T = S$ er $c_T^\phi(S) = \sum_{i \in T} \phi_i(N, c)$.

Definition 2.16.2

For et overskudsspil, (N, v) , og en overskudsregel, $\hat{\phi}(N, v) = y$ er det Davis-Maschler-reducerede spil, $(T, v_T^{\hat{\phi}})$, hvor $T \subset N$, defineret ved

$$v_T^{\hat{\phi}}(S) = \max_{S' \subseteq N \setminus T} \left\{ v(S \cup S') - \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(N, v) \right\}$$

for $\emptyset \neq S \subset T$. For $\emptyset = S$ er $v_T^{\hat{\phi}}(S) = 0$ og for $T = S$ er $v_T^{\hat{\phi}}(S) = \sum_{i \in T} \hat{\phi}_i(N, v)$.

Som ved konkave og konvekse spil kan denne klasse af spil også karakterisere spil omend antallet af egenskaber for reducerede spil er lidt mere beskedent, da det følgende teorem vil indeholde en enkel, men vigtig egenskab.

Teorem 2.6

Kernen af et spil ligger, for de relevante agenter, i kernen af et heraf Davis-Maschler-reduceret spil.

Bevis: Teoremet vil blive bevist for overskudsspil, så fra ligningen, der definerer $v_T^{\hat{\phi}}(S)$ i definition 2.16.2 for $\emptyset \neq S \subset T$, ses det, at der må være en koalition, S' , hvor $\emptyset \subseteq S' \subseteq N \setminus T$, som maksimerer $v_T^{\hat{\phi}}(S)$, således at $v_T^{\hat{\phi}}(S) = v(S \cup S') - \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(N, v)$. Da $\sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) = \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v) + \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(N, v) \Leftrightarrow$

$-\sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(N, v) = -\sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) + \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v)$, så må

$v_T^{\hat{\phi}}(S) = v(S \cup S') - \sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) + \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v)$. Da

$$v_T^{\hat{\phi}}(S) = v(S \cup S') - \sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) + \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v) \Leftrightarrow$$

$$v_T^{\hat{\phi}}(S) + \sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) = v(S \cup S') + \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v)$$

ses det, at da der må gælde, at $\sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) \geq v(S \cup S')$ pga. fordelingen i det originale spil ligger i kernen, så må der, for at ligningen holder, også gælde, at $v_T^{\hat{\phi}}(S) \leq \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v)$, hvilket, ifølge stand-alone princippet, næsten er det fulde krav til at fordelingen fra det originale spil ligger i kernen af det reducerede spil. Tilbage mangler der at redegøre for $S = T$, så når definition 2.16.2 direkte oplyser, at $v_T^{\hat{\phi}}(S) = \sum_{i \in T} \hat{\phi}_i(N, v)$ for $S = T$ er teoremet bevist.

Hart-Mas-Colell

Hvor det Davis-Maschler-reducerede spil er forbundet med en fordeling på det originale spil, skal den valgte fordelingsregel, i forbindelse med det Hart-Mas-Colell-reducerede spil, bruges på flere forskellige spil af varierende størrelse. Værdierne for koalitionerne, $S \subseteq T$, beregnes nemlig stort set som i det Davis-Maschler-reducerede spil men med den forskel, at fordelingerne som fratrækkes værdien af koalitionen bestående af S og mængden, $S' = N / T$, er fordelingerne, som agenterne i S' ville få tildelt i spillet med $S \cup S'$ agenter; dette betyder derfor også, at der ikke skal minimeres eller maksimeres over flere værdier som ved det Davis-Maschler-reducerede spil.

Definition 2.17.1

For et omkostningsspil, (N, c) , og en fordelingsregel, ϕ , er det Hart-Mas-Colell-reducerede spil, (T, c_T^{ϕ}) , hvor $T \subset N$, defineret ved

$$c_T^{\phi}(S) = c(S \cup S') - \sum_{i \in S'} \phi_i(S \cup S', c_{|S \cup S'})$$

for $S \subseteq T$ og $S' = N / T$. $c_{|S \cup S'}$ betyder, at det kun er værdierne i c , tilhørende koalitioner bestående af agenter fra $S \cup S' \subseteq N$, som anvendes.

Definition 2.17.2

For et overskudsspil, (N, v) , og en fordelingsregel, $\hat{\phi}$, er det Hart-Mas-Colell-reducerede spil, $(T, v_T^{\hat{\phi}})$, hvor $T \subset N$, defineret ved

$$v_T^{\hat{\phi}}(S) = v(S \cup S') - \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(S \cup S', v_{|S \cup S'})$$

for $S \subseteq T$ og $S' = N \setminus T$. $v_{|_{S \cup S'}}$ betyder, at det kun er værdierne i v , tilhørende koalitioner bestående af agenter fra $S \cup S' \subseteq N$, som anvendes.

For at sammenligne de Davis-Maschler- og Hart-Mas-Colell-reducerede spil intuitivt, giver det måske mening at betragte det Hart-Mas-Colell-reducerede spil, som en måde, for en organisation der opererer i flere lande, at tjekke, om dele af organisationen kan flyttes fra et land til et andet, uden at det ændrer på indtjeningen eller omkostningerne for den del, som forbliver i landet.

Som der vil blive vist herunder, kræves der mere af et Hart-Mas-Colell-reduceret spil, for at kernen ligger i kernen af det originale spil.

$$v_T^{\hat{\phi}}(S) = v(S \cup S') - \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(S \cup S', v_{|_{S \cup S'}}) \Leftrightarrow \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(S \cup S', v_{|_{S \cup S'}}) + v_T^{\hat{\phi}}(S) = v(S \cup S')$$

Da stand-alone princippet siger, $\sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) \geq v(S \cup S')$, så må

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S \cup S'} \hat{\phi}_i(N, v) &\geq \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(S \cup S', v_{|_{S \cup S'}}) + v_T^{\hat{\phi}}(S) \Leftrightarrow \\ \sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v) + \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(N, v) &\geq \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(S \cup S', v_{|_{S \cup S'}}) + v_T^{\hat{\phi}}(S) \end{aligned}$$

Det ses, at kun hvis $\sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(N, v) \leq \sum_{i \in S'} \hat{\phi}_i(S \cup S', v_{|_{S \cup S'}})$ er det sikkert, at

$$\sum_{i \in S} \hat{\phi}_i(N, v) \geq v_T^{\hat{\phi}}(S)$$

sådan at fordelingen af et spil ligger, for de relevante agenter, i kernen af et heraf Hart-Mas-Colell-reduceret spil. Dvs. at hvis den ovenstående intuitive forklaring fortsættes, så ligger kernen i det reducerede spil i kernen for det originale spil, hvis den del af organisationen, som flyttes, eksempelvis får samme tildeling før og efter.

Afsnit 3

Kapitel 4 - 4+1 fordelingsregler

Dette kapitel præsenterer de fire fordelingsregler, som oftest anvendes og henvises til i litteraturen. Der lægges ud med Shapley-værdien, der blev udarbejdet af den amerikanske professor L.S. Shapley i 1953; det var faktisk også Shapley, der introducerede begrebet, kernen, i forbindelse af hans udarbejdelse af Shapley-værdien.

Dernæst kommer τ -værdien, der blev defineret af Tijs i 1981, og efterfølgende en anden meget omtalt fordelingsregel, Nucleolus, af Schmeidler D. i 1969. Denne fordelingsregel er muligvis ikke lige så ”køn” som Shapley-værdien, men den har den pæne egenskab at ligge i kernen af alle spil med ikke-tom kerne. Den sidste af de kendte fordelingsregler er Lorenz-fordelingen, som, efter min mening, er den mest simple og i øvrigt er defineret til også altid at ligge i kernen af alle spil med ikke-tom kerne.

Kapitlet afsluttes med mit eget bud på en fordelingsregel, der er kommet til i forbindelse med min kritik af Shapley-værdien.

Shapley-værdien

Shapley-værdierne er fordelingerne af de bidrag, de enkelte agenter bringer til de koalitioner, de kan befinde sig i. Dvs. forøges overskuddet markant i koalitioner, når en vis agent tiltræder, så vil agenten også blive tildelt en passende stor del af det samlede overskud, og samtidig vil det være et mål for, hvad agenten er værd for de andre agenter i spillet.

Definition 3.1.1

Shapley-værdien, ϕ^{sh} , af et omkostningsspil, (N, c) , er defineret ved omkostningsfordelingen

$$x_i^{sh} = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (c(S) - c(S \setminus i))$$

hvor s er antallet af agenter i S .

Definition 3.1.2

Shapley-værdien, $\hat{\phi}^{sh}$, af et overskudsspil, (N, v) , er defineret ved overskudsfordelingen

$$y_i^{sh} = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i))$$

hvor s er antallet af agenter i S .

Shapley-værdien kan også defineres ved gennemsnittet af marginalbidragene til de koalitioner, der kommer før den pågældende agent i alle ordninger af N , hvor ”før den pågældende agent i alle ordninger af N ” betyder, at opstilles alle ordninger af N , så er det koalitionen af de agenter til venstre for den pågældende agent, Shapley-værdien beregnes for.

Definition 3.1.3

Shapley-værdien, ϕ , er defineret ved

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\Omega} a(P_i^{\Omega} \cup i) - a(P_i^{\Omega})$$

hvor Ω er sættet af alle $n!$ ordninger af N , P_i^{Ω} er koalitionerne i Ω , der kommer før i , og $a(P_i^{\Omega})$ er værdien af koalitionen P_i^{Ω} .

Definition 3.1.3 viser tydeligere, at da der vægtes lige af alle ordninger, så vægtes der lige af størrelsen af koalitionerne, hvilket betyder jo færre ordninger en koalitionsstørrelse giver anledning til jo højere vægtes marginalbidragene fra disse koalitioner. Det følgende eksempel viser Shapley-fordelingen.

Eksempel 3.1

$$N = \{1, 2, 3\} \quad c(1) = 6 \quad c(2) = 4 \quad c(3) = 7$$

$$c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = 10 \quad c(1, 2, 3) = 14$$

$$x_1^{sh} = (c(1) - c(\emptyset)) \cdot \frac{(|\{1\}|-1)!(n-|\{1\}|)!}{n!} + (c(1, 2) - c(2)) \cdot \frac{(|\{1,2\}|-1)!(n-|\{1,2\}|)!}{n!} + \\ (c(1, 3) - c(3)) \cdot \frac{(|\{1,3\}|-1)!(n-|\{1,3\}|)!}{n!} + (c(1, 2, 3) - c(2, 3)) \cdot \frac{(|\{1,2,3\}|-1)!(n-|\{1,2,3\}|)!}{n!}$$

Værdierne indsættes

$$x_1^{sh} = (6 - 0) \cdot \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} + (10 - 4) \cdot \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + (10 - 7) \cdot \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + \\ (14 - 10) \cdot \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} = \frac{29}{6}$$

Ligeledes udregnes Shapley-værdierne for agent 2 og 3, så den samlede Shapley-værdi bliver

$$x^{sh} = \left\{ \frac{29}{6}, \frac{23}{6}, \frac{32}{6} \right\}$$

Shapley-værdien ligger dog ikke i kernen, da der, pga. stand-alone princippet, skal gælde, at $\sum_{i \in \{1,3\}} x_i \leq c(1, 3)$, hvilket er en ulighed, der ikke holder, da

$$\sum_{i \in \{1,3\}} x_i \leq c(1, 3) \Rightarrow \frac{29}{6} + \frac{32}{6} \not\leq 10$$

τ -værdien

τ -værdien bygger også på marginalbidrag men kun marginalbidragene til storkoalition, som på samme måde som marginalprincipperne udgør en nedre eller øvre grænse for hhv. et omkostningsspil og overskudsspil, dvs. hhv. $M_i = c(N) - c(N \setminus i)$ og $M_i = v(N) - v(N \setminus i)$. Dernæst findes de mindste differencer mellem værdierne af koalitioner og de summerede marginale bidrag til storkoalition tilhørende de agenter, som koalitionerne består af, dvs. $w_i = \min_{S: i \in S} g(S)$, hvor $g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} M_i$ og hhv. $g(S) = \sum_{i \in S} M_i - v(S)$ for hver koalition $S \subseteq N$. Funktionerne w_i bruges som vægte til at fordele den værdi af storkoalition, som de summerede marginalbidrag, M_i , ikke udgør.

Definition 3.2.1

τ -værdien, ϕ^τ , af et omkostningsspil, (N, c) , er defineret ved omkostningsfordelingen

$$x_i^\tau = M_i + \frac{w_i}{\sum_{i \in N} w_i} g(N)$$

hvor $g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} M_i$. Da $M_i + w_i$ defineres til at være den øvre grænse, fokuseres der på spil, hvor $g(S) \geq 0$ for alle S og $\sum_{i \in N} w_i \geq g(N)$ er tilfældet.

Definition 3.2.2

τ -værdien, $\hat{\phi}^\tau$, af et overskudsspil, (N, v) , er defineret ved overskudsfordelingen

$$y_i^\tau = M_i - \frac{w_i}{\sum_{i \in N} w_i} g(N)$$

hvor $g(S) = \sum_{i \in S} M_i - v(S)$. Da $M_i - w_i$ defineres til at være den nedre grænse, fokuseres der på spil, hvor $g(S) \geq 0$ for alle S og $\sum_{i \in N} w_i \geq g(N)$ er tilfældet.

Fra ligningerne $g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} M_i$ og $g(S) = \sum_{i \in S} M_i - v(S)$ ses det desuden, at da

$$g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} M_i \Leftrightarrow c(S) = g(S) + \sum_{i \in S} M_i$$

$$g(S) = \sum_{i \in S} M_i - v(S) \Leftrightarrow v(S) = \sum_{i \in S} M_i - g(S)$$

kan Stand-alone principperne for τ -værdien skrives som

$$\sum_{i \in S} x_i \leq g(S) + \sum_{i \in S} M_i$$

$$\sum_{i \in S} y_i \geq \sum_{i \in S} M_i - g(S)$$

Eksempel 3.2

Eksempel 3.2 følger eksempel 3.1.

$$N = \{1, 2, 3\} \quad c(1) = 6 \quad c(2) = 4 \quad c(3) = 7$$

$$c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = 10 \quad c(1, 2, 3) = 14$$

Da $\sum_{i \in N} M_i = 12 < c(N) = 14$ og derved

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} M_i = 2$$

må $w_i = \min_{S: i \in S} g(S)$ og $g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} M_i$ tages i brug, hvilket giver

$$\{1\}: \quad g(1, 2) = 10 - 8 = 2 \quad g(1, 3) = 10 - 8 = 2 \quad g(1) = 6 - 4 = 2$$

$$\{2\}: \quad g(1, 2) = 10 - 8 = 2 \quad g(2, 3) = 10 - 8 = 2 \quad g(2) = 4 - 4 = 0$$

$$\{3\}: \quad g(1, 3) = 10 - 8 = 2 \quad g(2, 3) = 10 - 8 = 2 \quad g(3) = 7 - 4 = 3$$

Dette giver vægtene $w = \{2, 0, 2\}$, som sammen med $g(N) = 2$ giver fordelingen

$$x^\tau = \{5, 4, 5\}$$

I dette tilfælde ligger fordelingen altså i kernen, men ikke engang konkavitet eller konveksitet er en garanti for, at τ -værdien ligger i kernen, som det er tilfældet for Shapley-værdien.

Nucleolus-fordelingen

Fordelingsreglen Nucleolus går ud på at maksimere alle koalitioner differencer mellem koalitionerens værdi og deres fordeling; dog med en favorisering af de koalitioner, der har opnået den mindste difference. Differencen skrives som $e_S(x) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$ og $e_S(y) = \sum_{i \in S} y_i - v(S)$ for alle $S \subset N$ for hhv. omkostningsspil og overskudsspil, og da den tomme mængde og storkoalitionen ikke medregnes, så $e_S(x), e_S(y) \in \mathbb{R}^{2^n-2}$. Dernæst ordner en funktion θ disse differencer leksikografisk i stigende størrelser.

Definition 3.3.1

Nucleolus, ϕ^{Nuc} , af et omkostningsspil, (N, c) , er defineret ved omkostningsfordelingen

$$\phi^{Nuc}(N, c) = \{x \in I(N, c) | \theta(e(x)) \succ_{lek} \theta(e(\hat{x})), \forall \hat{x} \in I(N, c)\}$$

hvor $I(N, c) = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i \in N} x_i = c(N)\}$, og hvor $\succ_{lek}$ betyder, at hvis $x \succ_{lek} \hat{x}$, så $x_1 > \hat{x}_1$ eller $x_1 = \hat{x}_1$ og $x_2 > \hat{x}_2$ eller $x_2 = \hat{x}_2$ osv.

Definition 3.3.2

Nucleolus, $\hat{\phi}^{Nuc}$, af et overskudsspil, (N, v) , er defineret ved overskudsfordelingen

$$\hat{\phi}^{Nuc}(N, v) = \{y \in I(N, v) | \theta(e(y)) \succ_{lek} \theta(e(\hat{y})), \forall \hat{y} \in I(N, v)\}$$

hvor $I(N, v) = \{y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i \in N} y_i = v(N)\}$, og hvor $\succ_{lek}$ betyder, at hvis $y \succ_{lek} \hat{y}$, så $y_1 > \hat{y}_1$ eller $y_1 = \hat{y}_1$ og $y_2 > \hat{y}_2$ eller $y_2 = \hat{y}_2$ osv.

Helt korrekt kan Nucleolus-fordelingen deles op i Nucleolus og præ-Nucleolus, hvor definitionerne 3.3.1 og 3.3.2 faktisk er definitionerne for præ-Nucleolus-fordelingen. Nucleolus-fordelingen er stærkere, da der for denne gælder, at $I(N, c) = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i \in N} x_i = c(N), x_i \leq c_i \forall i \in N\}$ og $I(N, v) = \{y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i \in N} y_i = v(N), x_i \geq v_i \forall i \in N\}$, hvilket altså er tilføjelsen af individuel rationalitet. Da Nucleolus og præ-Nucleolus er ens for spil med ikke-tom kerne, hvilket er den klasse af spil, der bl.a. hovedsageligt fokuseres på i denne afhandling, vil der udelukkende blive brugt udtrykket "Nucleolus", når der henvises til definition 3.3.1 og 3.3.2.

Som det vises for neden vil fordelingsreglen før eller siden frembringe en unik og entydig fordeling x^{Nuc} , som vil ligge i kernen, hvis spillet (N, c) er balanceret. Til at finde Nucleolus til et givet omkostningsspil, løses det lineære programmeringsproblem

$$\max(\varepsilon)$$

$$Ubb.$$

$$e_s(x) \geq \varepsilon \quad \forall S \subset N$$

$$x \in I(N, c)$$

Hvis fordelingen x er entydig, da vil $\phi^{Nuc}(N, c) = x$, men hvis det ikke er tilfældet, så skal et lignende lineært programmeringsproblem løses; dog skal dette gøres over mængden af de hidtil fundne løsninger og kun for de delmængder $S \subset N$, hvor der gælder, at $e_S(x) > \varepsilon$; disse delmængder betegnes A .

k vil referere til det nye lineære programmeringsproblem, og $k - 1$ vil referere til det forrige lineære programmeringsproblem. Dette giver følgende notering af det nye lineære programmeringsproblem

$$\max(\varepsilon_k)$$

$$Ubb.$$

$$e_S(x) \geq \varepsilon \quad \forall S \subset N$$

$$e_S(x) = \varepsilon_{k-1} \quad \forall S \subset A_{k-1}$$

$$x \in I(N, c)$$

Så længe der ikke er en entydig løsning på det lineære programmeringsproblem, skal et nyt opstilles, hvortil hvert nyt der skal lægges endnu en restriktion i form af $e_S(x) = \varepsilon_{k-1} \quad \forall S \subset A_{k-1}$; dog vil det maksimalt være nødvendigt at løse $n - 1$ af disse lineære programmeringsproblemer, før en entydig løsning er fundet.

Eksempel 3.3

Eksempel 3.3 følger eksempel 3.1.

$$N = \{1, 2, 3\} \quad c(1) = 6 \quad c(2) = 4 \quad c(3) = 7$$

$$c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = 10 \quad c(1, 2, 3) = 14$$

Da Nucleolus har den egenskab, at den altid ligger i den ikke-tomme kerne, ses det, at $x_2^{Nuc} = 4$ skal være tilfældet. Derved kan spillet reduceres til et spil bestående af agent 1 og 3. Her er differencen $e(x) = (c(1) - x_1, c(3) - x_3)$.

Da der mangler at blive fordelt $c(1, 3)$, må $c(1, 3) = x_1 + x_3$, og da kan differencen skrives som $e(x) = (c(1) - x_1, c(3) + x_1 - c(1, 3))$. Da målet er at minimere alle

differencerne, vil optimum ligge, hvor differencerne er lig hinanden, så derfor kan følgende ligning opsættes

$$c(1) - x_1 = c(3) + x_1 - c(1, 3) \quad \Leftrightarrow \quad 6 - x_1 = 7 + x_1 - 10 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1^{Nuc} = 4,5 \Rightarrow x_3^{Nuc} = 5,5 \Rightarrow x^{Nuc} = \{4,5; 4; 5,5\}$$

Lorenz-fordelingen

Modsat mange andre fordelingsregler fordeler Lorenz-fordelingen mere simpelt, idet målet er at ligefordele over så store koalitioner som muligt. Det er altså først, når kernen ikke indeholder ligefordelingen $x_i = \frac{c(N)}{n}$, hvor $i \in N$, at fordelingsreglen bliver mere kompliceret, da Lorenz-fordelingen per definition altid ligger i kernen. Fordelingen bliver det punkt, som ligger i kernen og tættest på punktet $\frac{c(N)}{n}$, hvilket dog ikke behøver at være unikt; kun hvis spillet er konkavt eller konvekst, er det garanteret, at Lorenz-fordelingen er unik. Algoritmen til at finde Lorenz-fordelingen, der ligger tættest på $\frac{c(N)}{n}$ bliver

Definition 3.4.1

Lorenz-fordelingen, ϕ^{Lor} , af et omkostningsspil, (N, c) , er defineret af følgende k trin.

k) Lad for første gang trin k rammes $k = 1$; for hver gentagelse af trin k opdateres parameteren k ved $k + 1 = k$. Definer $N_k = N \setminus S_0 \cup \dots \cup S_{k-1}$, hvor $S_0 = \emptyset$. Definer dernæst $S_k \subset N_k$ til at være den største koalition med det mindste gennemsnit, $g(S_k) = \frac{c(S_k)}{s_k}$, hvor s_k er antallet af agenter i S_k , og hvor det at finde det mindste gennemsnit er af højere prioritet end at finde den største koalition. Dette vil resultere i $x_i^{Lor} = g(S_k, c)$ for $i \in S_k$. Trin k gentages, hvis $N \setminus S_1 \cup \dots \cup S_k \neq \emptyset$.

Definition 3.4.2

Lorenz-fordelingen, $\hat{\phi}^{Lor}$, af et overskudsspil, (N, v) , er defineret af følgende k trin.

k) Lad for første gang trin k rammes $k = 1$; for hver gentagelse af trin k opdateres parameteren k ved $k + 1 = k$. Definer $N_k = N \setminus S_0 \cup \dots \cup S_{k-1}$, hvor $S_0 = \emptyset$.

Definer dernæst $S_k \subset N_k$ til at være den største koalition med det største gennemsnit, $g(S_k) = \frac{v(S_k)}{s_k}$, hvor s_k er antallet af agenter i S_k , og hvor det at finde det mindste gennemsnit er af højere prioritet end at finde den største koalition. Dette vil resultere i $y_i^{Lor} = g(S_k, v)$ for $i \in S_k$. Trin k gentages, hvis $N \setminus S_1 \cup \dots \cup S_k \neq \emptyset$.

Eksempel 3.4

Eksempel 3.4 følger eksempel 3.1.

$$N = \{1, 2, 3\} \quad c(1) = 6 \quad c(2) = 4 \quad c(3) = 7$$

$$c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = 10 \quad c(1, 2, 3) = 14$$

Da $x_i = \frac{c(N)}{n} = 4,66 > c(2) = 4$, ligger ligefordelingen af storkoalitionen ikke i kernen, og derved tages definition 2.10.1 i brug.

$k = 1$ resulterer i, at det mindste gennemsnit er 4 for koalitionen $\{2\}$.

$k = 2$ resulterer i, at det mindste gennemsnit er 5 for koalitionen $\{1, 3\}$, og derved er Lorenz-fordelingen for dette spil $x^{Lor} = \{5, 4, 5\}$.

Et alternativ til Shapley-fordelingen

Bogen, Game Theory (Michael Maschler, Eilon Solan, Shmuel Zamir, 2013, side 748), oplyser, at Shapleys originale mål var at spørge ”Hvor meget vil en agent være villig til at betale for at deltage i et spil?”. Som det også ræsonneres i bogen, må man antage, at en agent vil betale op til den værdi, som agenten kan forvente at modtage i spillet, og det er denne værdi, som Shapley havde som mål, og som skulle have hvad der senere blev kendt som ”Shapleys egenskaber” eller ”Shapleys aksiomer”.

Shapley kastede sig altså over de marginale bidrag, men hvad skulle argumentet være for at vægte et marginalbidrag højere end et andet? Shapley-algoritmen er matematisk meget køn, da, som det vises senere, Shapley-fordelingen er tyngdepunktet af kernen, men er der en intuitiv forklaring på vægtene af marginalbidragene? Disse to ens spørgsmål har jeg ikke kunnet finde et svar på i nogle af de tekster, som jeg har gennemgået, og det på trods af, at Shapley-fordelingen vel nok er den mest berømte fordeling.

Dette leder til et nyt generelt spørgsmål: Burde en fordeling give intuitiv mening for de deltagende agenter, eller vil den blive betragtet mere brugbar, jo flere matematiske egenskaber den besidder?

Det kan diskuteres, om det ville give mere mening, at marginalbidrag blev vægtet efter størrelsen af koalitionen, som den pågældende agent bidrager til, da flere agenter ville påskønne bidraget end ved Shapley-fordelingen, hvor jo færre koalitioner, der kan dannes af et vis antal agenter, jo højere vil disse koalitioner vægtes.

Hvad, der dog ikke giver intuitiv mening, er, at marginalbidraget til den tomme mængde vægtes på nogen som helst positiv måde, da dette marginalbidrag netop ikke berører andre agenter, og Shapley-fordelingen siges jo ellers at skulle være en måde at beregne, hvad en agent er værd for de andre agenter i spillet.

Den alternative fordeling, som jeg foreslår, er en fordeling af marginalbidragene, der bygger på størrelsen af omkostningen, som de lægges til og ved at opsplitte marginalbidragene, således de ikke overlapper. Denne fordeling belønner eller straffer altså ikke agenter for deres marginalbidrag til den tomme mængde og tager ikke hensyn til størrelsen af koalitionerne.

Da et marginalbidrag opsplittes, hvis andre marginalbidrag enten starter eller slutter i samme interval som dette, er det nødvendigt at lægge ud med en oversigt over de forskellige intervaller, som dannes, så hvert start- og slutpunkt af sådan et interval noteres leksikografisk i faldende orden; bemærk at da koalitions værdier kan være ens, vil der højst sandsynligt være færre af disse punkter og intervaller, end der er koalitioner. Det samme spil fra eksempel 3.1 vil blive brugt i alle eksempler af fordelingsregler, så for at fremme forståelsen af denne alternative fordelingsregel, vil den blive brugt som en del af forklaringen.

$$N = \{1, 2, 3\} \quad c(1) = 6 \quad c(2) = 4 \quad c(3) = 7$$

$$c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = 10 \quad c(1, 2, 3) = 14$$

Dette omkostningsspil giver punkterne $\{14, 10, 7, 6, 4, 0\}$ og intervallerne imellem. Som intervallet mellem det største og mindste punkt skal fordeles mellem agenterne, er det denne alternative fordelingsregels opgave, at hvert interval opdeles i så mange dele, som intervallet indgår i agenter marginalbidrag.

Definition 3.5.1

Lad i et omkostningsspil, (N, c) , $\theta(c(S)) \succ_{lek} \theta(c(\hat{S}))$ være funktionen, θ , som rangerer koalitionernes værdier leksikografisk i faldende orden, hvor $S, \hat{S} \subseteq N$. Yderligere omdøber θ værdierne til $c_1, c_2, \dots, c_m$, således at ingen værdier går igen, og ved at $c_1 = c(N)$ og $c_m = \min c(S)$.

Lad b_i^k være antallet af marginalbidrag for agent i , hvor $i \in N$, hvori intervallet $[c_k, c_{k+1}]$ indgår, og hvor $k = \{1, \dots, m-1\}$.

Den alternative fordelingsregel, ϕ^{Alt} , af et omkostningsspil, (N, c) , er defineret ved omkostningsfordelingen

$$x_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (c_k - c_{k+1}) \cdot \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k}$$

Definition 3.5.2

Lad i et overskudsspil, (N, v) , $\theta(v(S)) \succ_{lek} \theta(v(\hat{S}))$ være funktionen, θ , som rangerer koalitionernes værdier leksikografisk i faldende orden, hvor $S, \hat{S} \subseteq N$. Yderligere omdøber θ værdierne til $v_1, v_2, \dots, v_m$, således at ingen værdier går igen, og ved at $v_1 = v(N)$ og $v_m = \min v(S)$.

Lad b_i^k være antallet af marginalbidrag for agent i , hvor $i \in N$, hvori intervallet $[v_k, v_{k+1}]$ indgår, og hvor $k = \{1, \dots, m-1\}$.

Den alternative fordelingsregel, $\hat{\phi}^{Alt}$, af et overskudsspil, (N, v) , er defineret ved overskudsfordelingen

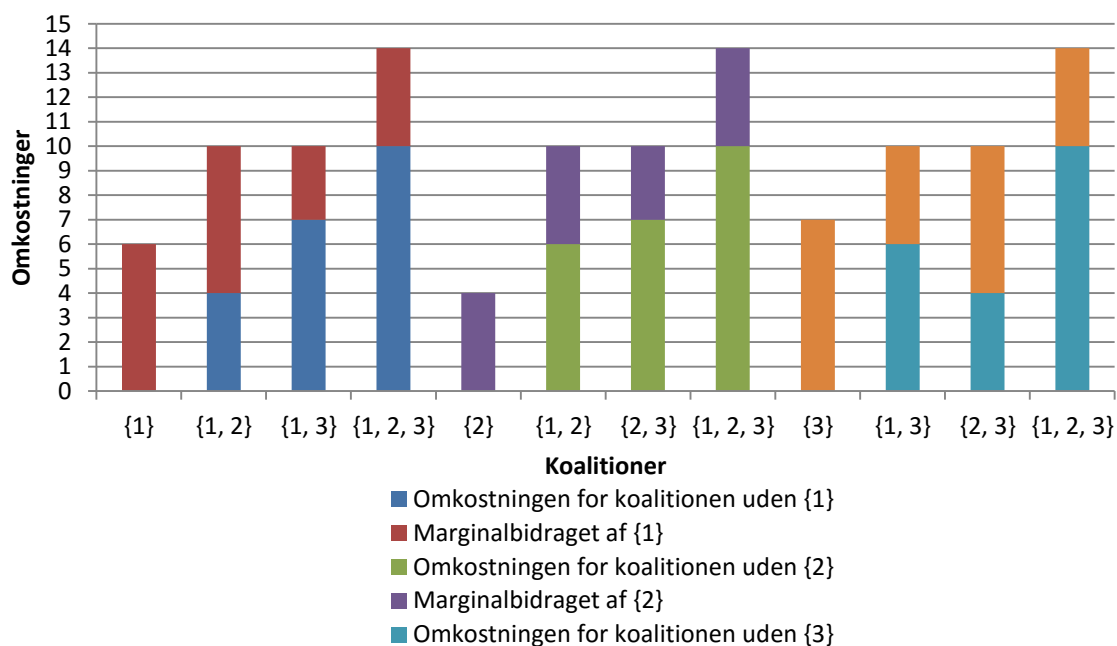
$$y_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k}$$

Eksempel 3.5

Da spillet er det samme som i eksempel 3.1, er værdierne

$$N = \{1, 2, 3\} \quad c(1) = 6 \quad c(2) = 4 \quad c(3) = 7$$

$$c(1, 2) = c(1, 3) = c(2, 3) = 10 \quad c(1, 2, 3) = 14$$



Det ses hvilke intervaller, marginalbidragene kan deles op i, og i hvor mange søjler disse intervaller forekommer i, og derved hvordan intervallerne skal fordeles.

Interval	Antal søjler	Omkostning	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
14-10	3	4	$\frac{1}{3}$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$
10-7	6	3	$\frac{1}{6}$	$3 \times \frac{1}{6} \times 2$	$3 \times \frac{1}{6} \times 2$	$3 \times \frac{1}{6} \times 2$
7-6	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 1$	$1 \times \frac{1}{4} \times 1$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
6-4	2	2	$\frac{1}{2}$	$2 \times \frac{1}{2} \times 1$	$2 \times \frac{1}{2} \times 0$	$2 \times \frac{1}{2} \times 1$
4-0	3	4	$\frac{1}{3}$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$
				$\frac{59}{12}$	$\frac{47}{12}$	$\frac{62}{12}$

Heller ikke denne fordeling ligger i kernen, da

$$\sum_{i \in \{1,3\}} x_i \leq c(1,3) \Leftrightarrow \frac{59}{12} + \frac{62}{12} \not\leq 10$$

om end denne "overskridelse" kun er det halve af, hvad Shapley-værdien overskred med. Problemet stammer sandsynligvis fra, at spillet ikke er konkavt jf. definition 1.5.1, som det vises her. Lad $S' = \{1, 3\}$ og $S = \{2, 3\}$

$$c(1, 2, 3) + c(3) \leq c(1, 3) + c(2, 3) \quad \Leftrightarrow \quad 14 + 7 \not\leq 10 + 10$$

For at afrunde den alternative fordelingsregel, vil jeg forklare tankegangen bag nogle af de kasserede idéer, som ellers var tæt på at være en del af den alternative fordelingsregel. En af mine første tanker, for den alternative fordelingsregels egenskaber, var, at skulle et interval indgå i mere end én koalition, som har forskellige antal agenter, skulle disse ens intervaller vægtes forskelligt. Incitamentet for dette ville være, at det, eksempelvis i et overskudsspil, alt andet lige er mere imponerende for en agent at opnå et marginalbidrag i et givent interval til en koalition af færre agenter end at opnå et marginalbidrag i samme interval til en koalition af flere agenter. Dette taler for, at marginalbidraget til koalitionen af færre agenter vægtes højere for dette interval end marginalbidraget til koalitionen med flere agenter i samme interval.

Omvendt er der argumentet, at selvom det givne interval giver anledning til en mindre nytte per agent jo flere agenter en koalition består af, så er det stadig flere agenter, som kan drage nytte.

Det var rationelle argumenter, som var motivationen til at finde en alternativ fordeling, men da jeg ikke kunne ignorere nogle af de to foregående argumenter, valgte jeg, at der ikke skulle vægtes forskelligt på marginalbidrag til koalitioner af forskellige antal agenter.

Kapitel 5 - Fordelingsreglers egenskaber

Fordelingsregler kan give intuitiv mening, alt efter hvordan man ser på dem, men det er først, når de er blevet nærmere analyseret, at man kan give dem konkrete egenskaber; disse egenskaber kan være meget nyttige, så selvom en given fordelingsregel ikke umiddelbart har bestemte egenskaber, kan det være interessant at tjekke endnu en gang for forskellige klasser af spil eller andre forudsætninger og se hvilke egenskaber, der dukker op.

I dette kapitel vil egenskaber blive præsenteret og defineret for i næste afsnit og kapitel at blive brugt til at karakterisere Shapley-værdien og den alternative fordelingsregel, som blev præsenteret i forrige kapitel.

Effektivitet

Denne første egenskab kan forekomme trivial, og det skal da også vise sig at være en egenskab, som de fleste fordelingsregler har, da det er en del af definitionen af kernen. Dette er egenskaben for, at en storkoalition ikke vil påtage sig flere omkostninger, end hvad der kræves i et omkostningsspil, og at en storkoalition i et overskudsspil intet vil lade gå til spilde.

Definition 3.6.1

En omkostningsregel, ϕ , er **effektiv**, hvis der for hvert omkostningsspil, (N, c) , gælder, at

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, c) = c(N)$$

Definition 3.6.2

En overskudsregel, $\hat{\phi}$, er **effektiv**, hvis der for hvert overskudsspil, (N, v) , gælder, at

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) = v(N)$$

Symmetri

Symmetri er en egenskab af fordelingsregler, som omhandler koalitioner, der også betegnes med egenskaben, symmetri. Egenskaben for koalitioner er kort sagt, at der ikke vil blive diskrimineret ud

fra koalitioner navne eller størrelser. Det er altså udelukkende de marginale bidrag, som koalitioner tilfører andre disjunkte koalitioner, der afgør om de har egenskaben, symmetri. En koalition betegnes som værende symmetrisk, hvis mindst en anden koalition har samme marginale bidrag til alle de koalitioner, som ingen af dem er en del af.

Definition 3.7.1

I et omkostningsspil, (N, c) , hvor $S, S' \subseteq N$, $T \subseteq N \setminus (S \cup S')$ og $S \cap S' = \emptyset$, er S og S' **symmetriske**, hvis

$$c(T \cup S) = c(T \cup S')$$

Definition 3.7.2

I et overskudsspil, (N, v) , hvor $S, S' \subseteq N$, $T \subseteq N \setminus (S \cup S')$ og $S \cap S' = \emptyset$, er S og S' **symmetriske**, hvis

$$v(T \cup S) = v(T \cup S')$$

En fordelingsregel kaldes ”symmetrisk”, hvis den tildeler lige meget til de koalitioner, som er symmetriske med hinanden.

Definition 3.7.3

En omkostningsregel, ϕ , er **symmetrisk**, hvis der for hvert omkostningsspil, (N, c) , og for hvert par af symmetriske koalitioner, S og S' , gælder, at

$$\phi_{i \in S}(N, c) = \phi_{j \in S'}(N, c)$$

Definition 3.7.4

En overskudsregel, $\hat{\phi}$, er **symmetrisk**, hvis der for hvert overskudsspil, (N, v) , og for hvert par af symmetriske koalitioner, S og S' , gælder, at

$$\hat{\phi}_{i \in S}(N, v) = \hat{\phi}_{j \in S'}(N, v)$$

I den virkelige verden kan en symmetrisk fordelingsregel være at forvente hvor koalitioner eller agenter er af samme sociale status, alder eller lign., men må omvendt siges at være et

kvalitetsstempel for objektivitet, hvis den vil blive brugt, hvor der netop er agenter med forskellige sociale statusser, religioner osv.

Kovarians under strategisk ækvivalens

For at denne egenskab skal give mening, skal der igen præsenteres et begreb for spil, som egenskaben er forbundet med. ”Strategisk ækvivalens” er, hvor det ingen forskel gør for agenterne, om de tager del i det ene eller det andet spil. Den bedste eksempel er nok at tænke på værdierne af koalitionerne som valuta – en anden valuta har en anden størrelse enhed, men den grundlæggende værdi er den samme for agenterne. Dette kan skrives som $w(S) = au(S)$ for spillene (N, w) og (N, u) , hvor $S \subseteq N$ og hvor $a > 0$ kan betragtes som valutakursen.

Udover at skifte måleenhed for værdien af koalitionerne baseret på det samme parameter for alle koalitioner, kan der også ændres på den endelige størrelse af koalitionerne ud fra de specifikke agenter, koalitionerne består af. Lige i denne sammenhæng bruges altså ordet ”måleenhed”, hvor der alle andre steder i denne afhandling bruges ”værdi”; her er ”værdi” blevet den grundlæggende og urørlige værdi, der for to spil som er strategisk ækvivalente, er den samme for en koalition, selvom måleenhederne for disse to spil er forskellige. $w(S) = au(S)$ kan altså udvides til også at inkludere ændringer baseret på de specifikke agenter, som S består af, hvilket bliver definitionen for strategisk ækvivalens.

Definition 3.8.1

Et spil (N, w) er **strategisk ækvivalent** med spillet, (N, u) , hvis der for hvert $S \subseteq N$ gælder, at

$$w(S) = au(S) + \sum_{i \in S} b_i = au(S) + b(S)$$

hvor $a > 0$ og $b \in \mathbb{R}^N$.

Vektoren, b , består af agenternes unikke værdier, som lægges til en koalition for de agenter, som koalitionen består af. En fordelingsregel der fordeler ϕ i ét spil, og som fordeler det samme i et andet med, på baggrund af det første spil, ændrede værdier, som vist i definition 3.8.1, har karakteristikken kovarians under strategisk ækvivalens.

Definition 3.8.2

En fordelingsregel, ϕ , har karakteristikkene, **kovarians under strategisk ækvivalens**, hvis der for hvert spil (N, u) og hver agent $i \in N$ gælder, at

$$\phi_i(N, au + b) = a\phi_i(N, u) + b_i$$

hvor $a > 0$ og $b \in \mathbb{R}^N$.

Nul-agenten

En nul-agent, eller dummy, er en agent, som hverken bidrager positivt eller negativt til de koalitioner, som agenten er en del af.

Definition 3.9.1

I et spil, (N, u) , kaldes en agent, i , for en **nul-agent**, hvis der for alle $S \subseteq N$ og $i \notin S$ gælder, at

$$u(S) = u(S \cup \{i\})$$

En fordelingsregel siges at opfylde nul-agent egenskaben, hvis den, i alle spil, ikke tildeler noget til nul-agenter.

Definition 3.9.2

En fordelingsregel, ϕ , opfylder **nul-agent egenskaben**, hvis der for hvert spil, (N, u) , og hver nul-agent, i , gælder, at

$$\phi(N, u) = 0$$

Denne egenskab kan forekomme rimelig, når der generelt fokuseres på betydningen af agents marginale bidrag, men da den er så simpelt defineret, skal man passe på med ikke at lægge for meget i den. En agent kan, i et spil, slippe af sted med ikke at bidrage til nogen koalition på nær én, som han oven i købet kan nøjes med at bidrage meget lidt til; denne agent er altså ikke en nul-agent og kan derfor i princippet tildeles guld og grønne skove.

Det giver altså mening, at når denne, og andre egenskaber som ligeledes er relativt simple, skal testes på fordelingsregler, kan det være eksponentielt mere relevant at gøre det i forbindelse med andre krav end at gøre det isoleret.

Additivitet

Når en fordelingsregel har egenskaben, additivitet, betyder det, at dens tildeling til hver agent i hvert par af spil med samme antal agenter er lig dens tildeling til spillet bestående af samme antal agenter og med hver koalitions værdi bestående af summen af de tilsvarende koalitions værdier fra de to spil.

Definition 3.10.1

En fordelingsregel, ϕ , er **additiv**, hvis der for hvert par af spil, (N, w) og (N, u) , gælder, at

$$\phi(N, w + u) = \phi(N, w) + \phi(N, u)$$

Denne definition virker rimelig, hvis de to spil, (N, w) og (N, u) , er uafhængige og måles med samme måleenhed, men er de afhængige og/eller måles de forskelligt, giver den knap så meget mening. Et eksempel kunne være, hvis (N, w) og (N, u) netop er afhængige, som ved kovarians under strategisk ækvivalens, som kunne afspejle, at w og u er to valutakurser.

Betrages fordelingsreglen, ϕ , som hvad agenterne forventer at få tildelt, så vil det være forståeligt, hvis en agent vil afstå en enhed af w for en enhed af u , hvis måleenheden af u er af højere værdi end den af w . Dette var bare et blandt flere eksempler på, at egenskaben, additivitet for fordelingsregler, kræver forbehold, hvis den skal tages i brug. Da additivitet ellers er en vigtig brik, når der skal karakteriseres fordelingsregler, har det derfor været nødvendigt at finde alternative egenskaber, som kunne erstatte additivitet, hvilket bringer næste egenskab på bane.

Marginalitet

Marginalitet er delt op i en svag og en stærk definition, da det kan være nødvendigt at skelne mellem disse, når fordelingsreglerne skal karakteriseres. Den svage definition, som kaldes monotoni af marginale bidrag, præsenteres først og den kræver, at hvis en agent i to spil med samme antal agenter ikke bidrager mindre til alle de koalitioner, som agenten indgår i, i det første spil i forhold

til de samme koalitioner i det andet, så skal agenten heller ikke tildeles mindre i det første spil i forhold til det andet. Konkret er det altså, at

Definition 3.11.1

En fordelingsregel, ϕ , opfylder **monotoni af marginale bidrag**, hvis der for hvert par af spil, (N, w) og (N, u) og for hver agent, $i \in N$, gælder, at hvis

$$w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq u(S \cup \{i\}) - u(S) \quad \forall S \subseteq N, \text{ så}$$

$$\phi_i(N, w) \geq \phi_i(N, u)$$

Den stærke definition, som kaldes marginalitet, er meget lig definition 3.12.1 men har lighedstegn i stedet for ulighedstegn, da den kræver, at hvis en agent i to spil med samme antal agenter bidrager med lige meget til alle de koalitioner, som agenten indgår i, i det første i forhold til de samme koalitioner i det andet, så skal agenten også tildeles lige meget i begge spil.

Definition 3.11.2

En fordelingsregel, ϕ , opfylder **marginalitet**, hvis der for hvert par af spil, (N, w) og (N, u) og for hver agent, $i \in N$, gælder, at hvis

$$w(S \cup \{i\}) - w(S) = u(S \cup \{i\}) - u(S) \quad \forall S \subseteq N, \text{ så}$$

$$\phi_i(N, w) = \phi_i(N, u)$$

Det fremgår altså, at hvis en fordelingsregel opfylder monotoni af marginale bidrag, vil den også opfylde marginalitet, hvor marginalitet betyder, at en agents tildeling udelukkende afhænger af agentens marginale bidrag, som igen er uafhængige af andre agents marginale bidrag.

Konsistens i reducerede spil

Hvis en fordelingsregel tildeler det samme til alle de agenter, et reduceret spil består af, som de fik tildelt, før spillet blev reduceret, er fordelingsreglen konsistent i reducerede spil og opfylder derfor denne egenskab. I definitionerne 2.16.1 til 2.17.2 er de Davis-Maschler-reducerede og Hart-Mas-Colell spil noteret, som hhv. (T, c_T^ϕ) og $(T, v_T^{\hat{\phi}})$ for hhv. omkostningsspil og overskudsspil, og som er reducerede fra spillene, (N, c) og (N, v) ; heraf kan følgende defineres.

Definition 3.12.1

For et omkostningsspil, (N, c) , og et reduceret spil, (T, c_T^ϕ) , hvor $T \subset N$, er en omkostningsregel, $\phi(N, c) = x$, **konsistent**, hvis der for $i \in T$ gælder, at

$$x_i = \phi_i(T, c_T^\phi)$$

Definition 3.12.2

For et overskudsspil, (N, v) , og et reduceret spil, $(T, v_T^{\hat{\phi}})$, hvor $T \subset N$, er en overskudsregel, $\hat{\phi}(N, v) = y$, **konsistent**, hvis der for $i \in T$ gælder, at

$$y_i = \hat{\phi}_i(T, v_T^{\hat{\phi}})$$

Kapitel 6 - Monotoniforhold

Muligheden for at ændringer i et spil kan forekomme giver anledning til at tildele egenskaber til fordelingsreglerne, alt efter hvordan fordelingsreglerne vil fordele efter disse ændringer er indført. Egenskaberne skal forklare i hvilken grad en fordelingsregel vil give koalitioner incitament til at blokere for eventuelle positive ændringer i spillet; dette leder til forudsætningen af, at der kun diskuteres positive ændringer af spillet – alle koalitioner vil modarbejde en negativ ændring af spillet. Egenskaberne, eller monotoni-forholdene, kan opdeles ud fra hvilken type ændring, spillet udsættes for, og den første type, der her fokuseres på, er ændringen af værdien af en koalition.

Koalitionsmonotoni

Skulle der eksempelvis ske en reducere af værdierne af et antal koalitioner i et omkostningsspil, vil det være nærliggende at mene, at den nye fordeling i hvert fald ikke tildeler de agenter, der er en del af alle de koalitioner, der fik reduceret værdien, endnu mere end før, da det netop var disse koalitioner, som opnåede en besparelse.

Definition 3.13.1

En fordelingsregel af et omkostningsspil, (N, c) , er **koalitionsmonotont**, hvis der for ændringen $c(S) \geq \hat{c}(S)$ og $c(T) = \hat{c}(T)$, $\forall S: i \in S$ for alle $i \in N$, gælder at $\phi_i(N, c) \geq \phi_i(N, \hat{c})$.

Definition 3.13.2

En fordelingsregel af et overskudsspil, (N, v) , er **koalitionsmonotont**, hvis der for ændringen $v(S) \leq \hat{v}(S)$ og $v(T) = \hat{v}(T)$, $\forall S: i \in S$ for alle $i \in N$, gælder at $\phi_i(N, v) \leq \phi_i(N, \hat{v})$.

Det er vigtigt at huske på, at definitionen for koalitionsmonotoni kun omhandler de agenter, som er en del af alle de koalitioner, som fik reduceret koalitionen værdi; de agenter, som kun er en del af nogle koalitioner med en reduceret værdi, er ikke en del af denne definition. Når man tager dette med i betragtning, har koalitionsmonotoni altså mindre indflydelse jo flere koalitioner, der opnår en reducere, da færre agenter vil kunne være en del af alle de pågældende koalitioner. Skulle der eksempelvis forekomme en reducere i alle koalitionerne med et bestemt antal agenter, eller i mere

end halvdelen plus én af alle koalitionerne i et spil, da vil koalitionsmonotoni blive uaktuel, da ingen agent kan indgå i så mange koalitioner.

Det kan bevises, at selvom koalitionsmonotoni lader til at være et rimeligt krav, er der ingen fordelingsregel, der både kan opfylde stand-alone princippet og samtidig være koalitionsmonotont, når spillet er balanceret, og når spillet har mere end tre agenter.

S-monotoni

S-monotoni er en del af koalitionsmonotoni, da denne definition kun omhandler den enkelte koalition, S ; deraf navnet. Da der er tale om en enkelt koalition, og der, som før, fokuseres på alle de agenter, som er en del af alle de koalitioner, som opnåede en reducere af koalitionerens værdi, omhandler denne definition alle agenterne i koalition S .

Definition 3.2.1

En fordelingsregel af et omkostningsspil, (N, c) , er **S-monotont**, hvis der for ændringen $c(S) \geq \hat{c}(S)$ og $c(T) = \hat{c}(T)$, $\forall S \neq T$, gælder, at $\phi_i(N, c) \geq \phi_i(N, \hat{c})$.

Definition 3.2.2

En fordelingsregel af et overskudsspil, (N, v) , er **S-monotont**, hvis der for ændringen $v(S) \leq \hat{v}(S)$ og $v(T) = \hat{v}(T)$, $\forall S \neq T$, gælder, at $\phi_i(N, v) \leq \phi_i(N, \hat{v})$.

Da S-monotoni er en del af koalitionsmonotoni, gælder det også her, at ingen fordelingsregel, der opnår en fordeling i kernen i klassen af balancerede spil, kan være S-monotont.

Svag S-monotoni

I stedet for et krav til tildelingen til hver enkelt agent i koalition S , som S-monotoni har, kan kravet gøres svagere ved kun at stille krav til den samlede tildeling af agenterne i koalition S .

Definition 3.3.1

En fordelingsregel af et omkostningsspil, (N, c) , er **svagt S-monotont**, hvis der for ændringen $c(S) \geq \hat{c}(S)$ og $c(T) = \hat{c}(T)$, $\forall S \neq T$, gælder, at $\sum_{i \in S} \phi_i(N, c) \geq \sum_{i \in S} \phi_i(N, \hat{c})$.

Definition 3.3.2

En fordelingsregel af et overskudsspil, (N, v) , er **svagt S-monotont**, hvis der for ændringen $v(S) \leq \hat{v}(S)$ og $v(T) = \hat{v}(T)$, $\forall S \neq T$, gælder, at $\sum_{i \in S} \phi_i(N, v) \leq \sum_{i \in S} \phi_i(N, \hat{v})$.

Dvs. skulle en koalition opnå en reducere af koalitionen værdi, vil den efterfølgende fordeling ikke resultere i en samlet større tildeling til agenterne, som koalitionen består af, hvis fordelingsreglen opfylder svagt S-monotoni. Nogle agenter i den pågældende koalition kan altså gå hen og få tildelt mere end før ændringen, således at andre kan få tildelt en mindre omkostning, hvilket, i den virkelige verden, nok er meget at forlange af en person.

N-monotoni

Der kan udvikles endnu mere på S-monotoni ved at lade svagt S-monotoni kun omhandle storkoalitionen, og kalde dette for N-monotoni.

Definition 3.4.1

En fordelingsregel af et omkostningsspil, (N, c) , er **N-monotont**, hvis der for ændringen $c(N) \geq \hat{c}(N)$ og $c(T) = \hat{c}(T)$, $T \subset N$, gælder, at $\sum_{i \in N} \phi_i(N, c) \geq \sum_{i \in N} \phi_i(N, \hat{c})$.

Definition 3.4.2

En fordelingsregel af et overskudsspil, (N, v) , er **N-monotont**, hvis der for ændringen $v(N) \leq \hat{v}(N)$ og $v(T) = \hat{v}(T)$, $T \subset N$, gælder, at $\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) \leq \sum_{i \in N} \phi_i(N, \hat{v})$.

I sagens natur må ingen agenter stilles dårligere efter en ændring af værdien af storkoalitionen. Selvom det er en simpel ændring fra svagt S-monotont til N-monotont er der grundlæggende forskelle. Ved svagt S-monotoni kan agenterne i den pågældende koalition stille krav til fordelingen selvom deres egenomkostninger og kernen af spillet ikke er ændret.

Ændringen, som er aktuel ved N-monotoni, ændrer kernen af spillet, så her er det mere naturligt at forvente en ændring af agenternes krav. Dette betyder, at fordelingsregler igen kan have svært ved at opfylde dette krav.

Populationsmonotoni

Hvor de foregående definitioner af monotoniforhold drejede sig om ændringer af koalitions værdier, fokuserer populationsmonotoni på ændringen af antallet af agenter i spillet. I de foregående definitioner af monotoniforhold ville en forøgelse af en koalitions omkostning intuitivt ikke være godt for nogen overhovedet, men en forøgelse og en reducere af antallet af agenter i et spil, kan begge, realistisk set, være positive og begge kan være negative ændringer i forhold til agenterne. I et omkostningsspil kan en forøgelse ses som at samarbejdet forstærkes, hvis omkostningerne ikke stiger i samme grad. Omvendt kan en reducere være en optimering af nyttige agenter, da kun agenter med høje marginalbidrag bliver sendt ud af spillet, så selvom der efter ændringen er færre at fordele omkostningerne på, er de samlede omkostninger faldet drastisk, hvorved alle resterende agenter kan drage nytte af ændringen.

Populationsmonotoni fokuserer dog ikke på tilfældet, hvor reducere af antallet af agenter kan lede til, at mindst én agent vil stå bedre stillet.

Definition 3.5.1

En fordelingsregel af et omkostningsspil, (N, c) , er **populationsmonotont**, hvis der for ændringen, $N \subset \hat{N}$, gælder, at $\phi_i(N, c) \geq \phi_i(\hat{N}, \hat{c})$, og der for $S \subseteq N$ gælder, at $c(S) = \hat{c}(S)$.

Definition 3.5.2

En fordelingsregel af et overskudsspil, (N, v) , er **populationsmonotont**, hvis der for ændringen, $N \subset \hat{N}$, gælder, at $\phi_i(N, v) \leq \phi_i(\hat{N}, \hat{v})$, og der for $S \subseteq N$ gælder, at $v(S) = \hat{v}(S)$.

Agenter i et spil har altså intet incitament mod at føje agenter til samarbejdet, hvis fordelingsreglen er populationsmonoton. Intuitionen bag populationsmonotoni kan deles op i hvem der egentlig udsættes for et krav; en forøgelse af antallet af agenter i et omkostningsspil giver indtrykket at populationsmonotoni er et krav til fordelingsreglen om ikke at tildele mere til agenterne, der hele tiden har været i spillet.

Når det kommer til en reducere af antallet af agenter i et omkostningsspil, hvor fordelingsreglen er populationsmonoton, er kravet, at hver af de resterende agenter ikke kan tildeles mindre end før,

hvilket giver indtrykket af, at det er et krav til agenternes niveau af forståelse af, hvad der er fair. Dette må siges at være et rimeligt, og ofte aktuelt krav, til ansatte, hvor et mål for optimering er blevet sat for overlevelsen af en virksomhed.

Scenariet kunne være, at en virksomhed med sikkerhed ikke kan fortsætte med det aktuelle antal ansatte i virksomheden; alternativet er at fyre nogle ansatte, hvorved de resterende ansatte må arbejde hårdere. Det værste tilfælde er, at arbejdet bliver for hårdt for de resterende ansatte, som måske, af denne årsag, siger op, hvilket dog ikke vil stille dem dårligere, end hvis virksomheden ingen fyrede og derved måtte lukke; heraf kan man argumentere, at populationsmonotoni, opfattet som krav til agenterne, er et rimeligt og fair krav.

Afsnit 4

Kapitel 7 - Karakterisering af fordelingsreglerne

For bedre at kunne sammenligne konkrete fordelingsregler kan det være en fordel at karakterisere dem først. Skulle man stå med et reelt allokeringssproblem og ikke vide hvilken fordelingsregel eller algoritme, man burde bruge, kan karakteristika af fordelingsreglerne hjælpe.

I stedet for at spørge om hvilken fordelingsregel, der skal bruges, kan man nemlig spørge: "Hvad skal fordelingsreglen overholde?", "I hvilke situationer skal den overholde det?", "Hvis allokeringssproblemet ændrer sig, hvad så?" for på den måde at spore sig ind på den rette fordelingsregel i den givne situation.

Nogle af de egenskaber som fordelingsregler kan besidde, og nogle af de klasser af spil, som er blevet redegjort for tidligere i denne afhandling, vil blive afprøvet og testet på Shapley-værdien og den alternative fordelingsregel i dette kapitel.

Shapley-værdien

Som det blev vist i sidste afsnit ligger Shapley-værdien ikke altid i kernen, hvilket måske også er meget at forlange af en fordelingsregel, der fordeler ud fra marginalbidragene. Det kan dog diskuteres at skulle en fordelingsregel fordele på en "dybere" rationel baggrund, giver det mening også at kunne forlange mere af spillets opbygning, hvis fordelingsreglen skal opfylde visse egenskaber.

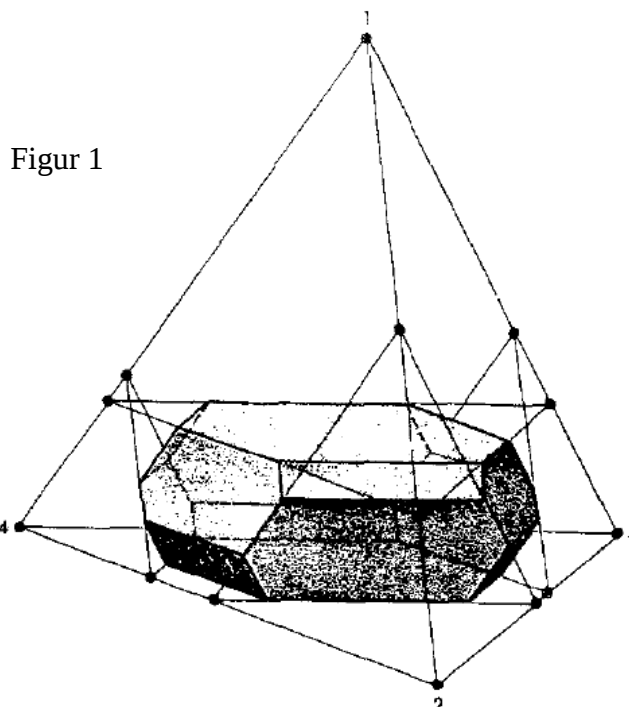
Det vil eksempelvis først blive bevist, at Shapley-værdien altid vil ligge i kernen, men kun i klassen af konkave og konvekse spil. Også egenskaber, der ikke vedrører specifikke klasser af spil, er med til at karakterisere Shapley-værdien, da opfyldelsen af fire konkrete egenskaber skal vise sig at være unikt for Shapley-værdien.

Konkave og konvekse spil

Teorem 4.1

Er et spil konkavt eller konvekst, ligger Shapley-værdien med i kernen.

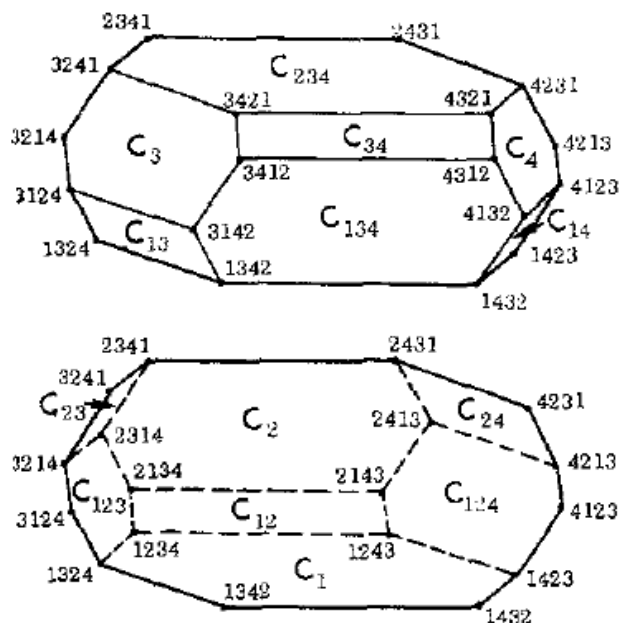
Bevis: Tilgangen til beviset er at betragte kernen, som et polyeder; denne kan tegnes i et simplex tableau, som vist i figur 1 med et spil med $n = 4$ agenter. Tegningen er taget fra Shapley 1971: International Journal of Game Theory, December 1971, Volume 1, Issue 1, pp 11-26.



Figur 2 viser kernen, et polyeder med dimension $n - 1$, forfra og bagfra. Fladerne er randbetingelserne, som betegnes C , hvor eksempelvis C_3 er Stand-Alone princippet for agent 3, og den modsatte flade, med samme hældning, er C_{124} , som enten kan betragtes som Stand-Alone princippet for koalitionen bestående af agent 1, 2 og 4 eller dette trukket fra værdien af storkoalitionen, hvilket giver marginalbidraget af agent 3 til storkoalitionen.

Figur 2

Hvert Stand-Alone princip er altså en flade, hvor kernen udgør en delmængde af alle disse flader, H_N , hvor det defineres, at $C_S = C \cap H_S$ for $\emptyset \subset S \subseteq N$, og $C_N = C$. Det er af nødvendighed, at der også defineres, at $C_\emptyset = C$.



Definition 4.1.1

Hvis ingen C_S , for et givet spil, er tomme, er sammensætningen af fladerne, C_S , **komplet**.

Definition 4.1.2

Hvis alle C_S , for et givet spil, er af de højest mulige antal dimensioner, er sammensætningen af fladerne, C_S , **strengt komplet**, hvor et strengt komplet C_S har $2^n - 2$ flader af dimension $n - 2$.

Fladerne, som en kerne består af kan sammensættes på mange forskellige måder og stadig udgøre den specifikke kerne. Fladerne behøver altså ikke at være sammensat som vist i figur 2 og som forklaringen af figur 2 hentyder, det er dog denne sammensætning af flader, som vil den mest oplagte at bruge.

Definition 4.1.3

Hvis hvilke som helst to flader skærer hinanden i et givet spil, sådan at $C_S \cap C_T \neq \emptyset$, som kun er tilfældet hvis og kun hvis $S \subseteq T$ eller $T \subseteq S$, så er sammensætningen af

fladerne, C_S **strengt regulær**. At en sammensætning af flader er strengt regulær forudsætter, at sammensætningen er komplet.

Et mildere krav til C_S er dog nok til dette bevis.

Definition 4.1.4

Hvis $C_N \neq \emptyset$ og hvis $C_S \cap C_T \subseteq C_{S \cup T} \cap C_{S \cap T}$ for alle $S, T \subseteq N$, så er sammensætningen af fladerne, C_S **regulær**.

Forskellen mellem definition 4.1.3 og definition 4.1.4 er, at hvor definition 4.1.3 stiller krav til flader ud fra hvilke flader de støder op til, så er definition 4.1.4 langt mere generel, da denne definition frembringer, at en skæring mellem to flader enten er en delmængde af sig selv, eller at forbindelsen mellem to flader, der ikke skærer hinanden, foregår gennem selve kernen; heraf nødvendigheden for definitionen $C_\emptyset = C$.

Notationen fra definition 3.1.3 bruges, så Ω er sættet af alle $n!$ ordninger af N , P_i^Ω er koalitionerne i Ω , der kommer før i , og $a(P_i^\Omega)$ er værdien af koalitionen P_i^Ω .

Teorem 4.2

Hjørnerne af en kerne, med en regulær sammensætning af fladerne, er punkterne $a(P_i^\Omega \cup i) - a(P_i^\Omega)$, hvor det kan være tilfældet, at nogle punkter er lig hinanden.

Teorem 4.3

Et spil er konvekst eller konkavt, hvis og kun hvis kernen har en regulær sammensætning af fladerne.

Teorem 4.2 og 4.3 beviser, at Shapley-værdien, $\varphi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\Omega} a(P_i^\Omega \cup i) - a(P_i^\Omega)$ ligger i kernen i et konvekst eller konkavt spil; teoremerne i sig selv vil dog ikke blive bevist.

Effektivitet

Ifølge definition 3.6.2 vil en fordelingsregel, der opfylder effektivitet i et overskudsspil, intet lade gå til spilde, dvs. $\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) = v(N)$.

Teorem 4.4

Shapley-værdien opfylder effektivitet.

Bevis: Shapley-værdien fordeler i et overskudsspil, (N, v) , som følgende

$$y_i^{sh} = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i))$$

Dvs. hvert marginalbidrag, $(v(S) - v(S \setminus i))$, opdeles i brøkerne $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$. Marginalbidragene kan betragtes som intervaller, som alle ligger i intervallet $[0; v(N)]$, som vist ved den alternative fordelingsregel i forrige afsnit. Hvis der nu fokuseres på det mindste marginalbidrag til den tomme mængde, vil dette interval også ligge i de øvrige agents marginalbidrag til den tomme mængde, dvs. for hver af de n agenter er der ét enkelt interval. Da dette interval udelukkende er af koalitioner af størrelsen 1 fås følgende

$$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \rightarrow \frac{(1-1)!(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

Da intervallet opdeles i $\frac{1}{n}$ dele og allokeres til n agenter vil dette interval altså altid være fordelt 100 % eller være fordelt "effektivt", om man vil.

Hvor et eller flere marginalbidrag, som jo kan betragtes som intervaller, ender, vil et eller flere nye marginalbidrag fortsætte og på denne måde vil alle disjunkte intervaller i intervallet $[0; v(N)]$, opdeles forskelligt.

For at bevise at Shapley-værdien er effektiv vil jeg vise, at udviklingen af et intervals opdeling, er den inverse udvikling af antallet af koalitioner, som skal have tildelt disse brøkdele af intervallet; er dette tilfældet vil den effektive fordeling af det mindste marginale bidrag til den tomme mængde fortsætte, hvorved alle disjunkte intervaller i

$[0; v(N)]$ vil blive fordelt effektivt, hvilket svarer til at $v(N)$ er blevet fordelt effektivt via Shapley-værdien.

Hvis $s + 1 = t$ er t størrelsen på den næste koalition, hvor tankegangen, at starte med koalitionen bestående af én agent og slutte med storkoalitionen, fortsætter. Udviklingen kan udtrykkes via u , så

$$\begin{aligned}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} &= u \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \Leftrightarrow \\ (s+1-1)!(n-s-1)! &= u(s-1)!(n-s)! \Leftrightarrow \\ u &= \frac{(s)!(n-s-1)!}{(s-1)!(n-s)!} = \frac{s(n-s-1)!}{(n-s)!} \Leftrightarrow \\ u &= \frac{s(n-s-1)!}{(n-s)(n-s-1)!} = \frac{s}{n-s}\end{aligned}$$

Når en agents eller koalitions marginalbidrag ender, ændres den del af fordelingen af det efterfølgende interval, som agenten eller koalitionen stod for, altså med $\frac{s}{n-s}$. Desuden sker der en ændring i antallet af koalitioner, som har et marginalbidrag i det efterfølgende interval. Da der nu skal fokuseres på koalitioner med marginalbidrag til en bestemt agent, er det antallet af koalitioner uden denne agent, som der ændres på, dvs. antallet af koalitioner, som $n-1$ kan danne. Dette bliver så

$$\frac{(n-1)!}{s!(n-1-s)!}$$

Da der er tale om koalitioner, hvorpå der bidrages med marginalbidrag er det udviklingen fra størrelsen $s-1$ til s , som skal findes. Udviklingen, som udtrykkes via w , hvor $-1 = t$, er givet ved

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{s!(n-1-s)!} &= w \frac{(n-1)!}{t!(n-1-t)!} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{s!(n-1-s)!} &= w \frac{1}{(s-1)!(n-1-s+1)!} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$w = \frac{(s-1)!(n-s)!}{s!(n-1-s)!} = \frac{(s-1)!(n-s)}{s(s-1)!} \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{n-s}{s}$$

Da $\frac{1}{w} = u$ er det bevist, at da hvert interval i $[0; v(N)]$ bliver fordelt 100 % til agenterne af Shapley-værdien, opfylder Shapley-værdien effektivitet.

Marginalitet

For denne egenskab fokuseres der på definition 3.1.3, hvor Shapley-værdien, er defineret ved

$$\varphi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\Omega} a(P_i^{\Omega} \cup i) - a(P_i^{\Omega})$$

Teorem 4.5

Shapley-værdien opfylder monotoni af marginale bidrag og marginalitet.

Bevis: Fra definition 3.1.3 ses det, at Shapley-værdien for agent i er gennemsnittet af summen af marginalbidragene til alle mulige koalitioner. Hvis samtlige marginalbidrag i ét spil er højere end de tilsvarende marginale bidrag i et lignende spil, som defineret for monotoni af marginale bidrag i definition 3.11.1, så må gennemsnittet af marginalbidragene også være højere. Det er derfor indlysende, at da gennemsnittet af marginalbidragene netop er Shapley-værdien, vil den opfylde monotoni af marginale bidrag og marginalitet, som et direkte resultat af definitionerne.

Unik

Shapley-værdien er en unik fordelingsregel forstået på den måde, at ingen anden fordelingsregel både kan opfylde effektivitet, symmetri, nul-agent egenskaben og additivitet for alle spil. Yderligere kan nul-agent egenskaben og additivitet samlet erstattes af marginalitet, hvorved Shapley-værdien også kan karakteriseres med at være unik på en anden måde, da ingen anden fordelingsregel både kan opfylde effektivitet, symmetri og marginalitet; her fokuseres der dog kun på den førstnævnte måde at være unik på.

Teorem 4.6

Shapley-værdien er den eneste fordelingsregel med en entydig løsning, der opfylder egenskaberne effektivitet, symmetri, nul-agent egenskaben og additivitet.

Bevis: Først defineres et spil, $(N, u_T(S))$ til at have følgende værdier,

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } T \subseteq S \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $T, S \subseteq N$, og hvor $T \neq \emptyset$. I dette spil siges S at være en vinder-koalition, hvis $T \subseteq S$. Under generelle definitioner i afsnit 2 blev det konstateret, at et spil har $2^n - 1$ koalitioner, så det må betyde, at dette spils værdisæt, $u_{T,\alpha}(S)$, kan skrives på $2^n - 1$ forskellige måder, hvor disse værdisæt kan betragtes som vektorer med $2^n - 1$ dimensioner. Hvis disse vektorer er uafhængige, må det betyde, at ethvert spil, (N, c) eller (N, v) , må være en linearkombination af $(N, u_T(S))$, som kan være af stor hjælp, som det efterfølgende skal vise sig.

Lad $(\alpha_T)_{T \subseteq N, T \neq \emptyset}$ være reelle tal, som ikke alle er lig nul, og lad $\mathcal{T} = \{T \subseteq N, T \neq \emptyset, \alpha_T \neq 0\}$ være sættet af koalitionerne, T , vis værdisæt multipliceres med den tilhørende koefficient α_T , hvor en koalition $S_0 \in \mathcal{T}$ defineres som værende en koalition med færrest antal agenter blandt alle koalitionerne i $\mathcal{T}$.

Med S_0 defineret kan N deles op i tre mindre mængder: $T \subset S_0$, $T = S_0$ og $T \not\subseteq S_0$, og derfor kan en linearkombination af $(N, u_T(S_0))$ med de tilhørende koefficienter skrives som

$$\sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T u_T(S_0) = \sum_{T \subset S_0, T \neq \emptyset} \alpha_T u_T(S_0) + \alpha_{S_0} u_{S_0}(S_0) + \sum_{T \not\subseteq S_0} \alpha_T u_T(S_0)$$

For det første led på højre side af lighedstegnet ses det, at der summeres over mængden, $T \subset S_0$, men da der netop ikke findes koalitioner med færre agenter end S_0 , som samtidig har $\alpha_T \neq 0$, så må dette led være lig nul.

Det tredje led er for mængden, $T \not\subseteq S_0$, og fra definitionen af spillet, $(N, u_T(S))$, hvor $S = S_0$, ses det at også dette led må være lig nul.

Fra spillets definition er $u_{S_0}(S_0) = 1$, så tilbage er der

$$\sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T u_T(S_0) = \alpha_{S_0}$$

Da $S_0 \in \mathcal{T}$, må $\alpha_{S_0} \neq 0$. Dette må altså betyde, at ingen linearkombination, $\sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T u_T(S_0)$, kan sættes lig nul, hvilket kun kunne være tilfældet, hvis linearkombinationen var lineær afhængig; heraf kan vi konkludere, at da $\sum_{T \subseteq N, T \neq \emptyset} \alpha_T u_T(S_0)$ er lineær uafhængig med lige så mange dimensioner som ethvert spil, (N, c) eller (N, v) , må disse kunne skrives som linearkombinationer af spillet, $(N, u_T(S))$.

Koefficienterne, α_T , kan implementeres direkte i spillet ved at definere det som

$$u_{T,\alpha}(S) = \begin{cases} \alpha & \text{hvis } T \subseteq S \\ 0 & \text{ellers} \end{cases},$$

hvilket ikke vil ændre noget.

Pointen med dette spil kommer af at definere en ligeledes simpel fordelingsregel

$$\phi_i^{esna}(N, u_{T,\alpha}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t} & \text{hvis } i \in T \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $|T| = t$. Det ses, at ϕ^{esna} må være effektiv, da det altid vil være tilfældet, at $u_{T,\alpha}(N) = \alpha$ og $\phi^{esna} = \sum_{i \in T} \phi_i^{esna}(N, u_{T,\alpha}) = \sum_{i \in T} \frac{\alpha}{t} = \alpha$.

Da alle koalitioner, $S \subseteq N$, i $(N, u_{T,\alpha})$ kan deles op, som tidligere vist, ses det, at disse må være symmetriske, da der for $T \subset S$ gælder, at $u_{T,\alpha}(S) = \alpha$ og for $T \not\subset S$ gælder, at $u_{T,\alpha}(S) = 0$. Da agenterne i $S \setminus T$, for $T \subset S$, alle bliver tildelt nul, og alle agenterne i S , for $T \not\subset S$, også bliver tildelt nul, må ϕ^{esna} være symmetrisk.

Det må samtidig gælde, at da alle agenterne i $S \setminus T$, for $T \subset S$, og i S , for $T \not\subset S$, har marginalbidrag lig nul, og de samtidig intet bliver tildelt, som det netop er blevet konstateret, så opfylder ϕ^{esna} også nul-agent egenskaben.

Trivielt opfylder ϕ^{esna} også additivitet, og da alle spil er linearkombinationer af $(N, u_{T,\alpha})$, må disse egenskaber også holde for alle spil og altså ikke kun en speciel klasse af spil. ϕ^{esna} er altså defineret omvendt forstået på den måde, at ϕ^{esna} er defineret til at have disse egenskaber ud fra $(N, u_{T,\alpha})$. En fordelingsregel med disse egenskaber vil derfor fordele udelukkende som ϕ^{esna} , og da det er bevist, at Shapley-værdien opfylder disse egenskaber, må ϕ^{esna} og Shapley-værdien være identiske. Dette må betyde, at alle fordelingsregler, som opfylder effektivitet, symmetri, nul-agent egenskaben og additivitet, er identisk med Shapley-værdien, hvilket reelt gør den unik.

Den alternative fordelingsregel

Da min idé til den alternative fordelingsregel udsprang af min kritik af Shapley-værdien, finder jeg det mest relevant at teste de fire egenskaber, som ovenover er bevist til at gøre Shapley-værdien unik. Ergo vil der i det følgende blive testet for, om den alternative fordelingsregel er effektiv og symmetrisk, og om den opfylder nul-agent egenskaben og additivitet.

Effektivitet

Teorem 4.7

Den alternative fordelingsregel opfylder effektivitet.

Bevis: Det fremgår trivielt direkte fra definitionen af den alternative fordelingsregel, definition 3.5.1 og 3.5.2, at teorem 4.7 er sand, da hver agent $i \in N$ i eksempelvis et overskudsspil bliver tildelt

$$y_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k}$$

Da

$$\sum_{i \in N} \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k} = 1$$

så må

$$\sum_{i \in N} y_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot 1$$

og da $[v_k, v_{k+1}]$ er disjunkte intervaller, som udgør hele intervallet $[0, v(N)]$, så

$$\sum_{i \in N} y_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) = v(N)$$

hvilket beviser teorem 4.4.

Symmetri

Teorem 4.5

Den alternative fordelingsregel opfylder symmetri.

Bevis: Hvis den alternative fordelingsregel opfylder symmetri, må der, i tilfældet af et overskudsspil, gælde, at

$$y_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{b_l^k}{\sum_{j \in N} b_j^k} = y_l^{Alt}$$

Den eneste forskel på højre og venstre side af den midterste ligning er b_l^k og b_i^k , som er antallene af marginalbidragene for agent l og i . Da marginalbidragene er ens for to symmetriske agenter, $b_l^k = b_i^k$, er det derved bevist, at den alternative fordelingsregel opfylder symmetri.

Nul-agent egenskaben

Teorem 4.6

Den alternative fordelingsregel opfylder nul-agent egenskaben.

Bevis: Da b_i^k , som er antallene af marginalbidrag, hvori intervallet, $[v_k, v_{k+1}]$ for agent i , indgår i , må være lig nul for alle nul-agenter, må der for alle nul-agenter gælde, at

$$y_i^{Alt} = \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{b_i^k}{\sum_{j \in N} b_j^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{m-1} (v_k - v_{k+1}) \cdot \frac{0}{\sum_{j \in N} b_j^k} \\ = y_i^{Alt} = 0$$

som beviser teorem 4.6.

Additivitet

Om den alternative fordelingsregel er additiv vil blive undersøgt via et eksempel, hvor to spil bliver lagt sammen.

Eksempel 4.1

Det første spil, (N, w) , er defineret ved

$$N = \{1, 2, 3\} \quad w(1) = 0 \quad w(2) = 2 \quad w(3) = 1$$

$$w(1, 2) = 3 \quad w(1, 3) = 1 \quad w(2, 3) = 4 \quad w(1, 2, 3) = 5$$

hvor det følgende viser, hvordan den alternative fordelingsregel vil fordele (N, w) .

Interval	Antal søjler	Overskud	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
5-4	3	1	$\frac{1}{3}$	$1 \times \frac{1}{3} \times 1$	$1 \times \frac{1}{3} \times 1$	$1 \times \frac{1}{3} \times 1$
4-3	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
3-2	5	1	$\frac{1}{5}$	$1 \times \frac{1}{5} \times 1$	$1 \times \frac{1}{5} \times 3$	$1 \times \frac{1}{5} \times 1$
2-1	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 4$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$
1-0	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
				$\frac{16}{30}$	$\frac{88}{30}$	$\frac{46}{30}$

Det andet spil, (N, u) , er defineret ved

$$N = \{1, 2, 3\} \quad u(1) = u(2) = u(3) = 2$$

$$u(1, 2) = u(1, 3) = u(2, 3) = 5 \quad u(1, 2, 3) = 8$$

hvor det følgende viser, hvordan den alternative fordelingsregel vil fordele (N, u) .

Interval	Antal søjler	Overskud	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
8-5	3	1	$\frac{1}{3}$	$3 \times \frac{1}{3} \times 1$	$3 \times \frac{1}{3} \times 1$	$3 \times \frac{1}{3} \times 1$
5-2	6	1	$\frac{1}{6}$	$3 \times \frac{1}{6} \times 2$	$3 \times \frac{1}{6} \times 2$	$3 \times \frac{1}{6} \times 2$
2-0	3	1	$\frac{1}{3}$	$2 \times \frac{1}{3} \times 1$	$2 \times \frac{1}{3} \times 1$	$2 \times \frac{1}{3} \times 1$
				$\frac{80}{30}$	$\frac{80}{30}$	$\frac{80}{30}$

Adderes (N, w) og (N, u) , bliver det summerede spil, (N, wu) ,

$$N = \{1, 2, 3\} \quad wu(1) = 2 \quad wu(2) = 4 \quad wu(3) = 3 \quad wu(1, 2) = 8 \\ wu(1, 3) = 6 \quad wu(2, 3) = 9 \quad wu(1, 2, 3) = 13$$

hvor det følgende viser, hvordan den alternative fordelingsregel vil fordele (N, wu) .

Interval	Antal søjler	Overskud	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
13-9	3	4	$\frac{1}{3}$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$
9-8	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
8-6	5	2	$\frac{1}{5}$	$2 \times \frac{1}{5} \times 1$	$2 \times \frac{1}{5} \times 3$	$2 \times \frac{1}{5} \times 1$
6-4	6	2	$\frac{1}{6}$	$2 \times \frac{1}{6} \times 1$	$2 \times \frac{1}{6} \times 1$	$2 \times \frac{1}{6} \times 1$
4-3	5	1	$\frac{1}{5}$	$1 \times \frac{1}{5} \times 1$	$1 \times \frac{1}{5} \times 3$	$1 \times \frac{1}{5} \times 1$
3-2	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
2-0	3	2	$\frac{1}{3}$	$2 \times \frac{1}{3} \times 1$	$2 \times \frac{1}{3} \times 1$	$2 \times \frac{1}{3} \times 1$
				$\frac{98}{30}$	$\frac{164}{30}$	$\frac{128}{30}$

Adderes $\phi^{alt}(N, w)$ og $\phi^{alt}(N, u)$ fås hhv. $\frac{16}{30} + \frac{80}{30} = \frac{96}{30}$, $\frac{88}{30} + \frac{80}{30} = \frac{168}{30}$ og

$\frac{46}{30} + \frac{80}{30} = \frac{126}{30}$, hvilket ikke giver $\phi^{alt}(N, wu)$, hvorved det må konstateres, at den alternative fordelingsregel ikke er additiv – for alle spil. At den alternative fordelingsregel ikke er additiv stemmer overens med, at Shapley-værdien er unik, da den alternative fordelingsregel, med egenskaben additivitet, ville have været identisk med Shapley-værdien, hvilket den, ud fra dens definition, tydeligvis ikke er.

Afsnit 5

Kapitel 8 – Afsluttende bemærkninger

Dette afsluttende kapitel omhandler den vel nok mest ukendte faktor i denne afhandling – den alternative fordelingsregel. Det blev konstateret, at den med rette ikke opfyldte de samme egenskaber som Shapley-værdien, men det kunne netop have været næste skridt at udforske den alternative fordelingsregel til bunds, hvad angår de forskellige klasser af spil.

Samtlige egenskaber kunne også testes på den alternative fordelingsregel, for det skal siges, at den egenskab, at være unik, kunne være spændende at forfølge, når man selv er kommet på idéen.

Egenskaben additivitet fandt jeg også interessant, da dette var den eneste af de fire egenskaber, som gør Shapley-værdien unik, som den alternative fordelingsregel ikke kunne opfylde. Dette ledte mig til at tænke over fordelingsreglens definition, som resulterer i, at det mindste marginalbidrag til den tomme mængde altid vil blive fordelt ligeligt blandt agenterne i spillet. For en fordelingsregel som fordeler efter alle marginalbidragene, hvad angår resten af værdien af storkoalition, tænkte jeg at dette kunne være dens Akilleshæl, hvilket der muligvis er råd for.

Jeg opfatter udregningsmetoden af den alternative fordelingsregel som relativ nem, selvom den sikkert vil forekomme besværlig i store spil, men det kunne dog være interessant at se nærmere på mulighederne for fordelingen af værdien af det mindste marginale bidrag til den tomme mængde. At denne mængde bliver fordelt ligeligt er nemlig ikke et definitionskrav – denne mængde kan opfattes som et simpelt allokeringsspil, dvs. et spil hvor spillerne ikke indgår i koalitioner, hvilket kan lede til flere allokeringsregler for denne værdi.

Sagt i forsvar for både den alternative fordelingsregel og for Shapley-værdien vil marginalbidragene til den tomme mængde, alt andet lige, blive relativt mindre og mindre for spil med flere og flere agenter.

Jeg måtte dog tjekke eksempel 4.1 for tilfældet, hvor marginalbidragene til den tomme mængde alle er nul.

Eksempel 5.1

Det første spil, (N, w) , er defineret ved

$$N = \{1, 2, 3\} \quad w(1) = w(2) = w(3) = 0$$

$$w(1, 2) = 3 \quad w(1, 3) = 1 \quad w(2, 3) = 4 \quad w(1, 2, 3) = 5$$

hvor det følgende viser, hvordan den alternative fordelingsregel vil fordele (N, w) .

Interval	Antal søjler	Overskud	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
5-4	3	1	$\frac{1}{3}$	$1 \times \frac{1}{3} \times 1$	$1 \times \frac{1}{3} \times 1$	$1 \times \frac{1}{3} \times 1$
4-3	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
3-1	5	2	$\frac{1}{5}$	$2 \times \frac{1}{5} \times 1$	$2 \times \frac{1}{5} \times 3$	$2 \times \frac{1}{5} \times 1$
1-0	6	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{6} \times 2$	$1 \times \frac{1}{6} \times 2$	$1 \times \frac{1}{6} \times 2$
				$\frac{32}{30}$	$\frac{71}{30}$	$\frac{47}{30}$

Det andet spil, (N, u) , er defineret ved

$$N = \{1, 2, 3\} \quad u(1) = u(2) = u(3) = 0$$

$$u(1, 2) = u(1, 3) = u(2, 3) = 5 \quad u(1, 2, 3) = 8$$

hvor det følgende viser, hvordan den alternative fordelingsregel vil fordele (N, u) .

Interval	Antal søjler	Overskud	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
8-5	3	3	$\frac{1}{3}$	$3 \times \frac{1}{3} \times 1$	$3 \times \frac{1}{3} \times 1$	$3 \times \frac{1}{3} \times 1$
5-0	6	5	$\frac{1}{6}$	$5 \times \frac{1}{6} \times 2$	$5 \times \frac{1}{6} \times 2$	$5 \times \frac{1}{6} \times 2$
				$\frac{80}{30}$	$\frac{80}{30}$	$\frac{80}{30}$

Adderes (N, w) og (N, u) , bliver det summerede spil, (N, wu) ,

$$\begin{aligned} N = \{1, 2, 3\} \quad wu(1) = wu(2) = wu(3) = 0 \quad wu(1, 2) = 8 \\ wu(1, 3) = 6 \quad wu(2, 3) = 9 \quad wu(1, 2, 3) = 13 \end{aligned}$$

hvor det følgende viser, hvordan den alternative fordelingsregel vil fordele (N, wu) .

Interval	Antal søjler	Overskud	Intervalopdeling	{1}	{2}	{3}
13-9	3	4	$\frac{1}{3}$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$	$4 \times \frac{1}{3} \times 1$
9-8	4	1	$\frac{1}{4}$	$1 \times \frac{1}{4} \times 0$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$	$1 \times \frac{1}{4} \times 2$
8-6	5	2	$\frac{1}{5}$	$2 \times \frac{1}{5} \times 1$	$2 \times \frac{1}{5} \times 3$	$2 \times \frac{1}{5} \times 1$
6-0	6	6	$\frac{1}{6}$	$6 \times \frac{1}{6} \times 2$	$6 \times \frac{1}{6} \times 2$	$6 \times \frac{1}{6} \times 2$
				$\frac{112}{30}$	$\frac{151}{30}$	$\frac{127}{30}$

Adderes $\phi^{alt}(N, w)$ og $\phi^{alt}(N, u)$ fås hhv.

$$\frac{32}{30} + \frac{80}{30} = \frac{112}{30}$$

$$\frac{71}{30} + \frac{80}{30} = \frac{151}{30}$$

$$\frac{47}{30} + \frac{80}{30} = \frac{127}{30}$$

hvilket jo passer fint med $\phi^{alt}(N, wu)$. Tilbage er der **bare**, at det skal bevises, at den alternative fordelingsregel er additiv i klassen af spil, hvor alle marginalbidrag til den tomme mængde er lig nul.