

2013

Gold investment

– An analysis of stocks, bonds and gold under non normal market conditions



Forfattere

Mads Østrup Christensen

Jonas Ellegaard

Vejleder

Robert Neumann • Tryghedsgruppen

Antal sider: 120

Anslag: 224.756

Summary

The aim of this thesis is to investigate how well gold can act in diversifying a portfolio consisting of bonds, stocks and gold. The thesis starts off with an investigation of the supply and demand side of gold. Next we investigate how the gold price is influenced by the past and present day gold price and stock price, as measured by the S&P 500, the inflation (CPI) and the interest rate measured by a 3 month t-bill. The test period is from January 1. 1986 till April 1. 2013. Using monthly data. The results show that the gold price today is influenced by the gold price yesterday, and the inflation. The stock price and the T- bill have no effect on the price of gold, meaning that gold is uncorrelated with these.

In the next part of the thesis we investigate in detail the findings of the linear regression. For this period we use daily log returns, and instead of a three month t-bill, we use a one year t-bill, assuming these represent the interest rate equally. The three sub periods cover the years 2000 until 2003, 2004 until 2007 and 2008 until 2011.

We start of by investigating the volatility, showing that a Student-t distributed GARCH (1, 1) model is the best fit for the data. The results show that the bond is the less volatile of the three assets. Comparing gold and S&P 500, gold is the less volatile of the two assets in the period from 2000 until 2003 and from 2008 until 2011. The period with high market growth, stocks has been less volatile then gold, but only slightly. The results indicate, as shown in the linear regression, that gold can prevent some extreme losses under highly volatile market conditions.

Next we simulate a Student-t copula, to generate a joint distribution of the return series, taking into account that the distributions are non-normal. The correlation matrix generated shows some dependence between stocks and bonds. Gold on the other hand is uncorrelated with both stocks and bonds (and only slightly in the first period). This implies that the results from the linear regression, holds even at the non-normal and daily level.

Based on the above analysis, the thesis concludes with a value at risk analysis, showing that the optimal portfolio that minimizes value at risk/ETL in all the sub periods contains gold. It also shows that an investor during the financial crisis could have substituted a portion of his or hers portfolio from bonds to gold, and realized an excess return, in contrast to a negative return in a portfolio consisting of only stocks and bonds. The thesis thereby concludes that gold can work as a portfolio diversifier during stress on the financial markets.

Indholdsfortegnelse

1.0 Introduktion.....	6
1.1 Indledning	6
1.2 Problemstilling	7
1.3 Problemformulering	7
1.4 Afgrænsning	8
1.5 Specialets formål	9
1.6 Specialets komposition.....	9
1.7 Teori-, data- og metodevalg	11
1.7.1 Tidsserieanalyse og test af stationærhet	11
1.7.2 Regressionsanalyse	11
1.7.3 ARCH modeller	12
1.7.4 GARCH(1,1).....	13
1.7.5 EGARCH(1,1)	13
1.7.6 Ikke-normalfordelte GARCH Modeller	13
1.7.7 Copula funktioner	13
1.7.8 Maksimum likelihoodestimation	14
1.7.9 Simulering af afkast via Monte Carlo.....	15
1.7.10 VaR og ETL analyse.....	15
1.7.11 VaR Backtest	15
1.8 Data	16
1.9 Metode.....	16
2.0 Guldmarkedet.....	17
2.1 Hvad er guld?	18
2.2 Guld som råvareinvestering.....	19
2.3 De største investorer på guldmarkedet	20

2.4 Centralbankerne.....	20
2.5 IMF	21
2.6 ETF's og Guldфонde	21
2.7 Bullion banks (guldbarer banker).....	22
2.8 Smykke- og teknologiindustrien	23
2.9 Guldproducenter	23
3.0 Faktorer der har indflydelse på guldprisen	25
3.1 En opsummering af tidligere research	25
3.2 Data	27
3.3 Analyse	28
3.3.1 Grafiskanalyse	29
3.3.2 Korrelogram.....	30
3.3.3 AugmentedDickey-Fuller enhedsrodtest (ADF)	31
3.3.4 Transformerig af tidsserien.....	33
3.4 Model.....	35
3.4.1 Test af model	35
3.4.2 Regression.....	35
3.4.3 Ts.1 (Modellen er lineær i sine parametre).....	36
3.4.4 Ts. 2. (Ingen perfektmultikollinearitet)	38
3.4.5 TS.3. (Homoskedasticitet)	39
3.4.6 TS.4. (seriekorrelation).....	42
3.4.7 TS.5. (Normalitet).....	44
3.5 Delkonklusion	45
4.0 Makroøkonomisk forståelse af markederne	46
4.1 Makroøkonomiskanalyse 2000-2003	46
4.2 Makroøkonomiskanalyse 2004-2007	48

4.3 Makroøkonomiskanalyse 2008-2011	50
5.0 Volatilitetsanalyse.....	52
5.1 Volatilitetsmodeller.....	53
5.1.1 ARCH(1).....	54
5.1.2 GARCH(1,1).....	56
5.1.3 E-GARCH(1,1).....	57
5.1.4 Ikke-normalfordelte GARCH Modeller	59
5.1.5 Student-t.....	59
5.2 Inspektion af data	60
5.3 Estimering og valg af model	66
5.4 Empiriske resultater.....	69
5.5 Delkonklusion	71
6.0 Introduktion til copula funktioner	72
6.1 Teoretiske koncepter for copulaer.....	74
6.1.1 Sklar's teoreme	74
6.1.2 Definition af copula funktionen.....	74
6.2 Betingede copulaer og deres fraktile kurver.....	79
6.3 Haleafhængighed.....	80
6.4 Eksempler af relevante copulaer	80
6.4.1 Normal eller Gaussian copulaer.....	81
6.4.2 Student-t copulaer	82
6.4.3 Arkimediske copulaer	84
6.5 Betingede copula distributioner og fraktilkurver	86
6.5.1 Normal eller Gaussian copulaer.....	87
6.5.2 Student-t copulaer	88
6.5.3 Clayton copulaer	89

6.6. Maksimum likelihood estimation.....	91
6.7 Empiriske resultater.....	92
6.8 Delkonklusion	97
7.0 Monte Carlo Simulation via copula og VaR.....	97
7.1 Monte Carlo Simulation	97
7.2 Value at risk introduktion.....	98
7.2.1 Definition af VaR	99
7.2.2 Conditional VaR: Expected Tail Loss (ETL)	100
7.3 VaR Backtest.....	101
7.3.1 Rullende estimationsvindue.....	101
7.3.2 Bernoulli Test	102
7.3.3 Kupiecs test (dækningstest)	103
7.4 Resultat.....	105
8.0 VaR og ETL analyse	107
8.1 Valg af portefølje.....	107
8.2 Optimering af porteføljen.....	108
8.3 Resultater.....	108
8.4 Delkonklusion	114
9.0 Konklusion.....	116
10.0 Bibliografi	121
11.0 Bilag.....	125

1.0 Introduktion

1.1 Indledning

I de forgange år, specielt siden år 2000, har de finansielle markeder over relative korte tidsperioder oplevet store udsving verden over. Udsvingene har været drevet af en lang række faktorer lige fra IT-boblen i 2000/2001, pengepolitiske problemstillinger, energipriser, erhvervs- og forbrugertillid, inflation, erhvervsmæssige investeringer, boligmarkedet der bl.a. var med til at drive den amerikanske økonomi i recession i 2008, beskæftigelsen og statslig gæld (Nationalbanken, 2000-2011). Man kunne nævne mange flere faktorer, men dette giver et billede af hvor komplekst markedet egentligt er. Med det komplekse marked, som stadig bliver mere komplekst, opstår der en lang række problemstillinger som politikere, private personer, erhvervsfolk og især professionelle investorer må forholde sig til.

Den finansielle krise som ramte verden i 2007 har haft stor betydning for aktiemarkederne verden over. Verden har oplevet et markant fald i BNP og landene har forsøgt at rette deres økonomier op med diverse finanspolitiske tiltag. Renterne er raslet ned og har medført, at obligationer er blevet stadig mindre attraktive for investorer, samtidig har man på aktiemarkederne set enorme fald. Alt imens er prisen på guld steget markant. Der har længe været en tendens til, at investorer har lagt deres investeringer i guld, når der har været fald på aktiemarkederne, da guld har været betragtet som et "safe haven" i tider med recession og stigende inflation.

I J. P Morgans rapport "*More growth, less fear*" (Morgan, J.P, 2013), forudså de, at man i 2013 vil se en stigning i væksten på verdensplan. Samtidig er S&P 500 indekset fortsat med at stige. Stigningen i S&P 500 er et tegn på, at investorerne igen er begyndt at have tillid til, at markederne øger investeringerne, samtidig med at de opretholder troen på stigende positivt cashflow ind i virksomhederne.

Det kan da også observeres, at prisen på guld igen er på vej ned, samtidig med at aktiemarkederne begynder at vise markante stigninger. Investorerne begynder derfor at vende tilbage til aktier og væk fra guld. Dette skyldes især, at guld ikke giver investorerne noget afkast udover en mulig kapitalgevinst ved et salg.

Meget tyder på, at guld er negativt korreleret med aktiemarkedet. Af denne grund er det relevant, at undersøge om guld kan bruges til at sikre sin portefølje imod uforudsete begivenheder, og om det derfor kan være et effektivt redskab til risikostyring (World gold council, 2013).

For de professionelle investorer har de store udsving på markederne betydet, at der er blevet stillet store krav til enhver risk manager, da han/hun skal være i stand til at kunne estimere volatiliteten i markedet for netop at kunne vurdere et potentielt fremtidigt tab. Problemet er dog, at mange professionelle investorer følger Markowitz's klassiske porteføljeteori, der antager at afkast er normalfordelte (Bodie, Kane, & Marcus, 2011). Dette modbeviser perioden år 2000-2011 klart.

Af ovenstående opstår derfor en problemstilling om, hvordan man bedst muligt kan estimere et potentielt fremtidigt tab i en verden, hvor afkast ikke er normalfordelte. Og endvidere åbner det også for tanken omkring, hvordan man via guld mest optimalt kan diversificere downside risikoen væk, eller i hvert fald som minimum mindske den, i en portefølje bestående af aktier, obligationer og guld.

1.2 Problemstilling

Formålet med specialet er at undersøge faktorer, der kan have indflydelse på guldprisen. Mere præcist ønskes det undersøgt om specielt renten og aktieprisen har indflydelse på guldprisen. Denne undersøgelse foretages for at få en indikation af, om guld overhovedet kan benyttes til diversificering. Herefter er idéen at undersøge volatiliteten, dvs. hvorledes aktier, obligationer og guld reagerer på "dårlige" og "gode" nyheder, når der tages højde for, at afkastene ikke er normalfordelte. Denne analyse hjælper os videre til at kunne finde frem til en fællesdistribution for porteføljens afkast. Denne distribution gør det muligt at definere en korrelationsmatrice, der tager højde for individuelle aktivers marginale distributioner, hvad enten de er normalfordelte eller ej. På denne baggrund vil det være muligt at kunne lave en saglig vurdering af det potentielle procentvise fremtidige tab, hvis en portefølje består af aktier, obligationer og guld. I så fald at guld viser sig at være et godt instrument til at diversificere med, hvad bør den optimale mængde af guld da være?

1.3 Problemformulering

På baggrund af ovenstående indledning/problemfelt og problemstilling, vil følgende problemformulering blive anvendt i vurderingen af om guld er et fordelagtigt diversificeringsaktiv, når der tages højde for at afkast ikke er normalfordelte:

Hvorledes kan guld som aktiv optimalt benyttes som diversificering af markedsrisiko i en portefølje bestående af aktier og obligationer, når afkast ikke er normalfordelte?

Til styring af processens forløb vil følgende underspørgsmål blive behandlet:

1. *Hvilke faktorer har indflydelse på guldprisen?*
2. *Hvordan reagerer aktier, obligationer og guld på "dårlige" og "gode" nyheder, hvis afkast ikke er normalfordelte?*
3. *Hvordan konstrueres en fællesdistribution ud fra marginale distributioner?*
4. *Hvad er det procentvise potentielle tab af forskellige porteføljesammensætninger hvis guld benyttes til diversificering?*
5. *Baseret på spørgsmål 4, hvad er den optimale vægt af guld i en portefølje bestående af aktier, obligationer og guld under forskellige markedsfluktuationer?*

1.4 Afgrænsning

I den lineære regressionsanalyse afgrænser vi os fra at kigge på udbuddet og efterspørgslen og laver her i stedet et afsnit omhandlende dette, hvor vi mere specifikt forklarer disse forhold, da efterspørgslen består af en masse forskellige delkomponenter, som alle kan yde indflydelse på efterspørgslen, hvilket forklares i kapitel 2. I den lineære regression antages det, at afkastet for aktiverne er normalfordelte. I afsnittet omkring de makroøkonomiske faktorer fokuseres der primært på forholdene i USA. Dette skyldes, at analysen tager udgangspunkt i S&P 500 indekset samt renten på en amerikansk T-bill. I analysen for VaR benyttes renten på en 1 årig T-bill, da vi antager at denne korresponderer med en normal investors tidshorisont. Endvidere antages det, på baggrund af andre analyser, at S&P 500 indekset er repræsentativt for andre vestlige markeder. I afsnittet omhandlende volatiliteten benyttes kun tre GARCH modeller. De valgte GARCH modeller er valgt som dem, der antages bedst at kunne repræsentere dataen, derfor afgrænser vi os fra andre GARCH type modeller. De valgte copula funktioner er begrænset af SAS procedureerne. Vi vælger at se bort fra den normaldistribuerede copula, da det antages at tidsserierne ikke følger normalfordelingen. Vi antager derfor, at de tre valgte copula modeller er repræsentative for dataen, hvorfor der afgrænses fra andre typer af copula modeller. I VaR/ETL analysen, benytter vi et 95 % konfidensinterval og afgrænser os derfor fra andre niveauer af konfidensintervaller. I analysen benyttes der en ti dages VaR/ETL periode da denne er i overensstemmelse med Basel 2 reglerne, og da denne horisont giver et mere præcist og realistisk VaR estimat sammenlignet med en længere tidshorisont. I bilag 16 er VaR og ETL estimerne for en tidshorisont på 1 dag, 21 dage og 252 dage dog vist. I analysen begrænser vi os til en portefølje med en fast vægt i aktier på 60%, da det

er aktierisikoen vi ønsker at diversificere væk vha. forskellige kombinationer af obligationer og guld.

1.5 Specialets formål

Specialet henvender sig specielt til professionelle investorer og risk managere, som arbejder med aktivallokering. Det kræves af læser, at han/hun har en velfunderet akademisk viden inden for økonomi generelt, økonometri og matematik for at forstå analyserne, som gennemgås gennem opgaven.

Som forfattere ønsker vi at kunne give et indblik i, hvordan man kan håndtere problemet omkring ikke-normalfordelte afkast i porteføljemæssige sammenhænge, hvilket er en problemstilling der aldrig har været mere aktuelt end nu. Derudover ønskes det at give læseren et indblik i, hvordan guld kan bruges som et alternativ diversificeringsinstrument.

1.6 Specialets komposition

Specialet er inddelt i 9 kapitler. Nedenfor gives en kort beskrivelse af de enkelte kapitlers indhold for at give læseren et fornuftigt overblik over strukturen i opgaven.

I kapitel 1 redegøres der for problemfeltet, problemstilling, problemformulering samt afgrænsning. Endvidere vil de teoretiske refleksioner samt data og metode blive beskrevet i dette kapitel.

I kapitel 2 introduceres læseren til guldmarkedet. Der gives et indblik i gulds historie, samt hvordan guld adskiller sig som aktiv i forhold til aktier og obligationer, og hvorledes guld generelt performer i markedet. Der gives til sidst et indblik i hvilke aktører, der er på markedet. Derudover laves en vurdering af efterspørgsels- samt udbudssiden, og hvorledes disse kan have indvirkning på guldprisen.

I kapitel 3 analyseres det hvorledes forskellige faktorer har indflydelse på prisen af guld. Undersøgelsen tager udgangspunkt i tidligere analyser, der argumenterer for forskellige faktorer, der har indflydelse herpå. På denne baggrund vil det blive undersøgt ud fra en lineær regressionsanalyse, hvilke faktorer der mere specifikt kan forklare udviklingen i guldprisen i perioden fra 1. januar 1986 til 1. april 2013. Endvidere skal undersøgelsen klarlægge, om der overhovedet er en sammenhæng med udviklingen i guldprisen, S&P 500, en 1-årig amerikansk T-bill og inflationen, for netop at komme frem til en indikation af, om guld overhovedet kan benyttes som et eventuelt diversificeringsinstrument.

I kapitel 4 bliver der yderligere lavet en makroøkonomisk analyse/beskrivelse af hvilke faktorer, der har påvirket udviklingen i verdensøkonomien, dog primært på det amerikanske marked i perioden 2000-2011 (undersøgelses-/analyseperioden). Analysen foretages for at give et billede og en bedre forståelse af de fluktuationer, der har været i markedet i den angivne periode. Perioden er yderst interessant, da man i løbet af en kort årrække har oplevet store stigninger og fald på markedet.

I kapitel 5 laves der en volatilitetsanalyse. I analysen undersøges der, hvor volatile aktiverne aktier (S&P 500), obligationer (1-årig amerikansk T-bill) og guld er. I analysen tages der højde for om afkastene er normalfordelte eller ikke-normalfordelte for at få det bedste fit til den data, der undersøges. Formålet er dermed at kunne beskrive hvordan aktiverne reagerer på ”dårlige” og ”gode” nyder, og dermed også kunne give dybere forståelse af om guld kan bruges som diversificeringsinstrument. Analysen giver information omkring haleafhængighed, hvilket kan benyttes til at vælge den rette copula funktion til fællesdistributionen, hvilket nærmere beskrives i kapitel 6.

I kapitel 6 introduceres læseren til de relevante copula funktioner for ikke normalfordelte afkast. Den klassiske antagelse er, at porteføljeafkast er normalfordelte, dermed antages det også at de underliggende aktiver er normalfordelte. Men som det ses i volatilitetsanalysen er dette ikke tilfældet. Copula funktionerne hjælper med at finde en fællesdistribution, som tager højde for forskelligheden i de underliggende aktivers marginale distributioner. Formålet er hermed at finde frem til en korrelationsmatrice, der ikke antager normalitet, men som bedre kan beskrive afhængigheden i halerne af fællesdistributionen.

I kapitel 7 introduceres læseren til Monte Carlo simulation samt til risikomålene VaR og ETL. På baggrund af den valgte copula korrelationsmatrice simuleres 10.000 afkast. Afkastene benyttes til at bestemme VaR og ETL. Endvidere vil der i dette kapitel blive lavet en back test, der skal undersøge hvor godt den nuværende procedure til at bestemme VaR også ville have performeret tilbage i tid. Analysen foretages vha. et rullende estimationsvindue.

I kapitel 8 vil der på baggrund af definitionen af den valgte copula blive lavet en VAR analyse. Analysen skal give viden omkring, hvor meget det eventuelle procentvise tab vil blive mindsket, hvilket specielt gælder i krisetider, hvis man som professionel investor vælger at have guld i en portefølje bestående af aktier, obligationer og guld. Samtidig vil porteføljen blive optimeret for at

komme frem til et bud på, hvor meget guld man bør have i sin portefølje for at få et maksimalt forventet afkast.

Kapitel 9 indeholder konklusionen og dermed besvarelsen på problemformuleringen.

1.7 Teori-, data- og metodevalg

1.7.1 Tidsserieanalyse og test af stationærhed

Et af de væsentlige områder i specialet er at undersøge hvilke faktorer der har indflydelse på udviklingen i guldprisen. I den sammenhæng testes der for forskellige relevante faktorer. Disse faktorer er vurderet på baggrund af videnskabelige artikler. Her findes det interessant at kigge på inflationen, obligationer og aktier. Udviklingen i guldprisen kan naturligvis ikke udelukkende forklares ud fra de nævnte variable, men det giver os som forskere et indblik i, om guld har sin berettigelse som et diversificeringsinstrument.

Til at analysere denne problemstilling benyttes en tidsserieanalyse. Ud fra tidsserieanalysen, som bygger på en række antagelser (se afsnit 1.7.2), kan de udvalgte variabler testes via T- og F-statistikken med et 95% konfidensinterval. Antagelserne sikrer, at den model som benyttes, er den der beskriver sammenhængen mellem variablerne mest optimalt.

Inden denne statistiske undersøgelse foretages, skal tidsserien først testes for, om den er stationær. Er tidsserien stationær, betyder det, at middelværdien og / eller variansen ikke afhænger af måletidspunktet. Til at teste dette foretages tre test, en grafiskanalyse, en ACF-test, korrelogram og enhedsrods test (ADF) (Gujariti N, 2003).

1.7.2 Regressionsanalyse

På baggrund af ovenstående test foretages en regressionsanalyse. Analysen udarbejdes for at finde frem til hvorledes de individuelle forklarende variable har indflydelse på guldprisen. Modellen tager udgangspunkt i en periode tilbage, dvs. renten (til t og $t-1$), aktiemarkedet (til t og $t-1$), guldprisen (til $t-1$) og inflationen for at kunne forklare guldprisen i dag. Regressionsligningen er defineret som

$$G_t = \beta_0 + \beta_1 G_{t-1} + \beta_2 C_t + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 S_t + \beta_5 S_{t-1} + \beta_6 I_t + \varepsilon_t$$

Modellen testes for følgende antagelser:

Antagelse 1. TS.1. Modellen er lineær i sine parametre.

Antagelse 2. TS.2. Ingen perfekt kollinearitet. Hvilket betyder at ingen af de uafhængige variable er konstante, eller er en perfekt lineær kombination af hinanden.

Antagelse 3. TS.3. Homoskedasticitet. Denne antagelse betyder, at de ikke-observerbare variable, som fanges af fejleddet, alle har en konstant varians over tid.

Antagelse 4. TS.4. Ingen seriekorrelation. Hvilket betyder, "Betinget af X , skal fejleddene i to forskellige tidsperioder være ukorrelerede". Denne antagelse ligger sig tæt op af TS.3.

Antagelse 5. TS.5. Normalitet. Denne antagelse betyder, at OLS estimatet følger en normalfordeling, således at T- og F-statistikken kan benyttes. (Wooldridge, 2009)

Til at udføre ovenstående test benyttes SAS 9.4 samt SAS Enterprise guide 6.1.

1.7.3 ARCH modeller

Til at undersøge volatiliteten for de enkelte aktiver benyttes en række modeller, der henholdsvis antager normalitet og ikke-normalitet i afkastdistributionerne. Det afgørende med undersøgelsen er at finde frem til, hvorledes aktiverne reagerer på "dårlige" og "gode" nyheder.

Et af de primære formål med specialet er at finde ud, af hvordan aktiverne reagerer under ekstreme events, dvs. i afkastdistributionernes haler. Normalfordelte distributioner opfanger ikke disse events, hvorfor det er nødvendigt at koncentrere sig om mere relevante modeller.

ARCH modeller (Engle R. F., 1982) har tykkere haler end de normalfordelte distributioner, hvormed de gør det muligt, at ekstreme events kan finde sted. I praksis viser det sig nemlig ofte, at markeder eller aktiver har vedholdende perioder med høj eller lav volatilitet, hvad enten markedet boomer eller omvendt falder drastisk. I disse tilfælde dannes der ofte volatilitetsklynger, eller det der kaldes ARCH effekter, hvilket er et klart tegn på tidsafhængig varians. Derfor vil det blive undersøgt, om der er ARCH effekter til stede for de enkelte aktiver, for netop at se hvorledes de agerer i ekstreme tilfælde.

Om der er ARCH effekter til stede testes via Lagrange multiplier. Endvidere testes de tre tidsserier også for, om de følger en normalfordelt distribution. Denne test foretages ved hjælp af en Jarque-Bera test (Gujarati N, 2003). Hvis tidsserierne har en normalfordelt distribution, vil de have en skævhed = 0 og kurtosis = 3, hvilket svarer til nulhypotesen.

1.7.4 GARCH(1,1)

Flere studier viser, at der er behov for en højere rang af ARCH modeller i forhold til at kunne forklare den betingede varians af finansielle tidsrækker. Grunden til dette er, at den empiriske autokorrelation henfalder meget langsomt, derfor er der behov for en metode eller form, som indeholder længere hukommelse end tilfældet er for ARCH(1) modellen (Taylor, 2007).

Bollerslev introducerede i 1986 GARCH modellen. Modellen er den mest populære model i ARCH familien og benyttes til at modellere daglige afkast (Taylor, 2007). Fordelen ved denne model er, at den er baseret på ARCH med en kraftfuld langtidshukommelse med uendelig forsinkelse ($ARCH_{\infty}$), men der er ganske få parametre som skal estimeres.

Modellen testes for normalitet i distributionen. Hvis hypotesen om normalitet afvises, betyder det, at distributionen indeholder federe haler, hvorfor en alternativ distribution er nødvendig, sådan at det er muligt at få en model, der er tilpasset data bedst muligt.

1.7.5 EGARCH(1,1)

En model som ofte har vist sig at være mere succesfuld end den symmetriske GARCH(1,1) model er den såkaldte volatilitetsmodel E-GARCH(1,1), da den bedre kan opfange de asymmetriske strukturer, som ofte er til stede i finansielle tidsrækker (Nelson, 1991). Dvs. at tidligere negative og positive værdier påvirker asymmetrisk på den betingede varians. (Pagan & Schwert, 1990) og (Engle & Ng, 1993) har defineret konceptet der vedrører "newsimpactcurve", som netop relaterer til tidligere afkast chok, eller med andre ord "Nyheder", til den nuværende volatilitet. I E-GARCH(1,1) modellen er denne kurve designet til at kunne øges i to retninger.

1.7.6 Ikke-normalfordelte GARCH Modeller

Selvom E-GARCH(1,1) modellen har federe haler og er asymmetrisk, er det stadig muligt at forbedre denne model. Bollerslev introducerede i 1987 en distribution, der ikke er normalfordelt. Denne model bliver i dag kaldt for Student-t og antager, at den betingede distribution af markedschok er t-distribueret. Yderligere er frihedsgrader en parameter, som ellers ikke indgår i de normalfordelte GARCH modeller (Bollerslev T. , 1987).

1.7.7 Copula funktioner

I den moderne porteføljetæori er porteføljerisiko et mål for den usikkerhed, der er i porteføljedistributionerne. Men den klassiske antagelse omkring, at middelværdi afvigelser er uafhængige og symmetriske med identiske fordelinger, er det altså ikke muligt at kunne definere

usikkerhed ved et simpelt mål som porteføljevolutet. Ligeså er det også generelt, at korrelation benyttes som et mål for afhængigheden mellem aktiver. I den model porteføljeformaler bruger antages det ofte, at distributionen på de individuelle aktiver og dermed også fællesdistributionen er normalfordelt, men forskellige tidsserier for forskellige aktiver har forskellige distributioner. Derfor er det interessant at benytte copula funktioner, da disse funktioner ikke ”bekymrer” sig om, hvilke individuelle distributioner de underliggende aktiver i porteføljen har. Copula funktionerne er med til at skabe en fællesdistribution, der tager højde for de underliggende marginale distributioner og dermed vil en korrelationsmatrice, på baggrund af copula funktionerne, væsentligt bedre kunne beskrive afhængighedsstrukturen mellem aktiverne, når de ikke antages for at være normalfordelte.

Copula teorien blev introduceret af Sklar i 1959. Teoremet fastslår, at for alle kumulative distributionsfunktioner F med en-dimensionelle marginaler $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$, eksisterer der en copula C , som binder de marginale distributioner til en given fællesdistribution (Faugeras, 2013).

I vores undersøgelse har vi valgt på baggrund af volatilitetsanalysen at teste nedenstående copulaer, for at finde frem til hvilken copula, der kan beskrive afhængighedsstrukturen mellem aktiverne mest optimalt. Der tages udgangspunkt i de copulaer, der er mest almindelige inden for markedsrisikoundersøgelser.

Student-t copulaer er copulaer med symmetriske haler, dog er toppene i halerne højere end ved de normale copulaer, hvilket giver anledning til, at ekstreme events kan finde sted.

Claytons Copula har i modsætning til ovenstående copulaer asymmetrisk haleafhængighed og opfanger afhængigheden i den nedre hale.

Gumbel Copula er ligesom Clayton Copula asymmetrisk i halerne. Den opfanger afhængigheden i den øvre hale.

1.7.8 Maksimum likelihoodestimation

Til at beregne copula parametrene og finde frem til hvorledes de fitter data mest optimalt benyttes maksimum likelihoodestimationen (MLE). MLE anvendes til at finde den teoretiske fællesdistributionsfunktion. Det gælder, at for den copula der har den højeste MLE værdi, er det den copula, der har det bedste fit og dermed bedst repræsenterer dataen.

1.7.9 Simulering af afkast via Monte Carlo

Til at simulere afkast, som tager højde for afhængighedsstrukturen mellem de individuelle marginaler, simuleres afkastene på baggrund af den valgte copula og dertilhørende udregnet korrelationsmatrice. Simulering foregår i SAS og tager udgangspunkt i Monte Carlo simulation.

1.7.10 VaR og ETL analyse

Til at estimere det forventede tab i den vægtede portefølje benyttes risikomålet VaR. VaR svarer til den størrelse, som kan tabes ved en bestemt sandsynlighed. VaR benyttes, da den er mere kompleks sammenlignet med traditionelle risikofaktorer. VaR afhænger af de multivariate risikofaktorer afkastdistribution og af dynamikken af selve distributionen.

Da VaR kun angiver det potentielle tab, som er forårsaget af markedsbevægelserne, ved en given sandsynlighed, er det essentielt at undersøge tilfælde, hvor VaR overskrides. Til at undersøge omfanget af et givent tab, der overskrider VaR, dvs. i ekstreme events, benyttes ETL, som angiver det gennemsnitlige niveau af tab.

1.7.11 VaR Backtest

Til at undersøge hvorvidt den estimerede copula baserede VaR model fitter *out of sample*, bliver modellen backtestet. Dvs. det undersøges hvor optimalt den estimerede/nuværende model ville have performeret tilbage i tiden. Med andre ord undersøges det, hvor ofte de realiserede afkast overskrider den estimerede VaR. Til denne test benyttes et rullende estimationsvindue.

Til at teste om modellen kan accepteres foretages en række test. Den første test er en såkaldt Bernoulli test. Testen undersøger, om der er *succes* eller *fejl* i forhold til overskridelser af VaR i modellen. *Succes* referer til en overskridelse af VaR, og omvendt er det gældende for *fejl*.

Yderligere testes modellen for, om overskridelserne kommer i klynger, dvs. at en overskridelse bliver efterfulgt af en ny overskridelse. Hvis dette er tilfældet er VaR-modellen ikke hurtig nok til at opfange ændringer i markedet. Denne test foretages vha. *Kupiecs testen*. Derfor kan den estimerede VaR forkastes, hvis det via undersøgelsen resulterer i, at overskridelserne ikke er uafhængige.

Til at teste om overskridelserne er uafhængige benyttes *uafhængighedsteststatistikken* udledt af Christoffersen (Christoffersen, 1998). Nulhypotesen tilsiger, at overskridelserne er uafhængige. Problemet er dog, at Christoffersens model tager udgangspunkt i, at overskridelserne er kontinuerte.

Derfor foreslår Alexander (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008) en model, der både tager højde for den ubetingede dækning og uafhængigheden.

1.8 Data

Til at analysere guldmarkedet er dataen over udbuddet og efterspørgslen fundet via World Gold Councils rapporter om "Gold Demand Trends" fra 2005 til 2012 samt fra deres kvartalsrapport andet kvartal 2013.

I den lineære regression er de månedlige data hentet via Bloomberg for S&P 500 indekset, obligationen og guldprisen. Det amerikanske forbrugerprisindeks (CPI) er fundet via Saint Louis federal reserve bank. Guld er angivet som "Gold fixing price by London Bullionmarket, in US Dollars", som er den mest anvendte. S&P 500 er angivet som et prisindeks. Vi benytter her S&P 500 som et mål for det generelle aktiemarked, da tidligere research har vist, at resultaterne for de vestlige aktiemarkeder næsten er identiske. Inflationen er målt via det amerikanske prisindeks "Consumer Price index" (CPI). Mere bestemt "Consumer price index, for all urban consumers". Renten er defineret via en 3 måneders amerikansk obligation (T-bill). Analysen dækker perioden fra d. 1. januar 1986 til d. 1. april 2013.

I opgaven kigges der hernæst på de daglige afkast for guldprisen, S&P 500 og den et årige rente på en amerikansk T-bill. De tre perioder er som følger: Perioden fra d.4-1-2000 til d.31-12-2003, d. 05-01-2004 til d. 31-12-2007 og 03-01-2008 til d.30-12-2011. De tre perioder dækker IT-boblen fra 2000-2001, samt den finansielle krise der startede i sidste halvdel af 2007. Denne er dækket af den sidste periode fra 2008-2011. Den mellemliggende periode fra 2004-2007 illustrerer en periode med høj vækst på de finansielle markeder. De daglige afkast på handelsdage er benyttet, dvs. weekender og helligdage er udeladt. Antallet af observationer er henholdsvis 1005, 1005 og 1008.

Alle data er konverteret til log afkast.

1.9 Metode

I opgaven er SAS enterprise guide 6.1 benyttet til den lineære regressionsanalyse. De test der er foretaget i denne del af opgaven er alle lavet via dette program. Til at opstille GARCH modellerne er SAS 9.4 benyttet. I SAS har det ikke været muligt at teste en Student- t distribueret E-GARCH(1,1) model. Analysen har derfor været begrænset af de GARCH type modeller, som har været indeholdt i SAS 9.4. Ydermere benyttes SAS MLE til at estimere GARCH modellerne. Til de øvrige statistiske test i dette afsnit er SAS enterprise guide 6.1 benyttet.

Copula funktionerne er ligesom GARCH modellerne udregnet i SAS 9.4. I SAS 9.4. er copula

proceduren forholdsvis ny og understøtter derfor kun fem typer af Copula funktioner. De understøttede copula funktioner er som følger: Clayton, Gumbel, Normal, Student- t og Frank. I opgaven har vi begrænset os til at teste Student- t, Clayton og Gumbel. SAS 9.4 benytter MLE og CMLE til at estimere copula funktionerne.

Til at backteste den copula baserede VaR er Excel 2010 benyttet, hvor der er opstillet en model til at udføre de statistiske test. Til selve VaR analysen er Excel 2010 ligeledes benyttet, hvor solver er brugt til at finde minimum VaR porteføljen samt den optimale portefølje. En model er ligeledes opstillet her. De simulerede afkast fra copula funktionerne er her kopieret fra SAS, hvorefter analysen på disse foretages i Excel 2010.

2.0 Guldmarkedet

Historien om guld er både rig og kompleks ligesom metallet selv. Krige er blevet udkæmpet for det, og kærlighed er blevet deklareret med det. Gamle egyptiske hieroglyffer viser afbildninger af guld som et tegn på den skinnende sol.

I 325 f.Kr. havde de gamle grækere gravet efter guld fra Gibraltar til Asien. I 1848 fandt James Marshal en flage guld, da han var i færd med at bygge en vindmølle nær Sacramento i Californien, hvilket var startskuddet til guldfieberen (World gold council, 2013).

Historisk er guld blevet benyttet som et middel til at ”gemme værdi” og som betalingsmiddel siden oldtiden, ikke mindst gennem guldstandarden¹, som varede fra 1870 til 1917 og igen med en kort tilbagevenden i 1920’erne (Cooper, Dornbusch, & Robert, 1982).

Som teksten ovenfor illustrer, har guld historisk set spillet en fremtrædende rolle gennem en stor del af menneskets civilisation. Frem til Bretton Woods systemets sammenbrud i 1971 var stort set alle vestlige landes valuta bundet op på guldstandarden. Da Bretton Woods systemet nedlagdes, gik man over til den situation, man har i dag, hvor verdens valutaer er flydende (Fiat-valuta)² (Bie & Pedersen, 1999).

¹Guldstandarden var baseret på et fastkurssystem, baseret på fast definition af de enkelte valutaer i forhold til guld, og klare regler for guldindløselighed og gulddækning. Via guldstandarden forpligtede landenes centralbanker sig til at købe og sælge guld ubegrænset til den fastsatte kurs. Reglerne for guldindløseligheden var fastsatte, hvilket betød, at der var klare regler for, hvor stor en del af seddelmængden der skulle være dækket af guldreserver i centralbankerne. På denne måde etableredes et verdensomspændende system, hvor de enkelte valutaer, gennem deres guld paritet, var defineret i forhold til hinanden. Gullet blev derfor benyttet som et ”anker” i det internationale monetære system. (Bie & Pedersen, 1999)

² Fiat valuta er et system hvor regeringer udsteder valuta der repræsenterer værdi, men som ikke er bakket op af nogle reelle aktiver, som det var tilfældet under guldstandarden. (Jagerson & Wade, 2011)

2.1 Hvad er guld?

Guld adskiller sig på en række parametre sammenlignet med aktier og obligationer. Guld bevæger sig ofte modsat af andre aktivklasser, men kan i perioder skifte retning og være korreleret med både aktier og obligationer (se kap. 3 og kap. 6).

Obligationer er lavet således, at de generer værdi for investoren. Gæld generer renter og er designet til at give et afkast til investoren, der er proportional med den risiko, som udlåneren påtager sig.

Derfor er den underlæggende ide bag obligationer, at disse skal genere et afkast til investoren.

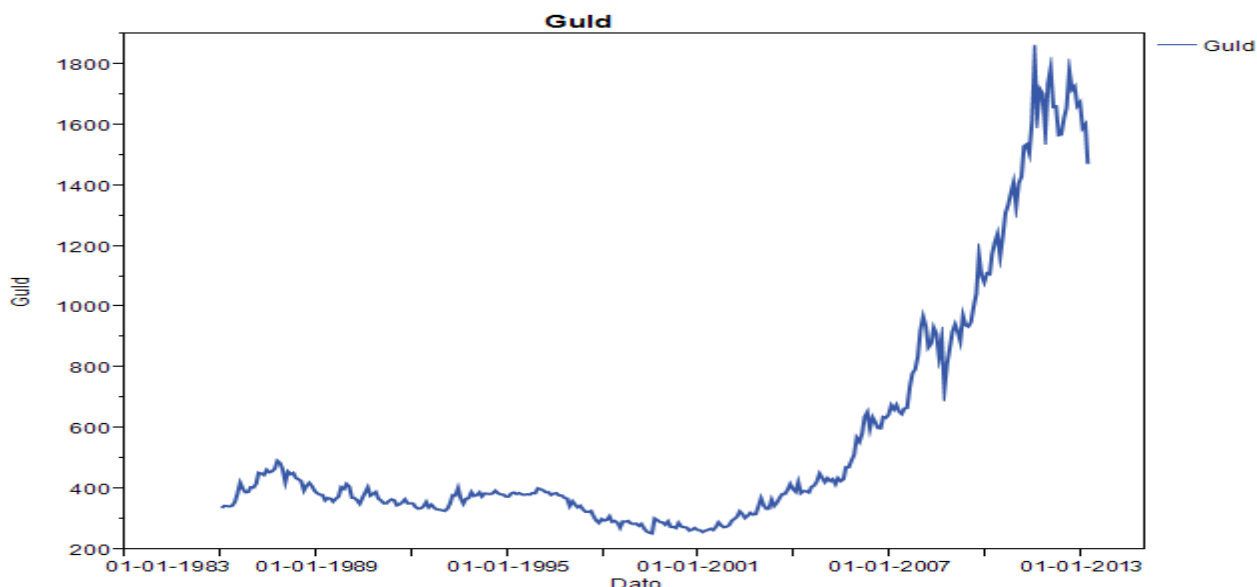
Aktier er til dels ens med obligationer, i den forstand, at værdien af en aktie er lig med den diskonterede nutidsværdi af de estimerede fremtidige dividender. Når investorer investerer i aktier, påtager de sig derfor den risiko, at den underlæggende virksomhed har evnen til at genere overskud og i sidste ende profit.

Investorer investerer derfor i aktier ud fra en tanke om, at det afkast de modtager, svarer til den risiko de påtager sig.

Det omvendte gælder for guld, der ikke på samme måde generer en indkomststrøm, og ikke er designet til at vokse i værdi, hvilket gør, at gulds trend er forskellig fra aktier og obligationer. Da guld konkurrerer om investeringskapital med aktier, kan det ofte observeres, at guld ikke klarer sig godt i ”*Bull markets*”. Det er derfor vigtigt at have for øje, at guld ikke er en investering, der bevidst er designet til at stige i værdi eller generere indkomst for investorerne. Over en lang tidshorisont vil værdien af guld være ”*meanreverting*”³ og dermed relativt flad. Grundet denne egenskab til at ”*gemme værdi*”, betragtes guld af visse investorer som en god investering til hovedstolsbeskyttelse og porteføljediiversifikation. Et aktiv der opfører sig som guld performer derfor dårligt i markeder med høje renter, høj økonomisk vækst og relativ lav inflation (Jagerson & Wade, 2011). Det resultat kommer Lucy og Baur (Baur & Lucey, Is gold a safe haven? An analysis of stocks, bonds and gold, 2010) også frem til i deres analyse, hvor de finder ud af, at guld er et godt ”*safe haven*”⁴ for aktier i perioder med stress på de finansielle markeder. Men at denne egenskab er begrænset til en periode på 15 handelsdage efter et ekstremt negativt chok.

³ Mean reversion betyder, at over tid vil et aktivs højeste og laveste værdi være midlertidig, hvorved værdien vil bevæge sig mod et langsigtet gennemsnit.

⁴ Et ”safe haven” er af Baur og Dermott defineret som: ”Et stærkt (svagt) safe haven er defineret som et aktiv der er negativt korreleret (eller u-korreleret) med et andet aktiv eller en portefølje, i visse perioder, altså perioder med faldende aktiemarkeder”. (Baur & Mc Dermott K, Is gold a safe haven? International evidence, 2010)



Figur 2.1 Kilde: Bloomberg, angivet som Gold fixing price by London Bullion market, in US Dollars

Figur 2.1 viser de månedlige afkast for guldprisen i US dollars fra d. 01-01-1986 til d. 01-04-2013. Som man kan se, er guldprisen i perioden fra 1986 til omkring 2007 relativt stabil (meanreverting), og antog det laveste niveau i slutningen af 90'erne. Efter 2007 stiger værdien dog voldsomt. Dette skal ses i lyset af det chok, som aktiemarkedet i denne periode oplevede, da "*Lehmans brothers*" kollapsede, hvilket var startskuddet til den finansielle krise i 2007.

2.2 Guld som råvareinvestering

Råvarer kan ikke betragtes som en homogen gruppe af investeringer, der stiger og falder med den samme rate på samme tid. Råvarer falder ind under forskellige kategorier såsom afgrøder, husdyr, metaller, ædelmetaller og energi, hvor hver klasse er eksponeret overfor inflation, økonomisk vækst og global risiko på forskellige måder. Fra den finansielle krise startede og til markedet nåede et historisk lavpunkt i slutningen af 2009 var sølvprisen steget med 226 procent, mens guld kun var steget 76,67 procent. Disse procenter må siges at være høje for begge metaller, men de steg i denne periode af forskellige årsager. Guld og sølv bærer en del af de samme karakteristika, men sølv er langt mere følsomt overfor industriefterspørgsel sammenlignet med guld, hvilket gør, at de bevæger sig forskelligt af hinanden.

En af de store forskelle på guld og andre råvarer er guldets vigtighed som valuta eller opbakning af valuta (Jagerson & Wade, 2011). Selvom de fleste økonomier i dag har bevæget sig væk fra den officielle guldstandard, holder mange lande stadig guld i deres reserve, mens andre holder det indirekte ved at investere i den amerikanske dollar eller euroen.

2.3 De største investorer på guldmarkedet

Guldmarkedet består af flere store investorer, som alle kan yde en betydelig indflydelse på guldprisen.

De største aktører på markedet kan deles op i tre grupper:

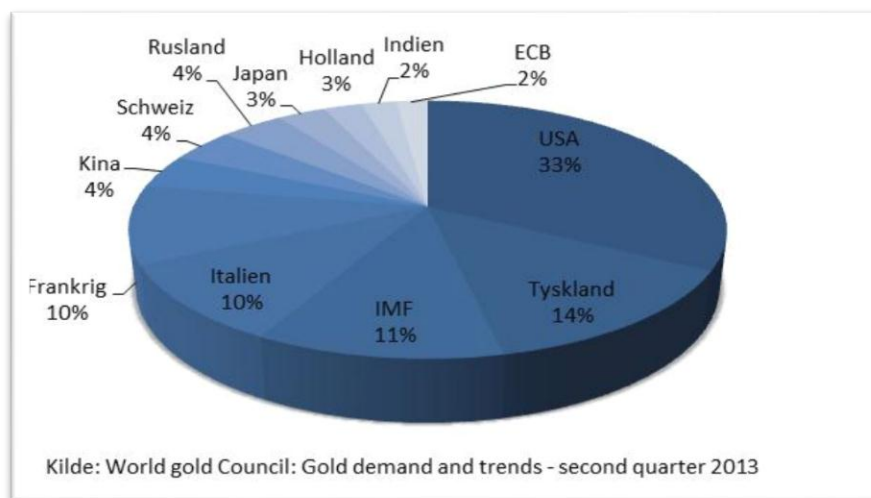
- Den offentlige sektor: som dækker over centralbanker, den internationale valuta fond (IMF) og andre regeringsaktører.
- Institutionelle investorer og fonde: herunder ETF'S (Exchange traded funds), hedge fonde, bullion banks (guldbarer banker) samt andre større investorer.
- Guldproducenter kan overlappe de to før nævnte kategorier, men der refereres her til private virksomheder, som er involveret i minedrift, udvinding samt videre raffinering af guld.

2.4 Centralbankerne

Centralbankerne tilbageholder likviditet i deres reserver for at kunne imødekomme deres udeståender. Disse reserver kan bestå af udenlandsk valuta samt andre aktiver. Centralbankernes guldreserve kan benyttes til udlån eller til betaling af internationale transaktioner. Gulds primære rolle i centralbankerne er dog på samme måde ens som for en langsigtet investor, der benytter guld til at diversificere sin portefølje. Centralbankerne bruger guld til at ”*gemme værdi*” og repræsenterer et aktiv, der kan benyttes til at styrke tilliden til pengeudbuddet og til at gennemføre monetær politik.

Udover at opkøbe guld kan centralbankerne også vælge at sælge ud af deres beholdninger. Dette medfører naturligt et større udbud af guld, som kan være med til at presse prisen nedad.

Centralbankerne kan derfor yde stor indflydelse på den globale guldpris. En del af de større centralbanker har dog forpligtet sig til at oplyse om, hvornår disse handler finder sted og hvor store mængder der handles, hvilket giver en del gennemsigtighed i markedet. Den vigtigste af disse aftaler er den såkaldte ”*The third Central Bank Agreement*” (World gold council, 2013), som løber frem til 2014 og dækker centralbankerne i EU, Sverige, Schweiz og IMF. Aftalen betyder, at disse centralbanker har forpligtet sig til individuelt maksimalt at sælge 400 tons guld årligt. Målet med aftalen har været, at forberede markedet på dette udbud, således at man til en hvis grad undgår store prisudsving på markedet (Jagerson & Wade, 2011). Figur 2.2 viser de tolv største guldbeholdninger af verdens centralbanker, målt i tons. Perioden er andet kvartal 2013.



Figur 2.2. Kilde: (World gold council, 2013)

Som man kan se på figuren, ligger den amerikanske centralbank (FED) inde med den klart største beholdning efterfulgt af Tyskland og IMF.

2.5 IMF

Som figur 2.2 viser, har IMF den tredje største guldbeholdning af verdens centralbanker. IMF har flere missioner, men nogen af de vigtigste er at yde hjælp til valutakurser, give lån til økonomier der er i krise og at stabilisere de internationale markeder. I september 2009 besluttede IMF at sælge 1/8 af deres guld beholdning, hvilket svarer til 403,3 tons, for at kunne fonde deres fortsatte operationer. Disse salg er dog i første omgang blevet foretaget til andre offentlige sektorer (centralbanker), så salget har ikke givet anledning til en stor forskydning i balancen mellem de store aktører på guldmarkedet (International monetary fund, 2013).

2.6 ETF's og Guldfonde

ETF's og guldinvesteringsfonde er nogle af de større aktører, selvom de sjældent opkøber eller sælger guld i markedet. ETF's fungerer som en aktie eller obligation, der kan investeres i, hvor ens investering sættes i en andel af fondens guldbeholdning. I slutningen af 2010 havde den amerikanske stat en beholdning på 8.133 tons, mens verdens største ETF, kaldet SPDR Gold Shares ETF (GLD) (SPDR Gold shares, 2013), holdte 1.299 tons, hvilket svarer til 16 % af den amerikanske stats beholdning. På verdensplan findes der flere ETF fonde, og tilsammen kan disse have en stor effekt på guldmarkedet. Når efterspørgslen fra individuelle og institutionelle investorer stiger, køber fonde mere guld op og udsteder herefter flere aktier. Disse opkøb øger den

aggregerede efterspørgsel, som kan have været en af årsagerne til den øgede guldpris de sidste par år.

Mange investorer vælger at holde guld fysisk, men ETF's er gennem de seneste år vokset i popularitet, fordi de giver investoren let adgang til guldmarkedet. Selvom guldprisen med sikkerhed vil stige og falde over tid, vil dette købs pres fra store grupper af investorer, som for 20 år siden havde begrænset adgang til guldmarkedet yde et hvis pres på prisen (Jagerson & Wade, 2011).

2.7 Bullion banks (guldbarer banker)

En af de mere komplicerede aktører på markedet, er de såkaldte *bullion banks*, centralbankerne og IMF har stærke bånd til disse private aktører. Guldbarer bankerne er private banker og tæller bl.a. Barclay's Capital, Deutsche bank AG London, Société Générale, HSBC, Goldman Sachs, JPMorgan Chase bank, Royal bank of Canada, The Bank of NovoScotia og UBS AG.

Disse banker er "*marketmakers*"⁵ på *the London Bullionmarket*, og er ansvarlige for guld "*fixing*" for store guld transaktioner. Guldbarer bankerne sørger for likviditet i markedet, hvilket gøres ved at geare markedet. Markedet fungerer på følgende måde: Hvis en guldbarer bank ønsker at sælge 10 tons guld i markedet, laver den en forespørgsel hos f.eks. den amerikanske centralbank om et lån på denne mængde guld. Dette er i princippet det samme, som sker når en aktie "*Short sælges*".

Centralbanken vil herefter blive betalt renter på det guld, som den har udlånt, mens guldbarer banken regner med at tjene penge på handlen af de 10 tons guld. Dette har stor effekt på det globale udbud af guld, da den amerikanske centralbank ikke opgiver, at den har udlånt denne mængde i deres balance, således at denne ikke ændres. Samtidig bliver køberen af de 10 tons guld talt med i det samlede udbud. Dette medfører, at der pludselig er et udbud på 20 tons guld i markedet, hvor der før kun var 10 tons. Gennemsigtigheden i dette marked er meget lav, så det vides ikke med sikkerhed hvor mange af disse transaktioner, der er talt dobbelt. Man kunne tro at denne usikkerhed er inkluderet i guldprisen, men dette vides ikke med sikkerhed, og der er stadig et vist spænd mellem det rapporterede udbud og det faktiske, hvilket kan påvirke guldprisen i positiv retning (Jagerson & Wade, 2011).

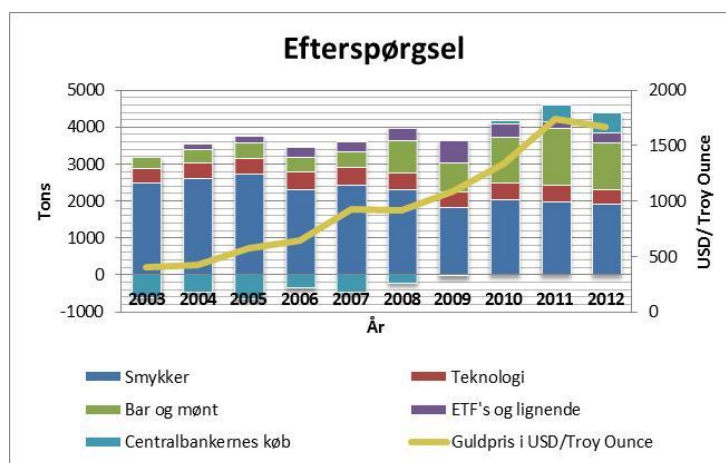
⁵ Et *broker-dealer* firma som påtager sig risiko ved at holde et vist antal aktiver, således at der kan handles i dette aktiv. Hver *marketmaker* konkurrer for kunde ordrer ved at udstede køb og sælg *quotes*, for et givet antal aktiver. Når en ordre er afgivet, sælger *marketmakeren* øjeblikkeligt ud af sin egen beholdning, eller forsøger at gennemføre en tilsvarende handel.

2.8 Smykke- og teknologiindustrien

Lidt over halvdelen af den aggregerede efterspørgsel efter guld stammer fra smykker. I perioder med høj økonomisk vækst vil denne forbrugerefterspørgsel stige, hvilket kan drive guldprisen op. Denne efterspørgsel er dog svær at måle præcist. Detail investorer køber også guld gennem bankerne eller investerer i barer og mønter (Jagerson & Wade, 2011). Efterspørgslen efter smykker stammer især fra asien, hvor Hong Kong har været blandt de førende aftagere de senere år. På samme måde som smykkeindustrien har teknologisektoren også en hvis rolle, hvor hovedparten af guld i denne sektor bliver brugt i elektronikbranchen. I 2011 var forbruget af guld i denne sektor på 320 tons, hvilket kan være med til at drive prisen opad (World gold council, 2013).

2.9 Guldproducenter

Guldproducenterne er en vigtig aktør på markedet. Hvis prisen på guld er høj, kan mineproduktionen udvides eller fastholdes, hvilket leder til et øget udbud af guld i markedet. Omvendt gælder det, at hvis prisen er lav, kan mineselskaberne tilbageholde produktionen for dermed at mindske udbuddet og øge efterspørgslen. Historisk har mineselskaberne været langsom om at reagere på prisændringer i markedet. Guldproducenterne har gennem de senere år været relativt stabile, hvilket hovedsageligt har virket positivt på guldprisen (World gold council, 2013). Dette skyldes ikke mindst, at producenterne ændrede deres hedging strategier af fremtidige priser i starten af 00'erne. Måden producenterne hedgede de fremtidige priser før i tiden var ved at accelerer udbuddet. Da man stoppede dette, blev en del af udbuddet taget ud af markedet (Jagerson & Wade, 2011).

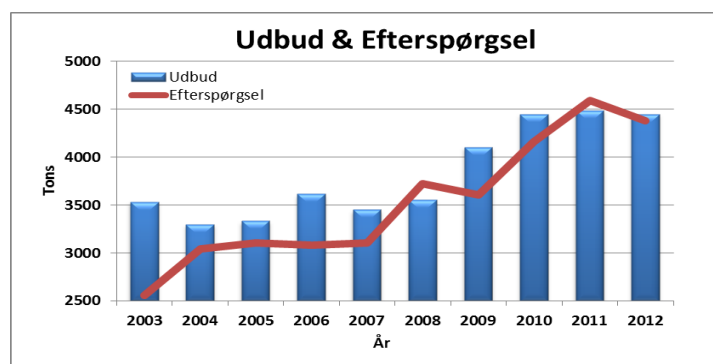


Figur 2.3 Kilde: World Gold Council, Gold demand trends Q2 2013; Bloomberg

Som figur 2.3 viser, følger guldprisen tilnærmelsesvis efterspørgslen. Specielt i den sidste periode fra 2009 til 2012 ses der en klar sammenhæng mellem efterspørgslen og guldprisen. Som man kan se på figuren, har efterspørgslen efter fysisk guld, i form af barer og mønter, været stigende gennem

hele perioden, mens efterspørgslen i smykkeindustrien har været faldende. Teknologisektoren har ligget på et stabilt niveau gennem hele perioden, mens centralbankerne i perioden fra 2003-2008 er gået fra at sælge ud af deres beholdninger, og omvendt i perioden 2010 – 2012 igen at øge efterspørgslen efter guld. Figuren viser samtidig at ETF's står bag en lille del af efterspørgslen på markedet. Denne har dog været stigende gennem perioden.

Figur 2.4 viser udbuddet og efterspørgslen i tons, i perioden fra 2003 til 2012:



Figur 2.4 Kilde: World Gold Council, Gold demand trends 2005-2012

Som man kan se på figuren, har udbuddet af guld været stigende over perioden. Især i perioden fra 2009 til 2012 har udbuddet været meget stigende og følger udviklingen i guldprisen. Incitamentet til at producere mere guld når prisen stiger ser derfor ud til at være til stede på markedet. I denne periode ses der samtidig også en stærk sammenhæng mellem udbuddet og efterspørgslen. Som man kan se indikerer figur 2.3 og 2.4 at der er en stærk sammenhæng mellem de tre variable, udbuddet, efterspørgslen og prisen på guld. Dette tilsiger, at selvom markedet for guld til en hvis grad er influeret af spekulation, er det stadig den økonomiske teori om udbud og efterspørgsel der i hovedtræk er prissættende på guldmarkedet (Abken, 1980).

Som beskrevet tidligere, kan de store aktører på markedet som centralbankerne, IMF og store fonde have en meget koncentreret effekt på guldmarkedet i visse perioder. Disse aktører kan i perioder overrumple efterspørgslen for smykker og investeringer. Dette skyldes, at en kraftig øget efterspørgsel fra disse aktører kan virke markant på udbuddet fra produktion, (mineselskaberne, og genbrugsguld), som igen kan lede til en lempelse i investeringerne fra den private sektor. Som figur 2.3 viser, er fordelingen mellem efterspørgsel fra smykke og teknologi-industrien nogenlunde ligeligt fordelt med efterspørgslen fra Centralbankerne, IMF, og de store fonde i perioden fra 2009-2012. Dette viser, at disse aktører igennem de senere år er begyndt at stå for en stadig større del af

efterspørgslen, som kan være medvirkende til at drive prisen op (World gold council, 2013).

2.10 Delkonklusion

Efterspørgslen efter guld kan inddeles i følgende efterspørgselskategorier, smykker, barer og mønt, centralbankerne, teknologi, samt ETF's og lignende. Som analysen viste står smykkeindustrien for den klart største efterspørgsel på markedet. Specielt i perioden fra 2003 til 2008 har smykkeindustriens efterspørgsel været dominerende. I samme periode kunne det ses, at centralbankerne havde en negativ efterspørgsel. Fra 2008, dvs. under den finansielle krise, begyndte centralbankerne igen at efterspørge guld samtidig med, at efterspørgslen efter barer og mønter steg voldsomt i perioden fra 2008 til 2012. I 2012 var fordelingen i efterspørgslen mere ligeligt fordelt, hvor smykkeindustrien kun stod for halvdelen af efterspørgslen, fra ellers havde at have været den dominerende part i starten af perioden. Det konkluderes samtidig, at ETF's og andre guld investeringsfonde kun stod for en meget lille del af efterspørgslen, samtidig med at teknologisektoren i hele perioden lå på et stabilt niveau. Som analysen også viste, kan centralbankerne og IMF have en meget koncentreret effekt på markedet i visse perioder, når de enten opkøber eller sælger ud af deres beholdninger. Analysen viste yderligere, at forholdet mellem udbuddet og efterspørgslen har stor indflydelse på guldprisen. Vi kan se, at der er sket et skift i de aktører der efterspørger guld efter 2008. Resultatet ligger sig derfor op af Abkens (Abken, 1980), og vi konkluderer, at en stor del af variationen guldprisen stammer fra udbuddet og efterspørgslen.

3.0 Faktorer der har indflydelse på guldprisen

Før modellen opstilles, testes først de forskellige faktorer, som kan have indflydelse på guldprisen, samt hvilke faktorer modellen skal indeholde. Herefter opstilles og testes modellen, for til sidst at konkludere hvilke faktorer, der kan have indflydelse herpå.

3.1 En opsummering af tidligere research

I Dr. Sindhu's analyse (Sindhu, 2013) af faktorer der har indflydelse på guldprisen, finder han, at der er en invers sammenhæng mellem guldprisen og inflationen, men gør her opmærksom på at en stigning i inflationen fører til, at investorer investerer mere i guld, da denne traditionelt er blevet brugt som en inflationshedge.

Tassel og Baker (Baker A & Tassel van C, 1985) finder, at der er en lignende sammenhæng i deres artikel, og viser at guldprisen til dels afhænger af inflationen i dollar, samt prisen på øvrige råvarer

på markedet. Lee, Wang og Thi (Kaun-Min, Yuan-Ming, & Thanh-Binh Nguyen, 2011) analyserer i deres undersøgelse sammenhængen mellem inflationen (CPI) og guldprisen (I dollar og Yen) i perioden fra 1971 til 2010. De finder, at der er en sammenhæng her, men at den ikke er ligeså signifikant som rapporteret tidligere. De viser, at guld kun i meget svag grad kan bruges som en hedge imod inflation på det Japanske marked. Samtidig finder de at i perioder med et lavt prismomentum, er guld en dårlig inflationshedge, mens guld i perioder med højt prismomentum fuldt ud hedger for inflationen. På baggrund af ovenstående vil inflationen indgå i vores model.

Baur og Lucey (Baur & Lucey, Is gold a safe haven? An analysis of stocks, bonds and gold, 2010) kigger i deres undersøgelse på, om guld kan fungere som en hedge imod obligationer og aktier. Deres undersøgelse dækker over tre markeder, det Tyske (Euro), det engelske (Pund) og det amerikanske (dollars). Deres undersøgelse viser, at guld kan bruges som en hedge imod fald på aktiemarkederne, men fungerer ikke som en hedge i forhold til obligationer. Deres undersøgelse viser ydermere, at dette resultat er gældende for alle tre markeder. De finder samtidig ud af, at hedging egenskaberne er begrænset til et meget kort tidsinterval, omkring 15 dage, og viser at investorerne køber guld på dage med store negative afkast på aktiemarkederne, og sælger ud igen, når tilliden til markedet er genoprettet. Et lignende resultat kommer David Hillier, Poul Draper og Robert Faff (Hillier, Draper, & Faff, 2006) frem til i deres analyse af sølv, guld og platin, hvor de fremhæver disse metaller diversificeringsegenskaber. De viser ligeledes metallernes hedging egenskaber i perioder med høj volatilitet på aktiemarkederne (S&P 500, EAFE og MSCI) og konkluderer, at en portefølje indeholdende en moderat andel af disse klarer sig bedre end porteføljer bestående udelukkende af finansielle aktiver.

Dermott og Baur (Baur & Mc Dermott K, Is gold a safe haven? International evidence, 2010) kommer i deres analyse frem til, at guld kan virke som et *"Safe haven"*⁶ for investorer i perioder med store chok på aktiemarkederne. De fremhæver især gulds egenskab som *"Safe haven"* under finanskrisen og krakket på Wallstreet i 1987. De konkluderer dog samtidig, at denne egenskab kun er til stede på de vestlige aktiemarkeder (Eurozonen og USA), og kun i meget svag grad på de fremspirende aktiemarkeder i udviklingslandene. Jeffrey (Jaffe F, 1989) gør i sin analyse af gulds diversificeringsegenskaber fra 1971 til 1987 rede for, hvordan en portefølje bestående af 5 % guld mindsker risikoen herpå og forøger afkastet. Han benytter i sin analyse S&P 500 og EAFE.

⁶ Et *"safe haven"* er af Baur og Dermott defineret som: *"Et stærkt (svagt) safe haven er defineret som et aktiv der er negativt korreleret (eller u-korreleret) med et andet aktiv eller en portefølje, i visse perioder, altså perioder med faldende aktiemarkeder"*. (Baur & Mc Dermott K, Is gold a safe haven? International evidence, 2010)

Med udgangspunkt i ovenstående vil S&P 500 indekset blive brugt i vores model til at teste sammenhængen mellem aktiemarkedet og guldprisen.

Collin (Lawrence, 2003) finder i hans analyse frem til, at der ikke er nogen signifikant korrelation mellem makroøkonomiske variable og guld, hvorimod at der er en høj korrelation mellem finansielle aktiver (Her målt via Dow Jones, S&P 500 og 10 års statsobligationer) og makroøkonomien. Han finder samtidig frem til, at makroøkonomiske variable har en større effekt på andre råvarer såsom zink, kobber og aluminium. Han finder ligeledes, at guld er mindst korreleret med aktier og obligationer sammenlignet med andre råvarer. Til sidst konkluderer han, på baggrund af ovenstående, at guld kan fungere til diversificering i en portefølje, og at den er et godt aktiv til at ”holde på værdi” i økonomiske krisetider. Vi vil derfor i vores analyse også kigge på forholdet mellem guld og obligationer for her at se, om der er en sammenhæng mellem renten og prisen på guld.

Abken (Abken, 1980) konkluderer derimod i hans analyse, at en stor del af prisen på guld kan forklares med investorenes forventninger til den fremtidige spot pris. Han argumenterer for, at guld kun til en vis grad adskiller sig fra andre råvarer, man kan have liggende på lager, og at de underlæggende mekanismer, der driver prisen, derfor er omfattet af den gængse økonomiske teori om udbud og efterspørgsel.

Som det tidligere er vist, er udbuddet af guld relativt statisk, vi vil derfor ikke inddrage denne faktor i vores model.

3.2 Data

Givet den tidligere research er nedenstående faktorer valgt til opbygning af modellen. For de enkle faktorer benyttes følgende inputs. Alle data er på månedlig basis i perioden fra d. 1. januar 1986 til d. 1. april 2013, hvilket er 328 observationer. Baggrunden for at vælge denne tidshorisont er, at det kun er muligt at fremskaffe data for alle variablerne i denne periode. Modellen er bygget som en tidsserieanalyse.

Guld (G)⁷: Guld er angivet som ”Gold fixingpriceby London Bullionmarket, in US Dollars”, som er den mest anvendte.

⁷Bloomberg

S&P 500 (S)⁸: S&P 500 er angivet som et prisindeks. Vi benytter her S&P 500 som et mål for det generelle aktiemarked, da tidligere research har vist, at resultaterne for de vestlige aktiemarkeder næsten er identiske.

Inflationen (I)⁹: Inflationen er målt via det amerikanske prisindeks "Consumer Price index" (CPI). Mere bestemt "Consumer priceindex, for all urban consumers".

Obligation (C)¹⁰: Renten er defineret via en 3 måneders amerikansk obligation (T-bill). Her benyttes en 3 måneders T-bill, mens der senere i opgaven, når der kigges på daglige afkast benyttes en 1 årig T-bill. Dette skyldes, at vi ikke kan fremskaffe data tilstrækkeligt langt nok tilbage i tiden, når der kigges på de daglige data. Det antages derfor, at disse illustrerer renten lige godt.

3.3 Analyse

En tidsserieanalyse bygger på følgende antagelser, som der alle skal tages højde for, således at T- og F-statistikken kan blive benyttet til at teste de forskellige variabler i modellen. Ts.1 til Ts.3 sikrer at OLS estimatet for regressionen er "BLUE" (The best linear unbiased estimator) ud fra den klassiske lineære model (CLM). Dette sikrer, at den model der benyttes, er den der passer og illustrerer sammenhængen i dataene bedst. Antagelserne bygger på de klassiske Gaus Markov antagelser, som her er videreudviklet specielt til tidsseriedata (Wooldridge, 2009). Analyserne er alle testet med et 95% konfidensinterval. Til brug i analysen har vi benyttet SAS 9.4 samt SAS Enterprise guide 6.1. Antagelserne som vil blive testet er som følger:

Antagelse 1. TS.1. Modellen er lineær i sine parametre.

Antagelse 2. TS.2. Ingen perfekt kollinearitet. Hvilket betyder at ingen af de uafhængige variable er konstante, eller er en perfekt lineær kombination af hinanden.

Antagelse 3. TS.3. Homoskedasticitet. Denne antagelse betyder, at de ikke-observerbare variable som fanges af fejleddet, alle har en konstant varians over tid.

Antagelse 4. TS.4. Ingen seriekorrelation. Hvilket betyder, "Betinget af X, skal fejleddene i to forskellige tidsperioder være ukorrelerede". Denne antagelse ligger sig tæt op af TS.3.

⁸Bloomberg

⁹<http://www.research.stlouisfed.org/fred2/series/CPIAUCSL?cid=9>

¹⁰<http://www.research.stlouisfed.org/fred2/series/TB3MS>

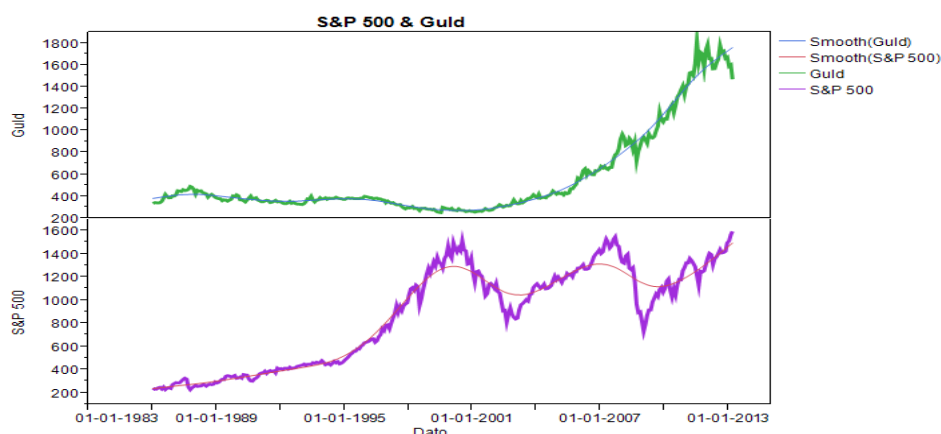
Antagelse 5. TS.5. Normalitet. Denne antagelse betyder, at OLS estimatet følger en normalfordeling, således at T- og F-statistikken kan benyttes (Wooldridge, 2009).

Inden vi tester de ovenstående betingelser, er det vigtigt at sikre, at tidsserien ikke er stationær. Dette er en af de vigtigste antagelser og går forud for de andre. At tidsserien er stationær betyder grundlæggende, at tidsseriens middelværdi, varians og autokovarians vil være den samme ligegyldigt hvilket interval i tidsserien, der måles på. Hvis tidsserien ikke opfylder ovenstående betingelse, siges den at være ”Ikke-stationær”. Dette betyder at middelværdien og/eller variansen vil afhænge af måletidspunktet. Derfor er det vigtigt at sikre sig, at tidsserien er stationær, da den underlæggende undersøgelse kun vil være gældende for den periode i dataene man undersøger. Man kan derfor ikke i en ”ikke-stationær” tidsserie sige noget generelt om den tidsserie der undersøges, men derimod kun for den periode der undersøges.

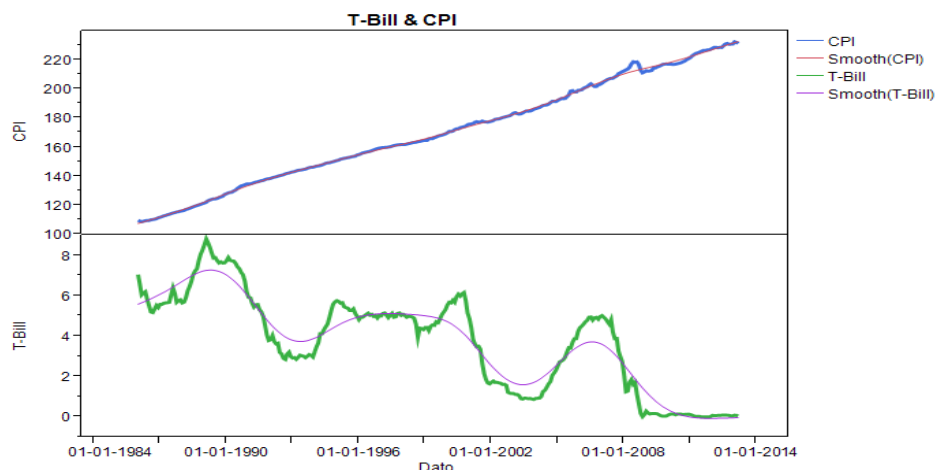
For at teste om tidsserien er stationær, udføres der tre tests, en *grafiskanalyse*, en *ACF-Test*, *korrelogram* og *enhedsrods test (ADF)* (Gujariti N, 2003).

3.3.1 Grafiskanalyse

Nedenfor er graferne for de valgte variable vist. Målet er at se, om de har en opad eller nedadgående trend. Udover at teste for om tidsserierne er stationære, er en grafiskanalyse også vigtig, da man kan drage forkerte konklusioner omkring korrelationen mellem tidsserier, hvis de *trender* i den samme retning (Wooldridge, 2009).



Figur 3.1 Kilde: Bloomberg



Figur 3.2 Kilde: Bloomberg og Saint louis Federalreserve

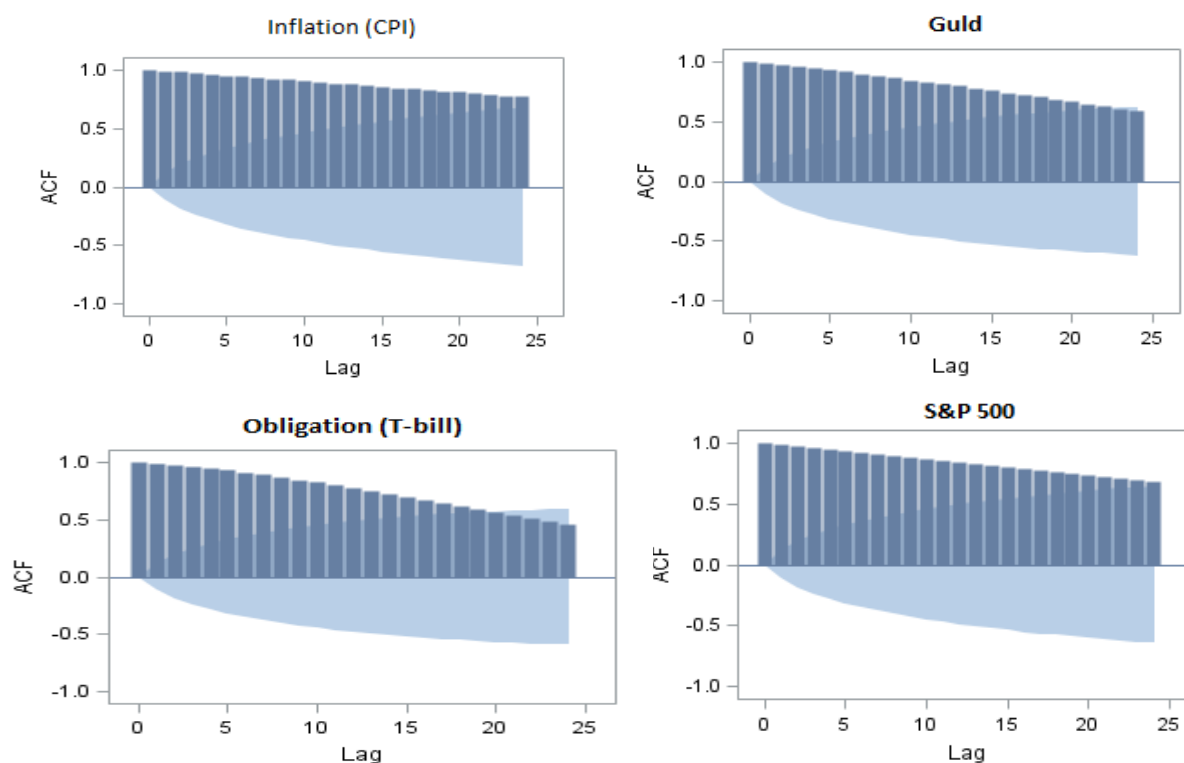
Som man kan se på figurene ovenfor, er der en klar trend at spore. Det ses at guldprisen og S&P 500 har en opadgående trend. Det samme gør sig gældende for inflationen (CPI). Renten på den 3 måneders amerikanske obligation (T-bill) har derimod vist en nedadgående trend i perioden. Der er derfor en stærk indikation af, at tidsserien ikke er stationær. Sammenhængen testes hernæst via et korrelogram.

3.3.2 Korrelogram

For at finde yderligere bevis for om punkterne er stationære eller ej, således at disse ikke baseres på en subjektiv antagelse, udføres nu en ACF-test (Auto-korrelation). ACF-testen siger at ved lag k (periode k tilbage i tiden), er ACF givet ved pK , som er defineret som følgende:

$$pK = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{Kovariansen ved lag } k}{\text{Variansen}} \quad (3.1)$$

Da variansen og kovariansen er målt i de samme enheder, bliver pK enhedsløs og er derfor kun et tal, der ligger mellem -1 og 1 ligesom en normal korrelations koefficient. Ved at plotte pK mod k fremkommer et korrelogram. Nedenfor er korrelogrammerne for de 5 tidsserier vist.



Figur 3.3 Kilde: Egen tilvirkning

Korrelogrammerne i figur 3.3, er lavet med lags af en længde på 109. Valg af længde i lagget er et empirisk spørgsmål, men det anbefales at man bruger et lag på $1/3$ af antallet af observationer (Gujariti N, 2003).

Som man kan se falder autokorrelations-koefficienten og bevæger sig mod nul i takt med, at lagget øges. På figurerne ovenfor er der kun vist de første 25 lags, men ved grafisk at øge lagget til 109 ses den samme tendens blot endnu stærkere.

Figur 3.3 viser derfor, at tidsserierne er ikke-stationære, enten i middelværdien og/eller i variansen.

3.3.3 AugmentedDickey-Fuller enhedsrodstest (ADF)

ADF-testen bruges nu til endegyldigt at kunne konkludere om tidsserierne er stationære og derved har enhedsrødder. Nulhypotesen bliver i ADF-testen:

$$H_0: \delta = 0, \quad (3.2)$$

Hvilket betyder, at ρ , som vi testede før, er større end eller lig med 1, da $(\rho - 1) = \delta$, og altså gør den ikke-stationær, hvilket betyder at tidsserierne skal transformeres.

Alternativhypotesen bliver derfor:

$$H_1: \delta < 0 \quad (3.3)$$

Hvilket betyder, at tidsserien er stationær og ikke kan transformeres.

ADF- testen består nu i at estimere følgende ligning:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t^{11} \quad (3.4)$$

Hvor ϵ_t er et "white noise" fejllad og $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$, $\Delta Y_{t-2} = (Y_{t-2} - Y_{t-3})$ osv. Antallet af laggede forskelle der skal inkluderes bestemmes empirisk, men ideen er at inkludere så mange, at fejlladet ikke længere udviser seriekorrelation.

Nedenfor er resultaterne af ADF testen vist:

	GULD				Inflation (CPI)			
Type	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau
Zero mean	0	16.972	1.74	0.9804	0	0.6861	12.82	0.9999
	1	19.420	2.42	0.9965	1	0.6779	6.46	0.9999
	2	20.118	2.68	0.9984	2	0.6841	7.50	0.9999
Single mean	0	10.926	0.64	0.9907	0	0.0193	0.07	0.9634
	1	17.095	1.22	0.9983	1	-0.1173	-0.29	0.9233
	2	19.122	1.47	0.9992	2	-0.0979	-0.30	0.9217
Trend	0	-20.110	-0.85	0.9586	0	-86.830	-2.11	0.5378
	1	-0.8749	-0.46	0.9850	1	-213.502	-3.24	0.0791
	2	-0.5356	-0.31	0.9902	2	-142788	-2.62	0.2713

Tabel 3.1 Kilde: Egen tilvirkning

	Obligation (T-Bill)				S&P500			
Type	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau
Zero Mean	0	-16.089	-1.95	0.0488	0	10.263	1.30	0.9517
	1	-22.282	-1.61	0.1017	1	0.9669	1.12	0.9324
	2	-19.392	-1.38	0.1572	2	0.9911	1.21	0.9420
Single Mean	0	-0.9629	-0.62	0.8620	0	-13.563	-0.76	0.8296
	1	-31.246	-1.20	0.6749	1	-16.082	-0.82	0.8121
	2	-27.536	-1.04	0.7402	2	-14.175	-0.76	0.8293
Trend	0	-32.648	-1.27	0.8935	0	-66.587	-1.82	0.6961
	1	-93.270	-2.14	0.5205	1	-80.162	-1.98	0.6110
	2	-100.028	-2.22	0.4759	2	-73.276	-1.88	0.6643

Tabel 3.2 Kilde: Egen tilvirkning

¹¹Damodar N. Gujarati (2003), Basic Econometrics, 4th edition, s. 817, ligning: 21.9.9

For at vurdere om tidsserierne er stationære, testes disse på følgende måde. Som nævnt tidligere benyttes der et 95% konfidensinterval. De kritiske værdier er herefter fundet via en Tau- tabel¹². Tau-værdierne bruges her, da antagelsen om at nulhypotesen = 0 gør, at den normale t-distribution ikke kan benyttes. Vi er derfor nødsaget til at benytte Tau-distributionen til at vurdere, om resultaterne er signifikante.

Tau-værdier	
	5%
Zero mean	-1,9439
Single mean	-2,8947
Trend	-3,4614

Tabel 3.3 Kilde: (Vijay & A. K. Md, 2001)

For at teste om serierne er stationære kigges der først på Rho. Hvis denne har et negativt fortegn, betyder det, at vores estimerede ρ (Rho) er mindre end 1. Er den derimod større end 1, er serien *ikke-stationær*. Det undersøges derfor, om ρ er statistisk signifikant mindre end 1. Af p-værdierne kan det ses, at disse er væsentligt større end 0,05, som er det signifikansniveau, der er valgt. Dette betyder, at hvis Tau-værdien, i absolutte værdier, er større end den estimerede værdi, kan nulhypotesen accepteres, og alternativhypotesen forkastes, og der er dermed enhedsrødder til stede i tidsserien.

Med udgangspunkt i ovenstående kan vi derfor konkludere, at alle tidsserierne er *ikke-stationære*. Vi forkaster derfor alternativhypotesen og accepterer nul-hypotesen.

Sammenholdt med vores resultater fra den grafiske test og korrelogrammerne kan vi konkludere, at tidsserierne skal omformes for at gøre dem stationære.

3.3.4 Transformerings af tidsserien

For at gøre tidsserien stationær tages forskellen mellem periode t og t-1. For guldprisen og S&P 500 tages den naturlige logaritme. Ved at tage den naturlige logaritme bliver variablene transformeret til elasticiteter. Elasticiteterne måler ændringen i procent af den afhængige variabel ved en 1% ændring i de uafhængige variable. Samtidig vil elasticiteten gøre tidsserier, der udviser en eksponentiel vækst, lineære (Wooldridge, 2009). For inflationen (CPI) og obligationen (T-bill) er

¹²Damodar N. Gujarati (2003), Basic Econometrics, 4'th edition, s. 975, tabel d.7

det kun forskellen fra periode t til t-1 der benyttes, da disse allerede er opgivet i procenter. Vi får derfor følgende udtryk.

$$\Delta GULD(S\&P) = \ln(Y_t - Y_{t-1}) \quad (3.5)$$

$$\Delta Inflation(Tbill) = (Y_t - Y_{t-1}) \quad (3.6)$$

ADF-testen fortages igen for at teste, om transformationen gør tidsserierne stationære.

Guld					Obligation (T-bill)				
Type	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau	Type	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau
Zero Mean	0	-361.517	-20.03	<.0001	Zero Mean	0	-170.084	-10.71	<.0001
	1	-386.048	-13.78	<.0001		1	-161.335	-9.06	<.0001
	2	-330.898	-10.33	<.0001		2	-875.473	-6.35	<.0001
Single Mean	0	-365.478	-20.24	<.0001	Single Mean	0	-171.997	-10.77	<.0001
	1	-401.666	-14.03	<.0001		1	-163.999	-9.11	<.0001
	2	-359.950	-10.58	<.0001		2	-890.605	-6.37	<.0001
Trend	0	-369.540	-20.43	<.0001	Trend	0	-172.011	-10.76	<.0001
	1	-418.750	-14.27	<.0001		1	-164.087	-9.10	<.0001
	2	-394.951	-10.84	<.0001		2	-892.081	-6.37	<.0001

Tabel 3.4 Kilde: Egen tilvirkning

Inflationen (CPI)					S&P500			
Type	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau	Lags	Rho	Tau	Pr < Tau
Zero Mean	0	-123.060	-8.66	<.0001	0	-296.704	-16.53	<.0001
	1	-135.380	-8.18	<.0001	1	-316.633	-12.60	<.0001
	2	-885.858	-6.21	<.0001	2	-261.174	-9.61	<.0001
Single Mean	0	-190.467	-11.46	<.0001	0	-301.910	-16.76	<.0001
	1	-291.969	-11.95	<.0001	1	-331.619	-12.87	<.0001
	2	-279.010	-9.83	<.0001	2	-284.311	-9.89	<.0001
Trend	0	-190.430	-11.44	<.0001	0	-302.816	-16.78	<.0001
	1	-291.781	-11.93	<.0001	1	-334.233	-12.89	<.0001
	2	-278.676	-9.81	<.0001	2	-288.627	-9.92	<.0001

Tabel 3.5 Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af tabellerne, er Rho(ρ) nu negativ for alle tidsserierne. P-værdierne for disse er samtidig signifikante på et 5% signifikansniveau. Da P-værdierne er mindre end 0,05 forkastes nulhypotesen, hvilket betyder, at tidsserierne ikke skal transformeres og dermed er stationære. Hvis man kigger på Tau-statistikken og sammenholder den med de kritiske værdier, ses det, at de kritiske Tau-værdier (i absolutte størrelser) er mindre end de estimerede. Dette betyder, at tidsserierne nu er blevet gjort stationære. Vi kan derfor forkaste nulhypotesen og accepterer alternativhypotesen.

3.4 Model

Den model der nu opstilles har lag i de forklarende variable. Dette skyldes, at prisen på guld i dag ofte er en direkte konsekvens af prisen i går, eftersom vi bruger finansielle tidsseriedata pr. måned (Wooldridge, 2009). Da det i modellen er guld, der skal måles på, vil alternativ investeringerne her blive obligationer og S&P 500. Disse vil i regressionsligningen blive opstillet med et lag af 1 periodes varighed. De laggede variable kan derfor beskrives på følgende måde,

$G_{t-1}(\text{Guld}); C_{t-1}(\text{Renten}(\text{Målt via } T - \text{bill})); S_{t-1}(\text{\&P500})$. Inflationen medtages ikke, da dette ikke er en alternativ investering. Vores funktion kommer derfor til at se ud som følger:

$$G_t = f(G_{t-1}, C_t, C_{t-1}, S_t, S_{t-1}, I_t) \quad (3.7)$$

En regressionsanalyse foretages nu herpå for at finde ud af, hvordan de forklarende variable har indflydelse på guldprisen. Modellen viser derfor, hvordan guldprisen i dag er influeret af guldprisen en periode tilbage, renten (til t og $t-1$), aktiemarkedet (til t og $t-1$) og inflationen. Tidligere anvendtes den naturlige logaritme til guldprisen og aktiemarkedet, mens forskellen fra en periode til den næste blev brugt til renten og inflationen. Dette er der ikke blevet lavet om på i den følgende regressionsligning. Disse transformeringer gælder stadig for alle variable i modellen. På baggrund af de ovenstående variable opstilles regressionsligningen nu:

$$G_t = \beta_0 + \beta_1 G_{t-1} + \beta_2 C_t + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 S_t + \beta_5 S_{t-1} + \beta_6 I_t + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

I økonometri kaldes ovenstående model for "*en bestemt distribueret lag model*". Dette skyldes, at det i variablene er specificeret hvor mange lags, der skal være. Havde der derimod været uendeligt mange lags, havde modellen været "*en uendeligt distribueret lag model*" (Gujariti N, 2003).

3.4.1 Test af model

Først beregnes modellen for at finde ud af, hvor meget denne kan forklare af guldprisen. Dernæst testes det, om modellen overholder antagelserne, som er beskrevet tidligere.

3.4.2 Regression

Nedenfor er resultatet af regressionen vist:

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.0101	0.003073	3.29	0.0011
LN S&P	1	-0.0707	0.0531	-1.33	0.184
Delta CPI	1	-0.0112	0.004858	-2.3	0.0222
Delta T bill	1	0.006912	0.0121	0.57	0.5669
LN Guld_t-1	1	-0.1124	0.0559	-2.01	0.0453
LN S&P_t-1	1	-0.051	0.053	-0.96	0.3367

Tabel 3.6 Kilde: Egen tilvirkning

Root MSE	0.04344	R-Square	0.0396
Dependent Mean	0.00451	Adj R-Sq	0.0246
Coeff Var	962.7453		
F-value	2.64	Pr>F	0.0233

Tabel 3.7 Kilde: Egen tilvirkning

Nulhypotesen siger her, at hvis de enkelte variable er lig nul, ($\beta_0 = 0; \beta_1 = 0; \beta_2; \beta_3 = 0; \beta_4 = 0; \beta_5 = 0; \beta_6 = 0; \beta_7 = 0; \beta_8 = 0$) har variablene ingen effekt på guldprisen (Wooldridge, 2009).

Dette betyder, at hvis p-værdierne er mindre end 0,05, kan vi forkaste nulhypotesen.

Ud fra estimerne, kan det ses, at den laggede guldpris og inflationen er signifikante på et 5 % signifikansniveau, eftersom p-værdierne er mindre end 0,05. For de andre variable, kan det ses, at disse ikke er signifikant forskellige fra 0, da alle p-værdierne er større end 0,05. Dette betyder, at det kun er den laggede guldpris og inflationen, der kan forklare variationen i guldprisen.

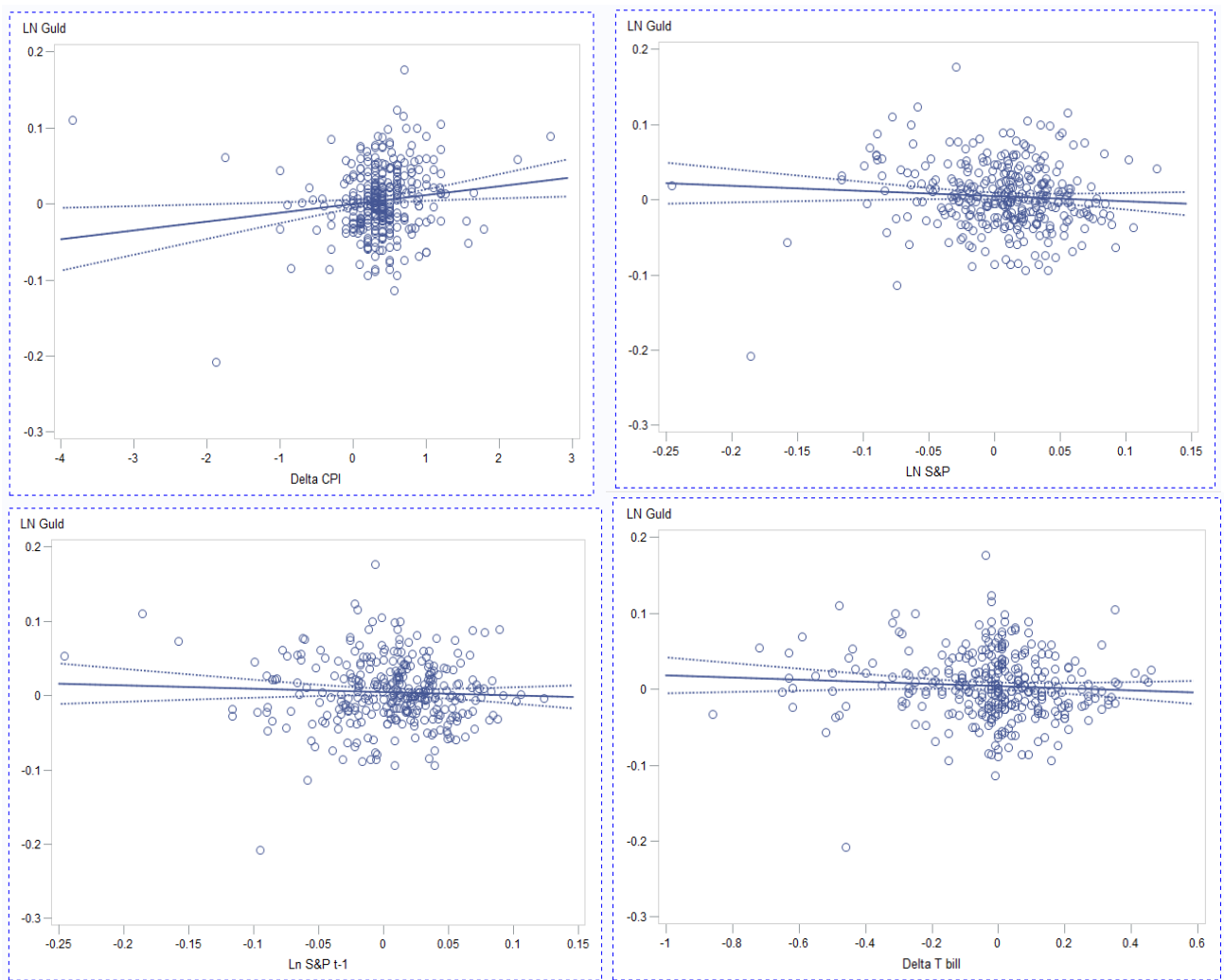
Fra R^2 kan det ses, at modellen kun forklarer ca. 4% af variationen i guldprisen.

F-statistikken viser derimod, at nulhypotesen som siger at $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 0$, kan afvises da F-statistikken er højere end den kritiske værdi, og dennes p-værdi er lavere end 0,05 (Wooldridge, 2009). Nulhypotesen for F-statistikken kan derfor forkastes, hvilket betyder, at variablene i regressionen alle er forskellige fra 0. Modellen har derfor en god forklaringsfaktor mht. guldprisen, og dermed forklarer variablerne en del af variationen heri.

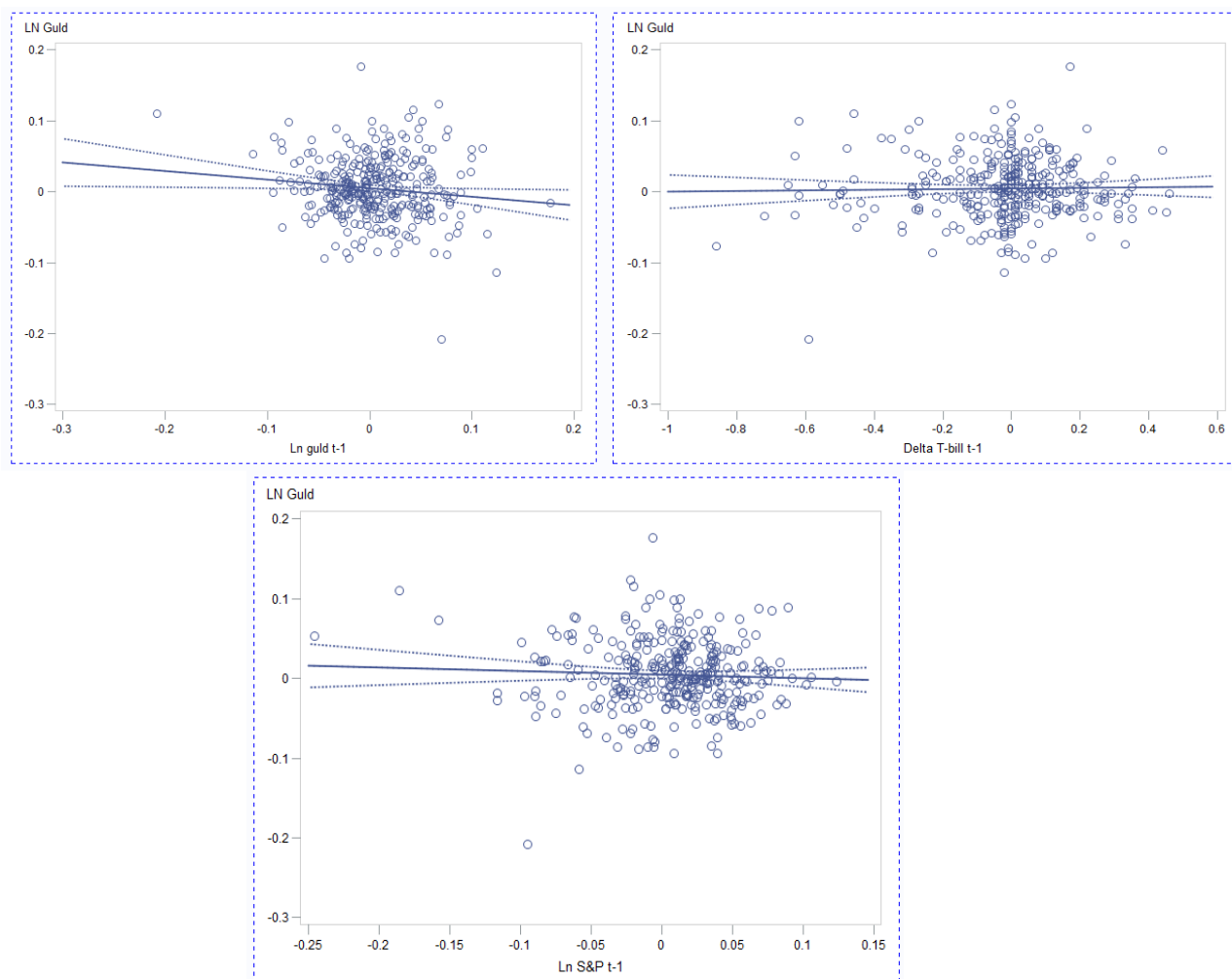
For at teste hvor præcis modellen er, testes de 6 antagelser som blev opstillet tidligere.

3.4.3 Ts.1 (Modellen er lineær i sine parametre)

For at teste om modellen er lineær i sine parametre, plottes de forklarende variable nu op imod den afhængige variabel for at teste om der er en lineær sammenhæng.



Figur 3.4 *Egen tilvirkning*



Figur 3.4 fortsat

Som det fremgår af figur 3.4 er alle variablene blevet gjort lineære. Sammenlignes denne med figur 1 i bilag 2 kan man se, at transformeringen til logaritmiskskala har gjort, at funktionerne ikke længere udviser en konkav, konveks eller eksponentiel stigning. På baggrund af bilag 2 og figur 3.4 konkluderes det derfor, at figurerne er lineære. Der testes hernæst for multikollinearitet.

3.4.4 Ts. 2. (Ingen perfekt multikollinearitet)

Ingen perfekt multikollinearitet betyder, at ingen af de uafhængige variable må være konstante, og der er ikke et eksakt lineært forhold imellem dem. Overholder modellen ikke dette, siges der at være *perfekt kollinearitet*. Det er her vigtigt at gøre det klart, at enkelte variable i modellen godt kan korrelerer med hinanden, så længe de ikke alle gør det. Generelt i regressionsanalyser vil det også forventes, at der mellem nogle af variablene eksisterer et lineært forhold (Wooldridge, 2009).

Til at teste for multikollinearitet benyttes et "*betingelsesindeks*". Nedenfor er SAS outputtet vist.

Collinearity Diagnostics								
Number	Eigenvalue	Condition Index	Proportion of Variation					
			Intercept	LN S&P	Delta CPI	Delta T bill	LN Guld_t-1	LN S&P_t-1
1	1.71272	1	0.15775	0.02548	0.15301	0.00359	0.02727	0.02099
2	1.16628	1.21183	4.82E-05	0.14359	0.000991	0.13797	0.28109	0.26175
3	1.0177	1.29728	0.000126	0.29845	0.0276	0.57054	0.03257	0.00308
4	0.88422	1.39176	0.000301	0.22157	0.01967	0.15359	0.03282	0.65411
5	0.84123	1.42688	0.05252	0.3097	0.02277	0.05795	0.61267	0.04578
6	0.37785	2.12904	0.78925	0.00121	0.77597	0.07636	0.01358	0.01429

Tabel 3.8 Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra Eigen værdierne i tabellen ovenfor, kan betingelsesnummeret k nu udledes, som er defineret som:

$$k = \frac{\text{Maksimum Eigen værdi}}{\text{Minimum Eigen værdi}} \quad (3.9)$$

Og hvor betingelsesindekset (CI) er defineret som:

$$CI = \sqrt{\frac{\text{Maksimum Eigen værdi}}{\text{Minimum Eigen værdi}}} = \sqrt{k} \quad (3.10)$$

Det gælder hernæst, at hvis k antager en værdi, der ligger mellem 100 og 1000, er der moderat til stærk multikollinearitet, og hvor $k > 1000$ siges der at være stærk multikollinearitet.

Alternativt kan det ses, at hvis $CI (= \sqrt{k})$ antager en værdi mellem 10 og 30, er der moderat til stærk multikollinearitet, og hvis $CI > 30$ siges der at være stærk multikollinearitet (Gujariti N, 2003).

Den markerede værdi i tabel 3.8 angiver værdien for CI indekset. Som det kan ses er $2,12904 < 10$, og det kan derfor konkluderes, at der er meget svag multikollinearitet i modellen. Det konkluderes derfor, at dette ikke er et problem.

3.4.5 TS.3. (Homoskedasticitet)

Antagelsen om ingen heteroskedasticitet er følgende: $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ hvilket betyder, at hvert af de stokastiske fejllæ, ε_i , sandsynligvis har deres egen varians. Konsekvensen af at denne betingelse ikke er opfyldt er, at OLS estimatet ikke er BLUE (Best lineær unbiased estimator), og at OLS

estimatet af variansen $\sigma_i^2 = \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-k}$ er forudindtaget.

Hvis fejleddene (ε_i) er heteroskedastiske, betyder det, at OLS estimatet leder til upræcise t- og F-statistikker, hvilket kan lede til forkerte konklusioner (Wooldridge, 2009).

For at teste modellen for homoskedasticitet benyttes ”White’s testen”.

For at illustrere den grundlæggende tanke bag denne model, betragtes nu følgende regression med tre variable:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i \quad (3.11)$$

Ud fra denne regression estimeres residualerne ε_i .

Hernæst estimeres (Kontrol) regressionen:

$$\varepsilon_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + \alpha_4 X_{4i} + \alpha_5 X_{5i} + \alpha_6 X_{6i} + \gamma_i \quad (3.12)$$

Hvilket betyder, at de kvadratiske residualer fra den originale regression er regresseret på de originale X-variable, deres kvadratiske værdier samt krydsproduktet af regressionerne. Ud fra kontrolregressionen findes R^2 .

Nulhypotesen postulerer nu, at under homoskedasticitet (ingen heteroskedasticitet) kan det vises, at antallet af observationer n ganget med R^2 fra kontrolregressionen asymptotisk følger Chi^2 fordelingen med df , hvor df er lig med antallet af variable i kontrolregressionen. Dette betyder at:

$$Q = n * R^2 \sim \chi^2 d \quad (3.13)$$

Det kan ud fra ovenstående herefter konkluderes, om der er heteroskedasticitet. Hvis Chi^2 værdien fra ovenstående ligning er større end den kritiske værdi til det givne signifikansniveau, siges der at være heteroskedasticitet (Gujarati N, 2003).

Testen udføres nu i SAS, hvor hypoteserne er som følger:

H_0 : Ingen heteroskedasticitet (homoskedasticitet)

H_1 : Heteroskedasticitet

Nedenfor er test resultaterne for kontrol regressionen vist:

Root MSE	0.04344	R-Square	0.0396
Dependent Mean	0.00451	Adj R-Sq	0.0246
Coeff Var	962.7453		
F-value	2.64	Pr>F	0.0233

Tabel 3.9 Kilde: Egen tilvirkning

Fra ligningen ovenfor ses det at: $Q = 326 * 0,0396 = 12,9096 > X_{0,95}^2(6) = 1,635$ (som er fundet via en χ^2 tabel). Nulhypotesen som tilsiger, at der er homoskedasticitet forkastes, og alternativhypotesen accepteres. Heteroskedasticitet er derfor til stede i modellen, hvilket bevirker, at standardfejlene (s.e.) i parametrene er upræcise.

Når der er heteroskedasticitet til stede i modellen, og variablerne er uafhængige af hinanden i OLS estimatet, ødelægges konsistensegenskaberne. De er dog ikke længere ligeså effektive. Dette bevirker, at den normale hypotese testning ikke er ligeså pålidelig, som hvis der ikke var heteroskedasticitet til stede i modellen.

For at rette dette problem finder vi nu de *heterokorrigerede fejlede* (Gujariti N, 2003).

Dette er gjort nedenfor i SAS.

Hvor hypoteserne siger:

$H_0: \beta_i = 0$ (ikke signifikant)

$H_1: \beta_i \neq 0$ (signifikant)

Parameter Estimates								
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t	Heteroscedasticity Consistent		
						Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	1	0.01011	0.00307	3.29	0.0011	0.00294	3.44	0.0007
LN S&P	1	-0.07067	0.05307	-1.33	0.184	0.07888	-0.9	0.371
Delta CPI	1	-0.01117	0.00486	-2.3	0.0222	0.00417	-2.68	0.0078
Delta T bill	1	0.00691	0.01206	0.57	0.5669	0.0146	0.47	0.6362
LN Guld_t-1	1	-0.11239	0.05592	-2.01	0.0453	0.05743	-1.96	0.0512
LN S&P_t-1	1	-0.05104	0.05304	-0.96	0.3367	0.05281	-0.97	0.3345

Tabel 3.10 Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af tabel 3.10 i kolonnen "*Heteroscedasticity Consistent*", kan det nu ses, at nulhypotesen ikke kan afvises for variablerne på nær for inflationen, som er statistisk signifikant ud fra p-værdien, som i dette tilfælde er mindre end 0,05. Her accepteres alternativhypotesen. Den laggede guldpris har nu en p-værdi på 0,0512 og antages derfor stadig at være signifikant, da denne værdi ikke er markant forskellig fra 0,05. Konklusionerne, der kan drages fra de korrigerede fejl vedrørende variablerne, er derfor ikke forskellig fra den oprindelige model. Det antages derfor, at heteroskedasticitet er til stede i modellen, men at dette ikke ændrer på vores model.

OLS estimatet er derfor ikke misvisende, selvom vi benytter de *heterokorrigerede fejlede* (Gujariti N, 2003).

3.4.6 TS.4. (seriekorrelation)

Hvis der er seriekorrelation (autokorrelation) til stede i modellen, betyder det, at fejlleddene i to forskellige tidsperioder er korrelerede. Den betingelse der skal opfyldes, således at der ikke er seriekorrelation, er derfor som følger:

$$\text{Corr}(u_t, u_s) = 0, \text{ for } t \neq s \text{ (Wooldridge, 2009)}$$

For at teste for seriekorrelation benyttes nu en LM-test. LM-testen siger, at vores regression;

$$G_t = \beta_0 + \beta_1 G_{t-1} + \beta_2 C_t + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 S_t + \beta_5 S_{t-1} + \beta_6 I_t + \varepsilon_t \quad (3.14)$$

følger den autoregressive orden $AR(p)$ på følgende måde (seriekorrelation):

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \rho_3 \varepsilon_{t-3} + \rho_4 \varepsilon_{t-4} + \gamma_t \quad (3.15)$$

Nulhypotesen bliver derfor:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$$

Nulhypotesen siger, at der ikke er nogen seriekorrelation i nogen af leddene (Gujariti N, 2003).

SAS udregner herefter LM-teststatistikken med $\rho = 4$.

LM-teststatistikken ($[n - p]R^2$) skal herefter sammenlignes med den kritiske værdi $X_{0,95}^2(p)$. Hvor n er antal observationer, og p er antallet af restriktioner ρ .

Vi afviser herefter H_0 : hvis $([n - p]R^2) > X_{0,95}^2(p)$. Nedenfor er en tabel med LM-teststatistikken vist:

Godfrey's Serial Correlation Test		
Alternativ	LM	Pr > LM
AR(1)	0.291	0.5896
AR(2)	0.3415	0.843
AR(3)	0.9477	0.8139
AR(4)	1.5881	0.8109

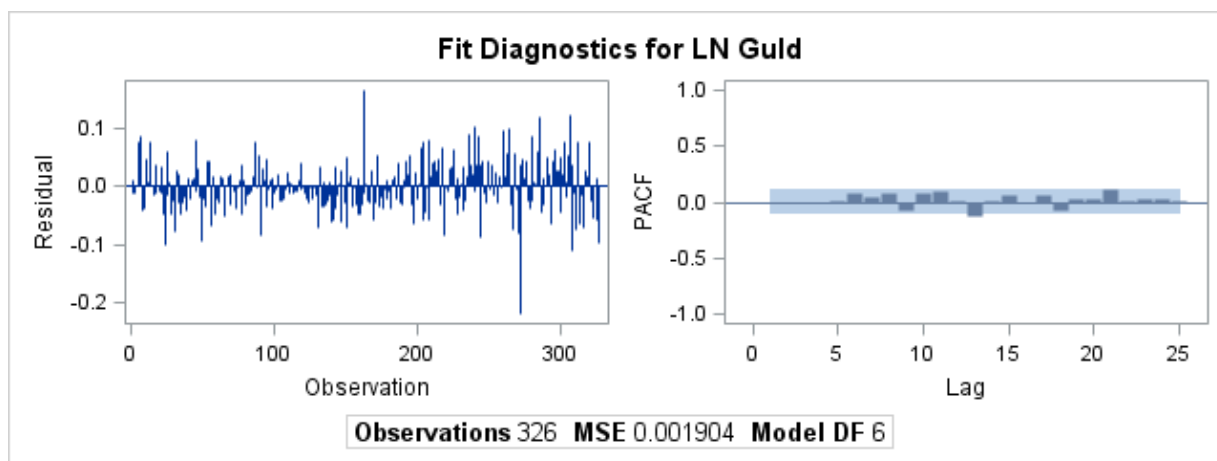
Tabel 3.11 Kilde: Egen tilvirkning

Den kritiske værdi er fundet via en χ^2 -tabel med $df = \rho = 4$, som giver 9,49. Som det kan ses i tabel 3.11, overstiger ingen af LM-teststatistikkerne den kritiske værdi. Det kan samtidig ses, at ingen af de *autokorrelerede fejlede* er signifikante på et 5 % signifikans niveau, hvilket betyder, at der i modellen er autokorrelation tilstede, og at vi derfor forkaster nulhypotesen.

Da der er seriekorrelation i modellen, betyder det, at hypotesetests kan føre til at variable, som er signifikante erklæres for ikke signifikante, da t- og F-statistikken ikke er pålidelig (det samme som for homoskedasticitet) (Gujariti N, 2003).

For at rette problemet med seriekorrelation benyttes nu ”*The CorchraneOrcutt*” (*Yule-walker iterative*). Metoden omformer den lineære regressionsmodel til en model, hvor fejlleddene er uafhængige af hinanden (altså ingen seriekorrelation). Ved at benytte OLS på den omformede model fremkommer der nu estimer, som er effeciente til at vurdere parametrene i modellen.

Yule-walker modellen fungerer på den måde, at modellen fremkommer med et estimat af ρ . Dette estimat ganges herefter på hvert led i regressionsmodellen (Gujariti N, 2003). Proceduren er foretaget via SAS. I tabel 3.12 er resultatet vist. Af figur 3.5 ses det, at der ikke er et klart mønster. Fejlleddene ser derfor ud til at være ukorrelerede, og seriekorrelation er givet de nye estimer ikke længere et problem.



Figur 3.5 Kilde: Egen tilvirkning

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.00997	0.003051	3.27	0.0012
LN S&P	1	-0.073	0.0534	-1.37	0.1726
Delta CPI	1	-0.0108	0.00486	-2.21	0.0276
Delta T bill	1	0.00651	0.0121	0.54	0.591
LN Guld_t-1	1	-0.1084	0.0564	-1.92	0.0553
LN S&P_t-1	1	-0.0542	0.0534	-1.02	0.3105

Tabel 3.12 Kilde: Egen tilvirkning

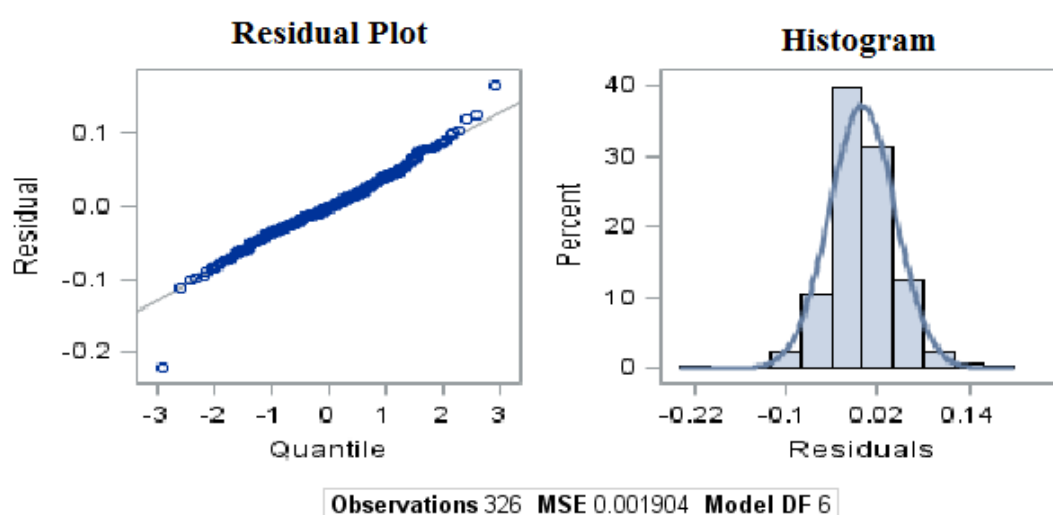
De nye parameterestimater som fremgår af tabel 3.12, viser at inflationen (CPI) stadig er signifikant, da denne er mindre end 0,05. Den laggede guldpris (Ln guld_t-1) ligger på grænsen til at være signifikant og kan ikke afvises på et 10% signifikansniveau, det antages derfor at denne også er signifikant.

Vores konklusioner fra det originale OLS estimat, om hvilke variable der er signifikante ændres derfor ikke.

3.4.7 TS.5. (Normalitet)

Dernæst testes der for normalitet i regressionen. Dette betyder at fejlleddene er uafhængige af variablene i modellen og er identisk distribueret således, at de følger normalfordelingen ($\text{Normal}(0, \sigma^2)$) (Wooldridge, 2009).

For at teste om Ts.5 holder, laves der en grafisk test.



Figur 3.6Kilde: Egen tilvirkning

Ud fra residualplottet og histogrammet i figur 3.6. ses det, at fejlleddene er tilnærmelsesvist normalfordelte. Dette kan ses da residualplottet tilnærmelsesvis følger en lige linje, samtidig med at histogrammet antager formen for normalfordelingen. Det konkluderes derfor ud fra ovenstående, at TS.5 er overholdt i vores model, og at residualerne følger normalfordelingen.

3.5 Delkonklusion

Til at starte med var data i modellen ikke stationære, men ved at transformere variablene, blev tidsserien gjort stationær. Hernæst viste testen (TS.1) for linearitet, at tidsserierne er lineære efter transformeringen. Multikollinearitet (Ts.2) er til stede i modellen, men kun i meget svag grad og antages derfor ikke at være et problem. Modellen opfylder ikke kravet om homoskedasticitet (Ts.3). Det konkluderes dog, at dette ikke er et stort problem i modellen, og at OLS estimatet derfor stadig er retvisende. Modellen lider af seriekorrelation (Ts.4), men ved at benytte Yule-Walker estimerne fandt vi, at konklusionerne vedrørende variablene i modellen ikke ændrer sig, og vi derfor stadig kan benytte OLS estimatet. Til sidst så vi, hvordan modellen opfylder kravet om normalitet (Ts.5).

$$G_t = \beta_0 + \beta_1 G_{t-1} + \beta_2 C_t + \beta_3 C_{t-1} + \beta_4 S_t + \beta_5 S_{t-1} + \beta_6 I_t + \varepsilon_t$$

Ifølge modellen kan guldprisen udtrykkes via den laggede guldpris, ændringen i renten (T-bill), den laggede ændring i renten (T-bill), aktieafkastet, det laggede aktieafkast og ændringen i inflationen (CPI).

Resultaterne af de ovenstående test viser, at inflationen har indflydelse på guldprisen, hvilket betyder, at jo større ændringen er i inflationen, desto større bliver ændringen i guldprisen. Den laggede guldpris har også indflydelse på guldprisen, hvilket betyder, at prisen i dag er bestemt af prisen i den foregående periode.

De resterende variable, dvs. ændringen i aktiekursen, den laggede ændring i aktiekursen og ændringen i renten, viste ikke at have nogen indflydelse på guldprisen.

Dette betyder at ændringer i renten og på aktiemarkedet ikke burde have indflydelse på guldmarkedet.

Som tidligere undersøgelser har vist er guld traditionelt set blevet brugt som en hedge imod inflationen, derfor burde resultatet af regressionen ikke komme som en overraskelse.

Da guld ikke er influeret af renten og aktiemarkedet, kan denne bruges som en god forsikring i en portefølje, da tab på obligationer og aktier ikke ændrer på værdien af guld. Der ligger derfor en vis sikkerhed heri, da guld kan bruges til at ”gemme værdi” i en portefølje. Ved at holde guld kan man derfor sikre en del af sin investering imod store fald på aktiemarkederne, sammenlignet med en portefølje bestående udelukkende af aktier og obligationer. Det skal dog her gøres klart, at man i perioder med fald på aktiemarkederne kan opleve fald i guldprisen, men da disse ikke yder indflydelse på hinanden, må guld betragtes som en alternativ investering til diversificering af en portefølje.

Guld kan derfor vælges i en porteføljesammensætning af obligationer og aktier, eftersom deres indbyrdes forhold er ukorreleret.

4.0 Makroøkonomisk forståelse af markederne

For at teste om resultaterne fra den lineære regression holder, kigges der nu på perioden fra 2000-2011, hvor denne er delt ind i tre underperioder. Der kigges her nærmere på de økonomiske ændringer, der her har fundet sted i markedet, for bedre at kunne vurdere, hvordan guld har været influeret og kan medvirke til diversifikation i en portefølje sammenhæng

Til at opnå en overordnet forståelse af hvorledes makroøkonomiske forhold har betydning for de fluktuationer som eksisterer på markederne, vil der i det følgende afsnit blive foretaget en beskrivelse/analyse af de forhold, som har været mest væsentlige i dataens undersøgelsesperiode, som vil blive benyttet fremadrettet. Analysens formål er således at skabe et billede og forståelse af, hvad der på makroøkonomisk plan skaber volatilitet, og hvorfor afkast ikke nødvendigvis er normalfordelte. Da den fremadrettede analyse vedrører S&P 500, er den nedenstående beskrivelse primært henvendt mod det amerikanske marked.

4.1 Makroøkonomisk analyse 2000-2003

I løbet af 2000 blev dollaren styrket med 7% over for euroen. Dette skal ses i lyset af, at væksten steg væsentligt mere i USA end i eurolandene. Yderligere bidrog europæiske virksomheders nettoopkøb af amerikanske virksomheder samt porteføljeinvesteringer i USA til den positive udvikling. I efteråret valgte ECB samt andre centralbanker at støtte euroen. Støtten sammenholdt med tegn på afmatning i den amerikanske økonomi betød sidst på året en svækkelse af dollaren.

I de fleste industrilande steg de pengepolitiske renter i 2000. I USA var rentestrukturen dog forholdsvis flad. Dette kan eventuelt skyldes, at markederne forventede pengepolitiske lempelser. I USA valgte Den Amerikanske Forbundsbank i 1. halvår 2000 at hæve den korte rente (*federal funds target rate*) til 6,5%, hvilket på daværende tidspunkt var det højeste niveau siden 1991. Grunden til at man valgte at hæve renten var pga. den risiko, der var forbundet med stigende inflation efter massiv vækst i den amerikanske økonomi. Yderligere var arbejdsmarkedet efterhånden ret stramt, og energipriserne var stigende. Den betydelige afdæmpning i den amerikanske økonomi medførte sidst på året til, at Den Amerikanske Forbundsbank valgte at sænke den korte rente med 1%.

På aktiemarkedet blev 2000 et turbulent år. Det kom specielt til udtryk på kurserne for de IT-relaterede aktier. Investorerne begyndte at søge over i mere traditionelle og sikre aktier. Kursudsvingene på S&P 500 blev dog ikke lige så kraftigt ramt, som det teknologitunge Nasdaq-indeks, da andelen af IT-relaterede aktier i S&P 500 er mindre. Faldet blev forstærket af udsigten til en afdæmpning af den amerikanske økonomi, hvilket medførte et pres på virksomhedernes indtjening. Og med stadig stigende risiko for stigende inflation, som følge af det stramme arbejdsmarked og stigende oliepriser, var det de primære faktorer til faldet i efteråret.

IT nedturen fortsatte ind i foråret 2001, men én hændelse blev dog altoverskyggende i efteråret. D. 11. september blev det finansielle centrum i New York ramt af terror. Den Amerikanske Forbundsbank nedsatte den korte rente med 0,5% for at modsvare usikkerheden om den økonomiske fremtid. Yderligere blev der umiddelbart lige efter angrebet stillet betydelig mængder likviditet til rådighed.

I det hele taget gik verdensøkonomien nærmest i stå i 2001. Bruttonationalproduktet i USA var stagnerende. OECD vurderede at væksten blev på 1.3%, hvilket var det laveste niveau i otte år. Yderligere faldt oliepriserne meget og lagde dermed en dæmper på prisudviklingen. USA endte i recession efter det længste opsving i mere end 50 år. Tilbagefaldet skyldtes især, at erhvervsinvesteringerne faldt fra et meget højt niveau og forbrugervæksten aftog. Efter 11. september faldt tilliden yderligere og arbejdsløsheden steg. Som reaktion på dette blev både pengepolitikken og finanspolitikken lempet for netop at kunne bidrage til maksimal beskæftigelse samt stabile priser og et moderat niveau for de lange renter.

På baggrund af lempelserne i efteråret 2001 startede økonomien i bedring i starten af 2002. Men optimismen omkring et nyt solidt opsving blev i løbet af sommeren afløst af stigende bekymring.

Aktiemarkedet blev, bl.a. på grund af regnskabsskandaler i flere store amerikanske virksomheder, ramt af markante kursfald. Væksten i BNP var en anelse højere (2,4%), men arbejdsmarkedet forblev svagt. Privatforbruget steg ganske moderat, men de erhvervsmæssige investeringer blev aldrig iværksat.

Den amerikanske central bank, Federal Reserve, nedsatte i november den korte rente med 0,5% til 1,25%, eftersom udviklingen i efterspørgslen samt produktion og beskæftigelse var svag. Endvidere så blev den offentlige sektors budgetbalance markant forværret i løbet af 2002. Grunden til denne forværring var, at man havde gennemført en række skattelettelser, øget udgifterne til militær og andre sikkerhedsforanstaltninger samt en svagere økonomisk aktivitet i markedet.

Den lave vækst fortsatte ind i foråret i 2003, hvor ikke mindst Irak-krisen skabte stor usikkerhed. Efter at der i løbet af foråret kom en afklaring på krisen, begyndte markedet så småt at blive mere positiv. Udviklingen i aktiekurserne vendte, og forbruger- og erhvervstilliden steg gradvist. BNP blev 3,1% og dermed noget bedre end 2002 og 2001. Væksten var hovedsageligt drevet af den indenlandske efterspørgsel. Derudover drev skattelettelser og konvertering af boliglån stimuleringen i det private forbrug, hvor det offentlige forbrug primært var drevet af militærudgifter.

Virksomhedernes investeringslyst var også stigende. Specielt var det investeringer i ny teknologi, som voksede. Beskæftigelsen steg trods den positive vækst kun svagt. Den svage stigning i beskæftigelsen skyldtes, at virksomhederne effektiviserede produktionen, hvilket gav store produktivitetsstigninger. Inflationen var lav og faldende trods en masse aktivitet, og man begyndte så småt at frygte en længere periode med deflation. Derfor valgte Federal Reserve at nedsætte den korte rente med 0,25% til 1%. Realiteterne omkring en evt. deflation udeblev, da væksten steg og vækstudsigterne var forbedrede (Nationalbanken, 2000-2011).

4.2 Makroøkonomisk analyse 2004-2007

Hvad der fandt sted i 2003 fortsatte ind i 2004. Den høje vækst øgede efterspørgslen efter olie og sammen med en række forstyrrelser på udbudssiden, som bl.a. var forårsaget af politisk uro i mellemøsten og andre olieproducerende lande indebar en betydelig stigning i olieprisen gennem det meste af 2004. Erhvervsinvesteringer steg yderligere som følge af produktivitetsvæksten og gode finansieringsforhold. Opsvinget bidrog endelig positivt til beskæftigelsen på arbejdsmarkedet og ledigheden var nu faldet fra 5,7% til 5,4%, men stadig afdæmpede lønstigninger. Forbrugerindekset CPI (renset for energi og fødevarer) steg også lidt. Federal Reserve begyndte så småt at normalisere pengepolitikken ved at forhøje renten fra 1% til 2,25%.

Hvad angår budgetunderskuddet, som var forårsaget af nogle år med ekspansiv finanspolitik, så var USA i underskud med 4,4% trods gunstige konjunkturforskel. På sigt ville de offentlige finanser ikke være holdbare, da de demografiske forhold vil lægge pres på pensions- og sundhedssystemet.

Efterspørgslen på olie steg ind i 2005. Stigningen i olieprisen lagde et opadgående pres på den globale inflation, men smittede ikke betydeligt af på andre produkters prisudvikling eller lønninger. BNP voksede i USA til 3,5 %, stadig trukket af solid vækst i det private forbrug og investeringerne. Privatforbruget, som var stimuleret af jobvækst og stigende boligpriser, steg mere end de reale disponible indkomster, og husholdningernes opsparingskvote var negativ. Bilsalget steg markant hen over sommeren. Efterårets orkaner dæmpede kun den økonomiske aktivitet kortvarigt. Den pengepolitiske rente blev stadig forhøjet af FED, hvilket de gjorde med 0,25% af gangen. De offentlige finanser blev forbedret med godt en 1%, og underskuddet udgjorde 3,7% af BNP. Importen steg kraftig grundet den store efterspørgsel og generelle økonomiske aktivitet.

De samme tendenser fortsatte i 2006, dog var der begyndende tegn på en afmatning i den amerikanske økonomi efter flere år med højkonjunktur. Det var mest tydeligt at se på boligmarkedet, hvor investeringerne faldt og priserne stagnerede. Det var primært det private forbrug, der fortsat bidrog til stigningen i produktionen. Beskæftigelsen var stadig god grundet stigende beskæftigelse i servicesektoren, hvilket kunne opveje nedgangen i industrien.

Afmatningen af den amerikanske økonomi begyndte for alvor at blive reel i løbet af 2007. Afmatningen skyldtes især boligmarkedet, hvor investeringer og priser fortsatte med at falde. Væksten blev lavere i løbet af 2007, og ledigheden voksede. De finansielle markeder i USA var præget af uro siden sommeren. Uroen var en konsekvens af tab på boliglån til mindre kreditværdige amerikanske boligejere, som havde optaget de såkaldte subprime-lån. De længere usikrede pengemarkedsrenter steg som følge af uroen. Yderligere begyndte en række banker og andre finansielle institutioner at have svært ved at skaffe tilstrækkelig likviditet på grund af usikkerheden på de finansielle markeder. FED valgte af denne årsag at tilføre yderligere likviditet til markederne. Uroen medførte at bankerne valgte at stramme vilkårene for kreditgivning. På den toneangivende 10-årige amerikanske statsobligation faldt renten fra 4,7% til 4,1% ultimo året. Faldet var et led i den finansielle uro og afmatningen af den amerikanske økonomi, som skabte forventninger om lavere inflation. Aktiemarkederne blev naturligvis påvirket af den finansielle uro, og efter sommeren 2007 væsentligt mere volatile og med faldende tendens (Nationalbanken, 2000-2011).

4.3 Makroøkonomisk analyse 2008-2011

Den finansielle krise, som begyndte i sommeren 2007, var først og fremmest en likviditetskrise, hvor de store spillere på de finansielle markeder tøvede med at låne penge ud til hinanden. Centralbankerne i flere lande forsøgte gennem 2008 at imødekomme den stramme likviditet ved at øge lånemulighederne ved at acceptere et bredere sikkerhedsgrundlag og ved at forlænge løbetiden for lån. Men i september 2008 gik investeringsbanken Lehman Brothers konkurs. Den finansielle krise blev kraftigt forværret og tilliden til det finansielle system led et stort knæk. Derfor så myndighederne i mange lande sig nødsaget til at haste gennemføre redningspakker med garantier for lån og indskud samt statslige kapitalindskud i finansielle virksomheder for netop at kunne mindske faldet i tillid og sikre en stor nok kapacitet til nyudlån i det finansielle system.

Priserne på energi og fødevarer faldt i takt med afmatningen af økonomien efter sommeren 2008. FED lempede pengepolitikken kraftigt og nedsatte renten syv gange i løbet af året med i alt 4% til 0,25%. Den toneangivende 10-årige amerikanske statsobligation faldt fra 3,9% til 2,2% ultimo året.

Recessionen fortsatte i det første halvår af 2009, og den finansielle krise var for alvor blevet en realøkonomisk krise. De økonomiske indikatorer blev gradvist mindre negative i løbet af foråret 2009, og man oplevede i de fleste industrilande positiv vækst i 2. halvår af 2009. Fremgangen i de internationale konjunkturer var i høj grad præget af midlertidige faktorer som lagertilpasninger og betydelige lempelser af den økonomiske politik. Inflationen var i 1. halvår negativ i USA, hvorefter den steg igen. Udsvingene skyldtes hovedsageligt de massive energiprisudsving som fandt sted i 2009.

Forholdene på de finansielle markeder blev forbedret i løbet af foråret 2009. Man havde formået at indsnævre kreditspændende frem mod foråret. Aktiekurserne i USA steg støt fra foråret (lavpunktet) frem mod ultimo 2009, hvormed kurserne nåede en stigning på omkring 60%. Den rigelige likviditet, som var til stede på markedet, skabte stor efterspørgsel efter statsobligationer, hvilket var med til at holde renterne nede trods et stigende udstedelsesomfang.

Den økonomiske fremgang som startede i 2. halvår 2009 fortsatte i 2010. Dermed var verdensøkonomien gradvist på vej ud af den kraftigste nedtur i nyere tid. Opsvinget var i høj grad drevet af de pengepolitiske tiltag. Den globale vækst var især drevet af fremgangen i de asiatiske vækstøkonomier. I de fleste avancerede økonomier i OECD-området medførte krisen en voldsom stigning i den offentlige gæld, hvorfor et stort behov for finanspolitisk konsolidering var essentielt.

Specielt blev gældskrisen i EU mærkbar. Renterne på statsobligationerne var især stigende i lande som Grækenland, Irland, Spanien og Portugal, hvilket fremtvang en hurtigere konsolidering. Der måtte et specielt låneprogram fra EU's og Den Internationale Valutafond, IMF, side til at støtte Grækenland og Irland.

Beskæftigelsen nåede sit lavpunkt i 2010 i OECD-området. Forbrugerprisinflationen steg fortsat i 2010. Samlet set var inflationen lav trods prisstigninger på energi og fødevarer. Grunden for det skal findes i den dengang uudnyttede kapacitet i de fleste OECD-lande.

Priserne på aktier steg gennem 2010, hvilket også gjaldt for de finansielle aktier, der udviste en mere stabil udvikling. Priserne på fødevarer og flere råvarer som metaller og energi steg betydeligt i 2010 bl.a. på grund af en øget efterspørgsel. Guldprisen nåede et nyt rekordniveau ultimo 2010 på godt 1.420 dollar pr. troy ounce.

Ved indgangen til 2011 var der en tiltro til, at opsvinget i verdensøkonomien ville blive selv bærende og dermed også kunne modstå de nødvendige konsolideringer af finanspolitikken. Gældskrisen i EU og en svag amerikansk økonomi modvirkede dog et evt. positivt momentum. Endvidere bidrog jordskælvskatastrofen i Japan til en yderligere svækkelse af økonomien. I USA udviklede økonomien sig svagere end forventet. Reviderede nationalregnskabstal i USA viste, at USA var blevet hårdere ramt af krisen i 2008 og 2009. Dermed var der udsigt til en længere periode med lavkonjunktur end først antaget. Afmatningen i 2011 skyldtes i særdeleshed, at privatforbruget aldrig kom op i gear, da boligpriserne fortsat var faldende og energipriserne høje. Man begyndte også at holde igen med den finanspolitiske stimulering, hvilket påvirkede væksten negativt.

Langvarige politiske forhandlinger hen over sommeren førte ikke til en afgørende politisk enighed om en troværdig og langfristet finanspolitisk strategi i USA i forhold til gældsloftet. En kombination af ovenstående og dårlige vækstudsigter betød, at USA i august 2011 mistede sin AAA-kreditvurdering af Standard and Poor's. FED tilkendegav, at de ville holde den pengepolitiske rente lav frem til sommeren 2013. Udover det blev der i efteråret 2011 iværksat et opkøbsprogram af lange statspapirer for i alt 400 mia. USD, for derved at kunne nedbringe de lange renter. Uroen påvirkede markedet væsentligt: Mange valgte at investere i guld, hvormed guldprisen nåede endnu et rekordniveau i sensommeren på 1.896 dollar pr. troy ounce.

Ved slutningen af året var der begyndende tegn på mere solid vækst, positive indikatorer for erhvervs- og forbrugertilliden, fornyet vækst i privatforbruget og fald i ledigheden (Nationalbanken, 2000-2011).

5.0 Volatilitetsanalyse

Inden for investeringsverdenen er det en kendsgerning, at handel med porteføljer ikke er risikofrit, selvom det er muligt at hedge en del af risikoelementerne ud, bl.a. ved diversificering. Men uanset hvad, vil en finansielinstitution på hvilket som helst tidspunkt altid have en residual eksponering mod ændringer i hundredvis af markedsvARIABLER såsom renter, valutakurser, aktiekurser og råvarepriser (Hull, 2012).

Indenfor økonomi, er volatiliteten et mål for prisvariationen over tid på varemærkerne eller variationen i kurser og renter på de finansielle markeder. Undersøgelser viser, at politiske interventioner (se kap. 4.0) øger volatiliteten på de finansielle markeder. Dominguez og Frankel finder en signifikant påvirkning på risikopræmien fra politiske interventioner (Dominguez & Frankel, 1993). Bonser-Neal konkluderer endvidere at centralbanker i nogle tilfælde tilføjer valutakurser volatilitet (Bonser-Neal, Q1 1996). Også inden for den finansielle sektor er der bred enighed om, at volatiliteten er forstærket af ændringer i pengepolitikken (Cheung & Chinn, 2001).

For enhver risk manager er det essentielt at være i stand til at kunne estimere volatilitet for netop at kunne vurdere et potentielt fremtidigt tab. En velkendt antagelse er, at det procentvise afkast fra markedsvARIABLERNE er normalfordelte og dermed konstant volatilitet (homoskedasticitet), men senere studier som Engle (Engle R. F., 1982) og Bollerslev (Bollerslev T. , 1986) har tydeligt afvist denne hypotese. Ofte viser det sig dog, at de procentvise afkast i nogle perioder har relativ lav volatilitet, hvorom de i andre perioder har høj volatilitet, hvilket afgør at afkastene ikke er normalfordelte (Taylor, 2007). Ikke-normalfordelte distributioner har haler, som er tykkere end dem, som kommer fra de normalfordelte og lader endvidere til at have en negativ skævhed. Den slags opfanger modeller såsom exponentially weighted moving average (EWMA), autoregressive conditional heteroscedasticity (ARCH) og generalized autoregressive conditional heteroscedasticity (GARCH).

I de perioder hvor volatiliteten klynger sig sammen, også kaldet volatilitetsklynger, er bedre kendt som ARCH-effekter. Dette fænomen dækker over, at perioder med store afkastudsving ofte bliver efterfulgt af store udsving, hvor små udsving følges af små, dermed opstår der en stærk

seriekorrelation, som også er kendt som betinget heteroscedasticity (Engle R. F., 1982). Dette er årsagen til, at høj- og lavvolatile perioder grupperes hver for sig, hvorfor det vil være mest hensigtsmæssigt at give de nyeste observationer en højere vægtning.

Volatilitet er ikke muligt at opservere til tidspunkt t , hvorfor det er nødvendigt at estimere det. Overordnet set er der fire forskellige tilgange til, hvordan man kan estimere volatilitet; (i) historisk data (GARCH type modeller), (ii) model forudsagte parametre (Stokastiske volatilitetsmodeller), (iii) intradagobservationer (realiseret volatilitet) og (iv) implicit volatilitet. På ethvert tidspunkt vil estimatorne i modellerne være afhængige af de antagelser, der foretages, men fællesnævneren for alle metoder er, at volatiliteten ikke holdes konstant over tid.

I den følgende analyse vil der blive taget udgangspunkt i den første metode. Modellen giver en indsigt i volatilitetsbevægelserne over tid. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) er modeller af den betingede varians af afkast. I vores analyse benyttes forskellige modeller fra ARCH familien på S&P 500, en et årig amerikansk T-bill og guldprisen over den valgte periode. Perioden som bliver undersøgt er interessant, fordi nogle af de værste finansielle kriser og booms er opstået i perioden siden 1999. IT-boblen som eksploderede i 2001, som blev efterfulgt af en solid vækst frem mod efteråret i 2008, hvor vi oplevede en af de værste finansielle kriser efter Lehmann Brothers fald (for uddybende beskrivelse se kap. 4.0). Disse forskellige risikostadier gør det ekstra besværligt at finde en volatilitetsmodel, der gør det muligt at bestemme den korrekte volatilitet. Nogle modeller angiver et bedre estimat end andre.

ARCH familien af modeller er bred, så der er en bred vifte af modeller at vælge imellem. Hver model har dets fordele og ulemper. Til at starte med beskrives den basale normalfordelte (også kaldet Gaussian) GARCH(1,1) og vælger derefter at bevæge os over i ikke-normalfordelte distributioner, for netop at få et sandsynligt bedre fit i analysen. Ved at specificere en model der fanger dynamikken i de ikke-normalfordelte afkast, kan volatiliteten bedre beskrives og dermed også risikoen for tab omkring de fede haler.

5.1 Volatilitetsmodeller

I de næste afsnit introduceres og motiveres brugen af ARCH og GARCH modeller, som der efterfølgende vil blive bygget videre på og benyttes til analysen omkring volatilitet.

Variansen af et aktiv spiller en vigtig rolle i forbindelse med bestemmelse af VaR, hedging eller prisfastsættelsen af derivater. Mange finansielle modeller antager konstant varians af det

underliggende aktiv (Hull, 2012). Grunden herfor er, at volatilitet kun ændrer sig ganske lidt over en kort tidshorisont, hvorfor volatiliteten derfor antageligvis kan betragtes som konstant.

Denne antagelse holder dog ikke vand, når det kommer til virkelig markedsdata (Taylor, 2007).

Volatilitet i finansielle tidsserier er typisk ikke-konstant (heteroscedastic) og log-afkast tilfredsstiller ikke standard egenskaberne for normalfordelte distributioner. Tidsserier afspejler ofte leptokurtosis, hvilket betyder, at distributionerne indeholder mere fede haler, end hvad der er muligt at observere i normalfordelte sammenhænge. Ofte viser markedet vedholdende perioder med høj eller lav volatilitet, når det er perioder hvor markedet boomer og modsat falder drastisk. Disse cyklusser skaber fluktuationer i afkastene. Det gør sig gældende for aktier, indekser, valutakurser og renter. De perioder kaldes for "Volatilitetsklynger" eller "ARCH effekter" og er et klart tegn på tidsafhængig varians og heteroskedasticitet i afkastene. Størrelsen af afkastene er typisk ukorreleret, men afhængig siden det absolutte og kvadrerede værdier klart viser en korrelation. Sidst men ikke mindst er afkast ofte negativt korreleret med volatiliteten. Netop grundet ARCH effekterne er modelvalget essentielt for den videre behandling af den valgte data. Derfor vil volatilitetsmodellerne nu blive introduceret.

5.1.1 ARCH(1)

ARCH processer er i stand til at fange de nævnte kendsgerninger omkring finansielle tidsserier. For det første åbner de op for, at den betingede varians kan være stokastisk og tidsafhængig. For det andet har ARCH processer tykkere haler end den normalfordelte distribution, hvorved de gør det muligt, at ekstreme events kan finde sted, som det skete under den finansielle krise. Denne klasse af modeller bliver især brugt i finansiell økonomi. Det være sig inden for option prissættelsesteori, aktive allokerings modeller, hedging og volatilitetsforecasting.

Engle har været den person, der med stor indflydelse har udviklet ARCH modellerne. I hans værk fra 1982 (Engle R. F., 1982) foreslog han en stokastisk proces, hvor den betingede varians af afkastet er givet ved en lineærfunktion af de tidligere kvadrerede afkast. Det antages, at afkastet i perioden t , betinget af tidligere afkast er normalfordelt, har gennemsnitsværdien 0 og en betinget varians, σ_t^2 , sådan at $x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots \sim N(0, \sigma_t^2)$.

ARCH(1) er den simpleste af modellerne, hvor distributionen af x_t , betinget af information indtil tiden $t - 1$ kun afhænger af x_{t-1} . Den betingede varians er defineret som

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha x_{t-1}^2 \quad (5.1)$$

Hvor restriktionen $\alpha > 0$ og $\sigma^2 > 0$ sikrer, at den betingede varians aldrig kan blive negativ. Strukturen gør det muligt, at værdierne for x_{t-1} , både negativt og positivt, kan være store. Det resulterer i, at volatiliteten i den efterfølgende periode bliver større end gennemsnittet. Processen falder sammen til en simpel $iidN(0, \sigma_t^2)$ sekvens, med andre ord, man får ikke ny information fra tidligere afkast. Endvidere skal $\alpha < 1$ for at sikre, at modellen forbliver stabil og stationær (Engle R. F., 1982). For at forstå dette, skal man tænke på autoregressive (AR) tilfælde med eksplosiv udvikling og enhedsødder. Enhedsrødder er i denne sammenhæng en funktion af processer, der udvikler sig gennem tid, hvilket kan give problemer i forhold til statistisk inferens¹³, når det involverer tidsrækkemodeller. Af denne grund ønskes der ikke en enhedsrod proces ($\alpha = 1$) eller eksplosive processer ($\alpha > 1$) i specifikationen af ARCH(1).

Log-afkastene er givet ved ligningen

$$x_t = \sigma_t z_t \quad (5.2)$$

Initialværdien er x_0 og z_t er $iidN(0,1)$. Residualen af selve processen er $\varepsilon_t = x_t$. Dette definerer de standardiserede residualer som

$$z_t = \frac{x_t}{\sigma_t} = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim iidN(0,1) \quad (5.3)$$

Det er muligt, at z_t kan tage form som forskellige distributioner for at få et bedre fit mod data. Distributioner som er forskellig fra normalfordelingen, vil vi vende tilbage til i afsnittet om GARCH(1,1) (afsnit 5.1.2). For nu, anses distributionerne som identiske og uafhængige normaldistributioner.

5.1.1.1 Lagrange multiplier test

For at teste for ARCH effekter foreslog Engle (1982), hvordan den originale Lagrange multiplier (LM) kunne benyttes i denne sammenhæng. LM er meget enkel at beregne og ligeledes ganske enkelt at udlede. Under nulhypotesen er det antaget, at modellen er en standard dynamisk regressionsmodel, som kan blive skrevet som følgende (Engle & McFadden, 1994).

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t, \quad (5.4)$$

¹³ Statistisk inferens betyder, at man drager generelle konklusioner om tilfælde, der ikke er kendt, ud fra et kendt tilfælde eller resultat.

x_t angiver sættet af eksogene og forsinkede afhængige variable og ε_t er en Gaussian "white noise" proces.

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2) \quad (5.5)$$

Hvor I angiver det tilgængelige informationssæt. Alternativhypotesen er, at fejlene er ARCH(q), dvs.

$$\sigma^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \quad (5.6)$$

Kan nulhypotesen afvises på et 95% konfidensinterval, kan det altså konkluderes, at der er autokorrelation og dermed ARCH effekter tilstede.

5.1.1.2 Jarque-Bera normalitetstest

For at teste om de tre tidserier er normalfordelte benyttes en Jarque-Bera test (Gujariti N, 2003). For normalfordelingen gælder det, at denne har skævhed = 0 og kurtosis = 3. Normalfordelingen er derfor symmetrisk og mesokurtotisk. Jarque-Bera testen undersøger derfor, om skævheden og kurtosen afviger fra henholdsvis 0 og 3. Formlen for Jarque-Bera testen er som følger:

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right] \quad (5.7)$$

Hvor S er skævheden og K er kurtosis. Under nulhypotesen som tilsiger at fordelingen er normalfordelt, følger Jarque-Bera testen χ^2 fordelingen.

5.1.2 GARCH(1,1)

Flere studier viser, at der er behov for en højere rang af ARCH modeller i forhold til at kunne forklare den betingede varians af finansielle tidsserier. Begrundelsen for dette er, at den empiriske autokorrelation henfalder meget langsomt, derfor er der behov for strukturer, som indeholder længere hukommelse (Taylor, 2007). Det bringer os videre til en essentiel del af den finansielle økonometri, nemlig den Generaliseret Autoregressive Betinget Heteroskedasticitets (GARCH) model af Bollerslev (1986) (Bollerslev T. , 1986). Hvorfor modellen kaldes generaliseret skyldes, at volatiliteten nu er eksplicit modelleret. Modellen er den mest populære model i ARCH familien og bruges specielt til at modellere daglige afkast (Taylor, 2007). I GARCH modeller vil autokorrelationen af det kvadrerede afkast konvergere hurtigt mod nul. Fordelen ved GARCH modeller er, at de er baseret på ARCH med en kraftfuld langtidshukommelse med uendelige

forsinkelse ($\text{ARCH}(\infty)$), men der er kun få parametre, som skal estimeres. Dette er uden tvivl fordelagtigt, da vi på den måde sparer frihedsgrader uden at fremadrettede prognoser forringes. Endvidere er GARCH modellen nemmere at estimere og lave statistisk inferens på.

Bollerslev introducerede i 1986 modellen, der blev kendt som GARCH(1,1). Variansen σ_t^2 er udregnet ud fra en langvarig gennemsnitlig varians sats, V_L , lige så vel som fra σ_{n-1} (som angiver estimatet af volatiliteten for dag -1 , som var lavet ved slutningen af dag $n - 2$) og ε_{n-1} (den seneste daglige procentvise ændring). Formlen for GARCH(1,1) modellen (Hull, 2012) er givet ved

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \gamma V_L + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2\end{aligned}\tag{5.8}$$

Hvor γ, α, β angiver de respektive vægte, hvorfor de derfor skal summe til 1. Den GARCH betingede volatilitet er defineret som den annualiserede kvadratrods af den betingede varians. Den betingede varians og volatiliteten er betinget af sættet af oplysninger. Siden de betingede varianser på forskellige tidspunkter er relateret, er processen ikke identisk fordelt, og er ej heller uafhængige. Med andre ord, de betingede varianser er på forskellige tidspunkter relateret.

De standardiserede residualer sammenholdt med estimerne af parametrene benyttes til at bestemme om modellen er et godt fit for de valgte data. Hvis det ikke er muligt at afvise hypotesen om normalitet i de standardiserede residualer i en normalfordelt GARCH model, er det yderligere en bekræftelse af, at det er en veldefineret model. På den anden side, hvis normaliteten afvises, er det pga., at distributionen indeholder federe haler end i de normale tilfælde, hvilket betyder, at der er behov for alternative distributioner. En ikke-normalfordelt model som kan benyttes til dette formål, er student-t distributioner, da disse distributioner indeholder federe haler (se afsnit 5.1.5).

5.1.3 E-GARCH(1,1)

Efter at have introduceret det mest fundamentale omkring GARCH, er det nu muligt at gå skridtet videre og kigge på en anden model inden for GARCH familien. En model som ofte har vist sig at være mere succesfuld end GARCH(1,1) til at opfange de stiliserede fakta omkring finansielle tidsserier, er den såkaldte E-GARCH(1,1) model, da den i sagens natur bedre kan opfange de asymmetriske strukturer. Senere i undersøgelsen vil resultaterne fra GARCH(1,1) modellen med E-GARCH(1,1) modellens udfald blive sammenlignet. Selvom GARCH(1,1) modellen er i stand til at

opfange volatilitetsklynger lige så vel som en vis grad af fede haler, så påvirker tidligere negative og positive værdier symmetrisk på den betingede varians.

En liste af litteratur har efterhånden kunnet dokumentere at negative afkast ”dårlige nyheder” har en tendens til at blive efterfulgt af perioder med højere volatilitet, end i tilfælde med positive afkast ”gode nyheder”, hvor volatiliteten i de efterfølgende perioder ikke bliver påvirket lige så markant (Black, 1976). Mere specifikt skyldes denne asymmetri, som især gør sig gældende for aktier og råvare, den såkaldte leverage effekt. Leverage effekten opstår når aktieprisen falder, så vil gælden-egenkapital ratioen øges, siden gældsfinansiering ofte tager noget tid at ændre, og dermed bliver gearingen i virksomheden højere.

Pagan & Schwert (Pagan & Schwert, 1990) og Engle & Ng (Engle & Ng, 1993) har defineret konceptet der vedrører ”newsimpactcurve”, som relaterer til tidligere afkast chok (nyheder) til den nuværende volatilitet. Kurven måler hvordan ny information er indarbejdet i volatilitetsestimater. I GACRH(1,1) modellen er kurven en kvadratisk funktion centreret omkring $\varepsilon_{t-1} = 0$. For asymmetriske modeller gælder det, at kurven er designet til at øges forskelligt i to retninger. Det er her den eksponentielle GARCH (E-GARCH(1,1)) model (Nelson, 1991) bliver interessant, da denne model kan opfange sådanne asymmetri i relation til, hvordan de forskellige chok påvirker volatiliteten.

E-GARCH(1,1) modellen er en væsentlig forbedring af den tidlige GARCH(1,1) model, da den gør op med to aspekter, som ikke er hensigtsmæssige fra den standardiserede GARCH(1,1) model; (1) parametrene α og β skal i den standardiserede GARCH(1,1) model fastholdes under estimeringen for at sikre at positivt udfald af variansprocessen; (2) som nævnt foreslår empiriske undersøgelser, at modellen bør kunne opfange asymmetrien i forbindelse med volatilitetschok.

I E-GARCH(1,1) modellen afhænger σ_t^2 både af størrelsen og fortegnet af de forsinkede chok:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2), \quad (5.9)$$

med $\alpha_1 = 1$ og $g(z_t) = [\gamma(|z_t| - E[|z_t|]) + \psi z_t]$. I denne specifikation er parametrene ikke begrænset til at skulle være positive, fordi den betingede varians altid vil være positiv.

Specifikationen introducerer den besluttede asymmetri på følgende måde:

Over området $0 < z_t < \infty$, er $g(z_t)$ lineær i z_t med hældningen $\gamma + \psi$, hvorimod i området over $-\infty < z_t \leq 0$, er $g(z_t)$ lineær i z_t med hældningen $\gamma - \psi$ (Jondeau, Poon, & Rockinger, 2007).

5.1.4 Ikke-normalfordelte GARCH Modeller

Den asymmetriske E-GARCH(1,1) model er relativ simpel at estimere og meget mere overlegen i forhold til nogen form for "moving average" modeller. Selvom modellen har federe haler og er asymmetrisk, kan den stadig forbedres, hvilket gøres ved at benytte distributioner, som ikke er normalfordelte. Problemet med den standardiserede GARCH(1,1) model er, at selvom den producerer samlede afkastdistributioner, som er ikke-normalfordelte (da de er summer af normale variabler med forskellige varianser), så har modellen stadig en lille skævhed samt "excess" kurtosis, hvilket er i stærk kontrast til de ikke-normalfordelte distributioner, som ofte ses i finansielle tidsrækker. Det er dog muligt at modificere de tidligere beskrevne GARCH modeller med ikke-normalfordelte distributioner. Derfor vil der i det følgende afsnit blive beskrevet, hvorledes der opnås skævhed og leptokurtosis.

5.1.5 Student-t

Student-t modellen blev introduceret af (Bollerslev T. , 1987), og den antager, at den betingede distribution af markedschok er t-distribueret. Frihedsgraderne i denne distribution er en yderligere parameter, som estimeres sammen med parametrene i ligningen for den betingede varians. Modellen er symmetrisk omkring gennemsnittet og klokkeformet ligesom den normalfordelte distribution, dog har modellen federe haler, hvilket er afgørende i vores tilfælde.

Specifikationen af den betingede varians ændrer sig ikke: det kan enten være en symmetrisk GARCH model eller en asymmetrisk, som er blevet beskrevet i tidligere afsnit. Men likelihood funktionen, som skal maksimeres, ændres og får følgende udtryk:

$$\ln L(\theta) = -\sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_t) + \left(\frac{v+1}{2}\right) \ln \left(1 + (v-2)^{-1} \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2 \right) \right) + T \ln \left[((v-2)\pi)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \right] \quad (5.10)$$

Hvor θ angiver parametrene af den betingede varians formel ($\theta = (\sigma^2, v, \alpha, \beta)$). v er frihedsgraderne, $2 < v \leq \infty$. $\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx$ med $u > 0$ er gamma funktionen. Når vi lader $v \rightarrow \infty$ vil funktionen konvergere mod den normalfordelte distribution (Taylor, 2007). Dvs. jo lavere v er, jo federe haler vil der være i distributionen.

5.2 Inspektion af data

Datasættet består af tre tidsserier; Guld prisen, S&P500 og den et årige rente på en amerikansk T-bill. I det følgende analyseres tre perioder. Perioden fra d.4-1-2000 til d.31-12-2003, d.05-01-2004 til d. 31-12-2007 og 03-01-2008 til d.30-12-2011. De tre perioder, dækker IT-boblen fra 2000-2001, samt den finansielle krise der startede i sidste halvdel af 2007. Denne er dækket af den sidste periode fra 2008-2011. Den mellemliggende periode fra 2004-2007 illustrerer en periode med høj vækst på de finansielle markeder (se kap. 4).

De daglige afkast på handelsdage er benyttet, dvs. weekender og helligdage er udeladt. Antallet af observationer er henholdsvis 1005, 1005 og 1008.

Alle data er konverteret til log afkast: Bilag 3 viser den SAS kode der er benyttet, mens bilag 4 til 12 viser SAS outputtet.

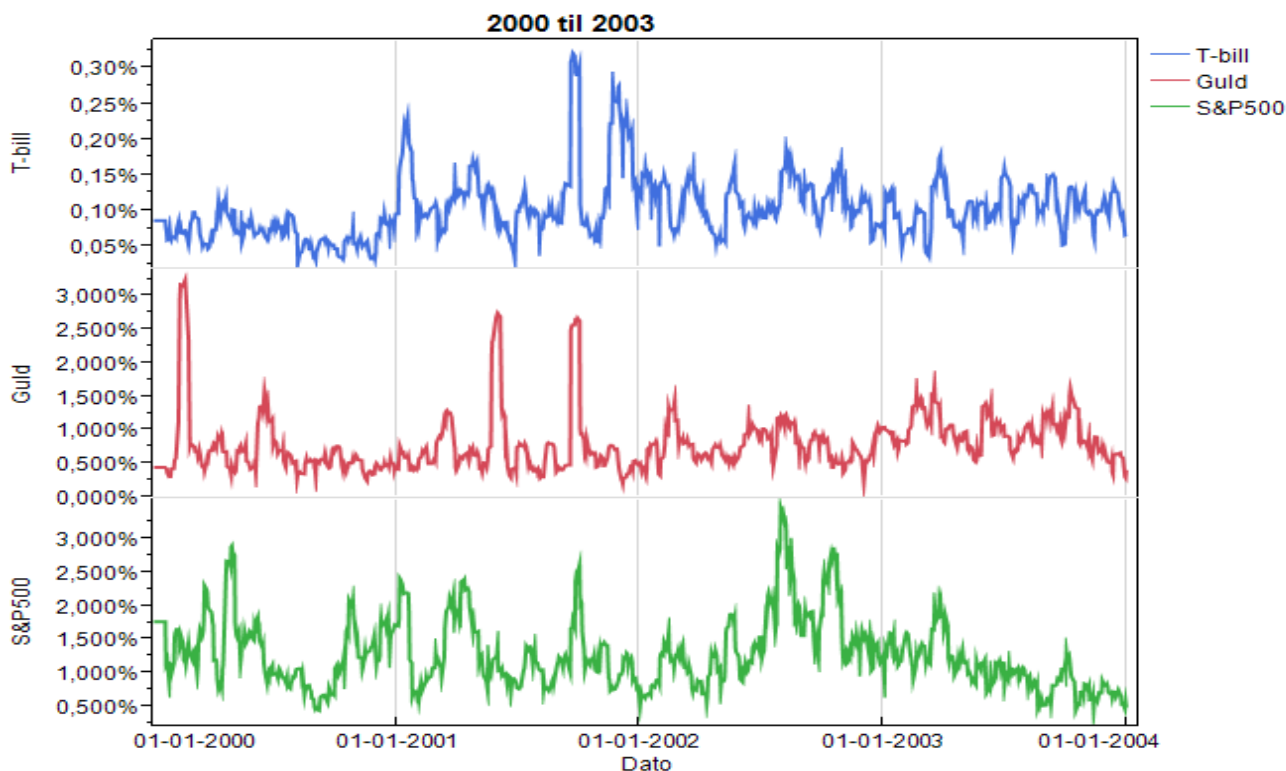
Lad P_t angive prisen for et aktiv ved slutningen af en "tradingday" t . Da er det kontinuerte afkast, kaldet log-afkastet angivet ved

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (5.11)$$

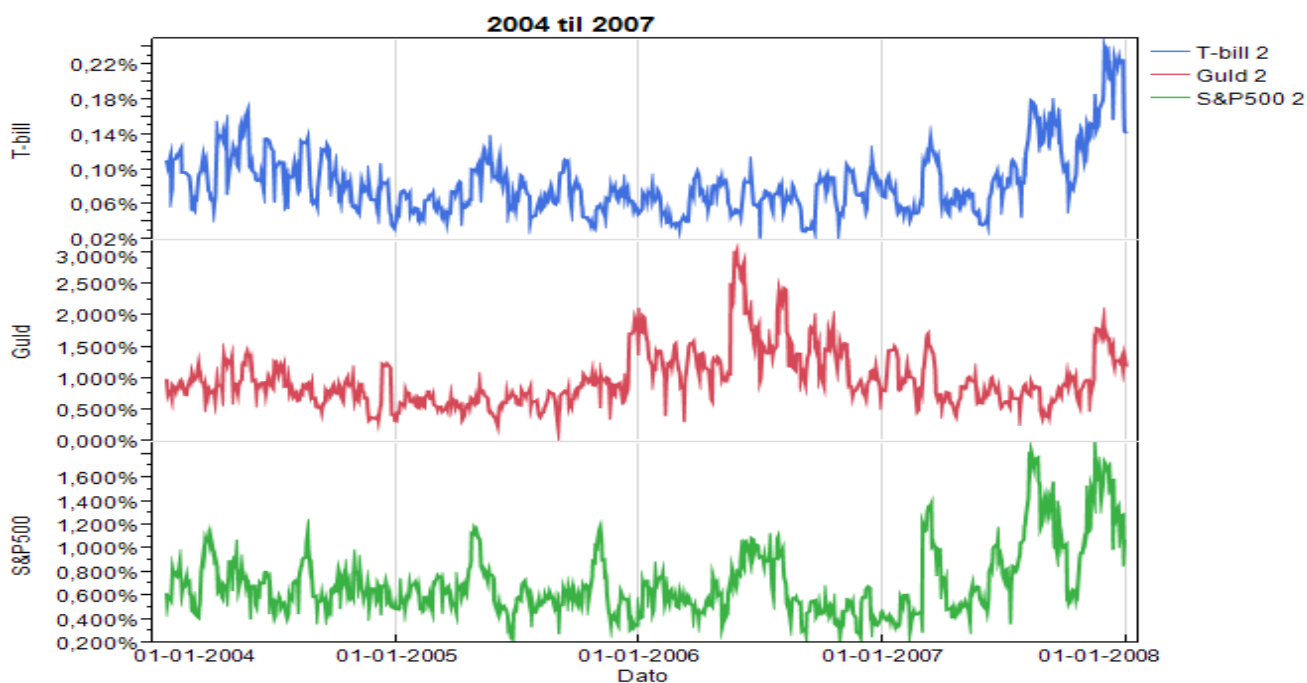
Figur 5.1 til 5.3 viser de daglige afkast for de tre aktiver for alle perioderne. For visuelt bedre at kunne illustrere volatiliteten er der benyttet et 10 dages løbende gennemsnit:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(r_{t-i} - 0)^2}{n} \quad (5.12)$$

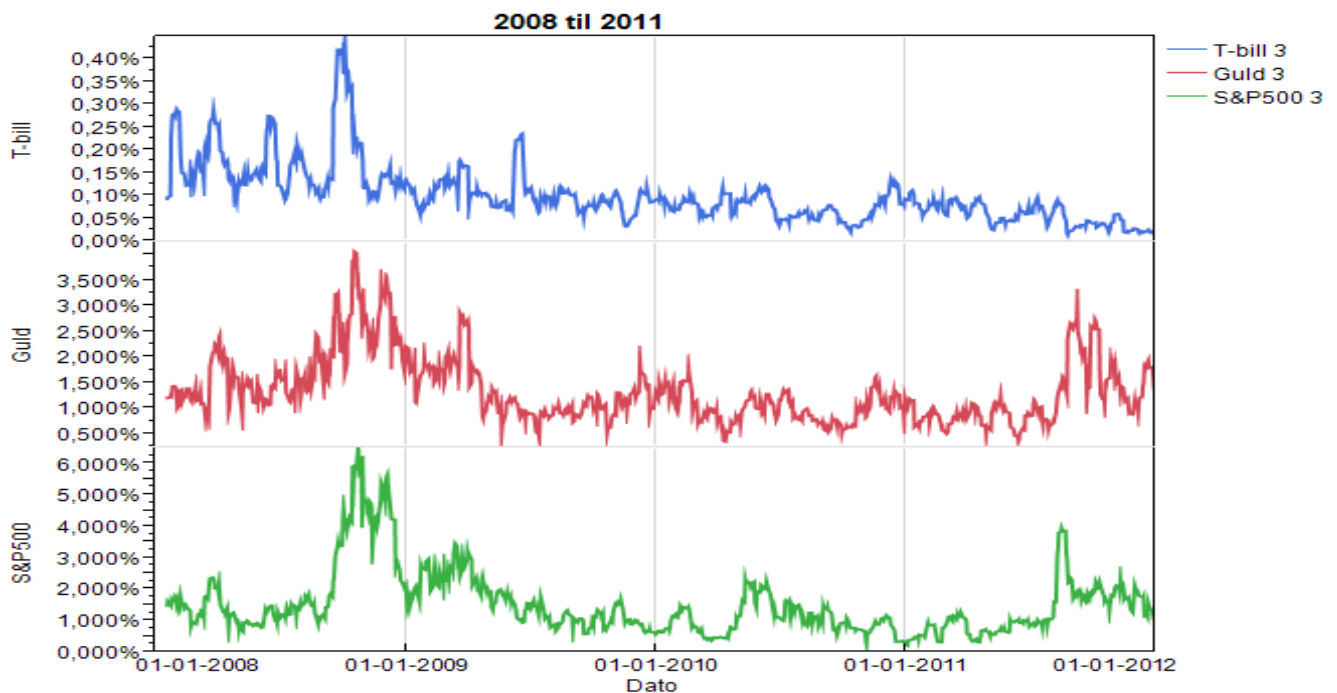
Hvor r_{t-1} angiver det kontinuerte afkast en periode tilbage, og n angiver antal observationer.



Figur 5.1 Daglige afkast i US dollars for S&P 500, guldprisen og T-bill, fra 2000-2003; Kilde: Bloomberg.



Figur 5.2 Daglige afkast i US dollars for S&P 500, guldprisen og T-bill, fra 2004-2007; Kilde: Bloomberg.



Figur 5.3 Daglige afkast i US dollars for S&P 500, guldprisen og T-bill fra 2008-2011; Kilde: Bloomberg.

Figurene indikerer, at der er ”volatilitetsklynger”, altså at perioder med høj volatilitet er fulgt af perioder med lav volatilitet. At der er ”volatilitetsklynger”, er et stærkt tegn på at der er ARCH effekter til stede.

For at teste om der er ARCH effekter til stede i tidsserierne, benyttes Engles (Bollerslev, Chou Y., & Kroner F., 1992) LM-test (se afsnit 5.1.1.1). Testen for tidsserierne er udført i SAS enterprise guide 6.1 via funktionen LM-test. For hvert lag gælder det, at de kvadrede afkast er regresseret på sit eget lag p . Teststatistikken er fordelt ved $X^2(p)$, og nulhypotesen tilsiger, at der ikke er ARCH effekter til stede. Teststatistikken for lag 2, 5 og 10, er vist i Tabel 5.1.

LM ARCH test						
2000-2003						
Lag	S&P 500	Pr>LM	Guld	Pr>LM	Tbill	Pr>LM
2	41.5185	<.0001	54.6374	<.0001	8.4384	0.0147
5	85.0525	<.0001	57.7572	<.0001	57.7572	0.0011
10	97.1162	<.0001	58.0961	<.0001	58.0961	0.0161
2004-2007						
2	14.3781	0.0008	6.7196	0.0347	38.2202	<.0001
5	82.7291	<.0001	70.6065	<.0001	54.1282	<.0001
10	139.2286	<.0001	139.2286	<.0001	89.8757	<.0001
2008-2011						
2	159.2973	<.0001	21.0144	<.0001	29.0798	<.0001
5	236.7224	<.0001	74.1113	<.0001	74.1113	<.0001
10	273.4869	<.0001	273.4869	<.0001	273.4869	<.0001

Tabel 5.1 LM – test. Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af tabellen, kan nulhypotesen, der tilsiger, at der ikke er ARCH effekter forkastes på et 95% konfidensinterval for S&P 500 og guldprisen. Den amerikanske ”T-bill” viser derimod, at nulhypotesen ikke kan forkastes for denne, gældende i perioden fra 2000 – 2003, dog undtagelsesvis ved 5 lags. Den er dog signifikant i de efterfølgende perioder. Det kan derfor med rimelighed antages, at der er ARCH effekter til stede for denne tidsserie.

Baseret på resultaterne i Tabel 5.1, konkluderes det, at der er ARCH effekter til stede i tidsserierne, hvormed en GARCH model, indtil videre, vil være et fornuftigt valg af model.

Daglige afkast							
Aktiv	Mean	Median	Maks	Min	Std. Afv.	Skævhed	Kurtosis
Guld 2000-2003	0.0003892	0	0.07706	-0.054	0.0091812	0.9862861	11.035937
Guld 2004-2007	-0.000694	-0.0006	0.06247	-0.0403	0.0108782	0.5310324	2.9029678
Guld 2008-2011	0.0005876	0.00061	0.06841	-0.0797	0.0146414	-0.248222	3.1218455
Daglige afkast							
Aktiv	Mean	Median	Maks	Min	Std. Afv.	Skævhed	Kurtosis
S&P500 2000-2003	-0.000268	-0.0002	0.05573	-0.06	0.0138034	0.1434989	1.3095088
S&P500 2004-2007	-0.00028	-0.0007	0.03534	-0.0288	0.0076166	0.3101533	1.8101428
S&P500 2008-2011	-0.000139	0.0009	0.10957	-0.0947	0.0181036	-0.218852	5.78669
Daglige afkast							
Aktiv	Mean	Median	Maks	Min	Std. Afv.	Skævhed	Kurtosis
1-års T-bill. 2000-2003	0.0002354	0.00029	0.00942	-0.0053	0.0011207	0.2044462	5.4777469
1-års T-bill. 2004-2007	-0.000135	-0.0001	0.00401	-0.0043	0.0009223	-0.185005	2.2258369
1-års T-bill 2008-2011	0.0001097	0.0008000	0.00859	-0.0081	0.0011795	0.1308465	9.1325202

Tabel 5.2 viser distributionerne for tidsserierne i analysen. Kilde: Egen tilvirkning

Tabel 5.2 indikerer, at guldprisen i perioden fra 2000-2003, samt perioden fra 2008-2011 ikke er normalfordelt og har ”fede haler”. S&P 500 indekset har ”fede haler” i perioden fra 2008-2011, mens renten har ”fede haler” i perioderne, 2000-2003 og 2008-2011. Dette er indikeret via distributionernes kurtosis. Distributionerne med fede haler er ”leptokurtotic”, som betyder at disse har en kurtosis > 3 , og en ”excess” kurtosis > 0 , da normalfordelingen har en kurtosis på 3.

Over halvdelen af distributionerne viser derfor tegn på ikke at være normalfordelte.

Tabel 5.2 viser samtidig skævheden for fordelingerne. Skævheden indikerer hvor meget fordelingen afviger fra normalfordelingen. Hvis skævheden er 0, er fordelingen perfekt symmetrisk, altså normalfordelt. Hvis skævheden er positiv (højreskæv), vil fordelingen have koncentrerede værdier til venstre og mere spredte værdier til højre, der ses som en lang hale. Det omvendte gør sig gældende, hvis skævheden er negativ (venstreskæv).

Det gælder derfor at distributioner med positiv skævhed, og/eller fordelingerne som er ”leptokurtotic” viser tegn på asymmetri (Alexander, Practical Financial Econometrics, 2008). Tidsserierne indikerer alle, at disse er højreskæve med undtagelse af guldprisen i perioden 2008-2011, S&P 500 indekset i perioden 2008-2011, samt renten i perioden 2004-2007. Disse er her venstreskæve.

For endeligt at afgøre om fordelingerne afviger fra den normale, benyttes en Jarque-Bera normalitetstest. Testen er vist i tabel 5.3 nedenfor:

Jarque-bera normalitets test						
	2000-2003	Prob	2004-2007	Prob	2008-2011	Prob
S&P500	73.8856	<.0001	151.0148	<.0001	1396.2	<.0001
Guld	5206.454	<.0001	395.0441	<.0001	414.0537	<.0001
Tbill	1248.294	<.0001	210.0182	<.0001	3466.636	<.0001

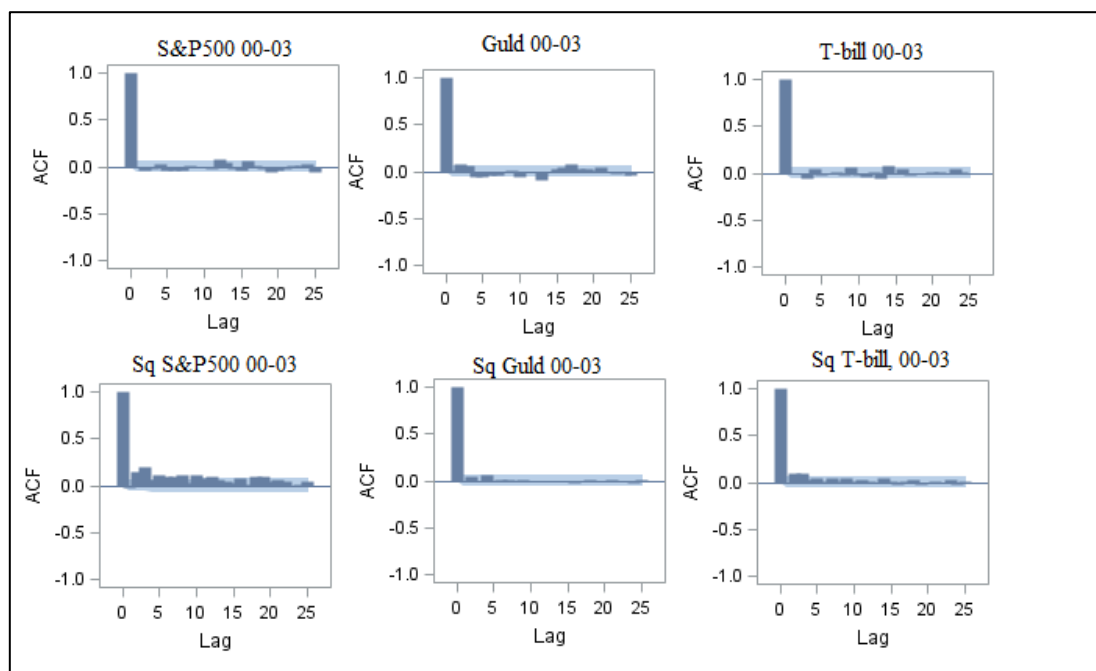
Tabel 5.3 Jarque- bera normalitets test: Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af tabellen, ses det, at nulhypotesen, som vedrører normalitet, kan afvises for alle tre aktiver for alle perioderne. Med udgangspunkt i ovenstående konkluderes det, at alle fordelinger afviger fra normalfordelingen.

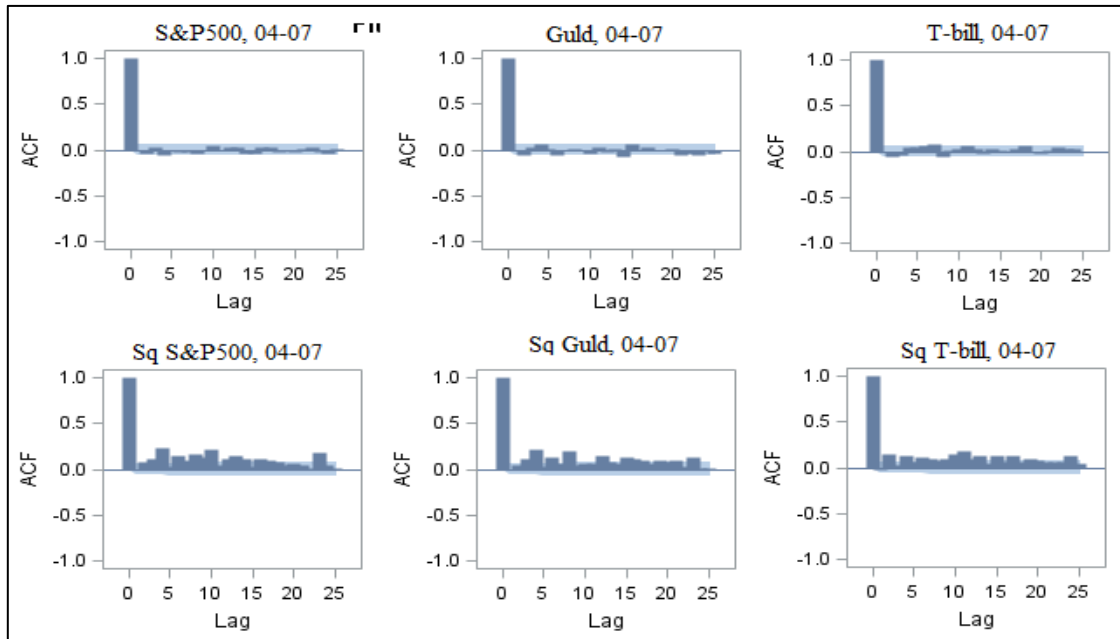
Figur 5.4 til 5.6 viser autokorrelationerne (ACF) for de ni tidsserier. ACF-testen er foretaget i SAS enterprise guide 6.1. De tre øverste grafer i hver figur viser autokorrelationen mellem afkastene. Mens graferne under hver illustrerer de kvadrede afkast. I figurerne er der benyttet 25 lags fra 1 til

25. Der skal i figurene ses bort fra lags ved værdien 0, da disse automatisk vil have en korrelation på 1. Den blå ”skygge” i hver figur, angiver et 95% konfidensinterval, for at teste om autokorrelationerne er statistisk signifikante. ACF- testen for afkastene viser en mild grad af autokorrelation, mens der for de kvadrerede afkast ses en høj grad af positivautokorrelation. Dette gælder dog ikke guldprisen i perioden for 2000-2003, hvor denne kun viser en mild grad af autokorrelation.

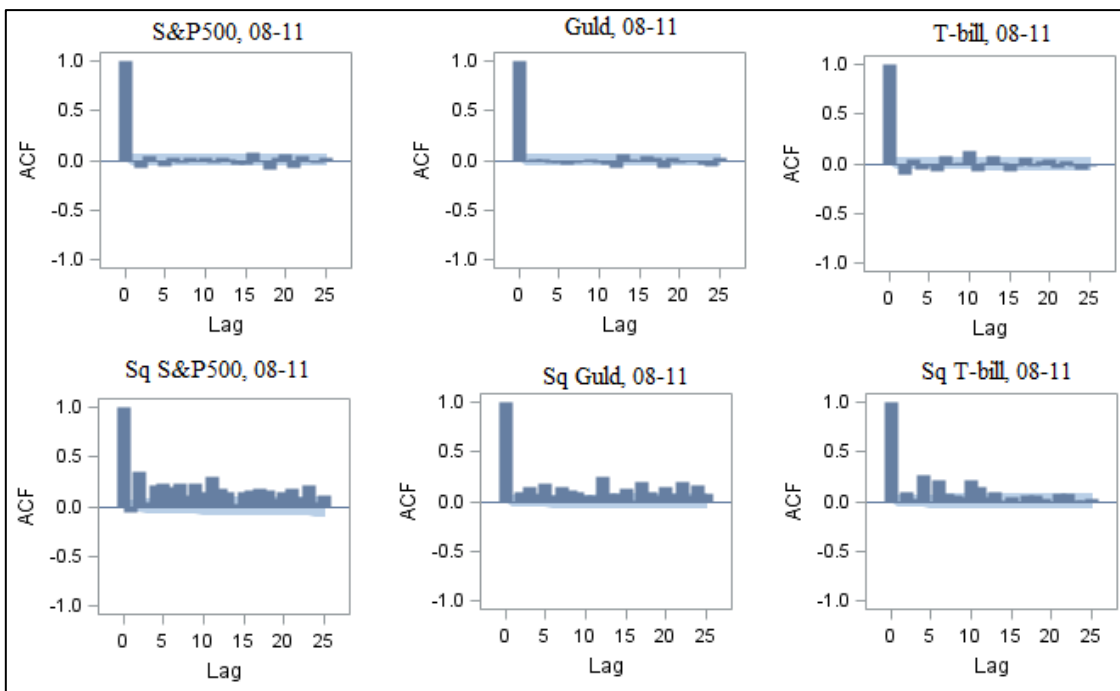
Da GARCH modeller kan opfange ”volatilitetsklynger”, de ”fede haler” i distributionerne, samt autokorrelationen af de kvadrerede afkast, konkluderes det, at en GARCH model er den rette til analysen af volatiliteten.



Figur 5.4 ACF-test 2000-2003: Kilde: Egen tilvirkning



Figur 5.5: ACF-test 2004-2007: Kilde: Egen tilvirkning



Figur 5.6: ACF- test 2008-2011: Kilde: Egen tilvirkning

5.3 Estimering og valg af model

I analysen benyttes de tre tidligere beskrevne GARCH modeller, GARCH(1,1) Gaussisk distribueret, GARCH(1,1) *t*- distribueret og en E-GARCH(1,1) Gaussisk distribueret. Når

parametrene i modellen udregnes gøres dette ved at maksimere *log likelihood* funktionen. For den *dengaussisk* (normalfordelte) GARCH(1,1) model, er *log likelihood* givet ved følgende:

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_t^2) + \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right) \quad (5.13)$$

Hvor θ angiver parametrene for den betingede varians ligning (Langsigtede varians), som er givet ved:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \quad (5.14)$$

For E-GARCH(1,1) modellen, som er en asymmetrisk GARCH model, er den langsigtede varians givet ved:

$$\bar{\sigma}^2 = \exp \left(\frac{\omega}{(1 - \beta)} \right) \quad (5.15)$$

Som det kan ses minder β om parametrene $\alpha + \beta$ i den symmetriske GARCH model.

Ved at antage at z_t (som er en i.i.d variabel, der beskriver E-GARCH(1,1) modellens betingede varians) er normalfordelt, er *log likelihood* modellen den samme som for den symmetriske E-GARCH(1,1) model, blot med andre parametre:

$$\ln L(\omega, \theta, \gamma, \beta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_t^2) + \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right) \quad (5.16)$$

For GARCH(1,1) modellen som er *t-distribueret*, ændrer formelen for den langsigtede varians sig ikke. Det gør *log likelihood* funktionen derimod, da *t-distributionen* følger en anden tæthedsfunktion end normalfordelingen (som beskrevet i afsnit 5.1.5). *Log likelihood* funktionen kommer derfor til at se ud som følger:

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) = & - \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_t) + \left(\frac{v+1}{2} \right) \ln \left(1 + (v-2)^{-1} \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right) \right) \\ & + T \ln \left[((v-2)\pi)^{-1/2} \prod \left(\frac{v}{2} \right)^{-1} \prod \left(\frac{v+1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Hvor θ angiver parametrene for den langsigtede varians.

I fraværet af store chok på aktiemarkederne, vil variansen med tiden ramme et stabilt niveau, kaldet den langsigtede varians. Denne værdi er givet ved $\bar{\sigma}^2$, således, at $\sigma_t^2 = \bar{\sigma}^2$ for alle t . $\bar{\sigma}^2$ kaldes også for den ubetingede varians for GARCH modellen og svarer til en langsigtet gennemsnitlig værdi af den betingede varians. Den langsigtede varians findes ved at substituere $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$ ind i den langsigtede varians ligning for GARCH modellen, hvorved ligningen for den langsigtede varians for den symmetriske GARCH model, er den samme som ligning (5.14) (Alexander, Practical Financial Econometrics, 2008).

For at finde den model der bedst passer til tidsserierne, benyttes modellen med den højeste *log likelihood* værdi. I tabel 5.4 er GARCH parametrene for de tre modeller og *log likelihood* værdierne vist.

		GARCH(1,1) t-dist			GARCH(1,1) Norm			EGARCH(1,1) Norm		
		Guld	S&P500	1 års T-bill	Guld	S&P500	1 års T-bill	Guld	S&P500	1 års T-bill
2000-2003	ω	8.5E-06	3.1E-06	1.4E-08	1.53E-05	3.38E-06	5.27E-08	-1.439	-0.1535	-0.2260
		<.0001	0.0024	0.0436	0.0509	0.0055	0.0017	-	-	-
	α_1	0.1354	0.0824	0.0493	0.2079	0.0892	0.0773	0.278	0.0622	0.1235
		<.0001	<.0001	0.0128	0.0056	<.0001	0.0057	0.0030	0.0119	0.0012
	β_1	0.7644	0.9024	0.9399	0.6217	0.8947	0.8813	0.8471	0.9826	0.9830
		<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001
	γ_1							0.551	-2.1122	0.2320
								0.0411	0.0050	0.2746
2004-2007	Log-Like	3400.82	2940.74	5686.92	3335.78	2936.03	5651.60	3350.41	2971.49	5654.73
	$\alpha + \beta$	0.8998	0.9848	0.9892	0.8296	0.9839	0.9586	1.1251	1.0448	1.1065
	ω	7.2E-07	1.3E-06	1.1E-08	6.7E-07	1.69E-06	1.11E-08	-0.0333	-0.3621	0.0455
		0.0008	<.0001	<.0001	0.0085	<.0001	<.0001	-	-	-
	α_1	0.0377	6.0E-02	0.0450	0.04	0.0518	0.0406	0.0552	0.0475	0.0051
		<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	0.0019	<.0001	0.0007	0.02960	<.0001
	β_1	0.9568	9.2E-01	0.9431	0.9548	0.9181	0.9465	0.9961	0.9631	1.003
		<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001
2008-2011	γ_1							1.0486	-3.2428	5.128
								0.0151	0.0882	<.0001
	Log-Like	3190.23	3544.51	5910.40	3177.86	3527.68	5888.64	3189.31	3548.14	5895.2496
	$\alpha + \beta$	0.9945	0.9791	0.9881	0.9948	0.9699	0.9871	1.0513	1.0106	1.008207
	ω	1.99E-06	1.87E-06	1.05E-08	1.70E-06	2.67E-06	1.05E-08	-0.0416	-0.2277	-0.0087
		0.0012	0.5398	<.0001	0.0453	0.4821	<.0001	-	-	-
	α_1	0.0523	0.1057	0.1016	0.0614	0.1102	0.1218	0.1415	0.1394	0.1421
		<.0001	0.0014	<.0001	<.0001	0.0006	0.0005	<.0001	<.0001	0.2460
2008-2011	β_1	0.9386	0.8949	0.893	0.9317	0.8830	0.8820	0.9944	0.9730	0.9991
		<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001
	γ_1							0.0951	-1.0729	0.0219
								0.6001	<.0001	0.9138
	Log-Like	2926.52	2882.46	5823.51	2910.35	2868.03	5774.926	2909.25	2888.31	5782.514
	$\alpha + \beta$	0.9909	1.0006	0.9946	0.9931	0.9932	1.0038	1.1359	1.1124	1.1412

Tabel 5.4.: GARCH parameter estimator & Log likelihood værdier: Kilde: Egen tilvirkning

I tabellen er de højeste *log likelihood* værdier for hver tidsserie og aktiv fremhævet med fed skrift. Under hver parameter er de tilhørende *p-værdier* vist. Tabel 5.4 viser, at GARCH (1,1) modellen er det bedste *fit* for guldprisen og den et årige T-bill. Den asymmetriske E-GARCH(1,1) model, er derimod det bedste *fit* for S&P 500 indekset. Parametrene for S&P 500 indekset i E-GARCH(1,1) modellen viser sig dog ikke at være signifikant på et 5 % signifikansniveau for en af parametrene. I perioden fra 2004-2007 er γ_1 ikke signifikant. Det kan derfor konkluderes, at E-GARCH(1,1) modellen har det bedste *fit* mht. S&P 500 indekset, mens en af parameter værdierne er usignifikant. Den *t-distribuerede* GARCH(1,1) model har de næst højeste *log likelihood* værdier for S&P 500 indekset. *P-værdierne* viser, at det for S&P 500 indekset kun er GARCH konstanten, ω , i perioden 2008-2011 der ikke er signifikant. For de to andre aktiver, guldprisen og den et årige rente, er alle *p-værdierne* signifikante.

Med undtagelse af de førnævnte parametre viser den *t-distribuerede* GARCH(1,1) model at have det bedste *fit* for to af aktiverne, når der kigges på *log likelihood* værdierne og parametrenes signifikansniveau. Det konkluderes derfor, af de tre modeller, at det er den *t-distribuerede* GARCH(1,1) model der bedst kan forklare alle tidsserierne, da *log likelihood* værdierne for S&P 500 indekset, for den *t-distribuerede* GARCH (1,1) model, og E-GARCH(1,1) modellen er næsten identiske.

5.4 Empiriske resultater

Beregningerne i tabel 5.4 viste, at den *t-distribuerede* GARCH(1,1) model har det bedste *fit* til at beskrive alle tre tidsserier.

Parametrene for GARCH(1,1) modellen har følgende fortolkning:

- GARCH *fejl* parameteren, α_1 , måler reaktionen af den betingede varians ved markedschok. Når α_1 er relativ stor (større end 0,1), er volatiliteten meget følsom overfor begivenheder i markedet.
- GARCH *lag* parameteren, β_1 , måler konsistensen i den betingede volatilitet uafhængigt af, hvad der sker på markedet. Når β_1 er relativ stor (større end 0,9), så er volatiliteten lang tid om at flade ud efter en krise i markedet.
- Summen af $\alpha_1 + \beta_1$ bestemmer hvor hurtigt den betingede volatilitet konvergerer mod det den langsigtede varians. Når $\alpha_1 + \beta_1$ er relativ stor, (større end 0,99) er strukturen af volatilitetsforecast af GARCH modellen relativ flad.

- GARCH konstanten, ω , sammen med summen af $\alpha_1 + \beta_1$ bestemmer graden af den langsigtede gennemsnitlige volatilitet, altså den ubetingede volatilitet i GARCH modellen. Når $\omega/(1 - \alpha_1 + \beta_1)$ er relativ stor, er den langsigtede volatilitet i markedet relativt høj (Alexander, Practical Financial Econometrics, 2008).

For perioden 2000-2003 er guldprisen meget følsom overfor begivenheder i markedet, da α_1 er større end 0,1. Renten og S&P 500 indekset er derimod mindre følsomme overfor chok på aktiemarkederne (dårlige nyheder), da α_1 er mindre end 0,1. Volatiliteten i guldprisen flader dog hurtigere ud efter en krise i markedet, hvor S&P 500 og renten er længere tid om dette, da disse har en β_1 værdi, der er større end 0,9. Dårlige ”nyheder” har derfor en korterevarende effekt på guldprisen i denne periode, end den har på renten og S&P 500 indekset.

I perioden fra 2004-2007, hvor man på markederne oplevede en stor vækst (undtaget sidste halvdel af 2007), kan det ses at både guldprisen, S&P 500 samt renten alle var meget lidt påvirket af chok på markederne, da α_1 her er mindre end 0,1 for alle tre parametre. Det kan samtidig ses, at chok på markederne bevirker, at alle tre aktiver er lang tid om at flade ud, da alle tre aktiver har en β_1 værdi der er større end 0,9. Dårlige ”nyheder” har i denne periode haft stor effekt på volatiliteten.

I perioden fra 2008-2011, altså under finanskrisen, ses det, at guldprisen har været mindre følsom over for chok i markedet sammenlignet med renten og S&P500 indekset. Guldprisen har været mindre følsom sammenlignet med de to andre aktiver i dens reaktion på dårlige nyheder. Chok i markedet har dog gjort, at guldprisens volatilitet sammenlignet med de to andre aktiver har været længere tid om at flade ud.

Tabel 5.5 nedenfor viser den langsigtede varians (ubetingede varians), som er fundet via ligning (5.14). Tabellen viser den annualiserede standardafvigelse, som er fundet ved at tage kvadratroden af variansen og gange denne med $\sqrt{252}$, hvor tallet 252 er antallet af handelsdage på et år.

Som tabel 5.5 viser, er S&P 500 indekset mere volatilt sammenlignet med guldprisen i perioder med finansiell uro og mange dårlige nyheder i markedet. Dette ses i perioden fra 2000-2003, hvor S&P 500 indekset er mere volatilt sammenlignet med guldprisen. I perioden fra 2004-2007, hvor der var en høj vækst på aktiemarkederne, har guldprisen været mere volatil sammenlignet med S&P 500 indekset. I den sidste periode, dækkende den finansielle krise, kan det ses, at S&P500 har været markant mere volatil sammenlignet med guldprisen. Renten har i alle tre perioder ligget på et lavt

og stabilt niveau, hvilket ikke er overraskende, grundet beskrivelsen af denne i kapitel 4.

GARCH(1,1) t-dist, VL			
	<i>Guld</i>	<i>S&P500</i>	<i>1 års T-bill</i>
2000-2003	14.7%	22.6%	1.8%
2004-2007	18.1%	12.4%	1.5%
2008-2011	23.5%	88.5%	2.2%

Tabel 5.5 *Langsigtet varians for de tre aktiver: Kilde: Egen tilvirkning*

Som tabellen viser, er den langsigtede volatilitet i perioder med stor uro på markederne højere for S&P 500 indekset, end den er for guldprisen. Det omvendte gælder dog i perioder med høj vækst på de finansielle markeder. Renten har derimod vist et stabilt niveau i hele perioden og er derfor den mindst volatile af de tre aktiver.

5.5 Delkonklusion

Guldprisen har i perioden under ”IT boblen” været meget følsom overfor ”dårlige” nyheder i markedet. Hvilket er i modsætning til S&P 500 indekset og renten. Guldprisen flader dog hurtigere ud efter chok i denne periode sammenlignet med de to andre aktiver. Dårlige nyheder i markedet har derfor en korterevarende effekt på guldprisen sammenlignet med S&P 500 og renten.

I perioden fra 2004-2007, hvor der var en høj vækst på markedet, har alle tre aktiver været meget følsomme overfor chok, mens volatiliteten for alle tre aktiver har været lang tid om at flade ud. Dårlige nyheder har i denne periode haft en langvarig effekt for alle aktiverne.

I den sidste periode fra 2008 til 2011, under den finansielle krise, er guldprisen mindre følsom over for chok i markedet sammenlignet med S&P500 indekset og renten. Guldprisen har dog været længere tid om at flade ud efter dårlige nyheder i markedet.

Sammenlignes den langsigtede volatilitet for de tre aktiver er S&P 500 indekset i perioder med kriser i markedet (altså mange dårlige nyheder) mere volatil end guldprisen. Det omvendte gør sig gældende i perioder med høj vækst på markederne. Det kan især ses, at S&P500 indekset i den sidste periode, dækkende den finansielle krise, har været markant mere volatil sammenlignet med

guldprisen. Renten har i alle tre perioder ligget på det laveste niveau af de tre og har været den mindst volatile.

Guldprisen har i perioden under den finansielle krise vist sig som en mere sikker investering sammenlignet med S&P 500 indekset, hvis man måler på volatiliteten. Forskellen i de to perioder fra 2004 til 2007 og fra perioden 2008 til 2011 viser, at guldprisen har været klart mindre volatil under den finansielle krise, mens den under den anden periode har været en anelse mere volatil end S&P 500 indekset. GARCH analysen indikerer derfor, at guld kan benyttes i en portefølje til at mindske risikoen under finansiell ustabilitet i markedet. Dette viser den første periode også, som indeholder "IT- boblen". Samtidig er guldprisen i perioden ikke markant mere volatil under "gode" (som målt ved perioden 2004-2007) markedsforhold, hvor der opleves markante stigninger på aktiemarkederne. Analysen understøtter derfor det tidligere resultat (se kap 3.) om at guld har en vis diversificeringsegenskab.

6.0 Introduktion til copula funktioner

Porteføljerisiko er et mål for den usikkerhed der er i porteføljeafkastdistributioner. Hvis man afviger fra den klassiske antagelse, at middelværdi afvigelse er uafhængige og symmetriske med identiske elliptiske fordelinger (herunder normalfordelingen og student-t distributioner), er det ikke muligt at sammenfatte usikkerhed ved et simpelt mål som porteføljevolaletet (Alexander, 2008). Ligeledes er korrelationen et mål for afhængigheden mellem aktiver og er i særdeleshed et brugt mål i finansiell risikostyring. Men korrelationen kan kun repræsentere en bestemt type risiko. Hver aktiv skal følge en i.i.d. proces, og fællesdistributionen af variablene skal være elliptisk. Som vi har set tidligere i volatilitetsundersøgelsen (kap. 5), er der intet der tyder på, at de aktiver vi undersøger følger disse antagelser. Derfor er man nødsaget til at operere med hele fællesdistributionen af afkast.

I dette afsnit vil der blive kigget på fællesdistributionen af to i.i.d. tilfældige variable X og Y . Det skal dog lige præciseres, at grunden til at der i teorien "kun" opereres med to forskellige variable er for "nemhedens" skyld. Det kræver dog relativt ikke meget at tilføje et ekstra led i teorien, men det giver ikke en ekstraordinær eller brugbar viden i forhold til selve analysen. I praksis arbejdes der som bekendt med tre aktiver/variable.

Distributionen er den todimensionelle funktion, som giver sandsynlighederne for både X og Y , der samtidigt har bestemte værdier. Fællesdistributionen bygges på to aktivers afkast ved først at angive

de marginale distributioner, dvs. ”stand-alone” distributionerne, for derefter at bruge copulaer til at repræsentere sammenhængen mellem disse afkast.

En af fordelene ved at bruge copulaer er, at de isolerer den afhængige struktur fra strukturen af de marginale distributioner. Dette betyder, at copulaer kan anvendes på hvilken som helst marginal distribution, og disse marginale distributioner kan være forskellige fra hinanden. Med andre ord kan en marginal distribution have form som en student-t distribution med 10 frihedsgrader, en anden kan tage form som Chi^2 med 15 frihedsgrader osv.

Siden copula funktioner pålægger en afhængighed på marginalerne, som kan være helt forskellige fra distributionerne af marginalerne, er det nødvendigt at specificere marginalerne separat i forhold til copulaen.

Mere specifikt bruges copulaerne altså til at specificere en fællesdistribution i en proces med to stadier: Først specificeres typen af de marginale distributioner, hvorefter copula distributionen defineres. Da copula funktioner udelukkende definerer afhængighedsstrukturen, vil forskellige copula funktioner angive forskellige fællesdistributioner, selvom de tilføjes til de samme marginale distributioner.

Hvis det antages, at der tilføjes to forskellige copula funktioner til de marginale distributioner, hvormed der opnås to forskellige fællesdistributioner, og kun den ene fordeling udviser stærk nedre hale afhængighed, så bør denne fordeling betragtes som mere risikabel end den med en svagere, symmetrisk afhængighed, i hvert fald ifølge en downside risiko matrice.

Forestiller man sig at udlede en standard Pearson korrelation fra hver fælles distribution, vil det være muligt at vælge parametrene for hver enkelt copula, så Pearson korrelationsskøn bliver den samme for begge fællesdistributioner, selvom deres afhængighedsstrukturer er forskellige. Derfor kan det konkluderes, at en standard Pearson korrelation ikke kan indfange forskellige risikotræk i de to fordelinger (Alexander, 2008). Dette skyldes at Pearson korrelationen kun er en symmetrisk, lineær afhængighedsmatrice. Derfor er formålet med dette afsnit at indføre copulaer, der er designet til at fange asymmetrisk haleafhængighed, da der i GARCH analysen (kap. 5) blev fundet frem til, at de individuelle distributionsmarginaler ikke opfylder antagelserne om normalfordelte distributioner.

6.1 Teoretiske koncepter for copulaer

I praksis er det som bekendt en kendsgerning at enten de marginale distributioner er asymmetriske, eller at afhængigheden ikke er lineær, eller begge dele samtidig. Af denne grund giver korrelationen ikke mening som en afhængighedsmatrice. Alternativet til dette er, at benytte copula funktioner.

Copulafunktioner er et meget fleksibelt instrument til at konstruere en fællesdistribution. Fordelen ved at benytte copulafunktionerne til at konstruere en fællesdistribution er, at distributionen får en funktionel form, som kan opfange den observerede adfærd af finansielle aktivers afkast meget bedre end en elliptisk distribution.

6.1.1 Sklar's teoreme

Begrebet copula blev introduceret af Sklar (1959), Formålet var at gøre det muligt at kunne dekomponere n -dimensionel distributionsfunktion, F , i to dele, den marginale distributionsfunktion F_i og selve copulaen, som beskriver sammenhængen mellem variableerne i distributionen.

Generelt så fastslår teoremet at for alle kumulative distributionsfunktioner, F , med en-dimensionelle marginaler $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$, eksisterer der en copula, C , som binder de marginale distributioner til en given fællesdistribution.

Specielt for de todimensionelle tilfælde er Sklar's teoreme som følgende:

For hvilken som helst todimensionel distributionsfunktion $F(x_1, x_2)$ med en-dimensionelle marginaler F_1 og F_2 eksisterer der en copula sådan at

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Med andre ord, hvis de marginale distributionsfunktioner F_1 og F_2 er kontinuerte, så er C unik (Faugeras, 2013).

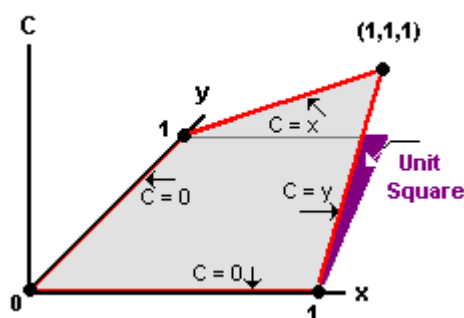
6.1.2 Definition af copula funktionen

Forestiller man sig to variable kaldet X_1 og X_2 med deres individuelle kontinuerte marginale distributionsfunktioner $F_1(x_1)$ og $F_2(x_2)$ og lad $u_i = F_i(x_i)$, $i = 1, 2$. u_i angiver et tilfældigt nummer, som repræsenterer en sandsynlighed. De følgende typer af funktioner er berettiget til at være todimensionelle copulaer.

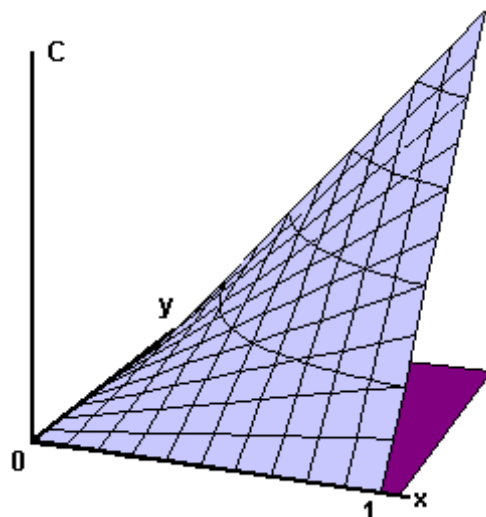
- (i) $C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$; dvs. ligger i området $[0,1]$ for hvert par og generer et nummer inden for samme område.

- (ii) $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$; dvs. er blot en af variablene 0 er copulafunktionen også 0
- (iii) $C(u_1, 1) = u_1$ og $C(1, u_2) = u_2$; dvs. når $u_2 = 1$, $C(u_1, 1) = u_1$ vokser fra 0 til 1, når u_1 vokser fra 0 til 1
- (iv) $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(v_1, u_2) - C(u_1, u_2)$ for alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ med $u_1 \leq v_1$ og $u_2 \leq v_2$; dvs. at copulafunktionen er voksende i både u_1 og u_2 .

Som illustration kan det vises som følgende



Figur 6.1 Kilde: (Financialweb, 2013)



Figur 6.2 Kilde: (Financialweb, 2013)

Den første betingelse (i) indebærer at copula funktionen reagerer på værdier af to distributionsfunktioner. Yderligere er værdien af hvilken som helst distributionsfunktion en standard lige fordelt variabel, hvorfor det er muligt at sætte $U_i = F_i(x_i)$, $i = 1, 2$. De andre tre betingelser specificerer en copula som en fællesdistributionsfunktion for U_1 og U_2 .

Som omtalt kom Sklar med et meget interessant resultat i 1959. Hans resultat viser, at copulaer er meget unikke på en helt bestemt måde. Den todimensionelle form af Sklar's teori er som følgende:

Givet hvilken som helst fællesdistribution $F(x_1, x_2)$, er der en tilhørende copula funktion $C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ sådan at:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (6.1)$$

Og omvendt, hvis C er en copula funktion og $F(x_1)$ og $F(x_2)$ er distributionsfunktioner så definere ovenstående formel (6.1) en todimensionel distribution med de marginale distributioner $F(x_1)$ og $F(x_2)$.

F.eks. hvis det antages at X_1 og X_2 er uafhængige, så er fællesdistributionen bare produktet af marginalerne, derfor er den unikke copula som følgende

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(x_1)F(x_2) \quad (6.2)$$

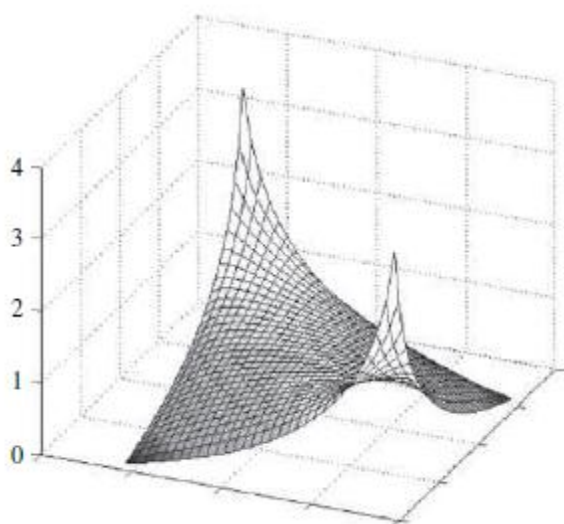
Ved at differentiere (6.1) med respekt til x_1 og x_2 fremkommer der et simpelt udtryk for en fællestæthedsfunktion $f(x_1, x_2)$ i form af de marginale tæthedsfunktioner $f_1(x_1)$ og $f_2(x_2)$. Herved fås

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)c(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad (6.3)$$

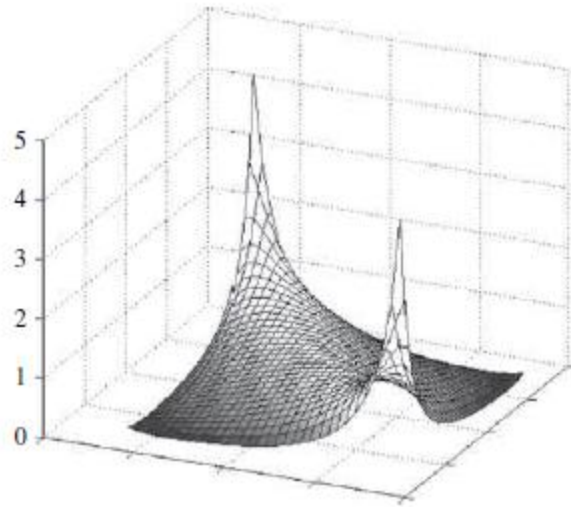
Hvor

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)}. \quad (6.4)$$

Marginalerne $F_i(x_i)$ er normalfordelte. Fra tidligere vides det at $F_i(x_i) = u_i$, for $i = 1, 2$, hvor u_i er en observation på en standard lige fordelt variable. Og eftersom det gør sig gældende kan ovenstående formel (6.4) blive skrevet som $c(u_1, u_2)$ (Alexander, 2008). Nedenstående kan forskellige copula tæthedsfunktioner ses



Figur 6.3 Todimensionel normal copula tæthedsfunktion med korrelation 0,5, Kilde:(Alexander, 2008)



Figur 6.4 Todimensionel Student t copula tæthedsfunktion korrelation 0,5 og 5 frihedsgrader,
Kilde:(Alexander, 2008)

Da det i undersøgelsen er interessant at se på flere variable end blot to, kan ovenstående koncepter generaliseres til de multivariate tilfælde.

Antag n forskellige variable $X_1, X_2, \dots, X_n$, med kendte og kontinuerte marginale distributioner $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$. En copula vil i det tilfælde være en monotont stigende funktion fra $[0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, som ligesom i det todimensionelle tilfælde opfylder betingelserne (i)-(iii) ovenfor.

Sklar's teoreme siger, givet et sæt af kontinuerte marginale distributioner, at særskilte copulaer definerer særskilte tæthedsfunktioner. Så uanset hvilken som helst fællestæthedsfunktion $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ med kontinuerte marginaler, er det muligt at udlede en unik copula funktion C sådan at

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (6.5)$$

Hvis ovenstående eksisterer, vil den tilhørende copula tæthedsfunktion kunne defineres som

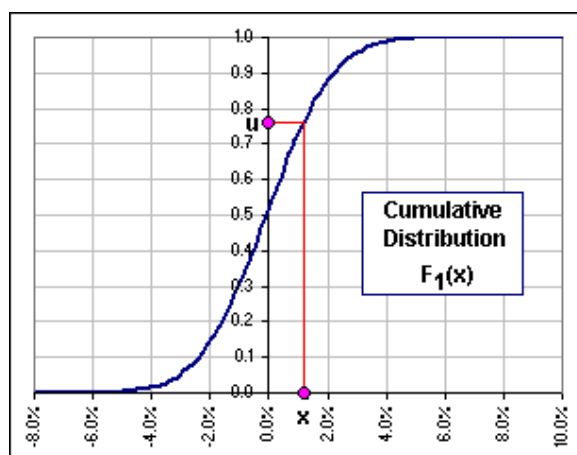
$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial^n F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \quad (6.6)$$

Hvor $u_i = F_i(x_i)$

Given copula tæthedsfunktionen og de marginale tæthedsfunktioner $f_i(x) = F_i'(x)$, kan fællestæthedsfunktionen af de originale variable indhentes ved at bruge følgende

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (6.7)$$

Værdierne $F_i(x_i)$ af de marginale distributionsfunktioner er lige fordelt distribueret. Derfor er en alternativ notation mulig for copula distributionen ved at bruge lige fordelte distribuerede variable $u_i \in [0,1]$ i stedet for værdierne $F_i(x_i)$ til at repræsentere værdierne af de marginale distributioner ved de realiserede værdier x_i . Dette ses som illustration nedenfor



Figur 6.5 Kilde: (Financialweb, 2013)

Ved at sætte $F_i(x_i) = u_i$ vil hver fællesdistributionsfunktion F definere en implicit copula af formen

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad (6.8)$$

Hvor u_i er fraktilerne af marginalerne i intervallet $[0,1]$, som repræsenterer værdierne af de marginale distributioner af de realiserede værdier x_i . Så der er en implicit copula i forhold til alle multivariate distributioner. De mest vigtige er den normale eller også kaldet Gaussian copulaer og så Student-t copulaer. Hvis følgende notation benyttes $F_i(x_i) = u_i$, kan tæthedsfunktionen for copulaen skrives således

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial^n u_1 \dots \partial u_n} \quad (6.9)$$

6.2 Betingede copulaer og deres fraktile kurver

Ligesom alle fællesdistributionsfunktioner så har copulaer også betingede distributioner. En betinget distribution er distributionen af en variabel givet, at de andre tager specificerede fastsatte værdier. Den eneste forskel mellem en betinget copula distribution og en almindelig distribution er, at marginalerne af alle copula er lige fordelt distribueret pr. definition. Selvom dette er tilfældet, kan den betingede copula være ganske forskellig for forskellige copulaer.

For at definere en betinget copula distribution, vil man igen kigge på en todimensionel copula $C(u_1, u_2)$. Heraf fås to betingede distributioner af copulaen. Disse defineres ved følgende funktioner

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = P(U_1 < u_1 | U_2 = u_2) \quad (6.10)$$

Og

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = P(U_2 < u_2 | U_1 = u_1) \quad (6.11)$$

De betingede fordelinger opnås ved at tage den første afledte med respekt til hver variabel, derved får de to funktioner følgende udtryk

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \quad \text{og} \quad C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \quad (6.12)$$

Det er muligt at afbilde de betingede distributioner efter disses fraktiler. For nogle fastsatte sandsynligheder q , kan sætte ovenstående udtryk (6.12) til at være

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = q \quad (6.13)$$

Af ovenstående formel (6.13) defineres u_2 som en funktion af q og u_1 . Men da den ikke behøves at være en eksplicit funktion af q og u_1 , kan følgende skrives

$$u_2 = g_q(u_1) \quad (6.14)$$

Hvor g_q er en implicit eller eksplicit funktion, som kaldes for "*the q quantilecurve*" af copulaen (Alexander, 2008).

De fraktile kurver uddybes i afsnit 6.5, hvor disse også illustreres.

6.3 Haleafhængighed

Haleafhængighed undersøger de ekstreme værdier i halerne af fællesdistributionen. For uafhængige variable er copulaens tæthedsfunktion én alle steder. Copulatæthedsfunktioner ligner ikke en almindelig tæthedsfunktion, som altid er positiv og har større værdier i midten. Det gælder derimod det modsatte: copula tæthedsfunktioner som bruges i finansiering har ofte større værdier i hjørnerne, hvilket indikerer væsentligheden af afhængigheden i halerne.

Nedenstående formel definerer den lave haleafhængighedskoefficient som

$$\lambda_{ij}^l = \lim_{q \downarrow 0} P(X_i < F_i^{-1}(q) | X_j < F_j^{-1}(q)) \quad (6.15)$$

forudsat at grænsen eksisterer. Med ord, repræsenterer formelen den betingede sandsynlighed for, at en variabel har en værdi i dens lavere hale, givet at den anden variabel har en værdi i dens lavere hale. Siden at koefficienten er en betinget sandsynlighed, gælder det at $\lambda_{ij}^l \in [0,1]$. Copulaen har lavere haleafhængighed for X_i og X_j når $\lambda_{ij}^l > 0$. Jo højere værdien er for afhængighedskoefficienten, jo stærkere er den lave haleafhængighed. Tilsvarende vil man kunne skrive for den høje haleafhængighed, der vil < blot være > i ovenstående formel og koefficienten noteres λ_{ij}^u . I tilfælde af at $\lambda_{ij}^l = \lambda_{ij}^u$ for alle i og j , vil haleafhængigheden være symmetrisk i copulaen.

I denne undersøgelse er opmærksomheden specielt omkring de tilfælde hvor haleafhængigheden er symmetrisk, hvilket er repræsenteret af Student-t copulaer. Yderligere ses der på tilfælde hvor haleafhængigheden af asymmetrisk. Asymmetriske copulaer repræsenteres ved de såkaldte ”archimedean” copulaer, såsom *Clayton* og *Gumbel* (Alexander, 2008).

6.4 Eksempler af relevante copulaer

I dette afsnit benyttes de introducerede koncepter til at bestemme udvalgte copulaer til selve undersøgelsen. Disse copulaer er nogle af de mest almindelig til brugen af markedsrisikoundersøgelser. For at opsummere de ovenstående koncepter, så er der n tilfældige variable $\{X_1, \dots, X_n\}$ med marginale distributioner $\{F_1, \dots, F_n\}$ og her bruges notationen $u_i = F_i(x_i)$. Med andre ord er u_i i intervallet $[0,1]$ og repræsenterer værdien af den i 'te marginale distribution ved den realiserede værdi x_i for $i = 1, \dots, n$. Så bruges $C(u_1, \dots, u_n)$ som notation for copulaen og $c(u_1, \dots, u_n)$ for den tilhørende tæthedsfunktion, hvis denne eksisterer.

6.4.1 Normal eller Gaussian copulaer

Da $C(u_1, \dots, u_n)$ har en værdi mellem 0 og 1 for alle $(u_1, \dots, u_n)$ er det muligt at udlede en copula fra hvilken som helst standard multivariat distribution. Dvs. man isolerer afhængighedsdelen af fællesdistributionen, hvilket så er den implicite copula af denne distribution. Derefter er det muligt at tilføje copulaen til andre typer af marginaler. Den vigtige copula af de implicite copulaer er den normale copula eller også kaldet for Gaussian copula.

Den multivariate normale copula har en korrelationsmatrice, Σ , for parametrene. Den normale copula er udledt fra den n -dimensionelle og den lige fordelte standard normale distributionsfunktion, som respektivt noteres Φ og ϕ . Dermed er copulaen defineret ved

$$C(u_1, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi\left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)\right) \quad (6.16)$$

Copula distributionen kan kun blive udtrykt via et integrale og derfor er det væsentligt nemmere at arbejde med copulaens tæthedsfunktion end med dens distribution.

Ved differentiering af ovenstående formel (6.16) fås tæthedsfunktionen for den normale copula

$$c(u_1, \dots, u_n; \Sigma) = |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi'(\Sigma^{-1} - \mathbf{I})\xi\right) \quad (6.17)$$

Hvor Σ er korrelationsmatricen, $|\Sigma|$ er dennes determinant og $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)'$ hvor ξ_i er den u_i fraktile af den standard normale tilfældige variabel X_i og $u_i = P(X_i < \xi_i)$, $X_i \sim N(0,1)$, $i = 1, \dots, n$. Yderligere er den normale copula en funktion af $(u_1, \dots, u_n)$ og ikke en funktion af $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ da $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$.

Det svære er nu at finde en fællesdistribution, givet korrelationsmatricen, når copulaen er normal, men hvor en eller flere marginale distributioner ikke er normale distributionsfunktioner.

Fremgangsmåden vil være som følgende:

1. For marginalerne sættes $u_i = F_i(x_i)$ for $i = 1, \dots, n$ (marginalerne behøves ikke være normale);
2. Den inverse Gaussian distribution tilføjes, $\xi_i = \Phi^{-1}(u_i)$ for $i = 1, \dots, n$;
3. Herefter bruges korrelationsmatricen Σ og vektoren ξ i tæthedsfunktionen for copulaen.

I tilfældet hvor $n = 2$ er den normale copula distribution som følgende

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right), \quad (6.18)$$

hvor Φ er den todimensionelle standard normale distributionsfunktion og Φ er den ligefordelte standard normale distributionsfunktion, som alternativt har følgende udtryk

$$C(u_1, u_2; \rho) = \int_0^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_0^{\Phi^{-1}(u_2)} (2\pi)^{-1} (1 - \rho^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{[x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2]}{2(1 - \rho^2)}\right) dx_1 dx_2. \quad (6.19)$$

Den todimensionelle normale tæthedsfunktion for copulaen er den todimensionelle version af (6.17).

$$c(u_1, u_2; \rho) = (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 \xi_1^2 - 2\rho \xi_1 \xi_2 + \rho^2 \xi_2^2}{2(1 - \rho^2)}\right) \quad (6.20)$$

Hvor $\xi_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ og $\xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ er fraktilerne af de standardiserede normale variable.

Den normale familie af copulaer er symmetriske, dvs. $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$. Disse har også meget dårlig haleafhængighed, hvilket normalt ikke er særlig optimalt i modelleringen af afhængigheden mellem finansielle aktiver, som vi også så i volatilitetsanalysen (kap. 5.0).

Volatilitetsanalysen viste yderligere, at i perioder med store chok på markederne, som under den finansielle krise i 2008, reagerer markederne kraftigt, og volatiliteten flader langsomt ud. I perioden fra 2003-2007, hvor der i størstedelen af perioden har været høj vækst på markederne, er aktieafkastene mindre følsomme overfor nyheder. Det må derfor antages, at perioder med mange ”gode” nyheder har en mindre effekt på volatiliteten sammenlignet med perioder med mange ”dårlige” nyheder i markedet. Nyhederne har derfor en klar indflydelse på haleafhængigheden i copulaerne, som en normal copula ikke kan opfange. Og dermed som det blev introduceret i indledningen ikke være interessant at benytte Pearsons korrelation, da denne er symmetrisk og lineær (Alexander, 2008).

Af ovenstående grunde bliver der nu kigget på Student-t copulaen, der er symmetrisk, men som tager højde for haleafhængighederne.

6.4.2 Student-t copulaer

Den n-dimensionelle symmetriske Student-t copula er en anden form for copula, som er udledt implicit fra den multivariate distributionsfunktion. Denne er defineret ved

$$C_v(u_1, \dots, u_n; \Sigma) = t_v(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \quad (6.21)$$

Hvor t_v og t_v er multivariate og lige fordelte Student-t distributionsfunktioner med v frihedsgrader.

Definitionen for den multivariate Student-t tæthedsfunktion er givet ved

$$f(\mathbf{x}) = k|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}(1 + v^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x})^{-\frac{v+n}{2}} \quad (6.22)$$

hvor $|\mathbf{\Sigma}|$ angiver determinanten af korrelationsmatricen og k er defineret som

$$k = \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right) (v\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad (6.23)$$

Den multivariate Student-t copula distribution kan blive skrevet som følgende

$$C(u_1, \dots, u_n; \mathbf{\Sigma}) = \int_0^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_0^{t_v^{-1}(u_n)} k|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}(1 + v^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x})^{-\frac{v+n}{2}} dx_1 \dots dx_n \quad (6.24)$$

Ved at differentiere ovenstående ovenstående formel (6.24) fremkommer den tilhørende tæthedsfunktionen for copulaen

$$c_v(u_1, \dots, u_n; \mathbf{\Sigma}) = K|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}(1 + v^{-1}\boldsymbol{\xi}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\xi})^{-\frac{v+n}{2}} \prod_{i=1}^n (1 + v^{-1}\xi_i^2)^{\frac{v+1}{2}} \quad (6.25)$$

Hvor $\boldsymbol{\xi} = (t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))$ er en vektor af de realiserede værdier af Student-t variableerne og

$$K = \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right) \quad (6.26)$$

I tilfældet hvor $n = 2$ er den symmetriske todimensionelle t copula distribution

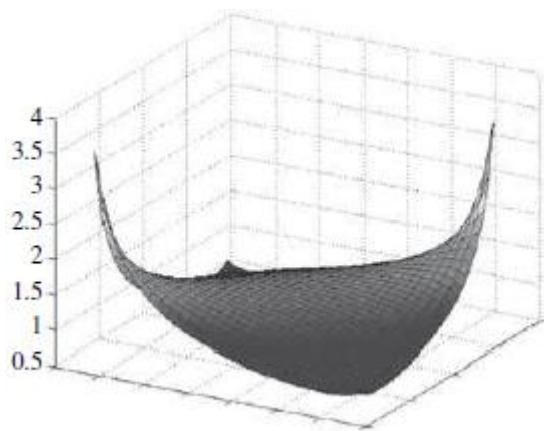
$$C(u_1, u_2; \varrho) = \int_0^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_0^{\Phi^{-1}(u_2)} (2\pi)^{-1}(1 - \varrho^2)^{-\frac{1}{2}}[1 + v^{-1}(x_1^2 - 2\varrho x_1 x_2 + x_2^2)]^{-\frac{v+2}{2}} dx_1 dx_2 \quad (6.27)$$

og den tilhørende tæthedsfunktion kan angives som

$$c(u_1, u_2; \varrho) = K(1 - \varrho^2)^{-\frac{1}{2}}[1 + v^{-1}(1 - \varrho^2)^{-1}(\xi_1^2 - 2\varrho\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)]^{-\frac{v+2}{2}} \times [(1 + v^{-1}\xi_1^2)(1 + v^{-1}\xi_2^2)]^{\frac{v+1}{2}} \quad (6.28)$$

Nedenstående figur 6.6 viser den todimensionelle t copula tæthedsfunktion med syv frihedsgrader og med $\varrho = -0,25$ og som sædvanlig en funktion af u_1 og u_2 , som bevæger sig intervallet fra 0 til

1. Toppene i halerne er symmetriske, fordi copulaen har symmetrisk haleafhængighed. Derudover er toppene også højere end i normale copulaer med $\rho = -0,25$.



Figur 6.6 Kilde: (Alexander, 2008)

6.4.3 Arkimediske copulaer

Student-t og den normalfordelte copula er begge elliptiske og dermed implicite copulaer, hvilket betyder, at disse er fremkommet via en inversionsmetode. En alternativ metode til at opbygge en copula funktion er baseret på en ”generatorfunktion”, som i det følgende er givet ved $\psi(u)$. Givet ”generator funktionen”, kan den tilhørende arkimediske copula nu defineres som:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \psi^{-1}(\psi(u_1) + \dots + \psi(u_n)). \quad (6.29)$$

Hvor dennes tæthedsfunktion er givet ved:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \psi_{(n)}^{-1}(\psi(u_1) + \dots + \psi(u_n)) \prod_{i=1}^n \psi(u_i). \quad (6.30)$$

Hvor $\psi_{(n)}^{-1}$ er den n'te afledte af den inverse generatorfunktion. Generatorfunktionen kan være en hvilken som helst strengt konveks og monotonisk faldende funktion med $\psi(1) = 0$ og $\psi(u) \rightarrow \infty$ når $u \rightarrow 0$. Dermed kan et stort antal forskellige arkimediske copulaer konstrueres. Ved blot at specificere en parameter for generatorfunktionen, fremkommer en stor mængde arkimediske copulaer. De to mest anvendte arkimediske copulaer, som er benyttet i markedsrisikoanalyse er beskrevet nedenfor, og er samtidig de to arkimediske copulaer der analyseres for deres forklaring af dataen i de tre perioder. De to copulaer er Clayton og Gumbel.

Clayton og Gumbel har den egenskab, at de kan opfange den asymmetriske haleafhængighed, som

ofte er vigtig når man skal modellere sammenhængen mellem forskellige aktivers afkast. Clayton copulaen opfanger nedre haleafhængighed, mens Gumbel opfanger øvre haleafhængighed (Alexander, 2008).

6.4.3.1 Claytons Copula:

En af de generatorfunktioner som ofte benyttes når der arbejdes med finansielle tidsrækker er givet ved:

$$\psi(u) = \alpha^{-1}(u^{-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 0 \quad (6.31)$$

Den inverse generator funktion bliver derved:

$$\psi^{-1}(x) = (\alpha x + 1)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (6.32)$$

Dette leder til den arkimediske copula funktion af formen

$$C(u_1, \dots, u_n; \alpha) = (u_1^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (6.33)$$

Ved at differentiere (6.33) fås Claytonstæthedsfunktion,

$$c(u_1, \dots, u_n) = \left(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha}\right)^{-n - \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \prod_{j=1}^n (u_j^{-\alpha-1} ((j-1)\alpha + 1)), \quad (6.34)$$

Hvilket medfører at når $n=2$ fås,

$$c(u_1, u_2) = (\alpha + 1)(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)} u_1^{-\alpha-1} u_2^{-\alpha-1}, \quad (6.35)$$

Clayton copulaen har asymmetrisk haleafhængighed, mens den øvre haleafhængighed antager værdien 0. Den har dog en positiv nedre haleafhængighedskoefficient, når $\alpha > 0$, med

$$\lambda = \begin{cases} 2^{-1/\alpha}, & \text{Hvis } \alpha > 0, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Når parameteren α varierer, opfanger Clayton copulaen en række forskellige afhængigheder med positiv afhængighed defineret som, $\alpha \rightarrow \infty$ (Alexander, 2008) [2].

6.4.3.2 Gumbel copula

Generatorfunktionen for Gumbel copulaen er som følger,

$$\psi(u) = -(\ln u)^\delta, \quad \delta \geq 1 \quad (6.36)$$

Den inverse generator funktion bliver dermed,

$$\psi^{-1}(x) = \exp((-x)^{1/\delta}). \quad (6.37)$$

Gumbel copula funktionen kan herefter skrives som,

$$C(u_1, \dots, u_n; \delta) = \exp\left(-[(-\ln u_1)^\delta + \dots + (-\ln u_n)^\delta]^{1/\delta}\right) \quad (6.38)$$

Eller ved at sætte

$$A = (u_1, \dots, u_n; \delta) = \left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\delta\right)^{1/\delta}, \quad (6.39)$$

Lig med

$$C(u_1, \dots, u_n; \delta) = \exp(-A(u_1, \dots, u_n; \delta)), \quad (6.40)$$

Når $n=2$ fremkommer den todimensionelle Gumbels tæthedsfunktion,

$$c(u_1, u_2; \delta) = (A + \delta - 1)A^{1-2\delta} \exp(-A)(u_1 u_2)^{-1} (-\ln u_1)^{\delta-1} (-\ln u_2)^{\delta-1}, \quad (6.41)$$

Hvor

$$A = ((-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta)^{1/\delta} \quad (6.42)$$

Gumbel copulaen har positiv øvre hale afhængighed hvis $\delta > 1$. Når parametren, δ , varieres, opfanger Gumbel copulaen en række afhængigheder, der ligger imellem uafhængig ($\delta = 1$) og perfekt positiv afhængighed når $\delta \rightarrow \infty$ (Alexander, 2008).

6.5 Betingede copula distributioner og fraktilkurver

For at tilføje copulaer i simulationer og regressioner, som senere skal benyttes til simulering af afkast ud fra den valgte copula, kræves det generelt en kombination af den betingede copula distribution og de marginale distributioner af de tilfældige variable. Fraktilkurver er et middel til at skildre disse. Med andre ord er punkterne (ξ_1, ξ_2) vist ved den q 'te fraktilkurve sådan at

$$P(X_2 < \xi_2 | X_1 = \xi_1) = q. \quad (6.43)$$

I dette afsnit vises udtrykkene for de betingede distributioner og q fraktilkurver for de todimensionelle copulaer, som blev introduceret tidligere.

6.5.1 Normal eller Gaussian copulaer

De betingede distributioner af den todimensionelle normale copula (Gaussian copula) er udregnet ved at differentiere (6.18). Heraf fås,

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad (6.44)$$

og hvor de andre betingede distributioner udledes på samme vis.

Som tidligere beskrevet er de betingede distributioner af den todimensionelle standardnormale distribution Φ , givet at $X = x$ lige fordelte normale distributioner, hvor forventning og varians er givet ved

$$E(Y|X = x) = \rho x, \quad V(Y|X = x) = 1 - \rho^2. \quad (6.45)$$

Dermed har den følgende variabel den standardnormale distribution:

$$Z = \frac{Y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}. \quad (6.46)$$

Af formel (6.44) fremkommer den todimensionelle normale copula betingede distribution som

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right), \quad (6.47)$$

Den q 'te fraktilkurve af den normale copula med standardnormale marginaler kan skrives i eksplicit form ved at sætte (6.47) lig med til den fikseret sandsynlighed q :

$$q = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right). \quad (6.48)$$

Ved at løse for u_2 fås den q 'te fraktilkurve for den normale copula, med standardnormale marginaler, som

$$u_2 = \Phi\left(\rho\Phi^{-1}(u_1) + \sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(q)\right). \quad (6.49)$$

De marginale tæthedsfunktioner skifter den q 'te fraktilkurve af den normale copula til (ξ_1, ξ_2) koordinater. Når marginalerne er standardnormale $\xi_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ og $\xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ så er den q 'te fraktilkurve i (ξ_1, ξ_2) koordinaterne

$$\xi_2 = \varrho \xi_1 + \sqrt{1 - \varrho^2} \Phi^{-1}(q). \quad (6.50)$$

Ovenstående formel (6.50) angiver en lige linje med hældningen ϱ og skæringspunktet $\sqrt{1 - \varrho^2} \Phi^{-1}(q)$. Mere generelt, hvis marginalerne er normale, men med middelværdierne μ_1, μ_2 og standardafvigelserne σ_1, σ_2 , vil den q 'te fraktilkurve stadig være en lige linje i koordinaterne (ξ_1, ξ_2) , men med en modificeret hældning og skæring

$$\frac{\xi_2}{\sigma_2} = \varrho \left(\frac{\xi_1}{\sigma_1} \right) + \frac{\mu_2}{\sigma_2} - \varrho \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} \right) + \sqrt{1 - \varrho^2} \Phi^{-1}(q) \quad (6.51)$$

Hvis der mere generelt ønskes et udtryk for ikke-lineære q fraktilkurver, kan $u_1 = F_1(\xi_1)$ og $u_2 = F_2(\xi_2)$ substitueres ind i (6.49), hvorved udtrykket gives som

$$\xi_2 = F_2^{-1} \left[\Phi \left(\varrho \Phi^{-1}(F_1(\xi_1)) + \sqrt{1 - \varrho^2} \Phi^{-1}(q) \right) \right] \quad (6.52)$$

6.5.2 Student-t copulaer

De betingede distributioner af Student-t copulaerne der stammer fra den todimensionelle Student-t distribution udledes ved partiældifferentiering. Når $n = 2$ gælder det at

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} t_v(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2)). \quad (6.53)$$

For eksplicit at kunne udlede en form tilsvarende den normale copula, bruges tilsvarende analyse til at komme frem til denne form. Den betingede distribution af en standard todimensionel t distribution med v frihedsgrader, givet at $X = x$, er en lige fordelt t fordeling med $v + 1$ frihedsgrader.

$$t = \sqrt{\frac{v+1}{v+x^2}} \times \frac{Y - \varrho x}{\sqrt{1 - \varrho^2}}. \quad (6.54)$$

Når t er givet som ovenstående, så er den betingede distribution af den todimensionelle Student-tcopula, som stammer fra den todimensionelle Student- t distribution, givet som

$$C_{1|2}(u_1|u_2) = t_{v+1} \left(\sqrt{\frac{v+1}{v+t_v^{-1}(u_1)^2}} \times \frac{t_v^{-1}(u_2) - \varrho(u_2) - \varrho t_v^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\varrho^2}} \right). \quad (6.55)$$

Den q 'te fraktilkurve af Student-t copulaen kan således skrives i en eksplicit form ved at sætte (6.47) lig med den fikseret sandsynlighed q

$$q = t_{v+1} \left(\sqrt{\frac{v+1}{v+t_v^{-1}(u_1)^2}} \times \frac{t_v^{-1}(u_2) - \varrho(u_2) - \varrho t_v^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\varrho^2}} \right). \quad (6.56)$$

Ved at løse for u_2 fås den q 'te fraktilkurve

$$u_2 = t_v \left(\varrho t_v^{-1}(u_1) + \sqrt{(1-\varrho^2)(v+1)^{-1}(v+t_v^{-1}(u_1)^2)t_{v+1}^{-1}(q)} \right). \quad (6.57)$$

I modsætning til det normale tilfælde er den q 'te fraktilkurve ikke en lineær linje i koordinaterne (ξ_1, ξ_2) . Den q 'te fraktilkurve tilhørende til Student-t marginalerne er udtrykt ved at sætte $\xi_1 = t_v^{-1}(u_1)$ og $\xi_2 = t_v^{-1}(u_2)$ og efterfølgende skrive, ξ_2 , som en funktion af ξ_1 , sådan at

$$\xi_2 = \varrho \xi_1 + \sqrt{(1-\varrho^2)(v+1)^{-1}(v+\xi_1^2)t_{v+1}^{-1}(q)} \quad . \quad (6.58)$$

På samme måde som for den normale copula, kan et mere generelt udtryk for den q 'te fraktilkurve i koordinaterne (ξ_1, ξ_2) for Student-t skrives ved

$$\xi_2 = F_2^{-1} \left[t_v(\varrho t_v^{-1}(F_1(\xi_1)) + \sqrt{(1-\varrho^2)(v+1)^{-1}(v+t_v^{-1}(F_1(\xi_1))^2)t_{v+1}^{-1}(q)}) \right]. \quad (6.59)$$

6.5.3 Clayton copulaer

Den betingede distribution for Clayton copulaen udledes på følgende måde: I den todimensionelle Clayton copula er den betingede distribution u_2 , givet at u_1 er kendt, som følger:

$$C_{1|2}(u_2|u_1; \alpha) = \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} = u_1^{-(1+\alpha)} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-(1+\alpha)/\alpha}. \quad (6.60)$$

Fraktilkurven for Clayton copulaen kan hernæst skrives i eksplicit form ved at sætte ligning (6.60) lig med den fastsatte sandsynlighed q , på følgende måde:

$$q = u_1^{-(1+\alpha)} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}, \quad (6.61)$$

Og hefter løse denne for u_2 , hvorved den q fraktilkurve for Clayton copulaen fremkommer:

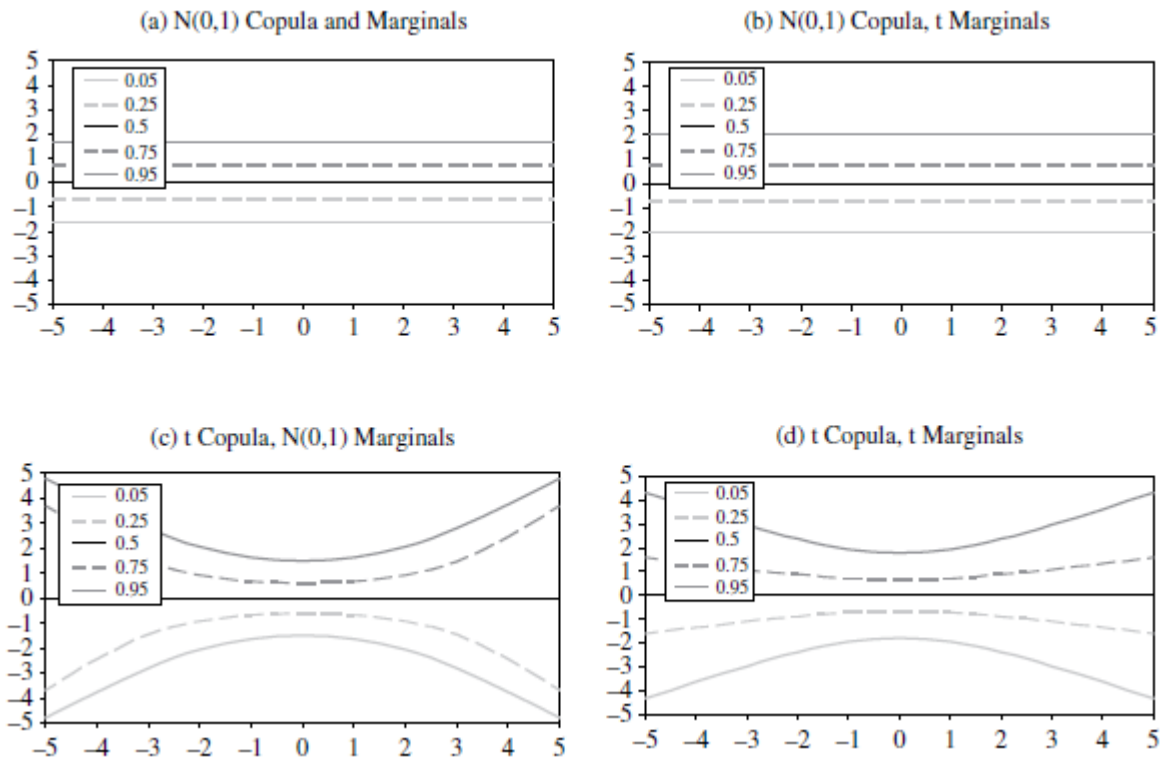
$$u_2 = C_{2|1}^{-1}(v|u_1) = (1 + u_1^{-\alpha} (q^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1))^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (6.62)$$

De betingede distributioner for den binomiale Gumbel copula er givet på følgende måde:

$$\begin{aligned} C_{1|2}(u_2|u_1; \delta) &= \frac{\partial}{\partial u_1} \exp \left(-[(\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{1/\delta} \right) \\ &= u_1^{-1} (-\ln u_1)^{\delta-1} [(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{(1-\delta)/\delta} \\ &\quad \exp \left(-[(-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta]^{1/\delta} \right). \end{aligned} \quad (6.63)$$

For Gumbel copulaen gælder det, at denne ikke kan skrives i eksplicit form. (Alexander, 2008)

I figur 6.7 er det illustreret hvorledes de fraktilkurver kommer til udtryk for normale og Student-t copulaer, når korrelationen er 0.



Figur 6.7: Kilde: (Alexander, 2008)

6.6. Maksimum likelihood estimation

Copula parametrene er beregnet via MLE (maksimum likelihood estimation). MLE er anvendt til at finde den teoretiske fællesdistributionsfunktion. Ideen bag MLE er den samme som for GARCH modellerne, hvor det gælder, at den copula der antager den højeste MLE værdi, er den der har det bedste fit, og dermed er den copula, der bedst repræsenterer dataen.

Normalt estimeres de marginale parametre først, en metode der kaldes ”*inference on margins*” (IFM) kalibrering. Omvendt kan man undlade at specificere den funktionelle form af marginalerne, en metode der kaldes ”*canonical maximum likelihood estimation*” (CMLE). Disse metoder har dog den svaghed, at de kan lede til potentielle misspecifikations problemer, som betyder, at disse giver mindre pålidelige estimater sammenlignet med fuld MLE. Ved fuld MLE kalibreres alle parametrene af copulaen og marginalerne samtidig. IFM og CMLE er dog mere transparente sammenlignet med fuld MLE, og i de fleste tilfælde leder de til konsistente estimater. Den metode der er benyttet til at finde de copulaer der bedst repræsenterer dataene, er fuld MLE.

Først beskrives kalibreringsalgoritmen i generelle termer. Det antages, at den fælles tæthedsdistribution er givet ved:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f_n(x_n) c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (6.64)$$

Hernæst specificeres parametrene for både marginalerne og copulaen. For at simplificere det følgende, antages det, at hver marginal kun har en parameter, α_i . Det følgende kan dog let blive generaliseret således, at hver marginal har en vektor af parametre, som det er tilfældet med de tre tidsserier, der testes på.

De marginale tætheds- og distributionsfunktioner er henholdsvis givet ved:

$$f_i(x_i; \alpha_i) \text{ og } F_i(x_i; \alpha_i) \quad (6.64)$$

kan nu omskrives til følgende:

$$f(x_1, \dots, x_n; \alpha, \theta) = c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta) \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i), \quad (6.65)$$

hvor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ er en vektor af de marginale parametre og θ er en vektor for copula parametrene.

Via ligning (6.65) kan log likelihood funktionen nu udledes

$$\ln L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T) = \sum_{t=1}^T (\ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \boldsymbol{\theta})) + \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}; \alpha_i)), \quad (6.66)$$

hvor $\mathbf{X}_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt})$ er række-vektoren af antal observationer for den tilfældige variable n ved tidspunkt t i en tidsserie af de variable. Det er dermed denne funktion der optimeres, når copulaerne kalibreres (Alexander, 2008).

6.7 Empiriske resultater

Som beskrevet tidligere, beror den klassiske porteføljeteori på, at afkastene heri er normalfordelte. Men som GARCH modellen og teststatistikkerne i forrige kapitel viste (kap. 5), er denne antagelse urealistisk. Copulafunktioner benyttes derfor til at måle korrelationerne og finde frem til fællesdistributionen mellem de tre aktiver, da disse tager højde for, at afkastene kan have forskellige fordelinger. Perioderne der testes på, er de samme som i kap. 5, hvor de tre aktiver stadig er som følger S&P 500 indekset, guldprisen, samt renten på en 1 årig amerikansk "T-bill". De test der blev udført i kap. 5 viste, at de tre aktiver, i størstedelen af perioderne, havde fede haler. Det sås ligeledes, at den t-distribuerede GARCH(1,1) model bedst passede til dataen, og at der var ARCH effekter til stede i tidsserierne. Via Jarque-Bera normalitetstesten konkluderedes det, at tidsserierne ikke er normalfordelte. For at opfange de fede haler i distributionerne anvendes en copula funktion til at beskrive korrelationerne mellem de tre aktiver og endvidere til at finde fællesdistributionen.

For at finde den copula der bedst beskriver tidsserierne, testes følgende tre copulaer, Student-t, Gumbel og Claytons. Som tidligere beskrevet ses der bort fra den normalfordelte gaussiske copula, da GARCH analysen viste at afkastene ikke er normalfordelte. Student-t copulaen er en symmetrisk copula, mens Gumbel og Clayton er asymmetriske. Copulaerne er estimeret i SAS 9.4 via den indbyggede funktion "ProcCopula". Maximum likelihood MLE, er benyttet til at tilpasse copulaen. For MLE gælder der (ligesom for GARCH modellerne), at den copula med den højeste MLE værdi har det bedste "fit" (Alexander, 2008). I tabel 6.1 er log likelihood estimerne for de tre copulaer i hver tidsperiode vist. Bilag 13 viser den SAS kode der er benyttet, mens bilag 14 viser det originale SAS output.

Maximum likelihood			
Copula	2000-2003	2004-2007	2008-2011
<i>student t</i>	103.96711	42.62236	160.34008
<i>Clayton</i>	0.0000146	0.0000217	0.0000155
<i>Gumbel</i>	-5.25E-06	1.14854	-4.1018E-06

Tabel 6.1 Maximum likelihood estimator: Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af tabellen, er Student-t copulaen den der passer bedst til dataene i alle tre perioder. Beregningerne som følger er foretaget via denne copula. DF (degrees of freedom) for t-copulaen er vist i tabel 6.2 nedenfor:

Parameter Estimator					
År	Parameter	Estimat	Standard error	t Value	Pr > t
2000-2003	DF	9.051779	1.912353	4.73	<.0001
2004-2007	DF	7.803448	14.420969	5.49	<.0001
2008-2011	DF	5.104043	0.652962	7.82	<.0001

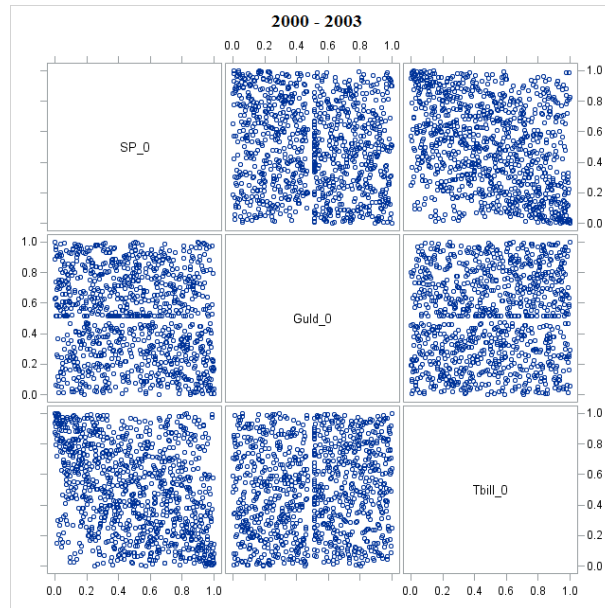
Tabel 6.2 Frihedsgrader: Kilde: Egen tilvirkning

Tabellen viser, at DF for alle tre perioder er signifikant på et 5 % signifikansniveau.

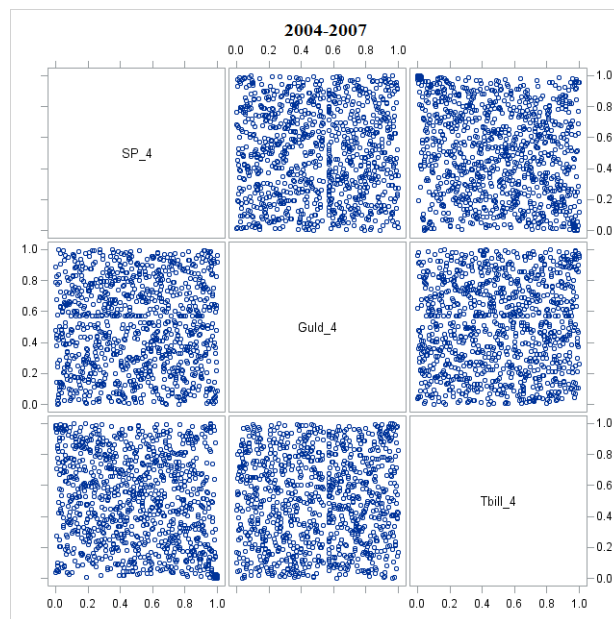
Til at estimere korrelationsmatricerne er følgende fremgangsmåde benyttet. Først er en empirisk distribution blevet tilpasset dataen. Dette betyder, at de ligefordelte marginale distributioner, benyttet i copula beregningen, er fremkommet via de empiriske kumulative distributionsfunktioner (CDF's). Fællesdistributionen fremkommer herved.

Figur 6.8 til 6.10 viser graferne for de transformerede data og deres indbyrdes korrelationer. Det gælder her, at desto større tæthed værdierne viser omkring diagonalen (den 45 graders linje), desto højere indbyrdes korrelation er der.

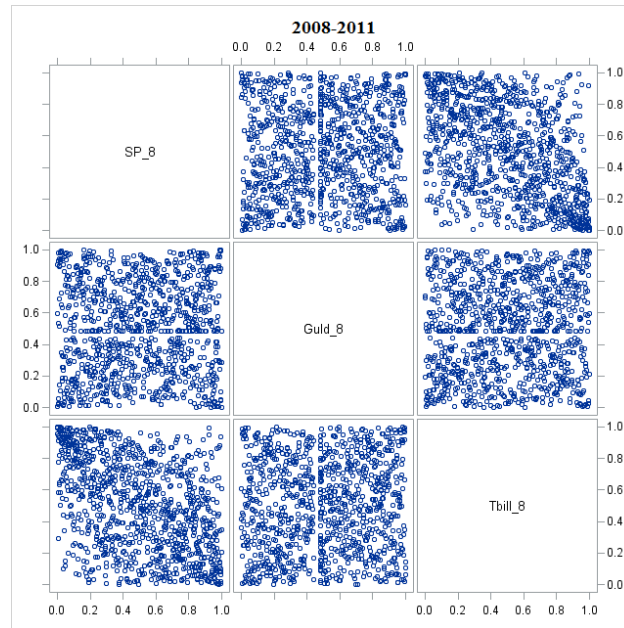
Som det fremgår af figur 6.8, er korrelationen mellem S&P 500 indekset og renten højest i perioden fra 2000 til 2003, da disse er mest elliptiske. Guldprisen viser ikke nogen markant korrelation med S&P 500 indekset og renten i nogen af perioderne. I perioden fra 2004 til 2007 samt perioden fra 2008-2011, er mønstret det samme, som for perioden 2000 til 2003. Dog viser figur 6.10 en stærkere korrelation mellem S&P 500 og renten end i de to foregående perioder.



Figur 6.8 Korrelationer2000-2003: Kilde: Egen tilvirkning



Figur 6.9 Korrelationer, 2004-2007: Kilde: Egen tilvirkning



Figur 6.10 Korrelationer 2008 til 2011: Kilde: Egen tilvirkning

Figureerne indikerer at guldprisen i alle tre perioder er det aktiv, som er mindst korreleret med S&P500 indekset og renten, da disse har den højeste indbyrdes korrelation.

De faktiske korrelationskoefficienter analyseres nu via de nedenstående korrelationsmatricer.

Tabel 6.3 til 6.5 viser korrelationsmatricerne for de tre perioder.

Korrelations Matrix			
2000-2003			
	S&P500	Guld	1 års Tbill
S&P500	1	-0.1415	-0.3868
Guld	-0.1415	1	0.0801
1 års Tbill	-0.3868	0.0801	1

Tabel 6.3 Korrelationsmatrix 2000 til 2003. Kilde: Egen tilvirkning

Korrelations Matrix			
2004-2007			
	S&P500	Guld	1 års Tbill
S&P500	1	0.0131	-0.2019
Guld	0.0131	1	0.0541
1 års Tbill	-0.2019	0.0541	1

Tabel 6.4 Korrelations matrix 2004 til 2007: Kilde: Egen tilvirkning

Korrelations Matrix			
2008-2011			
	S&P500	Guld	1 års Tbill
S&P500	1	0.0365	-0.4454
Guld	0.0365	1	0.0622
1 års Tbill	-0.4454	0.0622	1

Tabel 6.5 Korrelations matrix 2008 til 2011: Kilde: Egen tilvirkning

Korrelationerne kan her antage værdier, der ligger mellem -1 og +1. Hvor korrelationer som antager værdien -1 er negativt korreleret. Når aktiverne er ”perfekt negativt” korrelerede (altså -1) betyder det, at de bevæger sig i omvendt retning af hinanden. Det omvendte gør sig gældende, hvis aktiverne er positivt korrelerede, hvorved disse bevæger sig i samme retning. Er korrelationen 0, er de to aktiver uafhængige af hinanden.

I perioden fra 2000-2003, er guldprisen svagt negativt korreleret med S&P 500 indekset.

Korrelationen mellem guldprisen og renten er 0,0801, hvilket ikke afviger meget fra 0, hvorved disse også må antages at være ukorrelerede. Korrelationen mellem renten og S&P 500 er i denne periode -0,3868. Det ses her, at disse til en vis grad er negativt korrelerede, og derfor til en vis grad bevæger sig modsat af hinanden.

I perioden fra 2004-2007 er guldprisen ukorreleret med renten og S&P500 indekset, da værdierne her ikke afviger markant fra 0. Korrelationskoefficienten mellem renten og S&P 500 er i denne periode -0,2037 og er dermed lavere end i foregående periode. S&P500 indekset og renten er derfor svagt negativt korrelerede i denne periode.

I den sidste periode fra 2008-2011 er guldprisen stadig ukorreleret med både renten og S&P 500 indekset, da værdierne ikke afviger meget fra 0. Rente og S&P 500 indekset viser i denne periode den højeste negative korrelation.

Som det kan ses af korrelationsmatricerne, er guldprisen i svag grad korreleret med S&P 500 indekset i perioden fra 2000-2003. Det ses samtidig, at renten og S&P 500 indekset i hele perioden (2000-2011) til en vis grad er negativt korreleret. Dette antyder, at når renten f.eks. falder, søger investorerne i en vis grad over mod aktiemarkedet, hvilket giver den negative korrelation. I perioden fra 2004-2011 er guldprisen ukorreleret med aktiemarkedet og renten. Guldprisen bevæger

sig derfor uafhængigt af S&P500 indekset og renten i perioden med høj vækst på de finansielle markeder samt under finanskrisen i 2008.

6.8 Delkonklusion

På baggrund af analysen kan det konkluderes, at den symmetriske Student-t copula er den copula, der bedst kan tilpasses de tre tidsserier. Metoden til at tilpasse copulaerne var MLE estimation. Via korrelationsmatricerne sås det, at guldprisen i den første periode var svagt negativt korreleret med S&P 500 indekset og ukorreleret med renten, mens den i resten af testperioden er ukorreleret med begge aktiver. S&P 500 indekset og renten viser derimod en middel grad af negativ korrelation i alle tre perioder. Analysen af korrelationsmatricerne underbygger konklusionen fra kapitel 3 om, at guld er ukorreleret med aktiemarkedet og renten. Guldprisen har dog vist en svag grad af negativ korrelation i den første periode. Konklusionerne fra kapitel 3 og kapitel 5 om at guld kan fungere som et godt aktiv til porteføljedyversifikation understøttes hermed af ovenstående korrelationsmatricer. Matricerne viser, at guld kun i svag / til ingen grad følger udviklingen på aktie- og obligationsmarkedet. Baseret på ovenstående, og de testperioder der kigges på, er der derfor meget der tyder på, at guldprisen på langsigst er uafhængig af aktie- og obligationskursen. Konklusionerne fra kapitel tre tyder derfor på at være gældende, når der kigges på daglige data i tre forskellige test perioder.

7.0 Monte Carlo Simulation via copula og VaR

7.1 Monte Carlo Simulation

Som det blev beskrevet i kap. 6 omkring copulafunktioner, bliver marginalerne først beregnet hvorefter copulaen defineres. I simulering er det normalt den anden vej rundt: først simuleres afhængigheden hvorefter marginalerne simuleres. I kap. 6 blev det endvidere fastslået, at den optimale copula til at beskrive afhængigheden mellem de individuelle aktiver var Student-t copulaen, hvorfor simuleringen nedenfor, vil blive beskrevet ud fra denne copula.

Simuleringsalgoritmen starter med at tage udgangspunkt i simulering af de uafhængige lige fordelte tilfældige variable. Herefter tilføjes de inverse betingede copula funktioner til at opnå realiseringerne af de afhængige lige fordelte variable. Endeligt er de afhængige lige fordelte realiseringer transformeret til simuleringer på risikofaktorens afkast ved at anvende den relevante

inverse marginale fordelingsfunktion for hver enkelt realisering (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008).

Student-t copulaen har en afhængighedsstruktur som opfanges i korrelationsmatricen, som har risikofaktorer som formentlig vil variere fra de individuelle marginale distributioner. Da afhængighedsstrukturen opfanges i korrelationsmatricen, bliver simuleringen mindre kompleks. Neden for beskrives det step by step, hvordan afkastsimulering på baggrund af den valgte copula simuleres, hvilket lægger grundlaget for selve VaR og ETL udregningen (se kap. 7).

1. Først simuleres de uafhængige standard lige fordelte observationer, hvilket gælder for hver risikofaktor.
2. Disse bliver herefter transformeret til uafhængige observationer ved brug af den inverse distributionsfunktion.
3. De uafhængige observationer transformeres til korrelerede multivariate observationer ved at bruge Cholesky matricen¹⁴ af korrelationsmatricen.
4. Herefter omdannes de korrelerede multivariate observationer til simuleringer fra Student-t copulaen ved at anvende standardnormalfordelingsfunktionen.
5. På baggrund af ovenstående transformeres simulationerne fra Student-t copulaen til standard Student-t observationer med Student-t copula, ved at benytte den inverse distributionsfunktion for Student-t (frihedsgraderne fastsættes i SAS).
6. Nu bruges det besluttede h -dag gennemsnit og h -dag standardafvigelse til at omdanne standard Student-t observationer med Student-t copula til simulationer på h -dag risikofaktorafkast, med individuelle marginaler, men stadig afhængighed opfanget af Student-t copulaen.
7. Risikofaktor kortlægningen tilføjes hvormed de simulerede porteføljeafkast opnås (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008).

Ovenstående metode benyttes til at simulere 10.000 afkast for hver tidsserie i Excel.

7.2 Value at risk introduktion

En markedsrisikomatrice er et mål for den usikkerhed, som vedrører den fremtidige værdi af en bestemt portefølje, dvs. et mål for usikkerheden i porteføljens afkast, som gælder for både profit og

¹⁴ Cholesky decomposition adskiller en matrice E i to identiske matricer M : $E = MM^T$. Matricen E inkluderer aktivernes korrelationer. Matricen M kaldes for Cholesky matricen. Matricen er en venstre triangulær matrice. Ved at multiplicere Cholesky matricen M med simulerede tilfældige vektorer fås lineære korrelerede tilfældige afkast.

tab. Helt fundamentalt er formålet at kunne summere potentialet for afvigelser fra den forventede værdi. I dag benytter de fleste finansielle institutioner en eller anden form for *value at risk* (VaR) som risikomatrice. Mange argumenterer dog imod denne form for risikomatrice, da de mener, at den ikke er sub-additive¹⁵ (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008).

Der findes dog en risikomatrice der er associeret med ovenstående VaR matrice, og som er sub-additive. Denne risikomatrice kaldes for den *conditional VaR* også kaldet for *expected tail loss* (ETL). Nedenfor er de mest attraktive egenskaber for VaR beskrevet i korte træk:

1. Den svarer til den størrelse, som kan tabes ved en bestemt sandsynlighed.
2. Den måler risikoen af risikofaktorerne samt risikofaktorenes følsomheder.
3. Den kan sammenlignes på tværs af forskellige markeder og forskellige eksponeringer.
4. Det er en universel matrice, der gælder for alle aktiviteter og alle former for risici.
5. Den kan måles på ethvert niveau, fra en enkel handel eller portefølje op til virksomhedsniveau, der dækker alle risici i en virksomhed som helhed.
6. Den kan aggregeres eller opdeles. Dette tager højde for afhængighederne mellem aktiverne eller porteføljerne.

VaR er en anelse mere komplekst sammenlignet med traditionelle risikofaktorer, da VaR afhænger af de multivariate risikofaktorens afkastdistribution og af dynamikken af selve distributionen samt risikofaktor kortlægningen af porteføljen.

7.2.1 Definition af VaR

Verbalt kan VaR defineres som tabet, forårsaget af markedsbevægelserne, som man med rimelighed er sikker på ikke vil blive overskredet hvis den valgte portefølje holdes statisk over en bestemt tidsperiode.

VaR har to basale parametre:

1. signifikansniveauet α (eller konfidensniveauet $1 - \alpha$)
2. risikohorisonten, noteret h , som er tidsperioden målt i handelsdage, hvor VaR måles.

¹⁵ Sub-additive vil sige at risikoen for en diversificeret portefølje ikke er større end det tilsvarende vægtede gennemsnit af de underliggende aktiver, dvs. at $\varrho(A + B) \leq \varrho(A) + \varrho(B)$. Uden sub-additivitet ville der ikke være et incitament for at holde diversificeret porteføljer.

Alt afhængig af hvilken type investor man er, vil man have forskellig krav til, hvad signifikansniveauet skal være. Jo mere konservativ en investor man er, jo lavere vil man have at signifikansniveauet skal være og dermed et højere konfidensniveau.

Risikohorisonten er perioden, hvor det potentielle tab måles. Alt afhængig af investorerne likviditet, kan perioden være meget forskellig. F.eks. Basels bankregulering er risikohorisonten for VaR sat til at være 10 dage. Egentlig bør risikoperioden sættes til at være den periode hvor investorerne forventer at være eksponeret mod en given position.

Det er ikke muligt at sige noget om en porteføljes profit eller tab, fordi disse er tilfældige variable, men det er muligt at associere et konfidensinterval med alle tab. F.eks. en 5% daglig VaR, som svarer til et 95% konfidensniveau, er et tab, som man forudser at opleve med en frekvens på 5%, hvis en nuværende portefølje holdes i 24 timer. Med andre ord kan man med 95% sandsynlighed være sikker på, at VaR ikke vil blive overskredet, hvis porteføljen holdes statisk i et døgn.

Et tab svarer til et negativt afkast. Et tab er altså et negativt merafkast. Hvis det forventes at en portefølje giver et afkast svarende til den risikofrie rente, dvs. et merafkast svarende til 0%, så er $\alpha\%$ VaR den α fraktil af profit- og tab (P&L) distributionen. F.eks. så vil 1% VaR af en 1-dag profit- og tab distribution være tabet, som kun vil blive tilsvarende eller overskredet én dag ud af 100 dage (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008).

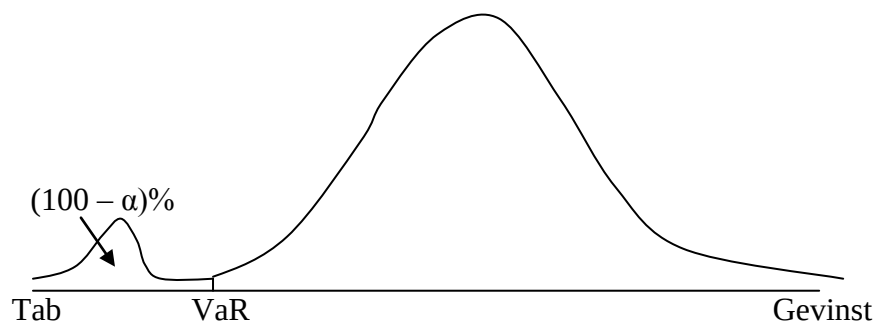
7.2.2 Conditional VaR: Expected Tail Loss (ETL)

Problemet med VaR estimatet er, at det kun fortæller noget om det tab, som man med rimelighed kan forvente ikke bliver overskredet, men det fortæller intet om omfanget af tabet, hvis et større tab indtræffer. Det kunne evt. være i events, som man oplevede under finanskrisen. Det er dog muligt at få denne information fra CVaR, som angiver det gennemsnitlige niveau af tab, betinget at VaR er overskredet. Det 100% h -dag ETL er svarende til CVaR og er givet ved følgende formel

$$ETL_{h,\alpha} = -E(X_h | X_h < -VaR_{h,\alpha}) \times P, \quad (7.1)$$

hvor X_h angiver h -dag afkastet af porteføljen, $VaR_{h,\alpha}$ er den 100% h -dag VaR, udtrykt ved en procentdel af porteføljets værdi, og P er porteføljets nuværende værdi.

I figur 7.1 nedenfor illustreres forskellen mellem VaR og ETL.



Figur 7.1 Kilde: egen tilvirkning

7.3 VaR Backtest

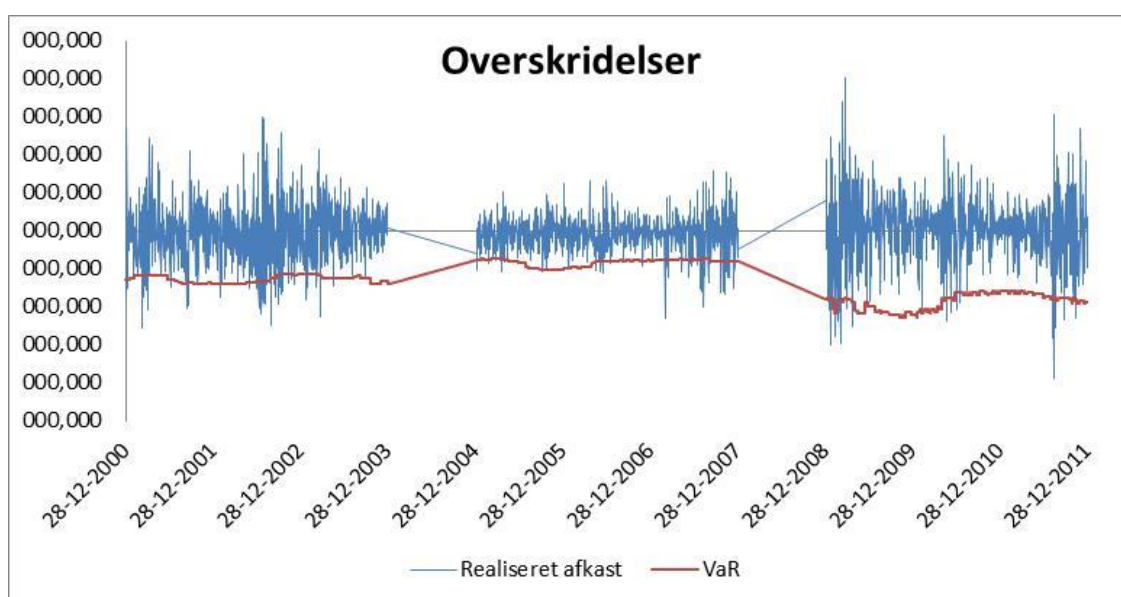
Den copula baserede Value at Risk analyse (VaR) analyseres nu. Når modellen ”backtestes” analyseres det hvor godt den nuværende procedure for at estimere VaR ville have performeret tilbage i tiden. Proceduren går ud på at se, hvor ofte et tab, inden for en estimerings ramme på 10 dage, ville have overskredet modellens VaR. Modellen er testet således, at den er analyseret for dens egenskab til at estimere 10 dage frem. Dage hvor de realiserede afkast overskrider den estimerede VaR i modellen, kaldes for ”overskridelser”. Hvis ”overskridelserne” finder sted omkring 5% af gangene, kan det med rimelighed antages, at modellen er retvisende. Hvis overskridelserne finder sted i omkring 7% af tilfældene, er metoden suspekt, og kan være et tegn på at modellen er underestimeret. I det følgende afsnit er vægtene i porteføljen, der testes, konstante gennem alle tre perioder, med 60 % i S&P500, 10% i Guld og 30% i obligationer. I analysen er der benyttet et 95% konfidensinterval. Metoden ”Backtestes” via et rullende estimationsvindue, hvorefter de relevante test vil blive udført for at vurdere, hvor retvisende modellen er.

7.3.1 Rullende estimationsvindue

Det ”rullende estimationsvindue” er designet således, at estimeringsperioden er rullet henover størstedelen af dataperioden. Der fastsættes hernæst en fast risikohorisont h , hvor testen startes i slutningen af estimeringsperioden. Hvis risikohorisonten er h dage, rulles estimationsvinduet frem h dage, hvilket gøres indtil testen har gennemløbet hele dataperioden. På denne måde undgår man at benytte overlappende data (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008).

I de tre følgende test vil ”det rullende estimationsvindue” blive opbygget på følgende måde. Da backtesten er foretaget på alle tre tidsperioder, 2000-2003, 2004-2007 og 2008-2011, får vi henholdsvis 1005, 1005 og 1008 daglige observationer, som der testes på. Estimationsperioden der benyttes er 252 dage, som er antallet af handelsdage på et år, mens risikohorisonten, h , er fastsat til 10 dage. Herefter benyttes estimeringsvinduet til at beregne VaR på den 252th dag, som i dette

tilfælde er beregnet ud fra de første 252 copula-genererede afkast, med et 95 % konfidensinterval. Dette bliver dermed VaR estimatet de efterfølgende 10 dage, fra den 252th til den 262th observation. Hernæst sammenlignes denne VaR-værdi med det realiserede afkast for perioden, hvorved to tidsserier fremkommer. Hernæst "rulles" estimationsvinduet ti dage frem, indtil dataperioden slutter. Ved at gøre dette fremkommer der henholdsvis 754, 754 og 757 test for hver af perioderne. Figur 7.2 viser, hvordan de tre estimeringsperioder ser ud, og viser grafisk hvor ofte de realiserede afkast overskrider VaR estimaterne.



Figur 7.2 Overskridelser: Kilde: Egen tilvirkning

Figuren viser, at der for de tre perioder er henholdsvis 47, 49 og 24 *overskridelser* af VaR estimatet.

7.3.2 Bernoulli Test

De fleste *backtest* foretaget på daglig VaR, er baseret på en antagelse om, at de daglige afkast følger en *i.i.d Bernoulli proces*. En *Bernoulli* variabel kan antage to værdier, 1 og 0, eller *succes* og *fejl*. I dette tilfælde referer *succes* til en overskridelse af VaR estimatet, mens det omvendte er gældende for *fejl*. Baseret på dette kan der opstilles en *indikatorfunktion*, $I_{\alpha,t}$, for de realiserede afkast, relativt til den 100% daglige VaR:

$$I_{\alpha,t+1} \begin{cases} 1, & \text{Hvis } Y_{t+1} < -VaR_{1,\alpha,t}, \\ 0, & \text{Ellers} \end{cases} \quad (7.2)$$

Hvor Y_{t+1} er det realiserede daglige afkast for porteføljen fra tidspunkt t , når VaR estimatet er beregnet til tidspunkt $t+1$.

Hvis VaR modellen er præcis og $I_{\alpha,t}$ følger en *i.i.d Bernoulli proces*, er sandsynligheden for succes, til et givent tidspunkt t , lig med α . Dermed kan det forventede antal succeser i en test med n observationer skrives som, $n\alpha$. Antallet af succeser i testen defineres nu som $X_{n,\alpha}$, hvor det vides, at denne følger binomialfordelingen med parametrene n og α , således at:

$$E(X_{n,\alpha}) = n\alpha, \quad (7.3)$$

hvor variansen er givet ved:

$$V(X_{n,\alpha}) = n\alpha(1 - \alpha). \quad (7.4)$$

Standardfejlen til estimatet er, $\sqrt{n\alpha(1 - \alpha)}$, og angiver usikkerheden omkring den forventede værdi. Pga. fejl i estimeringsperioderne er det usikkert, om det valgte antal succeser rammes præcist i testen. Derfor benyttes der i stedet et konfidensinterval for det område, hvor det er sandsynligt, at de forventede antal overskridelser ligger. Når n er meget stor, er distributionen $X_{n,\alpha}$ tilnærmelsesvis normalfordelt, således at et tosidet 95% konfidensinterval for $X_{n,\alpha}$, under nulhypotesen, som tilsiger, at VaR modellen er korrekt, tilnærmelsesvis ser ud som følger:

$$(n\alpha - 1.96\sqrt{n\alpha(1 - \alpha)}, n\alpha + 1.96\sqrt{n\alpha(1 - \alpha)}). \quad (7.5)$$

Derved kan det testes hvorvidt antallet af overskridelser ligger inden for dette interval, hvorved nulhypotesen accepteres (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008).

7.3.3 Kupiecs test (dækningstest)

Ubetingede dækningstest, som er blevet fremsat af Kupiec (Kupiec, 1995), er ligesom *Bernoulli* testen også baseret på antallet af overskridelser, altså antallet af gange en portefølje mister mere end den foregående dags VaR-estimat i *backtesten*. Disse ideer er siden blevet formaliseret og generaliseret af Christoffersen (Christoffersen, 1998) til også at dække test for uafhængighed af overskridelser (altså om overskridelser kommer i klynger) og betingede dækningstest, som kombinerer ubetinget-dækning og uafhængighed i en test.

Den ubetingede dækningstest (Kupiectest) er en test af nulhypotesen om at indikatorfunktionen (7.2), som antages at følge en *i.i.d Bernoulli proces*, har en konstant succes sandsynlighed, som er lig med signifikansniveauet af VaR, α . Dette betyder mere præcist, at hvis nulhypotesen accepteres,

er VaR modellen præcis, i den forstand, at det totale antal *overskridelser* er tæt på det forventede. Teststatistikken er en likelihood statistik givet ved:

$$LR_{uc} = \frac{\pi_{exp}^{n_1} (1 - \pi_{exp})^{n_0}}{\pi_{obs}^{n_1} (1 - \pi_{obs})^{n_0}} \quad (7.6)$$

Hvor π_{exp} er den forventede andel af *overskridelser*, π_{obs} er den observerede andel af *overskridelser*, n_1 er det observerede antal *overskridelser* og $n_0 = n - n_1$, som angiver de dage, hvor der ikke er *overskridelser* ("*gode udfald*"), hvor n er størrelsen på estimationsperioden, der benyttes i *backtesten*. Dermed bliver n_1 lig med antallet af afkast med indikatorværdi 0, $\pi_{exp} = \alpha$. og $\pi_{obs} = \frac{n_1}{n}$. Hernæst benyttes funktionen $-2\ln(LR_{uc})$, som asymptotisk følger χ^2 fordelingen med to frihedsgrader.

Hvis *overskridelserne* kommer i klynger (en *overskridelse* er fulgt af en ny *overskridelse*), indikerer dette at VaR-modellen ikke er hurtig nok til at opfange ændringer i markedet. Det gælder derfor, at hvis modellen består kupiecs-testen (den ubetingede dækningstest), kan vi stadig forkaste VaR modellen, hvis *overskridelserne* ikke er uafhængige.

En test for uafhængigheden i *overskridelserne* er baseret på en formalisering af, at når *overskridelser* ikke er uafhængige, er sandsynligheden for en *overskridelse* i morgen, givet der har været en *overskridelse* i dag, ikke længere lig med α .

Ligesom før angiver n_1 det observerede antal *overskridelser*, mens $n_0 = n - n_1$ angiver antallet af "*gode udfald*". Derudover defineres n_{ij} som en indikator på antallet af udfald, hvor indikator værdien, i , er efterfulgt af indikator værdien, j . Dermed bliver n_{00} antallet af "*gode udfald*", som er efterfulgt af et "*godt udfald*", n_{01} antallet af et "*godt udfald*" som er efterfulgt af en *overskridelse*, mens n_{11} er antallet af *overskridelser*, som er efterfulgt af en *overskridelse*.

Således at $n_1 = n_{11} + n_{01}$ og $n_0 = n_{10} + n_{00}$. Herved fremkommer følgende ligning

$$\pi_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \text{ og } \pi_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \quad (7.7)$$

Hvor π_{01} er mængden af *overskridelser*, givet at det sidste afkast var et "*godt*" afkast, og π_{11} er mængden af *overskridelser*, givet at det sidste afkast var en *overskridelse* (Hull, 2012).

Hernæst kan uafhængighedsteststatistikken, udledt af Christoffersen (Christoffersen, 1998), nu opstilles som

$$LR_{ind} = \frac{\pi_{obs}^{n1}(1 - \pi_{obs})^{n0}}{\pi_{01}^{n01}(1 - \pi_{01})^{n00}\pi_{11}^{n11}(1 - \pi_{11})^{n10}} \quad (7.8)$$

Hvorefter funktionen $-2\ln(LR_{ind})$ benyttes, som følger Chi^2 fordelingen med en frihedsgrad.

Nulhypotesen for denne model tilsiger, at overskridelserne er uafhængige.

Et af problemerne med model (7.8) er, at den kun tager højde for *overskridelser*, som er kontinuerte, altså kunne man forestille sig, at man har flere dage, hvor der ikke findes *overskridelser*, men hvor der i de mellemliggende perioder er *overskridelse* til stede. Dette kan modellen ikke tage højde for, da den følger en første ordens *Markov kæde*. For at modellen skal tage højde herfor, er man nødsaget til at udvide den til en højere *Markov Kæde*, således at man tillader mere end blot første ordens afhængighed.

Alexander (Alexander, Market Risk analysis, Vol IV, 2008) foreslår derfor en test, der tager højde for både den ubetingede dækning og uafhængighed, kaldet *den betingede dækningsstatistik*.

Formlen er som følger:

$$LR_{cc} = \frac{\pi_{exp}^{n1}(1 - \pi_{exp})^{n0}}{\pi_{01}^{n01}(1 - \pi_{01})^{n00}\pi_{11}^{n11}(1 - \pi_{11})^{n10}} \quad (7.9)$$

Hvorefter funktionen $-2\ln(LR_{cc})$ benyttes, som asymptotisk følger Chi^2 fordelingen, med to frihedsgrader. Formlen kan derfor udtrykkes således; $-2\ln(LR_{cc}) = -2\ln(LR_{uc}) - 2\ln(LR_{ind})$.

7.4 Resultat

Tabel 7.1 viser et udsnit af Chi^2 tabellen, med henholdsvis 1 og 2 frihedsgrader. Det er disse værdier der bruges til at undersøge om testene er signifikante eller ej. Det gælder her for alle tre test, at hvis den estimerede værdi overstiger værdien til et givent signifikansniveau i Chi^2 tabellen, forkastes nulhypotesen.

Signifikans-niveau	DF 1	DF 2
1%	6.64	9.21
5%	3.84	5.99
10%	2.706	4.605

Tabel 7.1: *Chi i anden tabel:* Kilde: (Gujariti N, 2003)

Tabel 7.2 viser hernæst resultaterne af de fire test, hvoraf det kun er til *kupiecs-testen*, *Christoffersen- testen* og den *kombinerede- test*, at Chi^2 tabellen benyttes.

Backtests af model				
	<u>Bernouilli test</u>	<u>Kupiecs Test</u>	<u>Christoffersen</u>	<u>Kombineret test</u>
		<i>LRuc</i>	<i>LRind</i>	<i>LRcc</i>
2000-2003	5.471%	2.247	1.409	3.656
2004-2007	2.810%	3.271	5.596	8.867
2008-2011	0.391%	6.097	0.265	6.362

Tabel 7.2: Backtest- resultater: Kilde: Egen tilvirkning

I perioden fra 2000 til 2003 kan nulhypotesen for *kupiecs-testen* ikke forkastes, og den er signifikant helt ned til et 10 % signifikansniveau. Dette viser at VaR modellen er præcis, i den forstand, at det totale antal *overskridelser* er tæt på det forventede. *LR_{ind}- testen* viser sig ligeledes at være signifikant helt ned på et 10 % signifikansniveau. Dermed er *overskridelserne* i modellen uafhængige. Modellen opfanger derfor ændringer i markedet.

Den *kombinerede-test* er signifikant på et 1 % signifikans niveau, hvilket viser at de forventede antal *overskridelser* og at disse er uafhængige, begge er overholdt. På baggrund af ovenstående konkluderes det dermed, at modellen i perioden fra 2000-2003 er retvisende.

I perioden fra 2004-2007 kan nulhypotesen for *kupiecs-testen* ikke forkastes ned til et 5 % signifikansniveau, mens *LR_{ind}- testen* ikke kan forkastes på et 1 % signifikansniveau. Ligeledes viser den *kombinerede-test*, at modellen er signifikant ned til et 1 % signifikansniveau. Antallet af *overskridelser* er derfor tæt på det forventede antal samtidig med, at disse er uafhængige. Trods det at finanskrisen starter i slutningen af 2007, viser modellen sig stadig at være retvisende.

I perioden fra 2008 til 2011 kan nulhypotesen for *kupeics-testen* ikke forkastes på et 1 % signifikansniveau, mens *LR_{ind}-testen* ikke kan afvises helt ned til et 10 % signifikansniveau. Den *kombinerede-test* viser sig at være signifikant på et 1 % signifikansniveau. Modellen viser derfor i denne periode, at antallet af *overskridelser* ligger tæt på det forventede antal, og at disse er uafhængige. Det kan derfor konkluderes, at modellen i denne periode er retvisende.

På baggrund af de tre test kan det konkluderes, at modellen i alle tre perioder er signifikant, og at den derfor tager højde for skiftende markedsforhold og *volatilitetsklynger*, det til trods for at modellen dækker over perioden med den finansielle krise, samt IT-boblen. Bilag 17 viser figurene for, hvordan *overskridelserne* fordeler sig gennem perioderne.

8.0 VaR og ETL analyse

I moderne porteføljeteori er målet at allokere aktiverne ved at maksimere den forventede risikopræmie pr. enhed risiko. Dette gøres ved at minimere variansen (standardafvigelsen) til et givent afkastniveau, også kaldet "*mean-variance*" metoden (Bodie, Kane, & Marcus, 2011). Ved at benytte standardafvigelsen som et risikomål i en portefølje, antages det indirekte at investorerne vægter sandsynligheden for negative og positive afkast ligeligt.

Men som tidligere beskrevet, følger finansielle tidsserier sjældent normalfordelingen og udviser ofte tegn på *fede haler*. "*Mean-variance*" tilgangen, som benyttes til at vælge efficiente porteføljer, kan derfor give anledning til en ineffektiv strategi til at optimere det forventede afkast, samtidig med at risikoen minimeres. Samtidig giver VaR og ETL et bedre estimat af risikoen, da investor til et givent signifikansniveau kan simulere det maksimale tab til en given sandsynlighed og risikohorisont, samtidig med at ETL kan give en indikation af hvor stort det maksimale tab i værste fald bliver.

Ved at benytte copulaen til at simulere afkastene til de tre tidsserier i VaR analysen, vil den følgende analyse tage højde for den *skævhed* og *kurtosis* tidsserierne udviser (se evt. afsnit 6.7).

8.1 Valg af portefølje

I det følgende opstilles en model til at udlede den optimale portefølje, således at det maksimale forventede tab ikke overstiger VaR for en given risikohorisont til et fastsat konfidensinterval. Dette gøres ved at benytte VaR og ETL som risikomål i stedet for variansen.

I analysen antages det, at investor ønsker at minimere sin risiko mest muligt, dog skal afkastet være større end den risikofrie rente. Da den risikofrie rente er regnet ind i modellen, skal afkastet dermed være større end 0. Den risikofrie rente er, i det følgende, fundet via en 4 ugers amerikansk T-bill¹⁶. For den første periode er gennemsnittet af renten taget for perioden d. 01-07-2001 til d. 01-12-2003, for den anden periode er gennemsnittet taget fra d. 01-01-2004 til og med d. 01-12-2007, for den sidste periode er gennemsnittet taget fra d. 01-01-2008 til og med d. 01-01-2011. Renterne er herefter omregnet til daglige afkast, hvorefter de skales op til et ti dages niveau. Renterne er som følger:

Risikofri-rente		
2000	2007	2011
0.0017%	0.0037%	0.0004%

Tabel 8.1 Daglig risikofri rente: Kilde: Saint louis federal reserve

¹⁶ 4-Week Treasury Bill: Secondary Market Rate. Serie Id: TB4WK: Kilde: Board of Governors of the Federal Reserve System. <http://research.stlouisfed.org/>

Vægten i S&P 500 indekset er i alle tre perioder sat til at være 60 procent. Ved at sætte vægten i S&P 500 konstant findes den optimale vægt af guld og obligationer til at diversificere risikoen fra den del af porteføljen, som består af aktier.

8.2 Optimering af porteføljen

I den klassiske porteføljeteori benyttes *Sharp ratioen* (Bodie, Kane, & Marcus, 2011) normalt til at finde minimumvarians porteføljen samt den optimale portefølje. Som nævnt tidligere benyttes VaR og ETL i den følgende analyse i stedet for variansen som risikomål. Campell, Huisman og Koedijk (Campell, Huisman, & Koedijk, 2000) foreslår derfor et modificeret *Sharp ratio* til at optimere og finde den optimale portefølje.

Risikomålet i deres formel er som følger:

$$\varphi(c, p) = W(0)r_f - VaR(c, p) \quad (8.1)$$

Hvor $VaR(c, p)$ angiver porteføljens VaR, $W(0)$ er den investerede mængde, mens r_f er den risikofrie rente. Dette risikomål er i overensstemmelse med investorenes adfærd, da de fokuserer på den risikofrie rente som et mål for afkastet. Hvor risikoen måles som det potentielle tab, som kan forekomme i forhold til den risikofrie rente. Risikomålet kan også ses som en alternativ omkostning ved at investere i et mere risikofyldt aktiv sammenlignet med det risikofrie. Investorer vil derfor kun acceptere større afkast, hvis de kan leve med muligheden for at opleve større tab. Risiko-afkastet $S(p)$, som maksimeres for porteføljen, kan derfor skrives som:

$$\max S(p) = \frac{r(p) - r_f}{\varphi(c, p)} \quad (8.2)$$

Hvor $r(p)$ er afkastet på porteføljen.

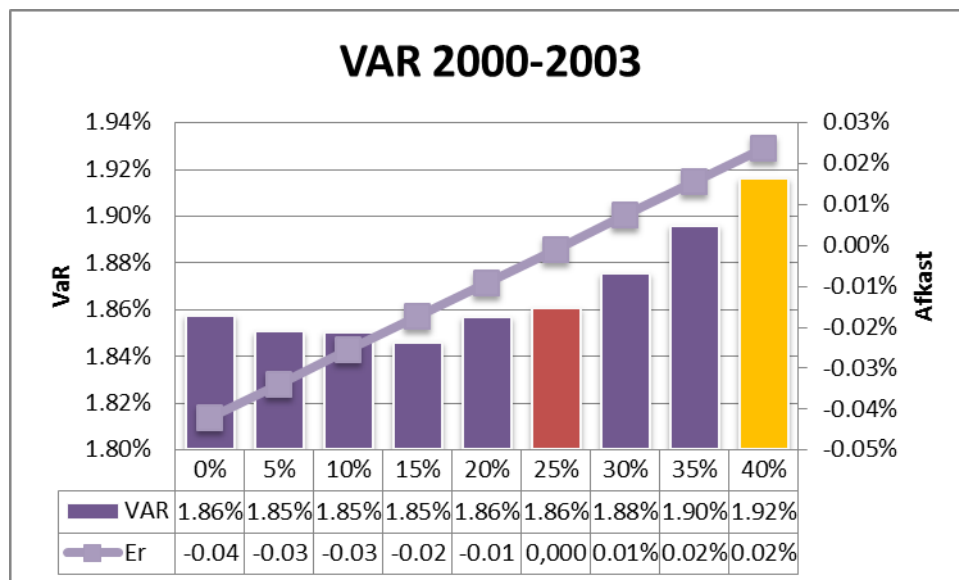
$S(p)$ er dermed et performancemål ligesom *Sharp ratio*, der kan bruges til at evaluere efficiente porteføljer.

8.3 Resultater

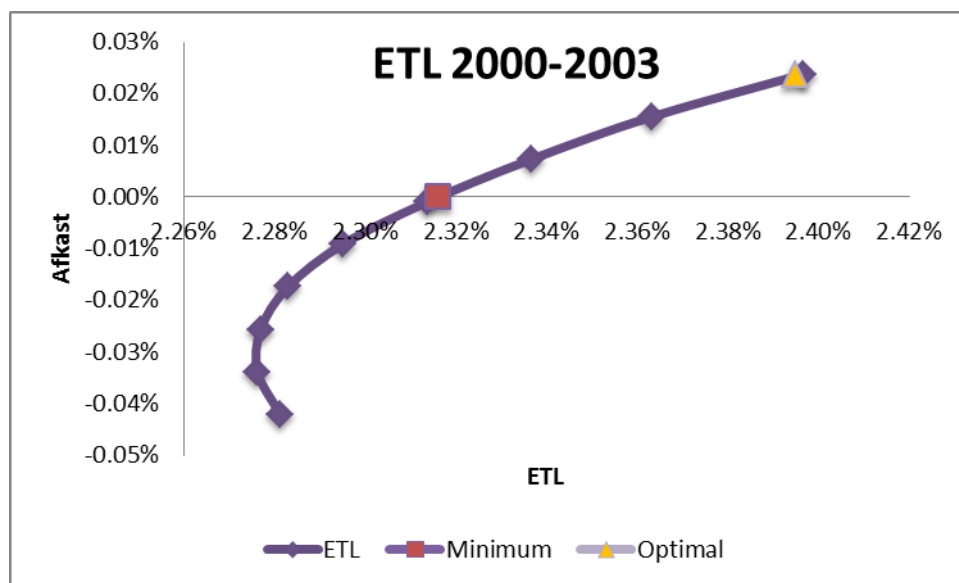
I det følgende antages det, at en investor ønsker et *merafkast* på sin portefølje svarende til 2,5 % om året (hvilket for en ti dages investeringshorisont er 0,1 %). Dette er gjort ved at optimere ligning (8.2), således at *merafkastet* for den ti dages VaR svarer til et afkastniveau på 2,5 % for 252 dage. Ydermere er minimum VaR-porteføljen fundet. Denne er fundet ved at minimere ligning (8.2), under bibetingelse af, at afkastet skal være større end eller lig med 0. For at finde den

efficiente rand er der opstillet ni porteføljer, hvor vægten i guld gradvist øges med 5 procent, mens vægten i S&P 500 holdes konstant.

Af figur 8.1 og 8.2 samt tabel 8.2 fremgår VaR og den efficiente rand for ETL for en periode på 10 dage. Det skal her gøres klart, at jo længere investeringshorisonten er, desto mere upræcis bliver VaR og ETL estimatet, hvilket er grunden til, at en ti dages investeringshorisont er valgt. En ti dages investeringshorisont er samtidig også den horisont, der benyttes af finansielle institutioner givet Basel to reglerne. For at bestemme hvor meget vægt der skal være i de tre aktiver, skal investors risikoprofil kendes. Investors risikoprofil er derfor sat ud fra et 95% VaR konfidensniveau. Investor må derfor betragtes som risikoneutral.



Figur 8.1 Kilde: Egen tilvirkning



Figur 8.2 Kilde: Egen tilvirkning

Af figur 8.1 viser procentsatserne under hver søjle den andel, der af porteføljen holdes i guld. Minimum VaR porteføljen består derved af 26 % investeret i guld, 14 % investeret i obligationen og 60 % investeret i aktier. Den optimale portefølje til det valgte VaR niveau, og under antagelse af at investor ønsker det før omtalte *merafkast*, består derimod af en investering med 40 % i guld, 0 % i obligationer og 60 % i aktier. Som figur 8.2 illustrerer følger ETL og VaR hinanden, hvilket betyder at desto større VaR er, desto større bliver ETL. Den efficiente rand er dermed fundet, som viser hvordan et højere afkast følges af en højere ETL. Der er derfor et *"trade-off"* imellem afkast og risiko.

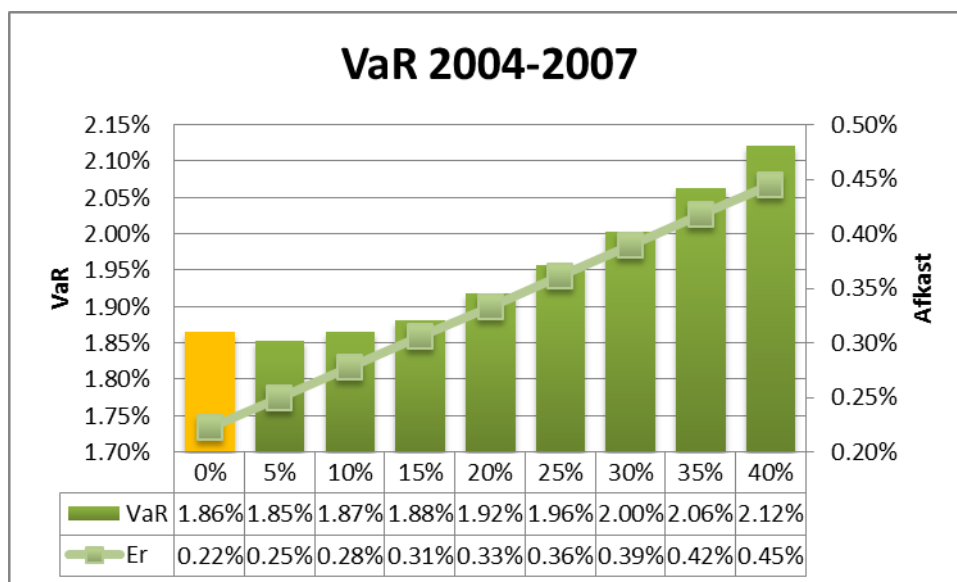
2000-2003											
Vægt										Minimum	Optimal
S&P500	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%
Guld	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	26%	40%
Tbill	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0%	14%	0%
VaR	-1.8573%	-1.8503%	-1.8501%	-1.8457%	-1.8565%	-1.8606%	-1.8754%	-1.8957%	-1.9160%	-1.8607%	-1.9160%
ETL	-2.2813%	-2.2763%	-2.2769%	-2.2830%	-2.2951%	-2.3138%	-2.3367%	-2.3633%	-2.3966%	-2.3162%	-2.3948%
Er	-0.04%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	-0.001%	0.01%	0.02%	0.02%	0.00%	0.02%
Investering	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
VaR Tab i USD	-18,573.24	-18,503.00	-18,500.87	-18,457.15	-18,565.37	-18,606.33	-18,753.69	-18,957.46	-19,159.78	-18,607.14	-19,159.78
ETL Tab i USD	-22,812.99	-22,763.04	-22,769.44	-22,829.85	-22,950.74	-23,137.70	-23,366.92	-23,632.52	-23,966.21	-23,161.51	-23,948.24

Tabel 8.2 Kilde: Egen tilvirkning

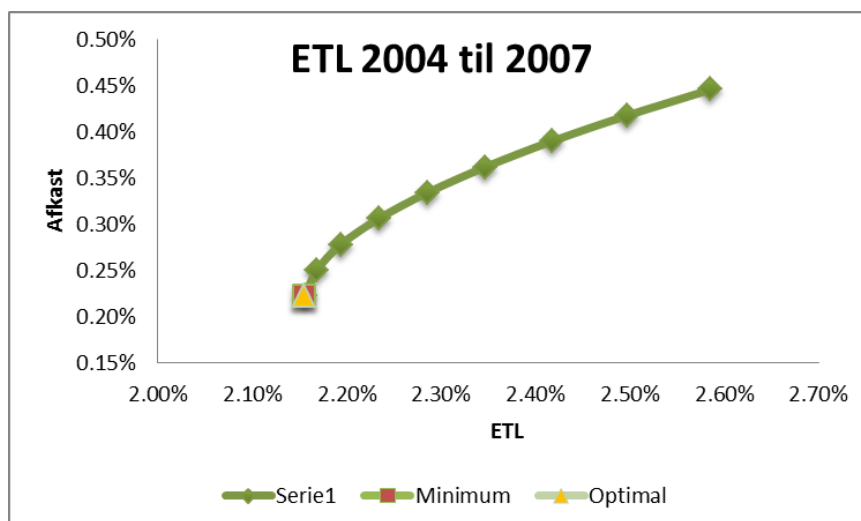
Af tabel 8.2 fremgår værdierne for minimum VaR porteføljen samt den optimale portefølje. VaR estimeret for minimum VaR porteføljen er her -1,8607 % med en ETL på -2,3162 %. Den mest

risikoneutrale portefølje vil derfor med 95 % sandsynlighed ikke realisere et tab på mere end -1,8607 %, hvilket ved en investering på 1 million USD svarer til 18.607.14 USD. Skulle porteføljen derimod ramme udenfor dette niveau, ville man maksimalt opleve et tab på -2,3162 % svarende til 23.162,51 USD, hvilket gælder ved en investering på 1 million USD. Sammenligner man dette med den optimale portefølje, er VaR estimeret for denne -1,916 % mens ETL er -2,3948 %. Ved en investering på 1 million USD ville dette svare til et tab på henholdsvis 19.159,78 og 23.948,24 USD. Man kan derfor se at for en risikohorisont på 10 dage, er den relative forskel mellem minimum VaR porteføljen og den optimale portefølje ikke specielt stor. Investor har dermed i denne periode med fordel kunnet påtage sig den ekstra risiko ved at investere 40% i guld sammenlignet med de 14% obligationer i minimum VaR porteføljen, da forskellen i VaR estimeret og ETL må betragtes som relativt småt. Dette skal dog sammenlignes med, at det forventede afkast mellem minimum VaR porteføljen og den optimale portefølje ligger relativt lavt, på henholdsvis 0 og 0,02 % for den ti dages periode. Dette er svarende til et årligt merafkast på den optimale portefølje på 0,5%. Prisen for ekstra risiko i denne periode er derfor lille, samtidig med at merafkastet ikke rammer det forventede niveau på 2,5% årligt.

Figur 8.3 og 8.4 samt tabel 8.3 viser VaR og ETL for perioden 2004-2007.



Figur 8.3 Kilde: Egen tilvirkning



Figur 8.4 Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af figur 8.3 og 8.4, er minimum VaR porteføljen i denne periode den samme som den optimale portefølje, når den optimale portefølje optimeres under betingelse af, at investor ønsker et *merafkast* på 2,5 % om året. For begge porteføljer gælder det her, at disse har 0% investeret i guld, og 40% investeret i obligationer. Figur 8.4 viser dog samtidig, at man ved en investering i 10 % guld og 30 % obligationer ville kunne opnå nogenlunde samme forventede afkast samt VaR som for den optimale / minimum VaR-porteføljen. Når andelen af guld i porteføljen er større end 10% procent ses det, at afkastet herpå vil stige. Hvis ligning (8.2) optimeres uden restriktionen om et *merafkast* på 2.5 % årligt, ses det, at den optimale portefølje i denne periode består af 40 % guld og 0 % investeret i obligationer.

	2004-2007									Minimum	Optimal
	Vægt										
S&P500	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%
Guld	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	0%	0%
Tbill	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0%	40%	40%
VaR	-1.8650%	-1.8534%	-1.8657%	-1.8815%	-1.9179%	-1.9573%	-2.0029%	-2.0634%	-2.1207%	-1.8650%	-1.8650%
ETL	-2.1558%	-2.1684%	-2.1940%	-2.2339%	-2.2852%	-2.3469%	-2.4175%	-2.4976%	-2.5858%	-2.1555%	-2.1555%
Er	0.22%	0.25%	0.28%	0.31%	0.33%	0.36%	0.39%	0.42%	0.45%	0.2220%	0.2220%
Investering	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
VaR Tab i USD	-18,649.82	-18,534.46	-18,656.85	-18,815.23	-19,179.04	-19,572.56	-20,028.56	-20,633.66	-21,207.24	-18,649.82	-18,649.82
ETS Tab i USD	-21,558.12	-21,683.63	-21,939.87	-22,338.95	-22,852.47	-23,468.91	-24,175.46	-24,975.95	-25,858.17	-21,554.72	-21,554.72

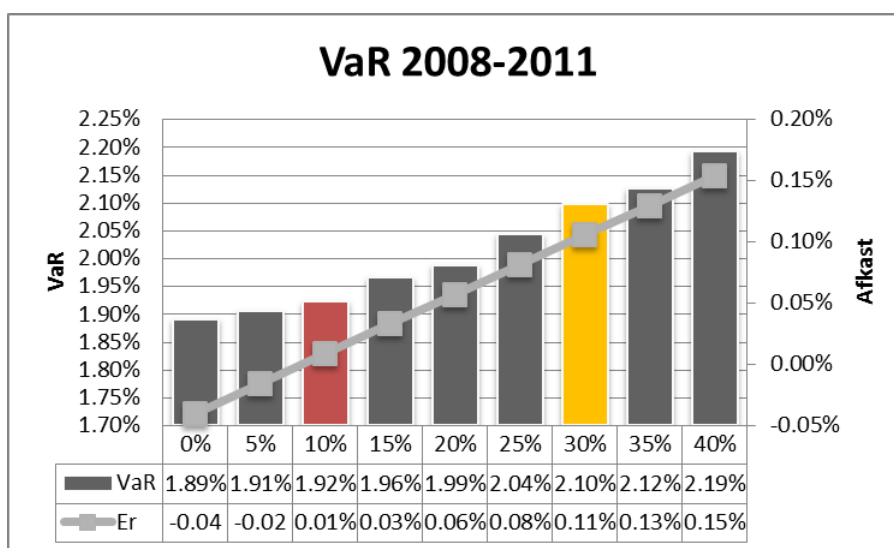
Tabel 8.3: Kilde: Egen tilvirkning

Som det fremgår af Tabel 8.3 kan det ses, at ved at investere 40 % i guld i forhold til 40 % i obligationer stiger VaR fra -1,8650 % til -2,1207 %, mens ETL stiger fra -2,1558 % til -2,5858 %. Afkastet stiger dog samtidig med 0,23 %. Ved en investering på 1 million USD ville dette svare til

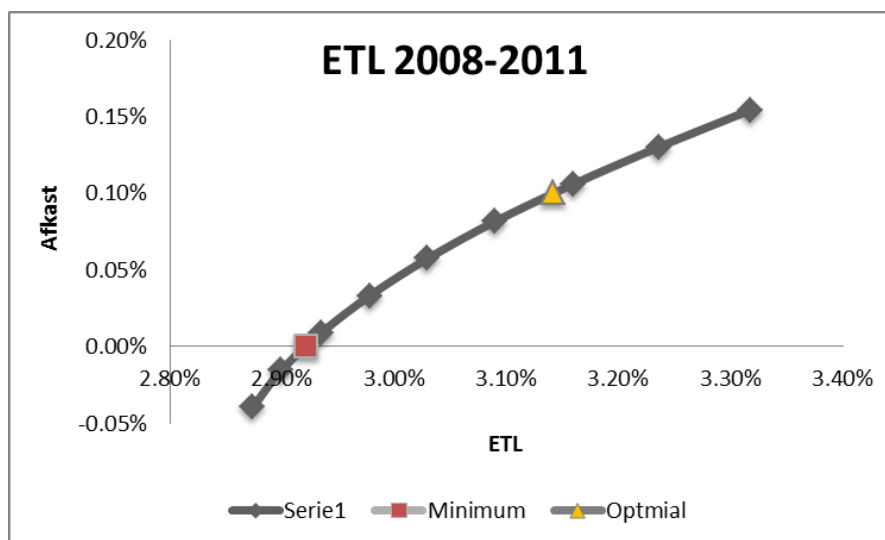
en VaR på -18.649,82 USD og -21.207,24 USD samt et ETL på -21.554,72 og -25.858,17 USD. Som man kan se på figur 8.4, er afstanden mellem de nederste punkter på grafen ikke særligt stor, så det har med fordel kunnet betale sig for investor at veksle en del af risikoen for et større afkast. Sammenligner man ETL, VaR og afkastet for minimumporteføljen samt porteføljen, hvor der er investeret 10 % i guld, og 30 % i obligationer, må det siges, at dette *"trade-off"* mellem det forventede afkast og risikoen er så lavt, at det må antages, at investor ville få mere ud af at investere 10% i guld og 30% i obligationer. Dette fremgår også af figur 8.4, hvor afstanden mellem disse punkter er relativt lille set i forhold til afstanden mellem de øvrige punkter på den efficiente rand. Ud fra ovenstående konkluderes det derfor, at investor i denne periode ville optimere sit afkast i forhold til den optimale portefølje ved at investere 10% i guld, og 30% i obligationer.

Figur 8.5 og 8.6 samt tabel 8.4 viser VaR og ETL for perioden 2008-2011.

Som det fremgår af figur 8.5 og tabel 8.4 består minimum VaR porteføljen af 8% guld, og 22% investeret i obligationer. Omvendt består den optimale portefølje af 29% investeret i guld og 11% i obligationer. Sammenlignes VaR og ETL for de to porteføljer kan det ses, at VaR stiger fra -1,9219% til -2,0894% mens ETL stiger fra -2,9208% til -3,1422%. Men der hvor minimum VaR porteføljen giver et afkast svarende til den risikofrie rente, opnår man et merafkast på 0,1% ved at investere i den optimale portefølje. Risikopræmien ved at investere 29% i guld og 11% i obligationer må derfor siges at være god. Sammenligner man de to porteføljer ved en investering på 1 million USD, ville minimum VaR porteføljes VaR være 19.219,21 USD med et ETL på 29.207,94 USD. Sammenlignet med den optimale portefølje hvis VaR ville blive 20.893,96 USD med et ETL på 31.421,76 USD.



Figur 8.5 Kilde: Egen tilvirkning



Figur 8.6 Kilde: Egen tilvirkning

I denne periode må det forventede afkast derfor siges at være relativt stort, set i lyset af den finansielle krise, der har været medvirkende til at hive renten i bund samtidig med at man på aktiemarkedet har realiseret store tab. Som tabel 8.4 viser, stiger afkastet i porteføljen i takt med, at vægten i guld øges. Prisen for den ekstra risiko der tages ved at investere mere i guld, kontra obligationen, må antages at være relativt lille.

	2008-2011										
	Vægt									Minimum	Optimal
S&P500	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%
Guld	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	8%	29%
Tbill	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0%	32%	11%
VaR	-1.890%	-1.9053%	-1.9223%	-1.9648%	-1.9875%	-2.0424%	-2.0974%	-2.1246%	-2.1910%	-1.9219%	-2.0894%
ETL	-2.874%	-2.8992%	-2.9347%	-2.9779%	-3.0296%	-3.0898%	-3.1594%	-3.2357%	-3.3180%	-2.9208%	-3.1422%
Er	-0.04%	-0.02%	0.01%	0.03%	0.06%	0.08%	0.11%	0.13%	0.15%	0.0000%	0.1000%
Investering	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000
VaR Tab i USD	-18,904.55	-19,053.18	-19,223.12	-19,648.17	-19,875.27	-20,423.76	-20,974.31	-21,245.78	-21,909.72	-19,219.21	-20,893.96
ETL Tab i USD	-28,736.40	-28,992.46	-29,346.97	-29,778.86	-30,295.51	-30,898.24	-31,594.37	-32,356.68	-33,180.43	-29,207.94	-31,421.76

Tabel 8.4 Kilde: Egen tilvirkning

8.4 Delkonklusion

I perioden fra 2000 til 2003 kan det ses, at den optimale portefølje består af 40% investeret i guld og 0% i obligationer. Omvendt består minimum VaR porteføljen af 2 % guld og 14% obligationer. Som det ses i denne periode, stiger det forventede afkast i takt med, at andelen af guld i porteføljen øges. Denne tendens skal ses i lyset af IT- boblen, som dog i mindre grad end NASDAQ indekset, ramte S&P 500. Som figur 2.1 i afsnit 2.1 viser, skal den andel som investeres i guld, ses i forhold til, at man fra 2001 begynder at se de første tegn på en stigning i guldprisen. Renten blev i samme periode nedsat med 0,5%, hvilket har haft indflydelse på obligationens afkast.

I perioden fra 2004 til 2007 er den optimale portefølje og minimum VaR porteføljen ens. Men som det sås, ville det for investor bedst kunne svare sig at investere 10% af sin beholdning i guld grundet den lave risikopræmie. I denne periode, som er den periode af de tre test perioder, hvor der har været størst økonomisk vækst, kan det bedst svare sig at holde en lille andel af sin portefølje i guld. I denne periode normaliserede man da også pengepolitikken i USA, hvorved den lave rente fra perioden 2000-2003 igen blev hævet. Det ses dog stadig i denne periode, at afkastet for porteføljen stiger i takt med, at beholdningen af guld i porteføljen øges.

I perioden fra 2008 til 2011 bestod minimum VaR porteføljen af 8% guld og 32% obligationer. Den optimale portefølje bestod her af 29% guld og 11% obligationer. Denne periode har været stærkt influeret af den finansielle krise, hvor renterne i perioden gradvist er blevet sænket. Samtidig bærer perioden præg af, at guldprisen har været stærkt stigende. Den samme tendens som tegnede sig for de foregående tre perioder går i denne periode igen, hvor man ved at øge andelen af guld øger det forventede afkast. For perioden 2000 til 2003 samt perioden fra 2008 til 2011 kan det ses, at ved udelukkende at holde obligationer i porteføljen, opnår man et negativt forventet afkast. Ved disse perioder at øge mængden af guld, kan man dermed opnå positive afkast til en relativt lav risikopræmie. Omvendt øger guld stadig afkastet i porteføljen i perioden fra 2003 til 2007. Men her er den mindst risikofyldte portefølje målt på VaR og ETL, den portefølje hvor der investeres i 40% obligationer og 0% i guld. Det kan derfor ses, at hvis investor ønsker at minimere sin risiko, kan det i perioder med høj vækst på markedet, bedst betale sig at holde obligationer frem for guld. Omvendt kan det i perioder med finansiell uro bedst betale sig at holde en del af sin portefølje i guld og obligationer. Vi kan derfor konkludere ud fra ovenstående, at guld i test perioderne har en diversificeringseffekt (som målt via ti dages VaR) i perioder med turbulens på markederne, hvor renterne samtidig bliver sænket. Mens guld i perioder med vækst på markederne og stigende renter øger risikoen i porteføljen, om end *merafkastet* stiger. Det kan dog samtidig konkluderes, at risikopræmien i perioden for 2003 til 2007 er så lav, at det for investor bedst kan betale sig at investere 10% i guld og 30% i obligationer. I bilag 16 er beregningerne for VaR og ETL vist, for henholdsvis 1 dag, 21 dage og 252 dage.

9.0 Konklusion

Den finansielle krise og de markant lave renter har gjort det attraktivt for professionelle investorer at finde alternative metoder og investeringer til både at sikre afkast samt at minimere risiko.

I opgavens kapitel 2 og 3 besvares spørgsmålet ”Hvilke faktorer har indflydelse på guldprisen?”. Undersøgelsen indledes i kapitel 2 med at undersøge, hvorledes udbuddet og efterspørgslen har indflydelse på ændringer i guldprisen. Efterspørgslen efter guld kan inddeles i følgende efterspørgselskategorier, smykker, barer og mønt, centralbankerne samt teknologi, ETF's og lignende. Som analysen viste, står smykkeindustrien afgørende for den største efterspørgsel på markedet. Specielt i perioden fra 2003 til 2008 har smykkeindustriens efterspørgsel været dominerende. Mens det i samme periode var omvendt for centralbankerne, som havde en negativ efterspørgsel. Fra 2008, dvs. under den finansielle krise, begyndte centralbankerne igen at efterspørge guld samtidig med, at efterspørgslen efter barer og mønter steg voldsomt i perioden fra 2008 til 2012. I 2012 var fordelingen i efterspørgslen mere ligeligt fordelt, hvor smykkeindustrien kun stod for halvdelen af efterspørgslen, som ellers fra begyndelsen af perioden havde været den dominerende part. Endvidere kunne det samtidig fastslås at ETF's og andre guld investeringsfonde, kun stod for en meget lille del af efterspørgslen, og at teknologisektoren i hele perioden lå på et stabilt niveau. Som analysen yderligere viste, kan centralbankerne og IMF have en meget koncentreret effekt på markedet i visse perioder, når de enten opkøber eller sælger ud af deres beholdninger. Analysen viste også, at forholdet mellem udbuddet og efterspørgslen har stor indflydelse på guldprisen. Resultatet ligger sig derfor op af Abkens (Abken, 1980), og vi konkluderer derfor, at en stor del af variationen i guldprisen, stammer fra udbuddet og efterspørgslen.

I kapitel 3 opstillede vi en regressionsanalyse (under antagelse af at afkastene er normalfordelte), som var baseret på månedlige data og dækkede perioden fra 1. januar 1986 til 1. april 2013. Variablene i modellen var guldprisen, S&P 500, en tre månedes t-bill og inflationen (CPI). Analysen viste at guldprisen en periode tilbage, samt inflationen har indflydelse på guldprisen i dag. Aktiekursen, den laggede aktiekurs og renten viste derimod ikke at have nogen effekt på guldprisen i dag. Afsnittet konkluderede til sidst, at guld ville kunne fungere til at diversificere en portefølje bestående af aktier og obligationer, da priserne herpå ikke yder indflydelse på guldprisen. Vi kan derfor konkludere at faktorer som inflation, og guldprisen en periode tilbage, samt udbuddet og

efterspørgslen har indflydelse på guldprisen i dag. Alt imens aktier og obligationer ikke yder indflydelse herpå. Det opnåede resultatet ligger sig derfor op af de resultater, som Collin (Lawrence, 2003), Abken (Abken, 1980), Tassel og Baker (Baker A & Tassel van C, 1985) samt Dr. Sindhu (Sindhu, 2013) finder frem til i deres analyse af gulds diversificeringsegenskaber, og de faktorer der har indflydelse derpå.

I anden halvdel af opgaven analyseredes der mere specifikt på tre perioder. De tre perioder er som følger: Perioden fra d.4-1-2000 til d.31-12-2003, d.05-01-2004 til d. 31-12-2007 og 03-01-2008 til d.30-12-2011. Perioden er vidt forskellige og dækker over finansielle kriser og boom markeder. I kapitel 5 blev følgende spørgsmål besvaret, ” *Hvordan reagerer aktier, obligationer og guld på ”dårlige” og ”gode” nyheder, hvis afkast ikke er normalfordelte?* ”.

Til denne undersøgelse blev følgende tre GARCH modeller testet, GARCH(1, 1), Student- t distribueret GARCH (1, 1) og den asymetriske E-GARCH(1, 1) model. Analysen viste her, at det var den student- t distribuerede GARCH (1, 1) model der bedst fittede dataen. Analysen viste samtidig, at alle tre tidserier udviste overskydende skævhed og kurtosis, mens Jarque Bera testen konkluderede, at ingen af de tre tidserier var normalfordelte.

Analysen af den Student- t distribuerede GARCH(1, 1) model viste, at guldprisen i perioden fra 2000 til 2003 var meget følsom overfor ”*Dårlige*” nyheder i markedet, mens S&P 500 indekset og obligationen ikke var. Dog viste det sig, at markedschok i denne periode havde en korterevarende effekt på guldprisen modsat S&P 500 indekset og obligationen.

I perioden fra 2004 til 2007, hvor der var høj vækst på de finansielle markeder, viste alle tre aktiver væsentlig følsomhed over for chok (dårlige nyheder), samtidig med at dårlige nyheder havde en langvarende effekt på alle tre aktiver.

I den sidste periode fra 2008 til 2011, som dækker den finansielle krise, var guldprisen den af de tre aktiver, som var mindst følsom overfor ”*dårlige*” nyheder i markedet, dog havde dårlige nyheder i denne periode en længerevarende effekt på guldprisen sammenlignet med de to andre aktiver.

Den langsigtede volatilitet viste derimod, at denne var lavest for renten i alle tre perioder. S&P 500 indekset var i perioder med kriser i markedet (altså mange dårlige nyheder) mere volatil end guldprisen. Det omvendte gør sig gældende i perioder med høj vækst på markederne. Det kan især ses, at S&P 500 indekset i den sidste periode, dækkende den finansielle krise, har været markant mere volatil sammenlignet med guldprisen.

Guldprisen har derfor vist sig som det mindst volatile aktiv, sammenlignet med S&P500 indekset, i

perioder med kriser i markedet (mange dårlige nyheder). Det viste sig samtidig, at i perioden fra 2003 til 2007, hvor der var høj vækst på de finansielle markeder, var guldprisen kun en anelse mere volatil sammenlignet med S&P 500 indekset. Analysen viste derfor, at guld kan medvirke til at nedbringe volatiliteten i en given portefølje, når der er stress på de finansielle markeder.

I kapitel 6 blev der opstillet en copula funktion, således at fællesdistributionen for de tre aktiver kunne findes, hvormed at spørgsmålet om ” *Hvordan konstrueres en fællesdistribution ud fra marginale distributioner?* ” kunne besvares. Der blev i denne analyse testet en Student- t distribueret copula, eller om de to assymetriske copulaer, Clayton og Gumbel kunne definere den bedste afhængighed mellem aktiverne. Kapitel 6 konkluderede, at den copula der bedst kunne tilpasses dataen, var den symetriske Student- t distribuerede copula. Korrelationsmatricen for den Student- t distribuerede copula viste, at i perioden fra 2000 til 2003, altså under ”IT-boblen”, var guldprisen svagt korreleret med S&P 500 indekset og ukorrelet med renten, mens den i de resterende test perioder var ukorreleret med begge aktiver. S&P 500 indekset har dog vist en middel korrelation med obligationen i alle tre perioder, hvor den højeste angivet korrelation var i perioden under den finansielle krise. Analysen af korrelationsmatricerne underbygger konklusionen i kapitel 3 om, at guldprisen er uafhængig af aktiemarkedet og renten. Konklusionerne fra kapitel 3 og kapitel 5, om at guld kan fungere som et godt aktiv til porteføljedyversifikation, understøttes hermed, da disse viser at guldprisen kun i meget svag grad følger udviklingen på aktie- og obligationsmarkedet. Baseret på kapitel 6, og den testperiode der kigges på, er der derfor meget der tyder på, at guldprisen på langsiget er uafhængig af aktie og obligationskursen. Konklusionerne fra kapitel tre tyder derfor på at være gældende, når der kigges på daglige data i tre forskellige test perioder.

I kapitel 7 blev det forklaret, hvordan man via den Student-t distribuerede copula kunne genere 10.000 afkast for hver tidserie. Disse afkast blev i kapitel 8 benyttet til at opstille en model til at estimere VaR og ETL for de tre test perioder. I Kapitel 7 blev modellen hernæst ”back testet” ved at benytte en *Bernoulli*, *Kupiecs*, *Christoffersen* og en *kombineret test*. Backtesten viste, at den opstillede VaR model i alle tre tidsperioder var signifikant.

Kapitel 8 startede med at besvare spørgsmålet, ”*Hvad er det procentvise potentielle tab af forskellige porteføljesammensætninger hvis guld benyttes til diversificering?*”. I analysen blev det testet, hvorledes en kombination af obligationer og guld kunne diversificere en portefølje, og

hvorledes afkastet kunne øges i en portefølje bestående af 60% andel investeret i S&P 500 indekset. Dette blev testet inden for en ti dages periode, hvilket er i overensstemmelse med Basel 2 kravene. I alle tre perioder kunne det ses, at risikoen (målt via VaR og ETL) og afkastet steg, når andelen af guld i porteføljen blev øget. Grafisk kunne denne sammenhæng opstilles som den efficiente rand, hvor standardafvigelsen fra den klassiske porteføljeteori blev skiftet ud med VaR og ETL som risikomål. Resultatet skal dog ses i lyset af den voldsomme stigning, som guldprisen så småt begyndte at udvise fra år 2000 og frem.

Afslutningsvis i denne del af analysen blev spørgsmålet, *”hvad er den optimale vægt af guld i en portefølje bestående af aktier, obligationer og guld under forskellige markedsfluktuationer?”* besvaret.

Til at undersøge dette blev modificerede Sharp ratio opstillet, som Bodie mfl. (Bodie, Kane, & Marcus, Investments and portfolio management, Ninth edition, 2011) fremsætter i deres artikel. Sharp ratioen blev for den optimale portefølje optimeret under bibetingelse af, at denne som minimum skulle give et afkast svarende til 2,5% om året.

Analysen viste, at i perioden fra 2000 til 2003 består minimum VaR porteføljen af 60% aktier, 26% guld og 14% obligationer, som ville give et afkast svarende til den risikofri rente. Omvendt består den optimale portefølje i denne periode af 60% aktier, 40% guld og 0% investeret i obligationer, hvilket ville have givet et afkast svarende til 0,02 %, for en ti dages periode.

I perioden fra 2004 til 2007 bestod minimum VaR porteføljen af 60% investeret i aktier, 0% investeret i guld og 40% investeret i obligationer. Den optimale portefølje var her den samme som minimum VaR porteføljen. Ved grafisk at inspicere afkastene og VaR / ETL kunne det ses, at en portefølje bestående af 10 % guld, 30 % obligationer og 60 % aktier ville øge afkastet, mens risikoen kun ville blive øget marginalt. Derfor blev det konkluderet, at det i denne periode var den portefølje, der var den mest optimale.

I perioden fra 2008 til 2011 bestod minimum VaR porteføljen af 8% guld, 32% obligationer og 60% aktier. Den optimale portefølje bestod derimod af 29% guld, 11% obligationer og 60% aktier, hvilket ville have givet et afkast på 0,1 % for en ti dages periode, imens minimumporteføljen ville have givet et afkast svarende til den risikofri rente.

Som resultaterne viser, vil en portefølje bestående af både guld og obligationer i perioder med stress på de finansielle markeder bedst kunne diversificere porteføljen hos en forholdsvis risikoneutral

investor. Omvendt viser resultatet, at i perioder med høj vækst på de finansielle markeder vil en portefølje bestående af obligationer og aktier være mest optimal. Men som resultatet viste, ville risikoen kun blive øget marginalt ved at allokere en lille procentdel af ens investering i guld.

Resultaterne fra regressionsanalysen viser tegn på at være gældende for hele perioden fra 1. januar 1986 frem til 4. april 2013, da resultaterne af de tre testperioder konkluderede det samme, nemlig at guldprisen er uafhængig af renten og aktiekurserne. Samtidig kunne man se, at guldprisen i perioder med stress på markederne er markant mindre volatil sammenlignet med aktier og kun marginalt mere volatilt i forhold til aktier i perioder med høj vækst. VaR analysen underbyggede dette og kom frem til, at ved at allokere en hvis procentdel af sin investering i guld, kan man diversificere en del af risikoen væk i markeder med høj volatilitet. Samtidig viser testperioderne, at en forøgelse af guld i porteføljen øger afkastet. Resultaterne fra testperioderne skal dog ses i lyset af, at renten under den finansielle krise og ”IT- boblen” blev sænket markant, hvilket har gjort afkastet antagelig mindre attraktiv. Endvidere er der i perioden sket en voldsom stigning i guldprisen, hvilket har gjort en investering i dette aktiv mere attraktiv.

Resultaterne vi kommer frem til ligger derfor godt i tråd med den research der tidligere er blevet foretaget på området (se afsnit 3.1). Det nye i denne analyse er, at vi beviser at disse egenskaber også er gældende, når afkastene ikke antages at være normalfordelte. Derudover benyttes VaR og ETL som risikomål i vores analyse, hvorimod man i tidligere research har baseret risikomålet på standardafvigelsen.

Det kan hermed konkluderes, at det er lykket os at besvare den overordnede problemformulering.

10.0 Bibliografi

- Abken, P. A. (Marts-April 1980). The Economics of gold price movements. *Economic review* , s. 1 - 13.
- Alexander, C. (2008). *Market Risk analysis, Vol IV*. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- Alexander, C. (2008). *Practical Financial Econometrics*. John Wiley & Sons Ltd.,
- Baker A, S., & Tassel van C, R. (December 1985). Forecasting the price of gold: A fundamentalist approach. *Atlantic economic Journal - Volume 13* , s. 43-51.
- Baur, D. G., & Lucey, B. M. (2010). Is gold a safe haven? An analysis of stocks, bonds and gold. *The financial review* 45 , s. 217-229.
- Baur, D. G., & Mc Dermott K, T. (4. Januar 2010). Is gold a safe haven? International evidence. *Journal of banking and finance* - 34 , s. 1886-1898.
- Bie, U., & Pedersen, A. H. (1999). *Guldets rolle i det monetære system*. København: Danmarks nationalbank.
- Black, F. (1976). Studies in Stock Price volatility Changes. Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section. *American Statistical Association* .
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2011). *Investments and Portfolio Management*. Mc Graw Hill.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2011). *Investments and portfolio management, Ninth edition*. New York: McGraw Hill.
- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Econometrics and Statistics, Vol. 69* .
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31 .
- Bollerslev, T., Chou Y., R., & Kroner F., K. (1992). ARCH modeling in finance: A review of theory and empirical evidence . *Journal of econometrics*, 52 , s. 4-5.

- Bonser-Neal, C. (Q1 1996). Does Central Bank Intervention Stabilize Foreign Exchange Rates? *Federal Reserve Bank of Kansas City, Economic Review* .
- Campell, R., Huisman, R., & Koedijk, K. (24. Juli 2000). Optimal portefolio selection in a Value-at-Risk framework. *Journal of Banking and finance* 25, 2001 , s. 1789-1804.
- Cheung, Y.-W., & Chinn, M. (2001). Currency traders and exchange rate dynamics: a survey of the US Market. *Journal of International Money and Finance* 20 .
- Cooper, R. N., Dornbusch, R., & Robert, E. H. (1982). The Gold standard: Historical facts and future prospects. *Brookings Papers on Economic Activity, VOL 1* , s. 1-56.
- Cristoffersen, P. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39 , s. 841--862.
- Dominguez, K. M., & Frankel, J. A. (1993). Does Foreign-Exchange Intervention Matter? The Portfolio Effect. *American Economic Review, Vol. 83, No. 5*.
- Engle, R. F. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*, 50.
- Engle, R. F., & McFadden, D. L. (1994). Handbook of Econometrics. *Editors Elsevier Science B. V*.
- Engle, R., & Ng, V. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance* 48 .
- Faugeras, O. P. (2013). *Sklar's theorem by probabilistic continuation and two consistency results*. Toulouse School of Economics.
- Financialweb*. (december 2013). Hentet fra <http://www.financialwebring.org/gummy-stuff/copulas.htm>
- Gujariti N, D. (2003). *Basic econometrics , 4 edition*. New York: McGraw-Hill.
- Hillier, D., Draper, P., & Faff, R. (2006). Do precious metals shine? An investment perspective. *Financial analyst journal - Volume 62* , s. 98-106.

Hull, J. C. (2012). Risk management and financial institutions, third edition. I J. C. Hull, *Risk management and financial institutions, third edition* (s. 199-200). New Jersey: John Wiley & son Ltd.

International monetary fund. (08. 11 2013). *International monetary fund*. Hentede 08. 11 2013 fra [www.IMF.org](http://www.imf.org): <http://www.imf.org/external/about/gold.htm>

Jaffe F, J. (Marts-April 1989). Gold and gold stocks as investmens for institutional portfolios. *Financial analyst journal* - Vol 45 , s. 53-59.

Jagerson, J., & Wade, H. S. (2011). All about investing in gold. I J. Jagerson, & H. S. Wade, *All about investing in gold* (s. 21-23,46-53). Mc Graw Hill.

Jondeau, E., Poon, S.-H., & Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer.

Kaun-Min, W., Yuan-Ming, L., & Thanh-Binh Nguyen, T. (25. Oktober 2011). Time and place where gold acts as an inflation hedge: An application of long-run and short-run threshold model. *Economic modelling* - 28 , s. 806-8019.

Kupiec, P. H. (1995). techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, Vol 3, No 2 , s. 73-84.

Lawrence, C. (2003). *Why is gold different from other assets? An empirical investigation*. World gold Council .

Morgan, J.P. (2013). *More Growth, Less Fear*. J.P. Morgan´s Corporate & Investment Bank.

Nationalbanken. (2000-2011). Hentede 2013 fra <http://www.nationalbanken.dk/dndk/Publikationer.nsf/Publikationer.HTML?openview&RestrictToCategory=Beretning%20og%20regnskab>

Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset returns: a New Approach. *Econometrica* 59 .

Pagan, A., & Schwert, G. (1990). Alternative models for Conditional Stock volatility. *Journal of Econometrics* 45 .

Sindhu, D. (Marts - April 2013). A study on select factors on the price of gold. *IOSR Journal of Business and management* , s. 84-93.

SPDR Gold shares. (08. 11 2013). *SPDR Gold Shares*. Hentede 08. 11 2013 fra SPDR Gold Shares: <http://www.spdrgoldshares.com/>

Taylor, S. J. (2007). *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*. Princeton University Press.

Vijay, K. R., & A. K. Md, E. S. (2001). *Wiley online library*. Hentede 4. December 2013 fra Wiley online : <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781118165676.lot/pdf>

Wooldridge, M. J. (2009). *Introductory Econometrics, 4. edition*. Michigan: South -Western Cenage Learning.

World gold council. (1. november 2013). *World gold council*. Hentede 1. November 2013 fra [gold.org](http://www.gold.org): http://www.gold.org/about_gold/story_of_gold/

World gold council. (07. 11 2013). *www.gold.org*. Hentede 07. 11 2013 fra World gold Council: http://www.gold.org/government_affairs/reserve_asset_management/central_bank_gold_agreements/

11.0 Bilag

Bilag 1

Bilag til analysen omkring guldmarkedet.

Data til efterspørgselsgrafen:

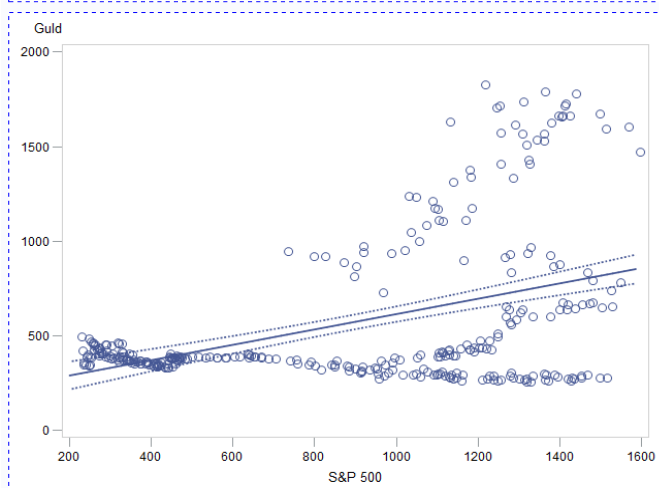
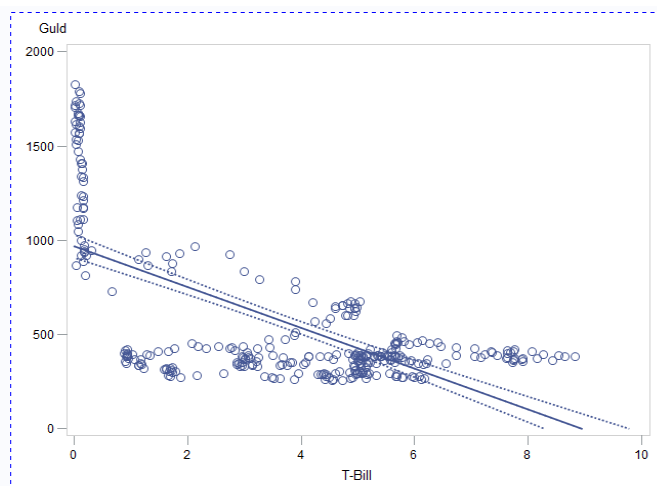
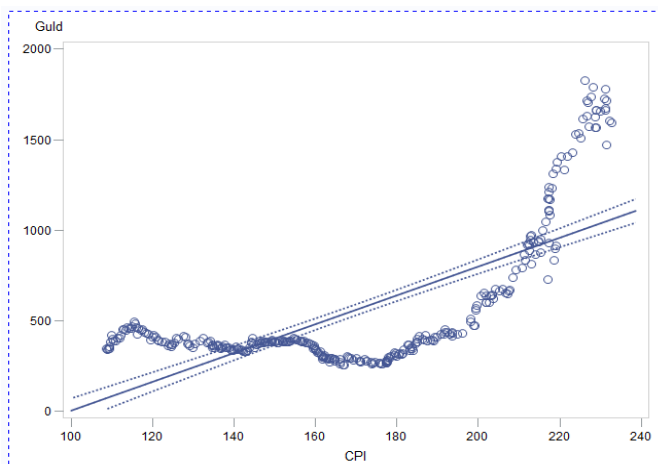
Efterspørgsel	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Smykker	2,484	2,616	2,719	2,300	2,423	2,304	1,816	2,020	1,975	1,896
Teknologi	386	419	438	468	476	461	410	465	452	407
Bar og mønt	304	354	398	417	438	875	791	1,218	1,519	1,256
ETF's og lignende	0	133	208	260	253	321	623	382	185	279
Centralbankernes køb	-620	-479	-663	-365	-484	-235	-34	77	457	544
Total	2,554	3,043	3,100	3,080	3,106	3,726	3,606	4,162	4,588	4,382

Data til udbudsgrafen

Udbud	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Total mine produktion	2,593.0	2,463.0	2,494.0	2,486.0	2,473.0	2,407.0	2,554.0	2,739.0	2,838.0	2,857.0
Genbrugt guld	939.0	834.0	841.0	1,129.0	977.0	1,146.0	1,549.0	1,711.0	1,649.0	1,591.0
Total	3,532.0	3,297.0	3,335.0	3,615.0	3,450.0	3,553.0	4,103.0	4,450.0	4,487.0	4,448.0

Bilag 2

Bilag til den lineære regression. Nedenfor er X-Y plottet for variablene, vist inden transformeringen til henholdsvis logaritme og Delta.



Bilag 3

Bilag 3, viser den SAS kode der er benyttet til at genere de tre GARCH modeller:

GARCH (1, 1)

```
/* Estimation afGARCH(1,1) model */
PROCAUTOREGDATA = mylibs.guld_ga;
MODEL ret_G8 = / GARCH=(P=1, Q=1)
DIST=NormalMETHOD=ML COVEST=QML;
RUN;
```

GARCH (1, 1) student- t

```
/* Estimation afGARCH(1,1) model */
PROCAUTOREGDATA = mylibs.guld_ga;
MODEL ret_G8 = / GARCH=(P=1, Q=1)
DIST=t METHOD=ML COVEST=QML;
RUN;
```

E-GARCH (1, 1)

```
/* Estimation afGARCH(1,1) model */
PROCAUTOREGDATA = mylibs.guld_ga;
MODEL ret_G8 = / EGARCH=(P=1, Q=1)
DIST=NORMALMETHOD=ML COVEST=QML;
RUN;
```

Bilag 4

Bilag til Volatilitetsanalysen: Tabellerne nedenfor viser SAS outputtet for guldprisen i perioden 2000 til 2003.

GARCH (1, 1) output

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.083416	Observations	999
MSE	0.0000835	Uncond Var	0.00008959
Log Likelihood	3335.77656	Total R-Square	.
SBC	-6643.9261	AIC	-6663.5531

GARCH Estimates			
MAE	0.00634955	AICC	-6663.5129
MAPE	102.474245	HQC	-6656.0931
		Normality Test	1643.9558
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000337	0.000266	1.26	0.2060
ARCH0	1	0.0000153	7.8195E-6	1.95	0.0509
ARCH1	1	0.2079	0.0750	2.77	0.0056
GARCH1	1	0.6217	0.1252	4.97	<.0001

E-GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.08343367	Observations	999
MSE	0.0000835	Uncond Var	.
Log Likelihood	3350.41087	Total R-Square	.
SBC	-6673.1947	AIC	-6692.8217
MAE	0.0063573	AICC	-6692.7815
MAPE	105.647693	HQC	-6685.3617

Exponential GARCH Estimates

Normality Test 1503.5206

Pr >ChiSq <.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000513	0.000242	2.12	0.0340
EARCH0	0	-1.4390	.	.	.
EARCH1	1	0.2780	0.0936	2.97	0.0030
EGARCH1	1	0.8471	0.0588	14.41	<.0001
THETA	1	0.5510	0.2698	2.04	0.0411

Student – t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.08347135	Observations	999
MSE	0.0000836	Uncond Var	0.00008526
Log Likelihood	3400.82175	Total R-Square	.
SBC	-6767.1097	AIC	-6791.6435
MAE	0.00634481	AICC	-6791.5831
MAPE	100.203087	HQC	-6782.3185
		Normality Test	2280.7195
		Pr >ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
Intercept	1	0.000136	0.000223	0.61	0.5410	
ARCH0	1	8.5462E-6	1.3043E-6	6.55	<.0001	
ARCH1	1	0.1354	0.0311	4.35	<.0001	
GARCH1	1	0.7644	0.0351	21.76	<.0001	
TDFI	1	0.2214	0.0341	6.48	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 5

GARCH output for guld i perioden 2004 til 2007:

GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.11845774	Observations	999
MSE	0.0001186	Uncond Var	0.0001271
Log Likelihood	3177.85878	Total R-Square	.
SBC	-6328.0905	AIC	-6347.7176
MAE	0.00787532	AICC	-6347.6773
MAPE	103.718699	HQC	-6340.2576
		Normality Test	56.4053
		Pr >ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000463	0.000310	1.49	0.1351
ARCH0	1	6.6976E-7	2.5459E-7	2.63	0.0085
ARCH1	1	0.0400	0.009108	4.39	<.0001
GARCH1	1	0.9548	0.009491	100.60	<.0001

E-GARCH (1, 1) output

The AUTOREG Procedure

Exponential GARCH Estimates

SSE	0.11842791	Observations	999
MSE	0.0001185	Uncond Var	.
Log Likelihood	3189.30617	Total R-Square	.
SBC	-6350.9853	AIC	-6370.6123
MAE	0.00786867	AICC	-6370.5721
MAPE	109.707763	HQC	-6363.1524
Normality Test			25.3952
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000723	0.000287	2.52	0.0116
EARCH0	0	-0.0333	.	.	.

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EARCH1	1	0.0552	0.0163	3.39	0.0007
EGARCH1	1	0.9961	0.002133	467.09	<.0001
THETA	1	1.0486	0.4317	2.43	0.0151

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.11844214	Observations	999
MSE	0.0001186	Uncond Var	0.00013015
Log Likelihood	3190.22689	Total R-Square	.
SBC	-6345.92	AIC	-6370.4538
MAE	0.00786898	AICC	-6370.3933
MAPE	111.556888	HQC	-6361.1288
Normality Test			76.1530
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000790	0.000290	2.73	0.0064
ARCH0	1	7.1582E-7	2.1258E-7	3.37	0.0008

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
ARCH1	1	0.0377	0.007131	5.29	<.0001	
GARCH1	1	0.9568	0.007354	130.10	<.0001	
TDFI	1	0.1339	0.0330	4.06	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 6

GARCH output for guld i perioden 2008 til 2011:

GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.21368365	Observations	999
MSE	0.0002139	Uncond Var	0.00024715
Log Likelihood	2910.34862	Total R-Square	.
SBC	-5793.0702	AIC	-5812.6972
MAE	0.01038886	AICC	-5812.657
MAPE	104.638316	HQC	-5805.2372
		Normality Test	73.1526
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000847	0.000395	2.15	0.0319

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
ARCH0	1	1.7011E-6	8.499E-7	2.00	0.0453
ARCH1	1	0.0614	0.0118	5.22	<.0001
GARCH1	1	0.9317	0.0124	74.88	<.0001

E-GARCH (1, 1) output

The AUTOREG Procedure			
Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.21384253	Observations	999
MSE	0.0002141	Uncond Var	.
Log Likelihood	2909.25087	Total R-Square	.
SBC	-5790.8747	AIC	-5810.5017
MAE	0.01038931	AICC	-5810.4615
MAPE	107.95672	HQC	-5803.0417
Normality Test			70.4905
Pr > ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.001090	0.000373	2.92	0.0035
EARCH0	0	-0.0416	.	.	.

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EARCH1	1	0.1415	0.0256	5.54	<.0001
EGARCH1	1	0.9944	0.004843	205.33	<.0001
THETA	1	0.0951	0.1814	0.52	0.6001

Student- t GARCH (1 , 1) output:

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.21390619	Observations	999
MSE	0.0002141	Uncond Var	0.00022052
Log Likelihood	2926.52386	Total R-Square	.
SBC	-5818.5139	AIC	-5843.0477
MAE	0.01039042	AICC	-5842.9873
MAPE	108.956987	HQC	-5833.7227
Normality Test			93.8954
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.001157	0.000359	3.22	0.0013
ARCH0	1	1.9908E-6	6.1268E-7	3.25	0.0012

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
ARCH1	1	0.0523	0.0101	5.16	<.0001	
GARCH1	1	0.9386	0.0103	91.14	<.0001	
TDFI	1	0.1491	0.0312	4.78	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 7

GARCH output for S&P500 i perioden 2000 til 2003:

GARCH (1, 1) output

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.19144476	Observations	1003
MSE	0.0001909	Uncond Var	0.00020971
Log Likelihood	2936.03415	Total R-Square	.
SBC	-5844.4253	AIC	-5864.0683
MAE	0.01046241	AICC	-5864.0282
MAPE	104.265505	HQC	-5856.6037
		Normality Test	24.4106
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000117	0.000372	0.32	0.7525

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
ARCH0	1	3.3787E-6	1.216E-6	2.78	0.0055
ARCH1	1	0.0892	0.0164	5.45	<.0001
GARCH1	1	0.8947	0.0171	52.20	<.0001

E-GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.19134353	Observations	1003
MSE	0.0001908	Uncond Var	.
Log Likelihood	2971.48608	Total R-Square	.
SBC	-5915.3292	AIC	-5934.9722
MAE	0.01045726	AICC	-5934.9321
MAPE	120.039127	HQC	-5927.5075
Normality Test			3.3976
Pr > ChiSq			0.1829

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	-0.000487	0.000467	-1.04	0.2979
EARCH0	0	-0.1535	.	.	.

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EARCH1	1	0.0622	0.0247	2.52	0.0119
EGARCH1	1	0.9826	0.005419	181.34	<.0001
THETA	1	-2.1122	0.7518	-2.81	0.0050

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.19138329	Observations	1003
MSE	0.0001908	Uncond Var	0.00020366
Log Likelihood	2940.74412	Total R-Square	.
SBC	-5846.9345	AIC	-5871.4882
MAE	0.0104596	AICC	-5871.4281
MAPE	100.765272	HQC	-5862.1575
Normality Test			23.4436
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.0000272	0.000371	0.07	0.9415
ARCH0	1	3.0931E-6	1.017E-6	3.04	0.0024

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
ARCH1	1	0.0824	0.0149	5.53	<.0001	
GARCH1	1	0.9024	0.0156	57.98	<.0001	
TDFI	1	0.0721	0.0277	2.60	0.0092	Inverse of t DF

Bilag 8

SAS output for perioden 2004 til 2007 for S&P500:

GARCH (1, 1):

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.05825438	Observations	1005
MSE	0.0000580	Uncond Var	0.00005618
Log Likelihood	3527.68079	Total R-Square	.
SBC	-7027.7106	AIC	-7047.3616
MAE	0.00559858	AICC	-7047.3216
MAPE	126.410141	HQC	-7039.8947
		Normality Test	197.0817
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000380	0.000219	1.73	0.0830

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
ARCH0	1	1.6908E-6	2.4241E-7	6.98	<.0001
ARCH1	1	0.0518	0.0167	3.11	0.0019
GARCH1	1	0.9181	0.0201	45.76	<.0001

E-GARCH(1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.05828004	Observations	1005
MSE	0.0000580	Uncond Var	.
Log Likelihood	3548.13879	Total R-Square	.
SBC	-7068.6266	AIC	-7088.2776
MAE	0.00562128	AICC	-7088.2376
MAPE	104.447446	HQC	-7080.8107
Normality Test			165.8913
Pr > ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.0000910	0.000205	0.44	0.6575
EARCH0	0	-0.3621	.	.	.

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EARCH1	1	0.0475	0.0218	2.17	0.0296
EGARCH1	1	0.9631	0.0110	87.86	<.0001
THETA	1	-3.2428	1.9018	-1.71	0.0882

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.05831205	Observations	1005
MSE	0.0000580	Uncond Var	0.00006101
Log Likelihood	3544.51466	Total R-Square	.
SBC	-7054.4656	AIC	-7079.0293
MAE	0.00559135	AICC	-7078.9693
MAPE	140.119641	HQC	-7069.6957
		Normality Test	290.9951
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
Intercept	1	0.000540	0.000208	2.59	0.0096	
ARCH0	1	1.2751E-6	1.8544E-7	6.88	<.0001	

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
ARCH1	1	0.0604	0.0117	5.15	<.0001	
GARCH1	1	0.9187	0.0130	70.75	<.0001	
TDFI	1	0.1293	0.0370	3.50	0.0005	Inverse of t DF

Bilag 9.

SAS output for S&P500 for perioden 2008 til 2011:

GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.33057288	Observations	1008
MSE	0.0003279	Uncond Var	0.00039044
Log Likelihood	2868.02741	Total R-Square	.
SBC	-5708.3919	AIC	-5728.0548
MAE	0.01200705	AICC	-5728.0149
MAPE	112.171635	HQC	-5720.5844
		Normality Test	83.9827
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000592	0.000376	1.58	0.1152

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
ARCH0	1	2.6668E-6	3.7937E-6	0.70	0.4821
ARCH1	1	0.1102	0.0320	3.45	0.0006
GARCH1	1	0.8830	0.0427	20.66	<.0001

E-GARCH (1, 1) output:

Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.33005433	Observations	1008
MSE	0.0003274	Uncond Var	.
Log Likelihood	2888.31448	Total R-Square	.
SBC	-5748.9661	AIC	-5768.629
MAE	0.01203953	AICC	-5768.5891
MAPE	99.9076596	HQC	-5761.1586
Normality Test			64.4620
Pr > ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	4.6499E-6	0.000356	0.01	0.9896
EARCH0	0	-0.2277	.	.	.
EARCH1	1	0.1394	0.0123	11.32	<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EGARCH1	1	0.9730	0.002924	332.77	<.0001
THETA	1	-1.0729	0.0566	-18.95	<.0001

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.33131004	Observations	1008
MSE	0.0003287	Uncond Var	.
Log Likelihood	2882.46458	Total R-Square	.
SBC	-5730.3505	AIC	-5754.9292
MAE	0.01200235	AICC	-5754.8693
MAPE	125.025345	HQC	-5745.5912
Normality Test			113.9598
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000986	0.000344	2.87	0.0041
ARCH0	1	1.8662E-6	3.0439E-6	0.61	0.5398
ARCH1	1	0.1057	0.0332	3.19	0.0014

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
GARCH1	1	0.8949	0.0378	23.68	<.0001	
TDFI	1	0.1649	0.0358	4.60	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 10

SAS outputtet for den amerikanske T-Bill, i perioden 2000 til 2003:

GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.00124934	Observations	1005
MSE	1.20014E-6	Uncond Var	1.27375E-6
Log Likelihood	5651.59759	Total R-Square	.
SBC	-11275.403	AIC	-11295.195
MAE	0.00080656	AICC	-11295.157
MAPE	147.351728	HQC	-11287.688
		Normality Test	503.4445
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000238	0.0000312	7.63	<.0001
ARCH0	1	5.273E-8	1.6837E-8	3.13	0.0017

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
ARCH1	1	0.0773	0.0280	2.76	0.0057
GARCH1	1	0.8813	0.0274	32.12	<.0001

E-GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.00124938	Observations	1005
MSE	1.20017E-6	Uncond Var	.
Log Likelihood	5654.72914	Total R-Square	.
SBC	-11281.667	AIC	-11301.458
MAE	0.00080651	AICC	-11301.42
MAPE	147.790361	HQC	-11293.951
		Normality Test	561.7236
		Pr >ChiSq	<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000240	0.0000290	8.27	<.0001
EARCH0	0	-0.2260	.	.	.
EARCH1	1	0.1235	0.0381	3.24	0.0012

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EGARCH1	1	0.9830	0.0108	91.11	<.0001
THETA	1	0.2320	0.2123	1.09	0.2746

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.00125089	Observations	1005
MSE	1.20162E-6	Uncond Var	1.3332E-6
Log Likelihood	5686.92293	Total R-Square	.
SBC	-11339.106	AIC	-11363.846
MAE	0.00080585	AICC	-11363.788
MAPE	155.98733	HQC	-11354.461
Normality Test			595.0067
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000267	0.0000286	9.34	<.0001
ARCH0	1	1.4312E-8	7.0935E-9	2.02	0.0436
ARCH1	1	0.0493	0.0198	2.49	0.0128

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
GARCH1	1	0.9399	0.0199	47.26	<.0001	
TDFI	1	0.1615	0.0322	5.01	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 11

SAS output for renten i perioden 2004 til 2007:

GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.00085986	Observations	1005
MSE	8.25202E-7	Uncond Var	8.63443E-7
Log Likelihood	5888.6437	Total R-Square	.
SBC	-11749.492	AIC	-11769.287
MAE	0.00066451	AICC	-11769.249
MAPE	129.61949	HQC	-11761.779
		Normality Test	94.3506
		Pr >ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000105	0.0000243	4.31	<.0001
ARCH0	1	1.1109E-8	0	Infty	<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
ARCH1	1	0.0406	0.008539	4.76	<.0001
GARCH1	1	0.9465	0.008121	116.55	<.0001

E-GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
Exponential GARCH Estimates			
SSE	0.00085926	Observations	1005
MSE	8.24629E-7	Uncond Var	.
Log Likelihood	5895.24959	Total R-Square	.
SBC	-11762.704	AIC	-11782.499
MAE	0.00066499	AICC	-11782.461
MAPE	138.696775	HQC	-11774.991
Normality Test			78.9893
Pr > ChiSq			<.0001

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.000127	8.9331E-6	14.19	<.0001
EARCH0	0	0.0455	.	.	.
EARCH1	1	0.005107	0.000362	14.10	<.0001

Parameter Estimates						
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	
EGARCH1	1	1.0031	0.0000215	46574.9	<.0001	
THETA	1	5.1278	0.4882	10.50	<.0001	

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure						
GARCH Estimates						
SSE	0.00086001	Observations		1005		
MSE	8.2535E-7	Uncond Var		9.31144E-7		
Log Likelihood	5910.39526	Total R-Square		.		
SBC	-11786.046	AIC		-11810.791		
MAE	0.00066452	AICC		-11810.733		
MAPE	128.483449	HQC		-11801.405		
		Normality Test		96.4124		
		Pr >ChiSq		<.0001		

Parameter Estimates						
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
Intercept	1	0.000102	0.0000234	4.35	<.0001	
ARCH0	1	1.1058E-8	0	Infty	<.0001	
ARCH1	1	0.0450	0.009693	4.64	<.0001	

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
GARCH1	1	0.9431	0.008756	107.71	<.0001	
TDFI	1	0.1583	0.0279	5.67	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 12

SAS output for t-billperioden 2008 til 2011:

GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

GARCH Estimates

SSE	0.00140293	Observations	1008
MSE	1.34509E-6	Uncond Var	.
Log Likelihood	5774.92566	Total R-Square	.
SBC	-11522.052	AIC	-11541.851
MAE	0.00078185	AICC	-11541.813
MAPE	115.287606	HQC	-11534.342
		Normality Test	1793.4142
		Pr >ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.0000709	0.0000205	3.45	0.0006
ARCH0	1	1.0537E-8	0	Infty	<.0001
ARCH1	1	0.1218	0.0348	3.50	0.0005
GARCH1	1	0.8820	0.0231	38.22	<.0001

E-GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure

Exponential GARCH Estimates

SSE	0.00140409	Observations	1008
MSE	1.3462E-6	Uncond Var	.
Log Likelihood	5782.51399	Total R-Square	.
SBC	-11537.229	AIC	-11557.028
MAE	0.00078234	AICC	-11556.989
MAPE	111.085723	HQC	-11549.518
		Normality Test	1114.7002
		Pr > ChiSq	<.0001

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
Intercept	1	0.0000583	0.0000237	2.46	0.0139
EARCH0	0	-0.008736	.	.	.
EARCH1	1	0.1421	0.1225	1.16	0.2460

Parameter Estimates					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
EGARCH1	1	0.9991	0.007932	125.96	<.0001
THETA	1	0.0219	0.2021	0.11	0.9138

Student- t GARCH (1, 1) output:

The AUTOREG Procedure			
GARCH Estimates			
SSE	0.0014026	Observations	1008
MSE	1.34477E-6	Uncond Var	1.95905E-6
Log Likelihood	5823.50965	Total R-Square	.
SBC	-11612.27	AIC	-11637.019
MAE	0.00078175	AICC	-11636.961
MAPE	116.881602	HQC	-11627.632
Normality Test			1847.7897
Pr >ChiSq			<.0001

Parameter Estimates						
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
Intercept	1	0.0000753	0.0000210	3.59	0.0003	
ARCH0	1	1.0537E-8	0	Infty	<.0001	
ARCH1	1	0.1016	0.0239	4.25	<.0001	

Parameter Estimates

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t	Variable Label
GARCH1	1	0.8930	0.0189	47.31	<.0001	
TDFI	1	0.1502	0.0370	4.06	<.0001	Inverse of t DF

Bilag 13

Nedenfor er SAS programmet til at estimere copula funktionerne vist:

Student- t copula

```
/* Copula estimation and simulation of returns */
proc copula data = Cop.copu2;
var sp_0 Guld_0 Tbill_0;
* fit T-copula to stock returns;
fit T /
marginals = empirical
method    = MLE
           plots=(datatype=both);

* simulate 10000 observations;
* independent in time, dependent in cross-section;
simulate /
ndraws = 10000
seed    = 1234
out      = simulated_returns
plots=(distribution=CDF)
        ;

run;
```

Clayton copula:

```
/* Copula estimation and simulation of returns */
proc copula data = Cop.copu2;
var sp_0 Guld_0 Tbill_0;
* fit T-copula to stock returns;
fit Clayton /
marginals = empirical
method    = MLE
           plots=(datatype=both);
```

```

* simulate 10000 observations;
* independent in time, dependent in cross-section;
simulate /
ndraws = 10000
seed    = 1234
out      = simulated_returns
plots=(distribution=CDF)
        ;

run;

```

Gumbel copula:

```

/* Copula estimation and simulation of returns */
proccopula data = Cop.copu2;
var sp_0 Guld_0 Tbill_0;
* fit T-copula to stock returns;
fitGumbel /
marginals = empirical
method     = MLE
           plots=(datatype=both);

* simulate 10000 observations;
* independent in time, dependent in cross-section;
simulate /
ndraws = 10000
seed    = 1234
out      = simulated_returns
plots=(distribution=CDF)
        ;

run;

```

Bilag 14

Nedenfor er SAS outputtet for de tre copulaer vist:

Student- t copula 2000 til 2003:

The COPULA Procedure	
Model Fit Summary	
Number of Observations	1005
Missing Values	3
Data Set	COP.COPU2

Model Fit Summary

Copula Type	T
Log Likelihood	103.96711
Maximum Absolute Gradient	4.98703E-7
Number of Iterations	10
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	-199.93422
SBC	-180.28325

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
DF	9.051779	1.912353	4.73	<.0001

Correlation Matrix

	SP_0	Guld_0	Tbill_0
SP_0	1.0000	-0.1415	-0.3868
Guld_0	-0.1415	1.0000	0.0801
Tbill_0	-0.3868	0.0801	1.0000

Student- t copula 2004 til 2007

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Model Fit Summary

Number of Observations	1005
Missing Values	3
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	T
Log Likelihood	42.91984
Maximum Absolute Gradient	5.17862E-8
Number of Iterations	10
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	-77.83969
SBC	-58.18872

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
DF	7.777043	1.417041	5.49	<.0001

Correlation Matrix

	SP_4	Guld_4	Tbill_4
SP_4	1.0000	0.0123	-0.2037
Guld_4	0.0123	1.0000	0.0530
Tbill_4	-0.2037	0.0530	1.0000

Student- t copula 2008 til 2011:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1008
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	T
Log Likelihood	160.34008
Maximum Absolute Gradient	8.48668E-8
Number of Iterations	8
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	-312.68017
SBC	-293.01727

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
DF	5.104043	0.652962	7.82	<.0001

Correlation Matrix

	SP_8	Guld_8	Tbill_8
SP_8	1.0000	0.0365	-0.4454
Guld_8	0.0365	1.0000	0.0622
Tbill_8	-0.4454	0.0622	1.0000

Gumbelcopula 2000 til 2003:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1005
Missing Values	3
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	Gumbel
Log Likelihood	-5.2548E-6
Maximum Absolute Gradient	498.71663
Number of Iterations	1
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	2.00001
SBC	6.91275

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
theta	1.000000	.	.	.

GumbelCopula 2004 til 2007:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1005
-------------------------------	------

Model Fit Summary

Missing Values	3
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	Gumbel
Log Likelihood	1.14854
Maximum Absolute Gradient	1.09711E-6
Number of Iterations	4
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	-0.29707
SBC	4.61567

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
theta	1.008568	0.006898	146.22	<.0001

Gumbelcopula 2008 til 2011:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1008
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	Gumbel
Log Likelihood	-4.1018E-6

Model Fit Summary

Maximum Absolute Gradient	389.28274
Number of Iterations	1
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	2.00001
SBC	6.91573

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
theta	1.000000	.	.	.

Claytoncopula 2000 til 2003:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1005
Missing Values	3
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	Clayton
Log Likelihood	0.0000146
Maximum Absolute Gradient	35407
Number of Iterations	1
Optimization Method	Newton-Raphson

Model Fit Summary

AIC	1.99997
SBC	6.91271

Algorithm converged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
theta	1.0536713E-8	.	.	.

Claytoncopula 2004 til 2007:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1005
Missing Values	3
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	Clayton
Log Likelihood	0.0000217
Maximum Absolute Gradient	35032
Number of Iterations	1
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	1.99996
SBC	6.91270

Algorithmconverged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
theta	1.0536713E-8	.	.	.

Claytoncopula 2008 til 2011:

The COPULA Procedure

Model Fit Summary

Number of Observations	1008
Data Set	COP.COPU2
Copula Type	Clayton
Log Likelihood	0.0000155
Maximum Absolute Gradient	35459
Number of Iterations	1
Optimization Method	Newton-Raphson
AIC	1.99997
SBC	6.91569

Algorithmconverged.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
-----------	----------	----------------	---------	----------------

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > t
theta	1.0536713E-8	.	.	.

Bilag 15

Bilag til VaR / ETL analysen, bilag 15 viser S(P) for alle porteføljerne:

											<i>Minimum</i>	<i>Optimal</i>
	<i>S&P500</i>	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	-	-
	<i>Guld</i>	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	-	-
	<i>Tbill</i>	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0%	-	-
2000-2003	S(P)	0.02267	0.018305	0.013855	0.009426	0.004934	0.000497	-0.0039	-0.0082	-0.01241	0	-0.01241
2004-2007	S(P)	-0.11906	-0.13485	-0.14893	-0.16251	-0.17397	-0.18473	-0.19446	-0.20228	-0.20997	-0.11906	-0.11906
2008-2011	S(P)	0.020994	0.008104	-0.00458	-0.01682	-0.02883	-0.03993	-0.05044	-0.06121	-0.07042	0	-0.04786

Bilag 16

Bilag 16 viser VaR og ETL for 1 dag, 21 dage og 252 dage.

	<i>Vægt</i>											
<i>S&P500</i>	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%		
<i>Guld</i>	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%			
<i>Tbill</i>	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	5%	0%		<i>Minimum</i>	<i>Optimal</i>
2000 - 2003												
<i>1 dags VaR</i>	-0,5873%	-0,5851%	-0,5850%	-0,5837%	-0,5871%	-0,5884%	-0,5930%	-0,5995%	-0,6059%	-0,5884%	-0,6059%	
<i>21 dages VaR</i>	-2,6915%	-2,6813%	-2,6810%	-2,6747%	-2,6904%	-2,6963%	-2,7177%	-2,7472%	-2,7765%	-2,6964%	-2,7765%	
<i>252 dages VaR</i>	-9,3237%	-9,2884%	-9,2874%	-9,2654%	-9,3197%	-9,3403%	-9,4143%	-9,5166%	-9,6181%	-9,3407%	-9,6181%	
<i>1 dags ETL</i>	-0,7214%	-0,7198%	-0,7200%	-0,7219%	-0,7258%	-0,7317%	-0,7389%	-0,7473%	-0,7576%	-0,7324%	-0,7573%	
<i>21 dages ETL</i>	-3,3059%	-3,2987%	-3,2996%	-3,3084%	-3,3259%	-3,3530%	-3,3862%	-3,4247%	-3,4716%	-3,3564%	-3,4704%	
<i>252 dages ETL</i>	-11,4520%	-11,4270%	-11,4302%	-11,4605%	-11,5212%	-11,6150%	-11,7301%	-11,8634%	-12,0261%	-11,6270%	-12,0219%	
2004 - 2007												
<i>1 dags VaR</i>	-0,5898%	-0,5861%	-0,5900%	-0,5950%	-0,6065%	-0,6189%	-0,6334%	-0,6525%	-0,6706%	-0,5898%	-0,5898%	
<i>21 dages VaR</i>	-2,7026%	-2,6859%	-2,7036%	-2,7266%	-2,7793%	-2,8363%	-2,9024%	-2,9901%	-3,0732%	-2,7026%	-2,7026%	
<i>252 dages VaR</i>	-9,3621%	-9,3042%	-9,3657%	-9,4452%	-9,6278%	-9,8253%	-10,0543%	-10,3580%	-10,6459%	-9,3621%	-9,3621%	
<i>1 dags ETL</i>	-0,6817%	-0,6857%	-0,6938%	-0,7064%	-0,7227%	-0,7422%	-0,7645%	-0,7898%	-0,8177%	-0,6816%	-0,6816%	
<i>21 dages ETL</i>	-3,1241%	-3,1423%	-3,1794%	-3,2372%	-3,3116%	-3,4010%	-3,5034%	-3,6194%	-3,7472%	-3,1236%	-3,1236%	
<i>252 dages ETL</i>	-10,8221%	-10,8851%	-11,0137%	-11,2141%	-11,4718%	-11,7813%	-12,1360%	-12,5378%	-12,9807%	-10,8204%	-10,8204%	
2008 - 2011												
<i>1 dags VaR</i>	-0,5978%	-0,6025%	-0,6079%	-0,6213%	-0,6285%	-0,6459%	-0,6633%	-0,6719%	-0,6928%	-0,6078%	-0,6607%	
<i>21 dages VaR</i>	-2,7395%	-2,7611%	-2,7857%	-2,8473%	-2,8802%	-2,9597%	-3,0395%	-3,0788%	-3,1750%	-2,7851%	-3,0278%	
<i>252 dages VaR</i>	-9,4900%	-9,5646%	-9,6499%	-9,8633%	-9,9773%	-10,2526%	-10,5290%	-10,6653%	-10,9986%	-9,6480%	-10,4887%	
<i>1 dags ETL</i>	-0,9087%	-0,9168%	-0,9280%	-0,9417%	-0,9580%	-0,9771%	-0,9991%	-1,0232%	-1,0493%	-0,9236%	-0,9936%	
<i>21 dages ETL</i>	-4,1643%	-4,2014%	-4,2528%	-4,3154%	-4,3902%	-4,4776%	-4,5785%	-4,6889%	-4,8083%	-4,2326%	-4,5534%	
<i>252 dages ETL</i>	-14,4256%	-14,5541%	-14,7321%	-14,9489%	-15,2082%	-15,5108%	-15,8602%	-16,2429%	-16,6564%	-14,6623%	-15,7736%	

Bilag 17

Bilag 17 viser overskridelserne af VaR estimatet i de tre perioder.

