

Juli
2011

Markedsværdi og modpartsrisiko på en valutaoption

En undersøgelse af model og
inputparametres indflydelse på
markedsværdien af en valutaoption med
fokus på modpartsrisiko.

English Title:

Marketvalue and Counterpartyrisk on a Currency
Option

Copenhagen Business School
Cand.merc (FIR)

Udarbejdet af
Vejleder
Antal Anslag

Mads Bille
Kristian Miltersen
159.921

Institut for Finansiering
70,3 standard-sider



Indholdsfortegnelse

Resumé (in English)	4
1.0 Indledning	5
1.1 Problemformulering/Hensigtserklæring	7
1.2 Struktur	7
1.3 Metode og Analysestrategi	8
1.3.1 Ambition (hvad)	8
1.3.2 Analysestrategi (hvordan)	10
1.3.3 Emneafgrænsning	14
2.0 Underliggende Teori	16
2.1 Prisfastsættelse af en option - Black-Scholes	17
2.2 Rentestrukturteori	19
2.2.1 Markedshypotesemodeller for rentekurven	19
2.2.2 Spot og forward renter	22
2.3 Stokastiske processer	24
2.4 Stokastiske rentestrukturmodeller - Vasicek	25
2.5 Valutaoptioner kontra rentestrukturteori	27
2.6 Europæisk valutaoption under konstante renter - Garman-Kohlhagen modellen	28
2.7 Europæisk valutaoption under stokastiske renter – Vasicek modellen	29
2.8 Modpartsrisiko	31
3.0 Empirisk grundlag	35
3.1 Derivatet	35
3.2 Simplificerende betragtninger	37
3.3 Markedsdata	39
3.3.1 Spot-kursen	39
3.3.2 FX-volatilitet	40
3.3.3 Korrelationer	41
3.3.4 Observerede rentekurver	42
3.3.5 Rentevolatilitet	44
4.0 Empirisk Analyse	45
4.1 Fremgangsmåde ved Garman-Kohlhagen	45
4.2 Analyse af beregninger ved Garman-Kohlhagen-modellen:	50

4.3 Sensitivitetsanalyse.....	52
4.4 Konklusion på Garman Kohlhagen	59
4.5 Fremgangsmåde for beregning med Vasicek-modellen	60
4.5.2 Kalibrering	63
4.5.3 Diskretisering ved Eulers metode	67
4.5.4 Eksakt diskretisering	69
4.6 Resultater fra beregning	71
4.7 Sensitivitetsanalyse.....	72
4.8 Konklusion for Vasicek	74
4.9 Komparativ analyse.....	75
5.0 Diskussion	78
6.0 Konklusion.....	80
Litteraturliste	81
Bilag A – Handelsdetaljer på Swap.....	83
Bilag B – Kode anvendt til simuleringer i VBA.....	85
Bilag C – Kode anvendt ved simuleringer i MatLab	98

Resumé (in English)

This thesis seeks to illuminate how the marketvalue is affected by the choice of pricing model as well as the input parameters. The goal is to describe how the marketvalue of a specific currency option can be estimated differently by counterparties as a result of diverging methods of pricing or differences in the marketdata. Following a brief theoretical walkthrough, covering basic theory on options, term structure of interest and risk management of credit and counterparty risk, the thesis includes an empirical analysis. The empirical analysis is based on an actual structured swap used to hedge a structured note issued on the Danish Exchange. After a description of the product as well as the required market data, the analysis seeks to shed light on the research question by estimating the market value through two different models and a sensitivity analysis.

Initially a Garman-Kohlhagen model is employed, where it is found that a source of imprecision is inherent in the underlying assumptions of a constant term structure and volatility. The sensitivity analysis shows that the market value is affected by both change in interest rates and volatility, feeding the argument that the model does not capture the real world very well.

Following this a Vasicek-based model is used to include interest rates as stochastic variables. It is found that this model, although more cumbersome and requiring additional market data, does not constitute an improvement in our pricing. Here it also found that the marketvalue is responsive to changes in the FX volatility leading to the conclusion that this is the greatest source of pricing discrepancies.

The calculated marketvalues are juxtaposed with a counterparty valuation, which identifies rather large differences in the market value. This is discussed with emphasis on the counterpartyrisk, where it is argued, that there lies a cost connected with mispricing, be it either over- or undervaluing the true marketvalue. If undervalued, the true pre-settlement risk is underestimated, which could carry an unfortunate position should the counterparty fall into difficult circumstances. If overvaluing the true marketvalue, there is a possibility that the additional risk might be attempted hedged on a faulty basis.

1.0 Indledning

Markedet for derivater har i lang tid været kendetegnet af en yderst innovativ udvikling og udbuddet og kompleksiteten af tilgængelige produkter har til stadighed været voksende. Samtidig har derivatmarkedet gennemgået en nærmest eksplosiv vækst, hvor summen af udestående hovedstolsværdier i over-the-counter markedet for derivater i perioden juni 1998 - december 2008 er steget fra \$72,1 billioner til \$592,0 billioner, som anslået af the Bank for International Settlements. Denne voldsomme vækst skal samtidig ses i lyset af, at den finansielle krise har medført et betydeligt fald over de seneste år, hvor tallet for juni 2008 lå 13,4 % højere endnu og udgjorde det hiditige højdepunkt og derivatbørsernes tal er ikke engang inkluderet.

Et derivat kan defineres som et finansielt instrument, hvis værdi er afledt fra et eller flere underliggende instrumenter, der typisk (men ikke nødvendigvis) er handlede aktiver. Som et eksempel på et gængs derivat kan nævnes en aktieoption, hvis værdi bestemmes af udviklingen på en underliggende aktie. Paletten af forskellige underliggende instrumenter, der bestemmer et derivats pris, er ligesom størrelsen på markedet også vokset i den seneste tid og inkluderer, foruden aktier, indeks, råvarepriser, valutakurser og renter, en myriade af mere eller mindre likvide aktiver. Samtidigt kan flere forskellige typer af underliggende indgå i samme handel og dermed yderligere tilføre kompleksitet.

Ud fra disse betragtninger er det åbenlyst, at der har været et pres på at få udviklet modeller, der kan beskrive de til stadighed mere og mere komplekse produkter tilgængelige på markedet. Historisk set er der også beviser på en sammenhæng mellem udviklingen af teoretiske modeller og de tilgængelige produkter på derivatmarkedet. Den nobelpris-belønnede Black-Scholes model (Black Scholes 1973 og Merton 1973) falder nogenlunde samtidig med at The Chicago Board Options Exchange (CBOE) åbnede for handlen af call-optioner på 16 aktier i 1973¹. Ligeledes er det tydeligt at den markante stigning i handlen med rentederivater igennem 80- og 90'erne er stærkt korreleret med antallet af litterære udgivelser indenfor feltet rentestruktur i samme periode.

¹ Se <http://www.cboe.com/aboutcboe/History.aspx>

I kølvandet på den sidste tids finansielle krise har der været et øget fokus på risikostyring indenfor de finansielle institutioner, hvor områder som likviditet og kreditrisiko har været underlagt specielt meget opmærksomhed. Dette er også øjensynligt igennem de sidste BASEL II (Juni 2004) og BASEL III (December 2010) regler, hvor der netop fokuseres på at sætte begrænsninger på den likviditets- og kreditrisiko finansielle institutioner kan påtage sig. Ligeledes er der påbegyndt initiativer i retning af en entitet til centraliseret clearing af derivater. Dette er et højaktuelt emne frembragt i Kongressen i USA igennem den såkaldte Dodd-Frank Act² effektueret juli 2010 og ligeledes i EU-Kommisionens forslag til forordning om regulering af centrale modparter for derivater der handles OTC, september 2010, også kendt under EMIL/EMIR (European Market Infrastructure Regulations/Legislations). Uagtet hvad der besluttet i retning af central clearing og under hvilke forhold det endeligt kommer til at foregå, peger de fleste indikationer på at der i højere grad vil være strammere krav til sikkerhedsstillelsesaftaler, der i høj grad er styret af markedsværdien af derivaterne i den pågældende portefølje. Hvorimod evnen til at stille markedsværdier tidligere har været mest i relation til handel, er det tydeligt at de sidste par års fokus på stabilitet, har medført øget behov for pålidelige og utvetydige markedsværdier set fra en risikostyringsfunktion.

² Kendt som Dodd-Frank Wall Street Reform and Consumer Protection Act

1.1 Problemformulering/Hensigtserklæring

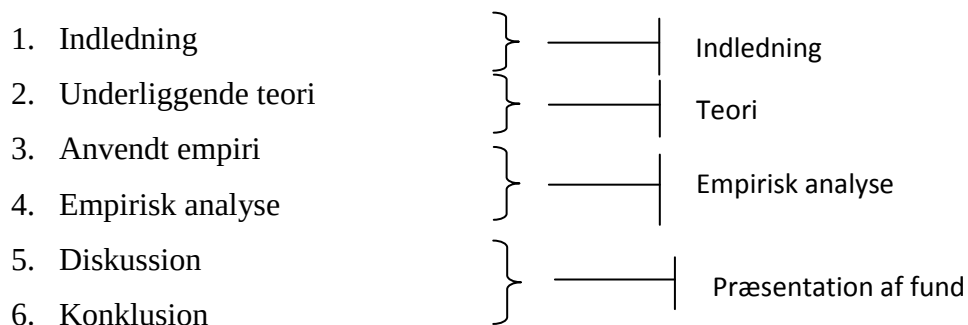
Denne opgave søger igennem to udvalgte teoretiske modeller og empirisk observeret markedssdata at fastsætte markedsværdien for optionen indeholdt i en struktureret swap, og nærmere specifikt bestemme hvor følsom markedsværdien er med hensyn til markedssdatainput og estimation af dette samt modelvalg. Det er intentionen igennem denne analyse at påvise og forklare, hvordan den samme handel kan prises uens på tværs af modparter, ved at variere på model og metode. Resultatet af denne øvelse vil indgå i en diskussion i forhold til modparts- eller kreditrisiko, hvor implikationerne af et manglende konsensus omkring model og metode ved prisfastsættelse drøftes fra en mere kvalitativ og praktisk synsvinkel.

Problemformuleringen bliver dermed:

Hvorledes kan modelvalg og inputparametre påvirke markedsværdien af et derivat, og hvad er implikationerne af dette i forhold til modpartsrisiko set i lyset af herskende markedspraksis på området?

1.2 Struktur

I forlængelse af opgaveafgrænsningen er det relevant at kommentere på opgavens opbygning samt metoden der anvendes. Inklusiv dette indledende afsnit, er opgaven inddelt i fire hovedområder over 6 afsnit, der kort vil blive beskrevet:



Indledning: Herunder er indeholdt problemformuleringen, emneafgrænsning samt struktur og anvendt metode i opgaven.

Underliggende Teori: Her søges kort beskrevet den teori, der senere vil danne grundlaget for den empiriske analyse. Det indebærer at både rentestruktur- samt optionsteori gennemgås

med fokus på de anvendte modeller og deres underliggende forudsætninger. Efterfølgende er det intentionen at foretage koblingen mellem den grundlæggende teori og det formål hvortil opgaven søger at inddrage det. Afsnittet tjener derfor til at introducere de to modeller, der søges anvendt og deres teoretiske fundament.

Anvendt empiri: Dette udgør indledningen til den empiriske analyse, hvor den anvendte handel er beskrevet samt de simplificerende ændringer, der er foretaget. Herudover beskrives det anvendte markedssdata og hvorledes det udledes efter gældende markedspraksis.

Empirisk Analyse: Denne overvejende kvantitative sektion er struktureret ens for hver model og følger den samme algoritme, hvor fremgangsmåden ved beregning først er detaljeret og de indledende præparationer af markedssdata og model er foretaget. Dernæst præsenteres resultaterne af markedsværdiberegningerne, hvorefter der udføres en sensitivitetsanalyse og slutteligt konkluderes ud fra de opnåede resultater.

Diskussion: Her inddrages resultaterne fra den empiriske analyse i en diskussion, hvor der drages relationer til risikostyring, hvor konsekvenserne af at anvende forskellige modeller diskuteres ud fra et synspunkt vedrørende kreditrisiko.

Konklusion: Her opsummeres resultaterne i en egentlig konklusion i forhold til den angivne problemformulering.

1.3 Metode og Analysestrategi

For at kunne besvare problemformuleringen bedst muligt giver det mening at definere mere konkret, hvad der specifikt ønskes besvaret igennem analysen og hvordan dette søges opnået.

1.3.1 Ambition (hvad)

Med det brede udgangspunkt defineret igennem problemformuleringen er det muligt at nærmere specificere hvilke konkrete ting, der ønskes undersøgt, både kvalitativt og kvantitativt.

Fra en kvantitativ vinkel, bliver det væsentlige analyseoutput, hvordan markedsværdien ændrer sig, når et enkelt af de parametre, der har indflydelse på markedsværdien, påvirkes.

Derfor er målet at bestemme hvor sensitiv markedsværdien på optionen er ved ændring af følgende:

- Den underliggende spotkurs
- Volatiliteten på det underliggende valutakryds
- Renteniveauet i de to valutaer
- Modellen
- Anvendelse af modellen, herunder fremgangsmåde og antallet af simuleringer.

Omsat i en mere beskrivende forklaring, er målet ikke blot at bestemme hvor meget markedsværdien kan ændre sig ved variation af de ovennævnte parametre, men også at svare på spørgsmålet:

- *Hvor meget kan markedsværdien variere som følge af forskellig anvendelse og fortolkning af markedsdata og model uden at der nødvendigvis brydes med almindelig god markedspraksis?*

Fra en mere kvalitativ synsvinkel er det først og fremmest relevant at belyse, hvordan en swap kan dekomponeres i dets del-elementer og illustrere, hvorfor det er optionsdelen, der er af særlig relevans. Derudover er det væsentlig at beskrive del-elementerne i beregningerne og hvordan de indgår, for at give en forståelse af hvordan markedsværdien bliver til. Foruden dette, er et kvalitativt succékriterie, at resultaterne fra den empiriske analyse sammenstilles med principperne indenfor risikostyring og kreditrisiko, med henblik på at svare på følgende spørgsmål:

- *Hvordan indgår markedsværdier på derivater i kreditrisiko og hvordan styres dette?*
- *Findes der incitament til at manipulere markedsværdien i en bestemt retning?*
 - o *Hvis ja, hvilke?*
- *Hvad er implikationen af den kvantitative analyse givet svaret på ovennævnte spørgsmål?*

1.3.2 Analysestrategi (hvordan)

Givet de ovennævnte målsætninger er det nødvendigt at give en nærmere beskrivelse af hvordan disse mål søges opfyldt. Af større metodemæssige beslutninger er det oplagt at kommentere på valget af teori, valget af empiri og ikke mindst metode ved analysen.

Valget af teori:

Udgangspunktet for opgaven er ønsket om at værdiansætte en valutaoption, der findes på det danske marked, og herefter inddrage en kobling til rentestrukturteori. Dette søges herefter perspektiveret i forhold til risikostyring med fokus på kreditrisiko. Emnevalget nødvendiggør inklusionen af teori vedrørende tre områder: 1) Optionsteori og antagelserne hertil. 2) Teori omkring rentekurvens udseende og modellering af denne. 3) Styring af kreditrisiko i finansielle institutioner.

Optionsteorien der finder anvendelse i opgaven er centreret omkring Black-Scholes model (1973), hvor der søges at give en kort præsentation af, den ellers velkendte, model og de underliggende antagelser. Valget er underbygget af dets hyppige anvendelse på det finansielle marked, hvor især implicitte volatiliteter på renter og valutakryds beregnes ud fra optionspriser igennem Black Scholes model. For at kunne prise en valutaoption, hvor to renter indgår i beregningen, bliver en model tilskrevet Garman-Kohlhagen (1983) anvendt. Denne model er direkte relateret til Black Scholes (1973) og Merton (1973) og bygger på de samme antagelser, men er i stedet beregnet til at prisfastsætte valutaoptioner.

I sektionerne omhandlende rentestrukturteori søges det først at give et billede af rentekurvens udseende forklaret gennem markedshypotesemodeller. Dernæst introduceres udtryk for spot og forward renter, hvor sammenhængen mellem de to beskrives og den instantane spot og forwardrente udledes. Disse er væsentlige størrelser, da de udgør grundstenen i de fleste rentestrukturmodeller, der søger at modellere den fremtidige udvikling af rentekurven. Eftersom Vasicek-modellen (Vasicek 1977) er baseret på en stokastisk proces i et arbitragefrit miljø, bliver stokastiske processer forklaret i relation til både en Markov og Wiener-proces. Herefter beskrives selve Vasicek-modellen, som vil danne grundlag for

værdiansættelse under forudsætningen om stokastiske renter. Motivationen for at anvende en Vasicekmodel beror på dens forholdsvis tilgængelige grad af kompleksitet sammenholdt med modellens betydning for moderne rentestrukturteori. I familien af modeller afhængig af den instantane spot-rente er de fleste videreudviklet fra den oprindelige Vasicekmodel, eksempelvis Hull-White's model (Hull-White 1990), der i princippet er en Vasicekmodel, hvor volatiliteten tillades at være varierende. Med det formål for øje at modellen skal bruges til en sammenligning med en model der antager konstant rente, er det vurderingen at Vasiceks model er velegnet.

Med hensyn til teorien vedrørende kreditrisiko, er dette beskrevet igennem en indførelse i terminologien, og hvad menes med kreditrisikoen i lyset af denne opgave. Derudover vil der følge et mere praktisk synspunkt, hvor metodikken tillagt af Danmarks Nationalbank anvendes som den praktiske referenceramme. Det er antaget at risikostyringen i Danmarks Nationalbank hvad angår kreditrisiko udgør en troværdig referenceramme.

Valg af empiri:

I forhold til valget af teoretiske modeller samt empirisk materiale, er der en vis sammenhæng, eftersom de to er forholdsvis tæt forbundne. Den faktiske handel er en struktureret swap tilhørende en struktureret udstedelse med ISIN-koden DK0030067434 handlet på Københavns Fondsbørs. Valget af netop denne handel er motiveret ud fra tilgængeligheden af markedsdato og dens løbetid. Derudover var det et ønske at undersøge en handel henover en periode med økonomisk uro, for at illustrere dynamikken af markedsværdien igennem løbetiden, så en handel blev fundet med løbetid henover kollapse hos Lehmann Brothers. Til beregning af markedsværdi blev der indsamlet markedsdato til tre tidspunkter i løbet af handelens løbetid med 6 måneders interval, nærmere specificeret 30/5 2008, 30/11 2008 og 30/5 2009. Disse tre datoer er valgt for at kunne præsentere et billede af både før finanskrisen rigtig tog fart, og den efterfølgende periode. Ligeledes giver det et godt billede af hvordan markedsdatoene varierer under et stresset scenarie, hvilket giver mening at have en idé om i forhold til sensitivitetsanalysen. Med hensyn til det anvendte markedsdato, er det hensigten at følge den normale markedspraksis for at projicere så realistisk et billede som muligt af en reel

markedssituation. Forud for den empiriske analyse vil der være en udførlig gennemgang af både handelen og det anvendte markedssdata.

Metode ved analyse:

For at bedst muligt kunne besvare den stillede problemformulering og delspørgsmålene som defineret i afsnit 1.3.1 er det nødvendigt at også analysen bliver struktureret herefter. For at bestemme hvorvidt det er muligt at frembringe forskellige markedsværdier over for samme handel, vil der overordnet set blive foretaget en komparativ analyse på tværs af 3 dimensioner:

- Model
- Metodik ved anvendelse af model
- Markedsdata

Eftersom der i den finansielle verden ikke er defineret en fast model til anvendelse ved bestemte derivater, ligger der en frihedsgrad blandt markedsdeltagere i forhold til hvordan de ønsker at værdiansætte deres derivathandler. Det værende sagt er valget med stor sikkerhed underlagt revision og man må formode, at det endelige modelvalg skal retfærdiggøres til en vis grad. Til at demonstrere hvordan modelvalget spiller ind i værdiansættelsen vil to forskellige modeller som nævnt finde anvendelse i analysen. Én hvor der antages faste renter (Garman-Kohlhagen) og en anden, hvor stokastiske renter introduceres via Vasicek-modellen. Efterfølgende vil resultateterne blive sammenstillet.

Når modelvalget er foretaget udestår spørgsmålet om hvordan modellen implementeres i beregningen. I forhold til Garman-Kohlhagen vil sammenligningen bestå i simuleringsprocessen. Der vil blive foretaget en sammenligning mellem resultatet fra den lukkede formel og en simuleringsproces, hvor antallet af simuleringstier varieres. I den virkelige verden, vil der typisk blive udført en Monte Carlo simulering (se Metropolis, N og Ulam, S. 1949), men antallet af stier som der simuleres over er ikke underlagt nogen form for reguleringer. Konsekvensen af dette er, at man i realiteten kan ofre præcision for beregningshastighed. Ved at variere antallet af stier i denne analyse, kan konsekvensen af denne frihedsgrad illustreres.

I forhold til Vasicek modellen ligger der usikkerhedsgrader både i form af simuleringsmetoden anvendt og i kalibreringsprocessen. Som det vil fremgå i analysen har kalibreringen en effekt i forhold til at sikre at modellen er tilpasset den aktuelle rentekurve. I praksis vil der typisk blive kalibreret ved faste intervaller og ikke nødvendigvis forud for hver beregning, hvilket kan betyde at den observerede rentekurve og modelkalibrering kan tænkes at være usynkroniserede. I analysen vil effekten af at anvende forskellige kalibreringsparametre blive illustreret og den tilhørende effekt på markedsværdien diskuteret. Med hensyn til simuleringen, vil der indgå to forskellige metoder, én hvor Eulers metode³ vil blive anvendt og en anden, hvor der foretages en eksakt simulering.

Med henblik på analysen af markedsværdien ved variationer på markedsdata, vil den anvendte metode bestå i en sensitivitetsanalyse, hvor der varieres på et enkelt markedsdatabyld, mens de andre fastholdes konstante. I forhold til markedspraksis bliver der typisk foretaget beregninger på markedsværdien på enten real-time markedsdata eller i en større end-of-day beregning. Usikkerheden hvad markedsdata angår, består dels i hvor og hvornår man aflæser, men også hvilke data man benytter sig af. Typisk vil kontrakten på en handel specificere præcist tidspunktet for aflæsning på observationsdage vedrørende betalinger, men ved en simpel beregning af markedsværdi er der ikke fastsat bestemmelser. Derudover er det op til den enkelte deltager i en derivathandel at få fat i al tilhørende markedsdata som ikke nødvendigvis har en effekt ved bestemmelse af de faktiske betalinger, men kan have en betydelig effekt på markedsværdien. Sådanne ting inkluderer blandt andet volatiliteter, korrelationer og rentekurver. I analysen vil der blive varieret både på spotkursen, volatiliteten og renteniveauet og efterfølgende foretaget beregning. Størrelsen af den inducerede variation bliver fastlagt efter hvor meget markedsdataene har ændret sig historisk. Dette gøres for at bibeholde et realistisk billede og ikke simulere på usandsynlige scenarier.

Efterfølgende dette følger en komparativ analyse, hvor de fundne resultater sammenholdt med faktiske rapporterede markedsværdier fra swapmodparten vil indgå i en diskussion, hvor implikationerne i forhold til kreditrisiko inddrages. Når det er besvaret hvorvidt man kan

³ Tilskrevet Leonhard Euler, der pionerede området for infinitesimalregning.

ændre markedsværdien ved at anvende anderledes model, metodik eller markedsdata, vil det blive diskuteret hvorvidt der er nogle incitamenter til at udnytte disse muligheder og hvad det betyder i forhold til risikostyring.

1.3.3 Emneafgrænsning

I forbindelse med en opgave af denne karakter er det nødvendigt at foretage nogle indledende afgrænsninger for at sikre at opgaveløsningen foretages på en praktisk gennemtænkt facon. Eftersom opgavens fokus består i et sammenspil mellem en solid mængde teori og behandling af et empirisk datasæt ud fra den valgte teori, virker det hensigtsmæssigt at foretage en emneafgrænsning på en sådan måde at der ikke opstår en overvægt den ene eller anden vej.

De anvendte modeller udgør i sig selv en afgrænsning af opgaven og de er i sagens natur kraftigt medvirkende i forhold til resultatet af den empiriske analyse. Dette valg er derfor nødt til at være velfunderet. Med de valgte modeller er der søgt anvendelse af to relativt kendte modeller, hvor der er foretaget nogle justeringer i forhold til at kunne prise den pågældende option. Samtidig er der forsøgt at tage højde for at graden af kompleksitet skal ligge inden for opgavens omfang. Vel vidende at, alt afhængigt af formålet, bliver der i den finansielle verden anvendt modeller af en sådan kompleksitet, at de langt overstiger rammerne for hvad der kan dækkes her, er der stadig søgt at bibeholde en grad af sammenlignelighed med den måde det finansielle marked prisfastsætter på. Det værende sagt, kunne mere komplekse modeller til modellering af rentestrukturen såsom Hull-White eller en Heath-Jarrow-Morton-model (Heath et al. 1992) og (Amin og Jarrow 1991) være blevet anvendt som alternativ, men graden af tilført kompleksitet i forhold til formålet synes at overflødiggøre dette.

Taget opgavens problemstilling i mente, vil det virke både malplaceret og hæmmende at dvæle i længere matematiske beviser under den teoretiske redegørelse. Den inkluderede teori er dermed inkluderet med praktisk anvendelighed for øje og læsere må derfor stole på at beviserne for de bagvedliggende teorier i deres originaltitler har været underlagt grundigt eftersyn og kontrol. Graden og dybden af den teoretiske redegørelse er afstemt i forhold til at

kunne levere et sammenhængende billede mellem de forskellige teorier og deres respektive forudsætninger forud for en egentlig anvendelse.

I forbindelse med behandlingen af teori bevæger opgaven sig på et generelt plan for den pågældende type derivat, men i forhold til afgrænsning af den empiriske del har vurderingen været at resultaterne ved anvendelse af forskellige modeller fremstår tydeligst igennem et konkret eksempel. Med det for øje er en enkelt handel blevet udvalgt til at kunne visualisere de forskellige teoretiske modellers implikationer igennem et empirisk grundlag. Valget af selve handlen har selvfølgelig en afgrænsende effekt i sig selv, hvorfor det også er relevant at nævne kriterierne for dette valg. Den pågældende handel er valgt ud fra en kombination af tilgængelighed af markedsddata samt grad af kompleksitet, hvor der derudover vil forekomme nogle justeringer på markedsdatasættet dog i overensstemmelse med "best-practice" på markedet. De diverse simplificerende ændringer eller eventuelle manipulationer med markedsddata der måtte forekomme, vil blive eksplicit detaljeret i afsnittet for den empiriske analyse, der beskriver den valgte swapaftale (afsnit 3.2).

2.0 Underliggende Teori

For at kunne præsentere en sammenhængende opgavebesvarelse fordrer det, at der indledningsvis bliver præsenteret et teoretisk fundament. Denne sektion er dedikeret til at gennemgå de teoretiske elementer, som efterfølgende vil finde anvendelse i den empiriske analyse og samtidig illustrere sammenhængen mellem de i opgaven anvendte forskellige modeller.

En swap kan beskrives som en aftale mellem to parter om at udveksle fremtidige pengestrømme, derfor kan man også betragte en swap som en portefølje af forward kontrakter. Den pågældende swap som ønskes værdiansat i dette tilfælde udveksler, eller swapper, de resulterende pengestrømme fra en struktureret obligation til en simpel variabel rente⁴. Eftersom markedsværdien af en swap er summen af markedsværdien for dens delkomponenter, giver det mening både i forhold til beskrivelse, men også i forhold til værdiansættelse at dekomponere swappen i henholdsvis et struktureret og et variabelt forrentet ben, og fokusere på den indeholdte option.

Det strukturerede ben, er en direkte spejling af en struktureret obligation, der er et sammensat produkt indeholdende en nul kuponobligation samt et optionselement. Denne sammensætning med en standard nul kupon og et optionselement medfører i realiteten at strukturerede obligationer kan antage et utal af forskellige former. Tilstedeværelsen af en option medfører at både struktur, hvad angår kuponbetalinger, løbetid og callability, samt de(t) underliggende aktiv(er) kan variere i høj grad. Den konceptuelle forståelse af dette sammensatte produkt er vigtig i forhold til at kunne forstå hvorfor en model til prisfastsættelse både skal kunne beskrive udviklingen i det underliggende aktiv samt rentestrukturen. Udviklingen i det underliggende aktiv er nødvendig for at kunne estimere kuponstørrelsen, hvor rentestrukturen er nødvendig i forhold til at kunne bruge den korrekte tilbagediskonteringsfaktor til alle mulige betalingstidspunkter. Eftersom prisning af en nul kuponobligation er forholdsvis trivial, vil størstedelen af fokus ligge på prisning af optionen. I dette tilfælde en valutaoption, med et enkelt udbetalingstidspunkt ved udløb, en simpel call-option over et valutakryds.

⁴ Nærmere forklaring findes i afsnit 3.1

Opbygningen af denne teoretiske sektion søger at binde elementer fra den renteteoretiske verden sammen med teorier omkring optionsprisfastsættelse. Det betyder at indledningsvis vil der være en rentestrukturteoretisk redegørelse, hvor der vil være en beskrivelse af de gængse markedshypotesemodeller, der søger at forklare rentekurvens udseende. Efterfølgende vil der være en gennemgang af deciderede rentemodeller, der igennem beskrivelse af udviklingen i enten den instantante korte- eller i den instantane forward rente giver et udtryk for hele rentekurvens udvikling.

Efter den udelukkende rentestrukturteoretiske del, gennemgås traditionelle modeller for prisfastsættelse af optioner, hvor der indledningsvis betragtes en Black-Scholes model. Dette tjener som fundament når implikationerne ved at prise en valutaoption inddrages igennem rentepariteten. Betydningen af dette er at to rentekurver skal inddrages simultant i prisningen, hvorfor modellerne bliver justeret for at kunne håndtere dette. Først bliver dette foretaget for en simpel ikke-stokastisk rente, hvorefter optionsteori og rentestrukturteori kombineres i en samlet model, hvor renten tillades at variere stokastisk.

2.1 Prisfastsættelse af en option - Black-Scholes

En call-option er en option der giver holderen muligheden men ikke pligten til at købe et givent aktiv til en forudbestemt kurs. Ligeledes er en put-option en option der giver holderen muligheden men ikke pligten til at sælge et givent aktiv til en forudbestemt pris. Med hensyn til hvornår denne ret kan exercises skelnes mellem Europæiske optioner, der kun kan exercises ved udløb, og amerikanske optioner, hvor der kan exercises når som helst op til et fastsat udløbstidspunkt. En tredje variant er de såkaldte Bermuda-optioner, som har løbende optioner men på specifikke tidspunkter og typisk ved en given frekvens f.eks. årligt.

Den nobelprisbelønnede Black-Scholes model fra starten af 70'erne af Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton udgør fundamentet for prisning af optioner, og det er derfor også nærliggende at beskrive denne model, da de anvendte modeller i vid ustrækning tager udgangspunkt i denne. Black-Scholes modellen tager udgangspunkt i følgende eksplicite antagelser ved prisning af en option på en aktie:

- Ind- og udlån er muligt til den risikofrie rente, som er kendt.
- Prisen følger en geometrisk Brownsk bevægelse med konstant drift og volatilitet
- Der er ingen transaktionsomkostninger
- Der er ingen udbyttebetalinger
- Der er ingen kort-salgs begrænsninger
- Alle aktiver er uendeligt delelige
- Der er ingen arbitragemuligheder

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \quad (2.1.1)$$

Hvor:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.1.2)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.1.3)$$

S_0 er udtryk for spotkursen, K er exercisekursen, σ er standardafvigelsen r er renten og T er resterende løbetid. $N(d_1)$ og $N(d_2)$ er udtryk for sandsynligheden for at optionen udløber in-the-money under det risikoneutrale sandsynlighedsmål $[Q]$ ⁵. Det eneste af parametrene, som ikke er direkte aflæseligt er volatiliteten, hvor en implicit volatilitet typisk vil blive benyttet. Den implicitte volatilitet σ kan ikke bestemmes gennem en funktion af de andre variable og den bestemmes derfor ud fra en iterativ søgning baseret på de observerede priser.

En antagelse, der er sværere at retfærdiggøre er antagelsen om en konstant flad rentestruktur. Set i lyset af empiriske undersøgelser⁶ virker det ikke som en optimal forsimpning af virkeligheden. Rentebevægelsernes stokastiske natur bliver ikke fanget ved anvendelse af en flad rente, hvorfor det bliver nødvendigt at inddrage rentestrukturen i prisfastsættelsesmodellen. Selvfølgelig kunne det være en mulighed at antage renten var

⁵ Se evt Miltersen (1999)

⁶ Se Rubinstein (1985)

deterministisk og bestemme den ud fra samme metode som σ , men der findes i stedet alternativer, hvor rentestrukturen indgår.

2.2 Rentestrukturteori

For at præcisere hvad menes med udtrykket rentestruktur, tænkes der i konteksten af denne opgave på rentestruktur i dens horisontale forstand, eller med andre ord renten udtrykt som funktion af tiden til udløb. Følgende afsnit sigter mod at beskrive rentekurvens udseende ud fra markedshypotesemodeller. Dernæst beskrives del-elementerne i rentestrukturteorien, der vil finde anvendelse senere

2.2.1 Markedshypotesemodeller for rentekurven

Ved et plot af nul kupon rentestrukturen rejser spørgsmålet sig om hvad der afgør udseendet på kurven. Et entydigt svar er svært at give, men denne sektion tjener til kort at introducere nogle af de klassiske teorier, der sigter mod at forklare rentekurvens udseende. Disse teorier er:

- Forventningshypotesen i dens traditionelle forstand
- Likviditetspræferenceteorien
- Markedssegmenteringshypotesen
- Hypotesen om preferred habitat

Forventningshypotesen

Under forventningshypotesen oprindeligt formuleret af Hicks og Lutz antages det at lange renter direkte reflekterer forventningen om de fremtidige korte renter. Det betyder at nul kuponrenten til tidspunkt t , n_t , i realiteten kan beskrives som produktet af de forventede fremtidige korte renter op til tidspunkt t , eller:

$$(1 + n_t) = (1 + n_{0,1})E(1 + r_{1,2}) \dots E(1 + r_{t-1,t}) \quad (2.2.1)$$

Her er der implicit lavet en antagelse for investorerne at de er risiko-neutrale og er indifferente i forhold til at investere kort eller langt. Det kan i øvrigt også ses at for perioden $t = 0$ til $t = 1$ er anvendt den på tidspunkt 0 observerede nulkuponrente, hvorefter forventede fremtidige renter anvendes til fremtidige nulkuponrenter.

Under forudsætningen at alle har samme forventninger til de fremtidige renter og er risikoneutrale, så vil der ligge et ligevægtspunkt hvor forventningerne til den fremtidige nulkuponrente er præcis lig den korresponderende forwardrente.

$$F_{t,t+1} = E(r_{t,t+1}) \quad (2.2.2)$$

Den rene forventningshypotese antager netop at forwardrenten er et uvægtet udtryk for den forventede fremtidige spot-rente. Det kunne i realiteten betyde at en placering til en 5-årig rente i en deterministisk økonomi, vil give det samme afkast som en placering til en kort rente der bliver rullet i 5 år – ceteris paribus. Renter med forskellige løbetider er dermed også perfekte substitutter for hinanden under den rene forventningshypotese, der dikterer:

$$(1 + n_t) = (1 + f_{0,1})(1 + f_{1,2}) \dots (1 + f_{t-1,t}) \quad (2.2.3)$$

Likviditetspræferenceteorien

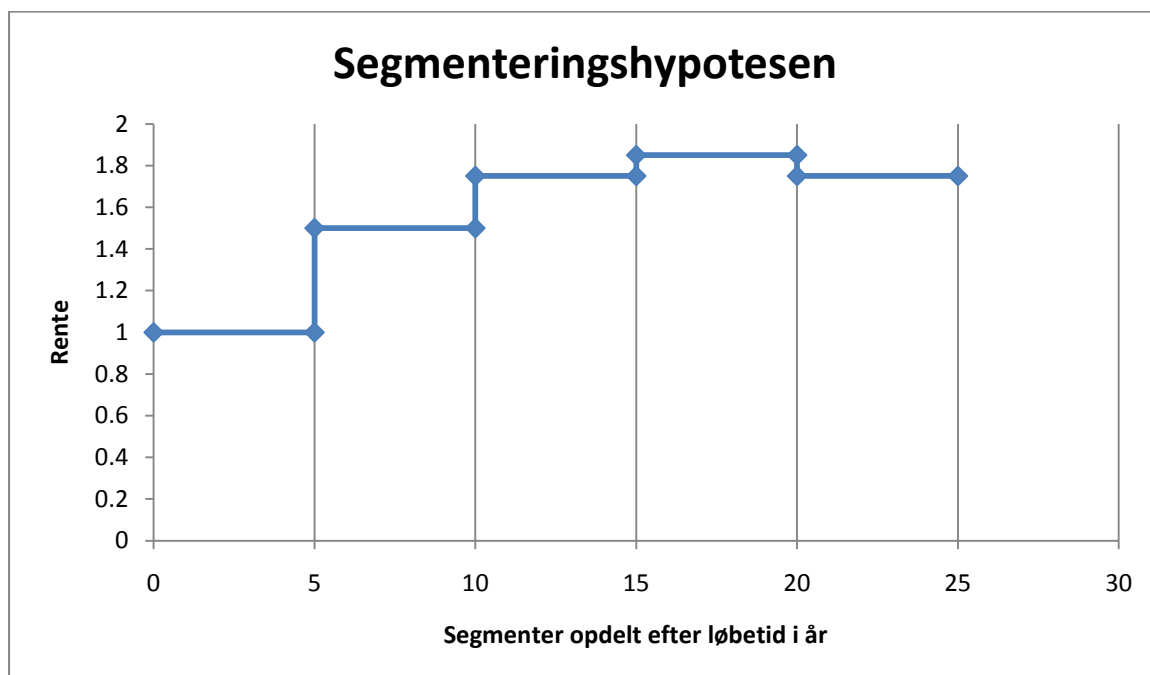
Likviditetspræferenceteorien antager at investorer har en præference for at bibeholde deres likviditet og dermed helst vil investere i korte perioder frem for længere. Låntagere derimod er interesseret i at ville fastlægge renten for lang tid af gangen, hvorfor de er villige til at betale en præmie for at kunne foretage lange lån frem for at løbe en risiko ved at skulle foretage rullende korte lån. Størrelsen på præmien er dermed også afhængig af låneperiodens længde. Denne tanke betyder at likviditetspræferenceteorien reelt kan ses som en forlængelse af forventningshypotesen, hvor en likviditetspræmie er tilføjet for at kompensere investorer for at have deres penge bundet op i længere perioder. Nedenstående illustrerer matematisk

likviditetspræmien som investorer ville forvente at modtage til et lån af t-årig varighed. Præmien kan ses som ledet rp_n

$$(1 + n_t) = rp_t + ((1 + f_{0,1})(1 + f_{1,2}) \dots (1 + f_{t-1,t})) \quad (2.2.4)$$

Segmenteringshypotesen

Den primære difference mellem denne hypotese og de foregående er at forventninger ikke har nogen indflydelse på rentekurvens udseende. Den afgørende faktor i segmenteringshypotesen er i stedet markedsdeltagernes præferencer hvad angår investeringshorisont. Det betyder at fordringer af forskellig løbetid ikke længere kan anses som substitutter da både låntagere og udlånere vil være afholdende iforhold til at bevæge sig langs med tidshorisonten på rentekurven. Det betyder at rentekurvens udseende får sit udseende igennem udbud og efterspørgsel, hvor investeringshorisonten kan opdeles i løbetidsbestemte segmenter. I denne forstand er forventninger til fremtidige renter ikke vigtige, ligesom der ikke nødvendigvis er nogen korrelation mellem det korte og lange renteniveau. Nedenstående er inkluderet et illustrativt eksempel.



Figur 1: Illustration af princippet bag segmenteringshypotesen

Teorien om preferred habitat

Hvorimod segmenteringshypotesen antager mere eller mindre betragtede udlånere og låntagere som stavnsbundet inden for et givent segment, bløder preferred habitat teorien op på den antagelse. Denne teori tillader at markedsdeltagere kan fravige deres oprindelige investeringshorisont, eller deres preferred habitat, under forudsætning af at modtage tilstrækkeligt med afkast. I denne forstand vil preferred habitat teorien fungere som en slags udglattet version af segmenteringsteorien, hvor markedskræfterne stadig bestemmer rentekurvens udseende, men de mindre stringente antagelser danner en mere flydende bro segmenterne imellem.

2.2.2 Spot og forward renter

Hvor markedshypotesemodellerne forsøger at beskrive rentekurvens udseende ud fra et spørgsmål om udbud og efterspørgsel, er en stor del af rentestrukturteorien fokuseret på at fremstille en matematisk model, der kan beskrive fremtidige renter ud fra en modellering af den instantane spot eller forward rente. Ud fra denne betragtning søger dette afsnit at beskrive de basale elementer i rentestrukturteori, forud før en sådan matematisk model til beskrivelse af fremtidige renter præsenteres.

Med udgangspunkt i en kontinuert tilskreven rente, der i øvrigt også er konventionen på det danske obligationsmarked, kan prisen på tidspunkt t for en nulkupon obligation, der betaler én enhed ved tidspunkt T udtrykkes som:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)} \quad \text{hvor } t < T. \quad (2.2.5)$$

$R(t, T)$ er i denne sammenhæng renten i perioden (t, T) , og $\tau(t, T)$ er udtryk for periodens længde målt i år, der også kan udtrykkes ved $\tau(t, T) = T - t$. Spot renten til tidspunkt t for en periode af længde $\tau(t, T)$ kan nu ved simpel omskrivning udtrykkes ved:

$$R_t = \frac{-\log P(\tau(t,T))}{\tau(t,T)} \quad (2.2.6)$$

Ved en forward rente forstås den rente i en fremtidig periode som implicit er udtrykt igennem de af markedet bestemte spot-renter. Dermed bliver en forward karakteriseret med tre tidspunkter, tidspunkt t hvor man betragter forward renten samt T_1 og T_2 , der henholdsvis udtrykker afviklings- og udløbsdato hvor $T_1 < T_2$, og udtrykkes ved $F(t, T_1, T_2)$. Ved at anvende (2.2.6) bliver forwardrenten

$$F(t, T_1, T_2) = -\frac{\log(P(t, T_2)) - \log(P(t, T_1))}{T_2 - T_1} \quad (2.2.7)$$

Den instantane forward rente er defineret som grænsen når $T_2 - T_1 \rightarrow 0$ og er et udtryk for den forrentning man, i et lille tidsinterval startende ved T_1 kan opnå. Hvis T_2 kollapser mod T_1 , og $\Delta t = T_2 - T_1$ kan den instantane forward rente udtrykkes ved limit-funktionen:

$$f(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\log(P(t, T + \Delta t)) - \log(P(t, T))}{\Delta t} = \lim_{T_2 \rightarrow T_1^+} F(t, T_1, T_2) = \frac{\partial \log(P(t, T))}{\partial T} \quad (2.2.8)$$

Intuitivt forstås det at den instantane forward rente er et udtryk for en forward rente hvor udløb ligger uendelig tæt på afviklingsdato eller udtrykt ved.

$$f(t, T) \approx F(t, T + \Delta t), \text{ hvor } \Delta t \text{ er uendelig lille} \quad (2.2.9)$$

For et specialtilfælde af funktionen for $f(t, T)$ kan den risikofrie instantane spot-rente, eller korte rente, r_t udtrykkes ved at udnytte at $P(t, t) = 1$. Specialtilfældet opstår når tidspunktet t nærmer sig afviklingstidspunktet T .

$$r_t = f(t, t) = \lim_{t \rightarrow T} R(t, T) \quad (2.2.10)$$

Denne størrelse indikerer den risikofri forrentning man til tidspunktet t kan forvente i et uendeligt lille tidsinterval. Sammenhængen med udtrykket for nulkuponrenten er tydeligt hvis vi i (2.2.6) lader $\tau \rightarrow 0$. Der kan i øvrigt drages en parallel til overnight-renten, hvis man forestiller sig tidsintervallerne udgjorde én dag.

2.3 Stokastiske processer

En stokastisk proces indikerer en proces, hvor en variabels ændring over tid er tilfældig. Processen kan enten betragte tiden som diskret, hvor variabelens værdi kun skifter på bestemte tidspunkter, eller kontinuert, hvor ændringer i variabelen kan finde sted på ethvert tidspunkt. Analogt til dette kan variabelen samtidigt enten betragtes som diskret, hvor variabelen kun kan antage bestemte værdier, eller kontinuert hvor variabelen kan antage enhver værdi indenfor et givent spænd. Som indledning til stokastiske rentemodeller gives en kort beskrivelse af stokastiske processer der er centrale for de videre modeller.

En speciel form for stokastisk proces er en såkaldt Markov-proces, hvor kun den nutidige værdi af variabelen har relevans ved forudsigelsen af fremtidige værdier. Med andre ord er alle historiske værdier irrelevant i en Markov-proces når fremtidige værdier skal determineres. Eftersom der er usikkerhed forbundet med forudsigelsen af fremtidige værdier bliver disse udtrykt ud fra en sandsynlighedsfordeling, hvor en Markov-proces indikerer at den nutidige sandsynlighedsfordeling er uafhængig af den historiske udvikling.

En Wiener-proces, også kendt indenfor fysikkens verden som en Brownsk bevægelse, er en speciel type af Markov-proces, der besidder nogle bestemte karakteristika. Udtrykt matematisk, kan en variabel z siges at følge en Wiener-proces såfremt følgende to forudsætninger er opfyldt:

- 1) Ændringen i variabelen, Δz indenfor et tidsrum Δt er:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.3.1)$$

Hvor ε har en standardiseret normalfordeling med middelværdi 0 og varians 1

- 2) Værdierne for Δz for ethvert sæt af tidsintervaller er uafhængige. Hvilket er det samme som at sige at z skal følge en Markov-proces. Eftersom en korrelation mellem Δz for to Δt ville betyde at historiske værdier har relevans, hvilket netop er hvad Markov-processen siger ikke er tilfældet.

Med hensyn til notation, er det kutyme at som Δt går mod 0 benytter man en "limit"-betegnelse. Med andre ord vil $(dz$ eller $dW_t)$ kunne anvendes til at indikere en wiener-proces når Δz går mod 0, med samme egenskaber som nævnt ovenfor. Denne notation vil også blive benyttet videre i opgaven.

Den generaliserede Wiener-proces følger nøjagtig samme princip, men hvor processen hidtil er blevet betragtet med en ændring i middelværdien pr tidsenhed på 0, inkluderer den generaliserede wiener-proces denne ændring benævnt som "drift". For variabelen x vil denne proces kunne udtrykkes som $dx = a dt + b dz$, hvor a og b er konstanter. Det første udtryk $a dt$ er en angivelse af processens drift, hvor betydningen er at x har en forventet ændring i middelværdien på a pr tidsenhed. Set alene er dette en lineær bevægelse med hældningskoefficienten a . Det andet udtryk i formlens højreside $b dz$ kan anses for det led der tilføjer et element af tilfældighed eftersom dz følger en wiener-proces og b er en konstant, der indikerer graden af variation i funktionen. Ser man bort fra limit-notationen og beskriver processen for Δx , vil en simpel indsættelse af $\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ for dz give den generaliserede wiener-proces som:

$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.3.2)$$

2.4 Stokastiske rentestrukturmodeller - Vasicek

Som rentederivater er blevet mere og mere anvendte fra 80'erne og fremefter er der til stadighed kommet flere modeller for beskrivelse af rentestrukturen. Den grundlæggende antagelse da rentestrukturmodeller vandt sit indpas, var at processen for den instantane spot-

rente r_s var underlagt en et-dimensionel dynamik over tid. Ved at kunne modellere denne dynamiske proces i et arbitrage-frit miljø, tillader det at et fremtidigt betinget krav der betaler én enhed på tidspunkt T på ethvert tidspunkt t kan bestemmes som:

$$P(t, T) = E_t \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} \right\} \quad (2.4.1)$$

Hvor E_t antyder den på tidspunkt t betingede forventning under det risikoneutrale sandsynlighedsmål. Fra ovenstående formel er det samtidigt tydeligt, at hvis $e^{-\int_t^T r_s ds}$ kan beskrives igennem en model, kan alle priser P , findes for ethvert t .

Vasicek's model fra 1977 oprindeligt baseret på at definere dynamikken af den instantane spot-rente under den virkelige verdens sandsynlighedsmål, afledte igennem Black and Scholes arbejde fra 1973 en metode at prise ethvert rente-derivat i en arbitrage-fri verden. Vasicek's model er en enkelt-faktor Gaussisk rentestrukturmodel, hvor den eneste tilstandsvariabel er den infinitesimale rente r . Den risiko-neutrale proces for r er:

$$dr_t = V(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.4.2)$$

Hvor V , θ og σ er konstanter. Modellen indikerer, at der findes en mean reversion Ornstein-Uhlenbeck⁷ proces mod θ med en hastighed af V , mens σ er et udtryk for den instantane volatilitet. Det er derfor værd at bemærke at derivater med korte løbetider er mere sensitive i forhold til udsving i r_t eftersom modellens mean reversion tjener til at udglatte denne ændring over tid. Samtidigt findes et normalfordelt stokastisk led, σdW_t eftersom W_t følger en Wiener proces. Denne dynamiske proces betyder at $P(t, T) = E_t \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} \right\}$, kan findes når V , θ , σ og r_t er kendt. Dermed er det også åbenbart at hvis $t = 0$, og V , θ , σ samt r_0 er kendt, er et output fra Vasicek's model hele rentekurven, som den ser ud ved $t = 0$, hvilket

⁷ En stokastisk process der udviser en tendens mod et givent gennemsnit

samtidig illustrerer modellens endogene natur. Hvis den på markedet bestemte rentekurve til tidspunkt 0 er tilgængelig, muliggør det at parametrene for V og θ kan kalibreres til virkelige data, så modellen i højere grad afspejler virkeligheden. Kalibreringen kan foregå ved at lave et best fit af modellen i forhold til et givent antal punkter på den aktuelle rentekurve, hvor summen af de kvadrerede residualer søges minimeret.

Af potentielle problemer med modellen kan påpeges, at det er muligt for renten at antage negative værdier med en positiv sandsynlighed, hvilket selvfølgelig ikke er hensigtsmæssigt. Samtidig betyder den dynamiske proces som Vasicek-modellen følger at nogle rentestrukturer ikke er mulige at modellere uanset værdierne for V , θ , σ . For eksempel, hvis på starttidspunktet $t = 0$ en rentekurve allerede er observeret igennem markedet og vi ønsker dette indlemmet i modellen, kræver det at V , θ og evt σ skal fittes, så markedets og modellens rentestruktur matcher så tæt som muligt. Selv med tre parametre er det umuligt at garantere et perfekt fit, og som nævnt vil der findes nogle rentekurver som modellen simpelthen ikke kan håndtere såsom en rentekurve med en inverteret form. Derfor er det også muligt for længere løbetider at gøre θ tidsvarierende igennem eksempelvis Hull-White's model. Dette vil sikre at modellen har en bedre mulighed for at tilnærme sig formen på den aktuelle rentekurve og misfit burde dermed blive minimeret.

2.5 Valutaoptioner kontra rentestrukturteori

I de foregående afsnit var udgangspunktet en simpel option hvorfor modellerne ikke er direkte anvendelige ved prisfastsættelse af en valutaoption. En valutaoption (call-option) giver holderen af valutaoptionen retten, men ikke pligten, til at veksle et forudbestemt beløb i én valuta til en anden valuta til en fastlagt kurs på et forudbestemt tidspunkt. Fuldstændigt analogt til en standard option. Betydningen af dette kan synes marginal, men for at modellerne skal tage højde for og udelukke arbitragemuligheder, skal rentepariteten, også kendt som den internationale Fischer-effekt, også overholdes. Rentepariteten dikterer sammenhængen mellem spot og forward-valutakursen og renten i de to respektive lande som:

$$F_0 = S_0 e^{(r_d - r_f)T} \quad (2.5.1)$$

Hvor notationen r_d og r_f står for henholdsvis domestic og foreign rate, og vil finde anvendelse gennem resten af opgaven. Intuitivt betyder det at forwardkursen er lig spotkursen fremdiskonteret med rentedifferentialet $(r_d - r_f)$. Det betyder at for at kunne prisfastsætte en amerikansk eller europæisk valutaoption, både med og uden stokastiske renteantagelser, er det nødvendigt at inkludere renten i både hjem og udland som separate størrelser.

2.6 Europæisk valutaoption under konstante renter - Garman-Kohlhagen modellen

Ud fra Black-Scholes modellens oprindelige antagelser udledte Garman og Kohlhagen i 1983 en model for prisfastsættelse af valutaoptioner, der inkluderer et parameter for hver rente. Selve de grundlæggende antagelser er identiske med Black-Scholes, hvilket vil sige at prisen på det underliggende stadig er den eneste stokastiske variabel og både r_d og r_f er dermed konstante. Ligheden med Black-Scholes er slående hvis man ser på formelen anvendt til prisfastsættelse af en europæisk valutaoption (call):

$$C(S, T) = e^{-r_f T} S_0 N(d_1) - K e^{-r_d T} N(d_2) \quad (2.6.1)$$

Hvor:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.6.2)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.6.3)$$

Valutakontrakter bliver flittigt handlet gennem forward-kontrakter på det finansielle marked, hvorfor det giver mening at opstille prisen på en call-option som en funktion af forwardkursen. Samtidig tjener det til at illustrere hvorledes rentepariteten (2.5.1) inkluderes.

$$C(F, T) = \{FN(d_1) - KN(d_2)\}e^{-r_d T} \quad (2.6.4)$$

Hvor:

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.6.5)$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) - (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.6.6)$$

Det vil sige ved anvendelse af forward i stedet for spotkurs indgår kun r_d i udregningen. Det kan forklares igennem rentepariteten, der nødvendiggør at givet r_d , er al relevant information vedrørende udlandsrenten r_f reflekteret igennem forwardkursen. I de empiriske udregninger vil det fremgå at spotkursen finder anvendelse, hvilket betyder at begge renter er inkluderet i beregningerne. Såfremt rentepariteten antages at holde, ville forwardkursen dog også kunne være benyttet givet ovenstående argumenter.

2.7 Europæisk valutaoption under stokastiske renter – Vasicek modellen

Udfordringerne i forhold til at inkludere en ekstra konstant rente i Garman-Kohlhagen-modellen er forholdsvis håndterbare. Med stokastiske renter begynder det dog at blive mere kompliceret, da foruden at det underliggende valutakryds følger en stokastisk proces, skal de to renter nu også inkluderes som stokastiske processer.

$$dS_t = S_t(r_{d_t} - r_{f_t})dt + S_t\sigma_s dW_t^S \quad (2.7.1)$$

Hvor

$$dr_{d_t} = V_d(\theta_d - r_{d_t})dt + \sigma_{r_d} dW_t^D \quad (2.7.2)$$

og

$$dr_{f_t} = V_f(\theta_f - r_{f_t})dt + \sigma_{r_f} dW_t^F \quad (2.7.3)$$

De ovennævnte ligninger afslører at der er følgende opgaver der skal løses før en egentlig prisning kan finde sted. Først skal V_d , V_f , θ_d , θ_f samt σ_{r_d} og σ_{r_f} estimeres. De to volatiliteter kan bestemmes under antagelse at de er deterministiske fra de observerbare markedsdata. Dernæst kan parametrene for V og θ bestemmes igennem en kalibrering, hvor der kalibreres mod den pågældende rentekurve på initialtidspunktet og de kvadrerede residualer søges minimeret. Udover dette er det også nødvendigt at holde renterne og valutakrydsets indbyrdes korrelationer for øje

Som nævnt tidligere er vi dog underlagt de tre parametres evne til at modellere rentekurven, hvilket betyder at ikke alle rentestrukturer er mulige at modellere og at der må accepteres en grad af mis-fit på trods af grundig kalibrering. En metode til at forbedre dette er igennem Hull-White modellen. I realiteten er dette en Vasicek-model i forklædning, hvor den eneste forandring er at θ er gjort tidsvarierende. Det vil sige at ændringen i en rente ifølge Hull-Whites model kan bestemmes som:

$$dr = a \left[\frac{\theta_t}{a} - r \right] dt + \sigma dz \quad (2.7.4)$$

Ligheden med (2.7.1) burde være forholdsvis øjensynlig. Det betyder at en formel for θ_t kan defineres som:

$$\theta_t = F_t(0, t) - aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (2.7.5)$$

Ved at have et parameter for mean reversion der har mulighed for at variere over tid, er det muligt at opnå et bedre fit til den aktuelle rentekurve og modellens fejlspecifikation burde dermed formindskes.

2.8 Modpartsrisiko

Her tilsigtes det at beskrive hvordan modpartsrisiko skal opfattes i konteksten af denne opgave. Indledningsvis bliver terminologien præsenteret ud fra et teoretisk synspunkt, hvorefter der vil blive drage paralleller til markedspraksis gennem sammenligning med Den Danske Nationalbank.

Som deltager i en transaktion med derivater, er man underlagt en risiko for at ens modpart misligholder aftalen man har indgået. Dette er også hvad der kaldes kreditrisiko, eller default risiko. Nationalbanken definerer kreditrisikoen som ”..risikoen for at lidt et finansielt tab som følge af modparterers misligholdelse af deres betalingsforpligtelser.”⁸ Misligholdelse af en kontrakt vil typisk opstå i en situation hvor modpart er forhindret i at møde en forpligtelse enten på grund af insolvens eller konkurs, og alt afhængig af tidspunktet for misligholdelsen skelner man mellem ”settlement” og ”pre-settlement” risiko.

Settlement risiko opstår i den situation at en modpart ikke kan møde en forpligtelse ved kontraktens udløb og hvor man uigenkaldeligt selv har leveret den modsvarende forpligtelse. Eksempelvis ved udløb af en swaptale hvor hovedstole udveksles. Såfremt leverancerne ikke finder sted samme dag må påregnes en settlement risiko.

Pre-Settlement risiko er et udtryk for den krediteksponering man påtager sig i løbet af en handels løbetid som resultat af markedsværdiændringer. I konteksten af denne opgave er Pre-Settlement risikoen af væsentlig betydning, da markedsværdien direkte kan henføres hertil. Når der efterfølgende henvises til modparts- eller kreditrisikoen er det denne form for risiko der påtænkes. Selve pre-settlement risikoen består i, hvis der skulle ske en førtidig terminering af en kontrakt eksempelvis som følge af insolvens eller konkurs. Alt afhængigt om kontrakten er in-the-money set fra den ikke-misligholdenes synspunkt på dét tidspunkt, vil tabet bestå i den urealiserede gevinst. Denne urealiserede gevinst/tab er hvad der søges estimeret når man udfører markedsværdi/Mark-To-Market-beregning (MTM). MTM-værdien

⁸ Se <http://www.nationalbanken.dk/DNDK/Statsgaeld.nsf/side/Kreditrisiko!OpenDocument>

er samtidig den anslåede værdi af genplaceringsomkostningerne, hvis man påtænker at ville indgå i en lignende handel med en anden modpart. For en samlet position med negativ markedsværdi vil MTM-værdien være 0, da der ikke forventes at være genplaceringsomkostninger.

Historisk set har OTC-markedet for derivater været forholdsvis ureguleret på trods af den nærmest eksplosive vækst i markedet. Dette har medført at den modpartsrisiko, der kan henføres til derivater, ligeledes er markant øget. En anden medført problematik ved dette er at, i takt med modpartsrisikoens stigende tendens, betyder den høje koncentration af markedsaktørerne, at man kan frygte det udgør en større systemisk risiko. Dette er blandt andet en del af, hvad Kongressens Dodd-Frank Act og Eu-kommisionens EMIL/EMIR initiativer søger at adressere.

Med hensyn til pre-settlement risiko findes der forskellige måder at imødekomme denne risiko på. Nationalbanken lister 6 forskellige metoder, der anvendes til begrænsning af den samlede kreditrisiko:

- 1 Der stilles høje krav til modpartens kreditværdighed
- 2 Swaps kan ophæves som følge af nedgradering af modparts rating (Rating-Trigger)
- 3 Eksponeringen søges spredt over flere modparter
- 4 Der er begrænsninger på derivaternes kompleksitet
- 5 Der anvendes "netting" af positive og negative markedsværdier på modpartsniveau
- 6 Der indgås kun swaps med modparter der har indgået sikkerhedsstillelsesaftaler.⁹

De første fire ovennævnte årsager er mere eller mindre politisk bestemte eller fastsat igennem regulationer, og i konteksten af denne opgave og relationen til markedsværdien er de af mindre interesse.

⁹ I Nationalbankens tilfælde er det ensidig/unilateral sikkerhedsstillelse.

Netting kan bedst beskrives som en aftale hvori positive og negative eksponeringer nettes til at udgøre en samlet eksponering. Således kan en positiv og negativ eksponering aggregeres og derved minimeres den samlede kreditrisiko. En sådan aftale kan enten foretages bilateralt, multilateralt eller via et central clearinghus. Ved netting-aftaler skelnes der mellem payment netting og close-out netting, hvor differencen består i at payment netting forgår i forbindelse med planlagte transaktioner, hvorimod close-out netting skal anses som en slutfregning for eksempel i forbindelse med misligholdelse fra en modpart. I forbindelse med modpartsrisikoen i denne opgave vil close-out netting dermed være mest relevant, da hensigten netop er at mindske pre-settlement risikoen. Eftersom de fleste OTC-transaktioner følger aftalegrundlaget som defineret af ISDA master agreement (2002) og der heri indgår en passage vedrørende close-out netting, er det især bilaterale nettingaftaler to modparter imellem, der finder anvendelse.

Som et tillæg til aftalegrundlaget som beskrevet i ISDA master agreement, er det muligt at indgå en sikkerhedsstillelse igennem det såkaldte Credit Support Annex (CSA). En sådan aftale om sikkerhedsstillelse kan sidestilles med en margin konto, hvor modpart forpligter sig til at stille samlede værdier i sikkerhed modsvarende den opgjorte markedsværdi af udestående handler. Typen af sikkerhed kan variere, alt afhængigt af aftalens ordlyd, men gængse typer foruden kontant sikkerhed indbefatter stats- og realkreditobligationer. Det betyder at markedsværdien af udestående handler beregnes med faste intervaller, typisk dagligt eller ugentligt, hvorefter det sammenholdes med værdien af det stillede kollateral. Såfremt der er en udækket risiko, der overstiger de aftalte "threshold" og "minimum transfer" beløb vil der være et krav om overførelse af sikkerhed den ene eller anden vej, et såkaldt margin call. Størrelsen af "threshold" beløbet indikerer, hvornår sikkerhedsstillelse skal finde sted og kan betegnes som den maksimale udækkede pre-settlement risiko, der kan accepteres. "Minimum transfer" indikerer hvor langt værdien af den stillede sikkerhed kan bevæge sig fra markedsværdien før det udløser et margin call. Den praktiske opgørelse foregår ved at værdien af sikkerheden samt de beregnede MTM-værdier på handelsniveau bliver udvekslet, hvorefter det bestemmes hvorvidt der er et margin call. Såfremt der opstår disputer på markedsværdien af en handel kan dette udfordres og CSA-aftalen har en klar procedure for hvordan uoverensstemmelser afgøres.

Implikationerne af den markedspraksis, der hersker i forhold til styring af modpartsrisiko, er at markedsværdierne har en direkte relateret effekt på opfattelsen af risikoen ved handel med derivater. Fejlestimerede markedsværdier kan i værste fald medføre at modpartsrisikoen bliver underestimeret og i tilfælde af misligholdelse fra modparts side vil det kunne medføre betydelige tab. Ligeledes giver kendskabet til disse styringsmekanismer et billede af de potentielle incitament, som kan opstå forud for bestemmelse af markedsværdien. Eksempelvis hvis man frygter for en specifik modpart er det sandsynligt at man helst vil holde mere sikkerhed end mindre og i den forbindelse vil man nok gøre meget for at sikre man ikke har underestimeret markedsværdien af de udestående handler. På den anden side, hvis en finansiel virksomhed er i problemer og mangler disponibel sikkerhed, de kan stille til rådighed, vil de nok være opmærksom på ikke at estimere højere end nødvendigt.

3.0 Empirisk grundlag

Dette afsnit søger at præsentere det empiriske grundlag der ligger til grunde for de forestående beregninger. Foruden selve derivatet, vil de nødvendige markedsdata også være beskrevet, og hvordan de bestemmes i de tilfælde de tilfælde, hvor det ikke er direkte aflæselige værdier. Med hensyn til indsamlingen af markedsdata har målsætningen været at forblive så tro mod den herskende markedspraksis, og hvor der afviges fra denne, vil det blive eksplicit nævnt.

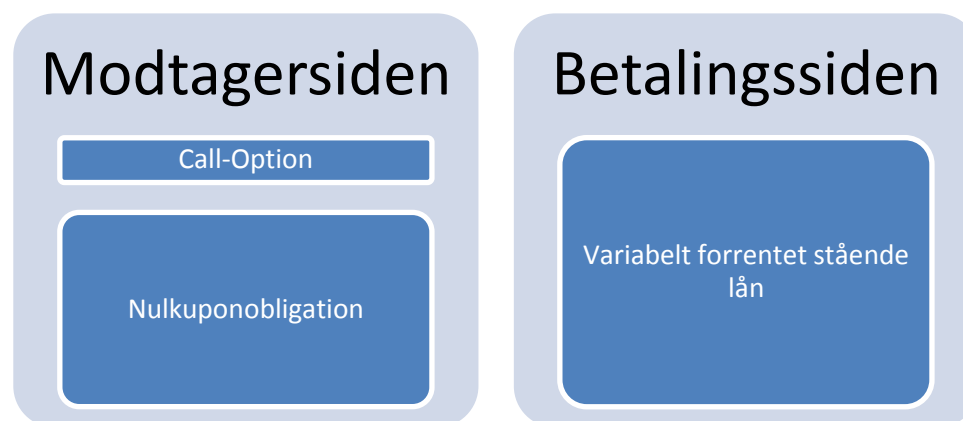
3.1 Derivatet

Derivatet der ligger til grunde for beregningerne og den videre analyse en indgået swap (se bilag A), der perfekt afdækker en faktisk struktureret udstedelse på det danske obligationsmarked med fondskode DK0030067434, også benævnt KommuneKredit Dollar 2010. Kort beskrevet er en swap en transaktion, hvor to modparter indgår en aftale om at udveksle én betalingsstrøm for en anden. Typisk vil en swap indgå i en hedge, hvor en åben position søges afdækket. I dette tilfælde bliver betalingsstrømmen fra den strukturerede udstedelse swappet til en ren variabel forrentet betalingsrække. Hvis vi betragter vores synspunkt som værende fra udstederen af obligationen, kan motivationen for at indgå i en sådan swap være at afdække den usikkerhed der ligger i optionen og i stedet ende med et variabelt forrentet lån. Hvis vi bibeholder synet fra udsteders synsvinkel, kan sammenhængen mellem swap og udstedelse illustreres ved hjælp af nedenstående grafiske representation. Fortegnet betegner hvorvidt der er tale om en ind- eller udbetaling.

Udstedelse På KF DK0030067434	Swap med finansiell modpart	
	Modtager	Betaler
+ Hovedstol	- Hovedstol	+ Hovedstol
		- Variabel rente
		- Variabel rente
		- Variabel rente
- (Hovedstol+option)	+ (Hovedstol+option)	- Hovedstol

FIGUR 2: Sammenhæng mellem struktureret udstedelse og tilhørende swap

Med andre ord illustrerer dette, at udstederen har skaffet funding igennem en struktureret udstedelse og dernæst swappet sig til et rent variabelt forrentet lån + et spread. Swappen kan også opfattes som summen af tre delkomponenter. På den ene side et variabelt forrentet stående lån og på den anden side en nulkuponobligation og en call-option.



FIGUR 3: Grafisk repræsentation af delkomponenterne i den strukturerede swap

I forhold til markedsværdien, vil det stående lån, med en antagelse af et spread på 0, have en kurs på 100 (svinger marginalt henover renteperiode som følge af upfront-fiksede betalinger). Ligeledes vil nulkuponobligation blot være den tilbagediskonterede hovedstol, så bestemmelsen af markedsværdien vil være forholdsvis triviell. Fremadrettet vil beregning af markedsværdien tage udgangspunkt i optionen og synsvinklen vil være som indehaveren af call-optionen, hvilket vil sige at optionen kan antage en markedsværdi ≥ 0 . Af karakteristika ved handlen er den karakteriseret ved at have startdato d. 30/11 2007 og udløb d. 30/11 2010, og selve afkastprofilen af den europæiske option er defineret som:

$$\text{Hovedstolen i DKK} \times \text{Deltagelsesgraden} \times \text{Maks} \left(\frac{\text{Slutkurs} - \text{Startkurs}}{\text{Startkurs}}, 0 \right) \quad (3.1.1)$$

Den pågældende valutakurs er defineret som kursen mellem USD og DKK, målt som krydskursen over EUR eller omskrevet:

$$\frac{EURDKK}{EURUSD} \quad (3.1.2)$$

Hovedstolen er 108 millioner DKK, og deltagelsesgraden er 300 %. Deltagelsesgraden er bestemt igennem den originale obligationsudstedelse, hvor investorer har betalt en merpris for obligationen, der fungerer som en form for gearing af optionen. Dette bliver båret videre igennem den afdækkende swap og skal derfor også indberegnes her, når markedsværdien skal bestemmes. Det samlede afkast på optionen kan dermed forklares som den procentvise ændring i valutakursen på i forhold til startkursen målt ved optionens udløb multipliceret med tre gange hovedstolen. Gearingsfaktoren er medvirkende til at mindre unøjagtigheder bliver forstørret i markedsværdien, og denne egenskab var også medvirkende til valget af denne handel. Startkursen er også, hvad der i opgaven menes når exercisekursen bliver nævnt og er bestemt som valutakursen som den fremstod d. 21/11 2007. Slutkursen skal aflæses som det aritmetiske gennemsnit af kursen set over 4 aflæsningsdatoer; 23/8 2010, 22/9 2010, 22/10 2010 og 22/11 2010. Handler hvor slutkursen bestemmes på denne måde er også kaldet ”Asian Tail”.

3.2 Simplificerende betragtninger

Det tilhørende empiriske grundlag er fundet på baggrund af hvad der er nødvendigt for at kunne foretage en prisfastsættelse af optionen. For at lette analysen og fjerne unødvendigt ”støj” er der dog foretaget nogle simplificeringer. I praksis har det en effekt, men for selve denne analyse har det ikke den store indflydelse på resultaterne.

Optionen er som nævnt af varianten kendt som ”Asian Tail”, hvor slutkursen på valutakrydset skal ses som gennemsnitskursen over i dette tilfælde 4 observationsdatoer. I beregningerne i denne opgave er der set bort fra dette ”Asian tail” element, og optionen prisfastsættes ud fra slutkursen ved optionens udløb. Dette kan dog nemt inkorporeres i en Monte Carlo sammenhæng, hvor et simpelt gennemsnit af de sidste fire observationsdatoer nemt kan defineres som slutkursen i stedet, hvilket også demonstreres i den empiriske behandling. Typisk bliver Asian Tail elementet implementeret for at undgå at kursen på bare én dag er afgørende for den endelige slutkurs. Brugen af gennemsnittet på flere observationsdatoer har dermed en udglattende effekt, der forhindrer at slutkursen kan være præget i høj grad af et enkelt abnormalt kursudsving, samtidig kan kursmanipulation effektivt besværliggøres.

Argumentet for at ikke at inkludere dette element fuldt ud, er primært at den lukkede Garman-Kohlhagen formel ikke vil kunne benyttes. Hvor det er muligt og hensigtsmæssigt vil beregningerne dog blive udført både med og uden Asian Tail, hvilket også vil fremgå eksplicit.

Det er normal anvendt markedspraksis at observationsdatoerne ikke ligger på selve udløbsdatoen. Dette er igen af praktiske årsager og i tilfældet med denne option ligger observationsdato(erne) 5 forretningsdage før udløbsdatoen. For analysen har det ikke den store betydning om aflæsningsdatoen ligger på udløbsdatoen og det antages dermed at være tilfældet. Formålet med at have et en observationsdato der ligger forud for udløbsdatoen er så betalingen kan klargøres, og skulle der opstå situationer der umuliggør aflæsningen af kursen på den pågældende dag, er der en sikkerhedsmargin på et par dage. Hvis der skulle tages højde for dette, ville det kun betyde at udløbsdatoen på optionen skulle flyttes til observationsdatoen, mens selve diskonteringen skulle først foretages 5 dage senere. Argumentet for at undgå dette er igen af simplificerende årsager og effekten på analysens resultat er yderst minimal.

Den vigtigste manipulering, der er blevet foretaget, er at swappen oprindeligt er indgået med udgangspunkt i valutakrydset USDDKK, hvorimod de danske kroner i denne opgave er blevet erstattet med Euro. Dette er primært at hensyn til at kunne sikre tilstrækkeligt med markedsdata. Eftersom DKK ikke kan anses som en meget likvid valuta, kan markedsdata være en udfordring, hvor specielt FX-volatiliteter er meget svært tilgængelige. Da den danske krone som bekendt er fastlåst efter euroen betyder dette at FX-volatiliteter for Euro i princippet kan anvendes som substitut. FX-volatiliteter for EUR er i øvrigt ofte anvendt som substitut for DKK, hvis intet bedre er tilgængeligt. For at sikre konsistens mellem anvendt markedsdata er det nemmest at helt lade Euro erstatte den danske krone, og analysens natur muliggør en grad af fleksibilitet, der tillader dette. Implikationen for resultaterne for hvilket valutakryds der anvendes, vil i sagens natur have en indflydelse, men princippet ved beregningerne er nøjagtig det samme, bortset fra at der nu er sikret at markedsdata er tilgængeligt. Derudover er udstedelsen og swappen indgået hvor USDDKK kursen bliver beregnet som krydskursen mellem EUR/DKK og USD/EUR, så den egentlige konsekvens er

minimal, hvor spot og exercisekursen vil være ændret med en faktor svarende til kursen mellem DKK og EUR.

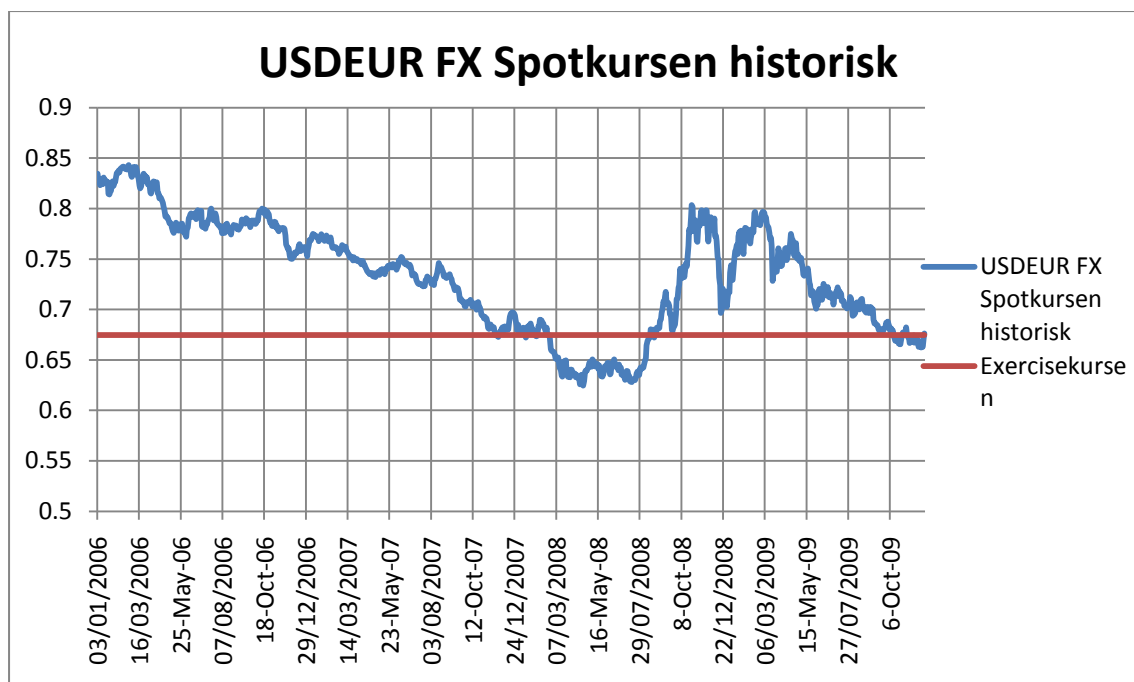
3.3 Markedsdata

Det empiriske grundlag for opgaven er, foruden selve den betragtede swap, de relevante markedsdata, der er nødvendige for at kunne udføre en prisfastsættelse ud fra de givne modeller. Følgende er en beskrivelse af det inkluderede datamateriale samt deres funktion. Det inkluderede data er:

- Historiske Spot-kurser
- FX-volatiliteter
- Korrelationsmatrice
- Historiske rentekurver
- Rente-volatilitet

3.3.1 Spot-kursen

De historiske spotkurser er anvendt i begge modeller. Primært er det for at kunne give et udtryk for det underliggende på tidspunkt $t = 0$, det vil sige S_0 . Samtidigt giver den historiske spotkurs også et godt billede af hvilke resultater der kan forventes, eftersom det er muligt at se om optionen var out-of-the-money (OTM), at-the-money (ATM) eller In-the-money (ITM). Rent intuitivt burde en option som er meget ITM være mere værd end en der er OTM - ceteris paribus, og dette burde også være direkte afspejlet i optionens værdi. Nedenfor er inkluderet den historiske udvikling i perioden fra januar 2006 til september 2009.



Figur 4: Historisk udvikling af spotkursen på USD/EUR som opgjort af FED

Fra Figuren fremgår det at optionen hovedsageligt har været ITM over levetiden. De tre tidspunkter for værdiansættelse kan samtidig ses at være henholdsvis en anelse OTM, meget ITM og lidt ITM for, hvilket burde afspejles i vores beregnede værdier. De anvendte kurser er end-of-day Interbank kurserne, som Fed har observeret¹⁰.

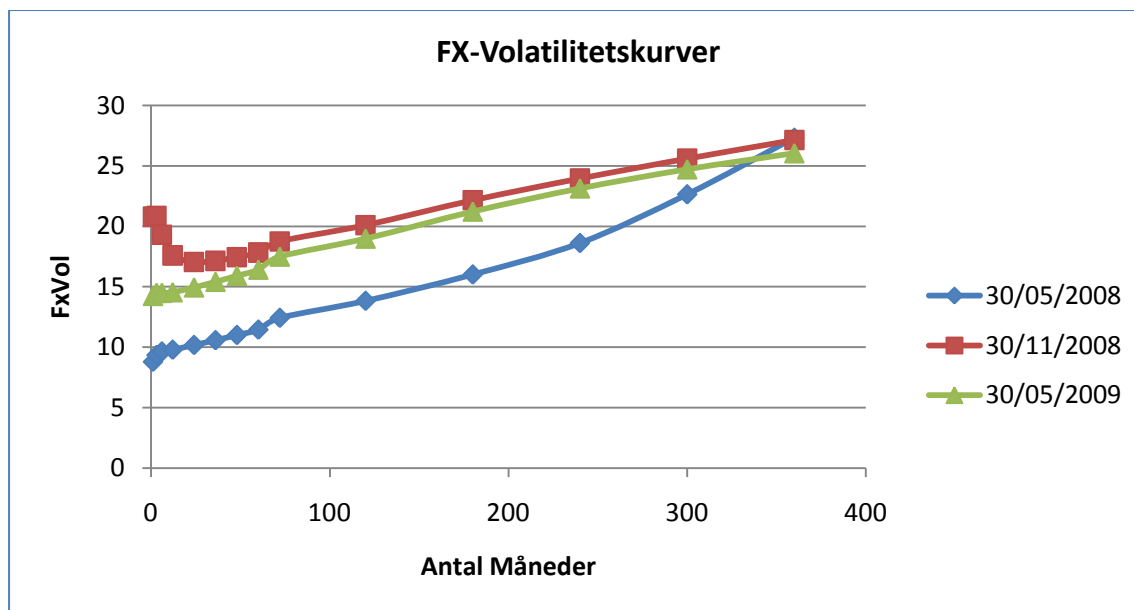
3.3.2 FX-volatilitet

De markedsdata, der er indhentet på FX-volatiliteten, indgår i formlerne som volatiliteten på det underliggende valutakryds. Alt afhængig om volatiliteten anses som at være tidsvarierende eller antages at være deterministisk, kan volatiliteterne selvfølgelig indgå forskelligt i modellerne, men alt andet lige, vil volatilitetsniveauet have en indflydelse på resultaterne. Typisk er de lettest tilgængelige markedsdata baseret på implicitte volatiliteter fundet igennem optionspriser, hvilket også er tilfældet her¹¹. Alternativt kan historisk volatilitet også anvendes. Nedenfor er inkluderet en figur, der illustrerer hvorledes Fx-volatiliteten varierer imellem de tre tidspunkter for værdiansættelse. Det er tydeligt at de

¹⁰ Kurserne er efterfølgende blevet inverteret for at fremstå med korrekt denominering.

¹¹ Det er den implicitte volatilitet beregnet gennem Black-modellen

største ændringer er i den korte ende, hvor det ser ud til at der er en konvergerende tendens for løbetider over 20 år.



Figur 5: Volatiliteten for USDEUR opgjort på de tre tidspunkter for beregning

3.3.3 Korrelationer.

Når flere stokastiske variable er inkluderet er det nødvendigt at have et mål for korrelationen, der er et statistisk mål for hvordan variablene ændrer sig i forhold til hinanden. Perfekt korrelation er indikeret ved en korrelationsværdi på 1, hvilket er ensbetydende med at to variable ændrer sig synkront med hinanden. Det omvendte scenarie er ved en korrelationsfaktor på -1, hvor to variable udvikler sig reciprok i forhold til hinanden. Datasættet nødvendigt for at løse denne opgave er en korrelationsmatrice, der indeholder samtlige korrelationer mellem valutakrydset og de to renter – dvs. en 3x3 matrice. Korrelationsmatricen bliver anset som statisk igennem hele løbetiden, så data er inkluderet som korrelationen så ud på alle tre tidspunkter for værdiansættelse. Nedenfor er eksemplet for den første korrelationsmatrice.

Korrelationsmatrice 30/05 2008			
30/05/2008	FX: USDEUR	Spotrente: EUR	Spotrente: USD
FX: USDEUR	1	-0.039	-0.032
Spotrente: EUR	-0.039	1	0.351
Spotrente: USD	-0.032	0.351	1

Tabel 1: Eksempel på korrelationsmatrice fra 30/5 2008

Ud fra matricen kan det ses at diagonalens værdier er 1.000, hvilket giver mening eftersom variablene nødvendigvis må være 100 procent korreleret med dem selv. Ligeledes kan det ses, at hvor valutakursen kun er svagt korreleret med renteændringer i begge lande, er der en større positiv korrelation mellem de to renters udvikling.

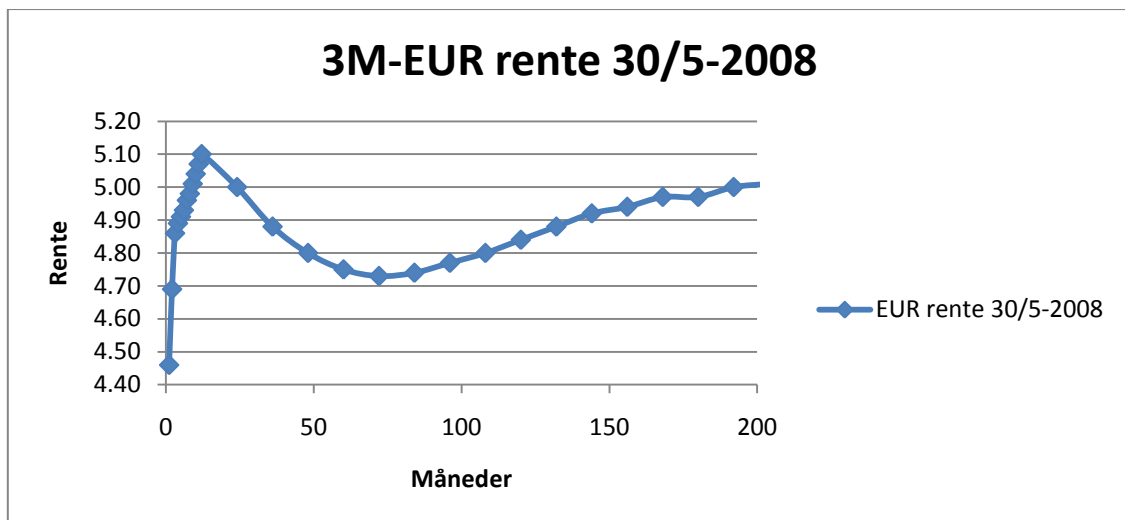
Eftersom den eneste stokastiske variabel er valutakursen i Garman-Kohlhagen modellen, er korrelationerne i og for sig irrelevante i den sammenhæng. Området hvor korrelationsmatricen finder anvendelse vil derfor alene være når renterne også bliver betragtet som værende stokastiske.

3.3.4 Observerede rentekurver

En af de fundamentale nødvendigheder i det empiriske datasæt er en angivelse af de af markedet observerede rentekurver på værdiansættelsestidspunkterne. Det anvendte data er tre sæt af rentekurver for både USD og EUR, hvor 3 måneders EURIBOR¹² og LIBOR¹³ er benyttet. Det er i princippet også muligt at anvende 6 måneders EURIBOR eller LIBOR, hvilket er normal markedspraksis, men den korte restløbetid taget i betragtning faldt valget på 3 måneders renten. Der ligger en marginal difference, eller basis, imellem de to, og resultaterne vil dermed også være påvirket i mindre grad af valget. Renterne op til 1-års punktet er Interbank Cash eller med andre ord depositrenter, og efter 1-årspunktet er der anvendt swaprenter, hvilket er almindelig markedspraksis. Intervallerne hvormed rentekurven er givet betyder også, at der er behov for at kunne estimere hvad renten er imellem to punkter, når renten skal findes til brug for Garman-Kohlhagen modellen. I den forbindelse er det almindelig markedspraksis at en interpoleret rente benyttes. Benyttelse af en interpoleret rente indeholder en mindre unøjagtighed, men i forhold til denne opgave er det næsten ikke af betydning, hvorfor denne unøjagtighed overses. Nedenfor er inkluderet et eksempel på hvordan 3-måneders Euribor renten så ud på markedet ultimo maj 2008.

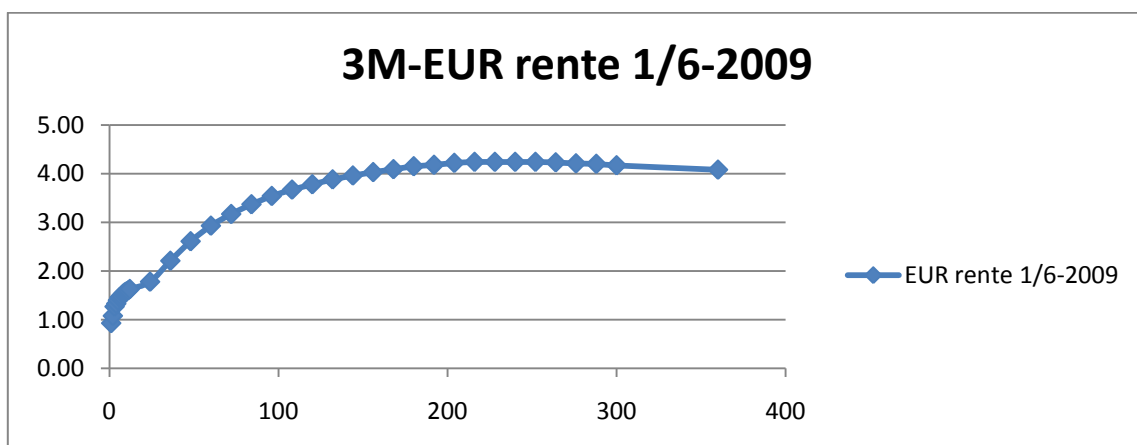
¹² Euro Interbank Offer rate

¹³ London Interbank Offer Rate



Figur 6: Den observerede rentestruktur for 3m-EUR d. 30/5 2008

Fra figuren kan det ses at den korte rente stiger forholdsvis hurtigt hvorefter rentekurven tager en mere invert form. Anvendeligheden i forhold til en stokastisk betragtning af renterne ligger ved den indledende kalibrering, hvor parametrene for V og θ i modellen fittes til den observerede rentekurve. Dette betyder at parameteret for mean reversion (θ) samt hastigheden (V) hvormed modellen nærmer sig denne er afhængig af rentekurvens udseende. Dette burde blive tydeligt i analysen, hvis disse to parametre bliver sammenlignet på tværs af værdiansættelsestidspunkterne. Den senere periodes forholdsvis dramatiske renteutvikling, hvor specielt renten i den korte ende er faldet markant for begge valutaer er tydelig, hvis ovenstående figur sammenlignes med det samme billede blot ét år efter:



Figur 7: Den observerede rentestruktur for 3m-EUR 1/6-2009

3.3.5 Rentevolatilitet

Ved en antagelse af stokastiske renter, bliver det nødvendigt at have et estimat for rentens volatilitet for at kunne modelere rentens udvikling. Datasættet anvendt i denne forbindelse er implicitte ATM Cap volatiliteter af markedet for 3-måneders EURIBOR og LIBOR, men swaption volatiliteter kunne også have været anvendt. Principielt kan en rentecap anses som en metode til at fastlægge et renteloft. Teknisk set kan man betragte en rentecap som en portefølje af calloptioner på renten. Ved at benytte den implicitte volatilitet¹⁴ på caps, der netop er ATM, har vi et estimat for rentens volatilitet. I forhold til beregningen af de implicitte volatiliteter er Blacks model anvendt. I selve analysen er rentevolatiliteten kun nødvendig når renterne betragtes som stokastiske¹⁵.

¹⁴ Implicitte volatiliteter er alle beregnet igennem Black Scholes og fundet på Bloomberg

¹⁵ Ved konstante renter er volatiliteten overflødig

4.0 Empirisk Analyse

I dette afsnit kombineres de udvalgte teoretiske modeller, der er blevet gennemgået tidligere, med de empiriske data. Selve prisfastsættelsen af optionen bliver foretaget på tre historiske tidspunkter i optionens løbetid, hvorefter der udføres en sensitivitetsanalyse. Samtidigt hvor muligt forsøges det at variere forudsætningerne for beregningen ved at ændre på simuleringerne. Beregningerne præsenterer samlet set en mulighed for at analysere i tre dimensioner. Først er det muligt at se hvordan ændringer på de underliggende markedsdata påvirker resultaterne, når samme model anvendes på forskellige markedsdata. Dernæst er det muligt at se hvordan modelvalget har en indvirkning når samme markedsdata anvendes igennem forskellige modeller. Slutteligt ved at variere på fremgangsmåden ved simuleringen undersøges hvorvidt den samme model kan fremkomme med anderledes markedsværdi, når beregningsprocessen ændres.

For at sikre en konsistent analyse, er den empiriske analyse struktureret med to trin for hver model. Først gives en indledende henføring i den praktiske metode anvendt til beregningerne med den pågældende model og eventuel tilpasning af markedsdata, hvorefter de udførte beregninger præsenteres. I forbindelse med beregningerne i Garman-Kohlhagen modellen udføres en sensitivitetsanalyse, hvor indflydelsen af ændringer i markedsdataene søges vist, i forbindelse med Vasicek-modellen fokuserer sensitivitetsanalysen primært på indflydelse af metode ved beregning på markedsværdien. For begge modeller gælder det at de væsentlige fund opsummeres umiddelbart efter den modelspecifikke analyse. Afsluttende på dette afsnit udføres en komparativ analyse, hvor markedsværdier fra de to modeller sammenstilles og swapmodpartens beregninger bliver ligeledes inddraget i sammenligningen. For alle udførte simulationer gælder det, at den anvendte kode er tilgængelig i Bilag B for VBA og Bilag C for Matlab

4.1 Fremgangsmåde ved Garman-Kohlhagen

I den teoretiske gennemgang af Garman-Kohlhagen-modellen blev dens forholdsvis enkle opbygning fremhævet som en af modellens styrker. Dette bevirker også at den faktiske fremgangsmåde i beregningerne er forholdsvis ligetil. Med udgangspunkt i (2.6.1, 2.6.2 og 2.6.3), er det muligt at se at ved restløbetider på 30, 24 og 18 måneder er de fleste input til modellen direkte angivet i det tilgængelige markedsdata. De to eneste områder hvor

markedsdata ikke er direkte tilgængeligt, er hvor der skal anvendes interpolerede renter og FX-volatiliteter.

For at bestemme renterne ved 18 og 30 måneders punktet anvendes en lineær interpolering mellem de tilgængelige swap-renter. Der ligger en mindre unøjagtighed i form af nogle renters rente, der bliver overset, men i denne sammenhæng ses bort fra dette, da effekten er yderst marginal.

FX-volatiliteten er i datasættet, der er fundet på baggrund af en række optioners implicitte volatiliteter, angivet som en volatilitetskurve, der ændrer sig over tid. Garman-Kohlhagen antager at volatiliteten er konstant igennem hele perioden så et enkelt udtryk for volatiliteten skal findes. Hvis man antager at de implicitte volatiliteter i markedet er deterministiske vil det være muligt at bestemme σ ud fra en given volatilitets-flade ved:

$$\sigma = \sqrt{\int_0^T \sigma_s^2 ds} \quad (4.1.1)$$

Intuitivt vil det betyde at σ kan findes som det bestemte integrale mellem tidspunkt 0 og T hvis σ_s^2 blev plottet som funktion af tiden. Det er i øvrigt værd at nævne at hvis de observerede implicitte volatiliteter ikke var deterministiske, ville der opstå arbitragemuligheder, hvilket retfærdiggør antagelsen. Ved den egentlige beregning igennem ovenstående formel, er det antaget, at der er en lineær relation mellem punkterne på FX-vol-kurven.

Efter de mindre initielle beregninger betyder det, at følgende data er tilgængeligt til modellen på de tre beregningstidspunkter. Det bemærkes at de nævnte værdier relaterer til tidsintervaller af en måneds varighed:

Månedlige Input			
	30/05/2008	30/11/2009	30/05/2009
Spotkurs USD/EUR	0.64267	0.79152	0.70932
Exercisekurs USD/EUR	0.67477	0.67477	0.67477
Rente EUR %	0.4117%	0.2517%	0.1421%
Rente USD %	0.3021%	0.1642%	0.1263%
Volatilitet %	2.8745%	5.2024%	4.2296%
Tid til udløb mdr	30	24	18

Tabel 2: Input til beregning ved Garman-Kohlhagen

Eftersom der både i Garman-Kohlhagen og Vasicek indgår et eller flere stokastiske elementer, er det oplagt at benytte princippet i Monte Carlo-simulering. Ved en europæisk option er vi reelt set kun interesseret i start- og forventet slutkurs på det underliggende, hvilket er netop hvad en Monte Carlo-simulation kan benyttes til. Beregningerne er udført både med simpel indsættelse af værdierne i (2.6.1) og igennem Monte Carlo simulering. Indsættelse i formelen er klart det nemmeste, men dette er kun muligt når der bliver set bort fra ”Asian-Tail”-elementet i optionen. Hvis slutkursen i stedet var sti-afhængig ville en Monte Carlo simulering være at foretrække. I konteksten af denne opgave, giver det mening at illustrere hvorledes en Monte Carlo simulering kan anvendes. Derudover tillader brugen af begge metoder til prisfastsættelsen, at vi kan sammenligne og verificere om resultaterne ser ens ud.

Fremgangsmåden i en Monte Carlo-simulering består i at simulere en tilfældig sti for det underliggende aktivs spotkurs igennem den resterende løbetid. I denne simulering inddrages tilfældige normalfordelte tal med middelværdi 0 og standardafvigelse 1 til at simulere Wiener-processerne i modellerne. Ved at gentage denne simulering med sådanne tilfældige ukorrelerede tal, vil gennemsnittet som følge af de store tals lov konvergere mod forventningsværdien, når antallet af simulerede stier går mod uendeligt. Dette fordrer at modellerne skal diskretiseres for at kunne anvendes i en Monte Carlo sammenhæng. Når simuleringerne er gentaget et tilpas stort antal gange, vil middelværdien af afkastet repræsentere et estimat af optionens værdi på tidspunkt $t = T$. Dette resultat tilbagediskonteres derefter for at give værdien på værdiansættelsestidspunktet.

En Monte Carlo simulering af en stokastisk proces, er en metode der genererer tilfældige udfald for en proces inden for de opstillede rammer for forventet afkast og standardafvigelse. Det vil sige at det er muligt at simulere en stokastisk proces for variabelen S ved at antage at det underliggende følger en proces af typen:

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz \quad (4.1.2)$$

Hvor $\hat{\mu}$ er det forventede afkast i en risikoneutral verden, σ er standardafvigelsen og dz følger en wiener-proces. Ved at inddele restløbetiden i N intervaller af længde Δt , kan stien for det underliggende nu modeleres ud fra:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \hat{\mu}S_t\Delta t + \sigma S_t\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (4.1.3)$$

Dette gentages m gange, og ved at benytte de store tals lov kan det forventede udfald for processen findes som middelværdien af afkastene genereret igennem Monte Carlo simuleringerne.

I tilfældet ved anvendelse af Garman-Kohlhagen modellen kan μ bestemmes til at være:

$$\hat{\mu} = r_d - r_f - 0,5\sigma^2 \quad (4.1.4)$$

Den praktiske metode anvendt til denne modellering er programmering i Visual Basic (VBA) i Excel (Se Bilag B). Antallet af simuleringer er bestemt ud fra en begrænsning af tilgængelig regnekraft, samt en subjektiv vurdering af, hvad der udgør et tilstrækkeligt antal simuleringer i forhold til anvendt markedspraksis. I denne opgave er 10.000 stier pr beregning anvendt, hvilket burde være rigeligt. For at sikre at resultaterne kan reproducere, er det nødvendigt at

kort beskrive den indbyggede funktion til generering af tilfældige tal i Excel. I Excel er der forprogrammeret en talrække, der repræsenterer tilfældige tal. Det betyder, at hvis man kan sikre udgangspunktet i talrækken er det samme (benævnt ”seed”), vil de samme ”tilfældige” tal blive benyttet hver gang.

Følgende dette afsnit er vist et eksempel af 10 genererede stier for den underliggende valutakurs, der illustrerer princippet i Monte Carlo simuleringen og samtidig viser hvordan et ”Asian Tail” element nemt kan inddrages.

Eksempel på 10 stier for det underliggendes udvikling hvor t = 0 = 30/5-2008										
t = 0	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643
1	0.590	0.646	0.628	0.660	0.647	0.642	0.636	0.667	0.661	0.656
2	0.575	0.667	0.638	0.661	0.639	0.604	0.613	0.661	0.642	0.638
3	0.614	0.665	0.618	0.614	0.597	0.599	0.615	0.665	0.647	0.644
4	0.598	0.674	0.616	0.608	0.571	0.605	0.630	0.682	0.649	0.635
5	0.619	0.687	0.648	0.634	0.573	0.587	0.629	0.669	0.670	0.621
6	0.633	0.708	0.701	0.701	0.579	0.583	0.618	0.660	0.690	0.587
7	0.628	0.682	0.711	0.670	0.541	0.608	0.608	0.649	0.695	0.597
8	0.647	0.695	0.711	0.655	0.552	0.607	0.607	0.681	0.709	0.576
9	0.652	0.689	0.725	0.661	0.555	0.601	0.590	0.667	0.706	0.591
10	0.654	0.738	0.740	0.654	0.541	0.609	0.590	0.639	0.718	0.592
11	0.635	0.774	0.718	0.680	0.549	0.601	0.588	0.613	0.757	0.601
12	0.617	0.801	0.738	0.685	0.536	0.586	0.604	0.613	0.736	0.602
13	0.629	0.797	0.727	0.689	0.544	0.598	0.615	0.612	0.713	0.596
14	0.648	0.757	0.728	0.698	0.542	0.577	0.645	0.638	0.716	0.590
15	0.647	0.751	0.751	0.690	0.541	0.568	0.686	0.629	0.730	0.594
16	0.632	0.767	0.774	0.685	0.541	0.589	0.650	0.678	0.735	0.567
17	0.634	0.749	0.797	0.692	0.548	0.575	0.670	0.656	0.710	0.578
18	0.626	0.785	0.785	0.685	0.532	0.586	0.690	0.668	0.716	0.590
19	0.615	0.762	0.722	0.656	0.546	0.605	0.675	0.646	0.720	0.555
20	0.594	0.760	0.737	0.665	0.548	0.581	0.672	0.631	0.731	0.547
21	0.592	0.745	0.742	0.668	0.554	0.565	0.673	0.665	0.743	0.570
22	0.578	0.737	0.723	0.720	0.553	0.615	0.649	0.672	0.716	0.568
23	0.604	0.703	0.751	0.709	0.542	0.628	0.646	0.656	0.724	0.573
24	0.602	0.702	0.757	0.717	0.559	0.646	0.652	0.668	0.728	0.569
25	0.588	0.716	0.761	0.745	0.549	0.631	0.658	0.679	0.733	0.563
26	0.588	0.688	0.776	0.752	0.554	0.641	0.675	0.660	0.738	0.582
27	0.612	0.695	0.790	0.717	0.561	0.679	0.666	0.664	0.728	0.567
28	0.591	0.718	0.815	0.731	0.546	0.671	0.641	0.638	0.736	0.583
29	0.594	0.717	0.811	0.721	0.545	0.672	0.623	0.630	0.751	0.575
30	0.611	0.754	0.838	0.734	0.538	0.704	0.603	0.604	0.769	0.577
Afkast for stien	0.000	0.079	0.164	0.060	0.000	0.029	0.000	0.000	0.094	0.000
Med Asian tail	0.000	0.046	0.139	0.051	0.000	0.007	0.000	0.000	0.071	0.000

m/ asian tail	2.77%
MV m/ asian tail	8,968,055
U/asian tail	3.75%
MV u/ asian tail	12,156,819

Tabel 3: 10 Simulerede stier for valutakursen over 30 måneder

Det kan ses at Asian Tail elementet har en effekt på resultatet. Denne effekt bliver dog mindre jo flere stier der bliver brugt i simuleringen. Ved 10.000 simuleringer bliver stierne ikke direkte produceret men foretaget i VBA (For kode, se Appendiks B).

4.2 Analyse af beregninger ved Garman-Kohlhagen-modellen:

Ved at kombinere teori og empiri igennem den beskrevne fremgangsmetode, er det muligt at producere output, der kan analyseres videre på. Selve optionens værdier på de tre tidspunkter er selvfølgelig af essentiel betydning, men mere interessant er hvor sensitiv denne værdi er på ændringer i markedsdata. Nedenfor er angivet resultatet af beregningerne, hvor både Monte Carlo simuleringen er foretaget med 10.000 stier med asian tail elementet og uden, hvilket kan sammenstilles med resultatet fra den lukkede formel.

	Månedlige Input		
	30/05/2008	30/11/2009	30/05/2009
Spotkurs USD/EUR	0,64267	0,79152	0,70932
Exercisekurs USD/EUR	0,67477	0,67477	0,67477
Rente EUR %	0,4117%	0,2517%	0,1421%
Rente USD %	0,3021%	0,1642%	0,1263%
Volatilitet %	2,8745%	5,2024%	4,2296%
Tid til udløb mdr	30	24	18
Antal stier	10000	10000	10000
Seed	-25000	-25000	-25000
Simuleret afkast m Asian tail	4,5659%	21,8224%	9,6959%
Ved lukket formel	4,8346%	22,3124%	10,1062%
Simuleret afkast u Asian tail	4,8353%	22,3159%	10,1160%

MV i DKK m Asian tail	14.793.499,68	70.704.668,01	31.414.642,91
MV i DKK lukket formel	15.664.151,00	72.292.033,49	32.744.105,81
MV i DKK u Asian tail	15.666.228,32	72.303.639,49	32.775.984,14

Tabel 4: Input og resultater fra beregning med Garman-Kohlhagen

Fra tabellen kan drages adskillige analytiske konklusioner, men mest åbenlyst er nok den meget lille difference mellem Monte Carlo simuleringen og den lukkede formel. Med en difference i promilleklassen, kan de to metoder, forudsat tilstrækkeligt med stier er anvendt, nærmest anses som at producere identiske resultater, ganske som forventet. Herudover indikerer resultaterne, hvis man ser på tværs af de tre perioders markedsværdier, en kraftig positiv korrelation mellem spotkursen og det forventede afkast for optionen, hvilket også både virker intuitivt korrekt og i overensstemmelse med teorien. Derudover er det muligt at

se at asiantail elementets udglattende effekt på slutkursen, ser ud til at udmønte sig i en anelse lavere markedsværdier. Eftersom en stor del af handler, der bliver indgået, hvor valuta-, aktie- eller indeksskurser optræder, indeholder et stiafhængigt element, fremhæver det hvorfor Monte Carlo simulering er så kraftigt anvendt en metode i finansverdenen, da lukkede formler ikke vil være anvendelige i disse tilfælde.

I forhold til antallet af stier anvendt i Monte Carlo simuleringen, er det muligt at beregne nøjagtigheden af simuleringens resultat. Selve simuleringens præcision afgøres ud fra standardafvigelsen for hver sti i forhold til det beregnede afkast for optionen. Hvis man eksempelvis vil teste for et 95 % konfidensinterval af prisen, kan følgende formel anvendes:

$$\mu - \frac{2,58\omega}{\sqrt{M}} < Optionspris < \mu + \frac{2,58\omega}{\sqrt{M}} \quad (4.2.1)$$

Hvor μ er et udtryk for det tilbagediskonterede forventede afkast for optionen beregnet i simuleringen, ω angiver standard afvigelsen for stierne og M er antallet af simuleringer. Selve leddet $\frac{\omega}{\sqrt{M}}$ er dermed en angivelse af standardfejlen ved vores estimerede værdi. Ud fra formelen er det muligt at se at den marginale forbedring af præcisionen falder ved inklusion af flere stier på grund af leddet $\sqrt{M}$. Det betyder i realiteten at en fordobling af præcisionen kræver en firedobling af antallet af stier. For de beregnede markedsværdier giver 10.000 stier et 95% konfidensinterval for at markedsværdien ligger inden for de nedenstående bånd for de tre perioder:

Konfidensinterval på 95%			
	30/05/2008	30/11/2009	30/05/2009
Nedre grænse	15.133.692,69	70.700.102,85	31.904.635,35
Øvre grænse	16.198.763,95	73.907.176,14	33.647.332,93

Tabel 5: Beregninger foretaget ved 95% konfidensinterval

Det vil sige at såfremt der blev udført et uendeligt antal simulationer, vil markedsværdien med 95% sandsynlighed ligge indenfor ovenstående bånd. Jo mere præcis estimeringen er, jo mindre størrelse vil intervallet antage. Fra ovenstående intervaller bliver det tydeligt, at ved simuleringer er det svært at pege på en eksakt markedsværdi, og alene dette afspejler hvordan

modparter kan ramme forskellige markedsværdier. Selv ved 10.000 simuleringer er der et bånd på 1 million ved et 95% konfidensinterval. Usikkerheden set i forhold til en hovedstol på 108 millioner kan selvfølgelig diskuteres, og alt afhængigt af behovet for præcision kontra hastighed kan det bestemmes hvorvidt eventuelt flere/færre simuleringer er mere hensigtsmæssigt. Dette skal selvfølgelig opvejes mod de tilgængelige systemressourcer, da hastigheden i høj grad også kan optimeres ved at anskaffe større beregningskraft.

4.3 Sensitivitetsanalyse

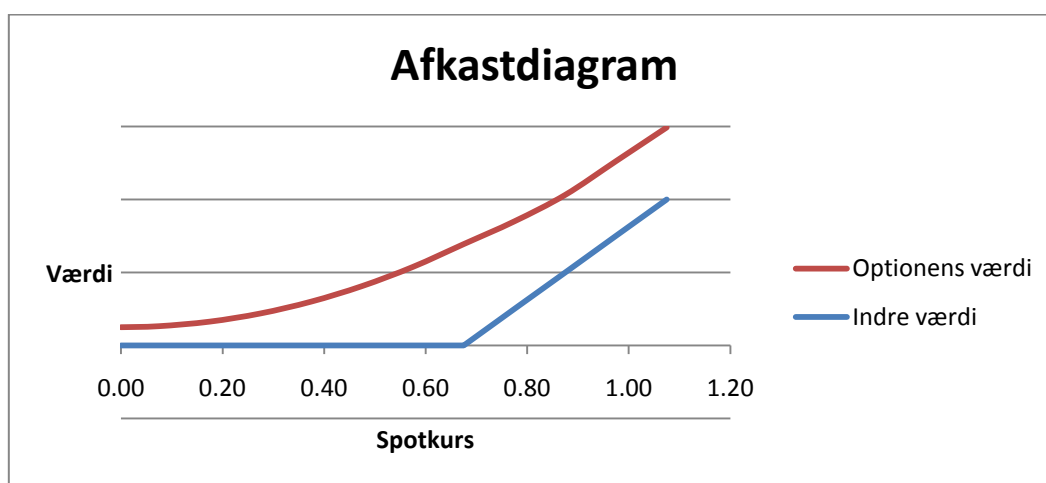
Efter at have beregnet markedsværdier og observeret, at der forekommer en ændring i markedsværdien over tid, giver det mening at analysere hvad der ligger til grunde for ændringen i den beregnede markedsværdi. For at etablere, hvad der forårsager den forholdsvis markante ændring i prisen på optionen, er det nødvendigt at se på hvilke ændringer i markedsdatoene, der kan have påvirket prisen. En undersøgelse af dette kan foretages ved at holde alle variable konstante på nær 1 og dermed isolere effekten af en ændring i den pågældende variabel. I analysen er der taget udgangspunkt i de aktuelle markedsdato fra d. 30/5-2008, hvor 1 variabel bliver ændret af gangen. Der er testet for sammenhængen mellem optionens beregnede markedsværdi og ændring i følgende: Spotkurs for underliggende, volatilitet og renterne. Der er set bort fra mulige ændringer i exercisekursen, da de i opgaven og i handlen er betragtet som statiske. Foruden variation af markedsdato vil der også blive foretaget en undersøgelse, hvor antallet af simulationer varieres, eller beregningsmetoden om man vil. Eftersom der ikke findes et fast konsensus omkring antallet af simulationer, men det i stedet er op til hver enkelt modpart at foretage en afvejning af beregningskraft og præcision, er det rimeligt at antage at dette kan forvolde differencer i markedsværdierne to modparter imellem. Sensitivitetsanalysen vil blive foretaget ud fra en sammenligning mellem, hvad teorien foreslår man kan forvente, og hvad de empiriske resultater viser.

For at beskrive sammenhængen mellem markedsdatoelementerne og markedsværdien af en call-option giver det mening at introducere et par af de såkaldte "Greeks". The Greeks er nogle matematiske værdier, der repræsenterer markedsværdiens sensitivitet i forhold til ændringer i de underliggende datoelementer. De mest relevante Greeks i denne betragtning er

Delta, Vega og Rho, der måler optionsværdiens sensitivitet i forhold til ændringer i henholdsvis spotkursen, volatiliteten og renten.

Variation af spotkursen

Ved en grafisk repræsentation af en standard call-options værdi som funktion af spotkursen, kan delta aflæses som hældningskoefficienten på kurven, hvilket kan ses nedenstående. Ved exercisekursen vil denne værdi være 0.5, hvilket vil sige at en ændring i spotkursen på 1% vil resultere i en ændring på ca 0.5% i optionens værdi, når den er ATM.



Figur 8: Grafisk illustration af optionens værdi som funktion af spotkursen – Forklaring af Delta

Forventningen ud fra det teoretiske grundlag siger at ved en 1% ændring i spotkursen bør markedsværdien variere med en anelse mindre end 0,5% , da udgangspunktet for beregningen er en anelse OTM. Ydermere bør det noteres at med en gearing på 300%, burde ændring i spotkursen have forholdsvis markant effekt nominelt set. Ved en mindre ændring i spotkursen kan deltaværdien estimeres, og samtidig introduceres et worstcase scenarie, hvor valutakursen ændres markant. Baseret på den historiske valutakurs er en ændring på 25% fundet passende. Nedenstående tabel beskriver ændringen i markedsværdien, når spotkursen varieres med henholdsvis $\pm 1\%$ og $\pm 25\%$.

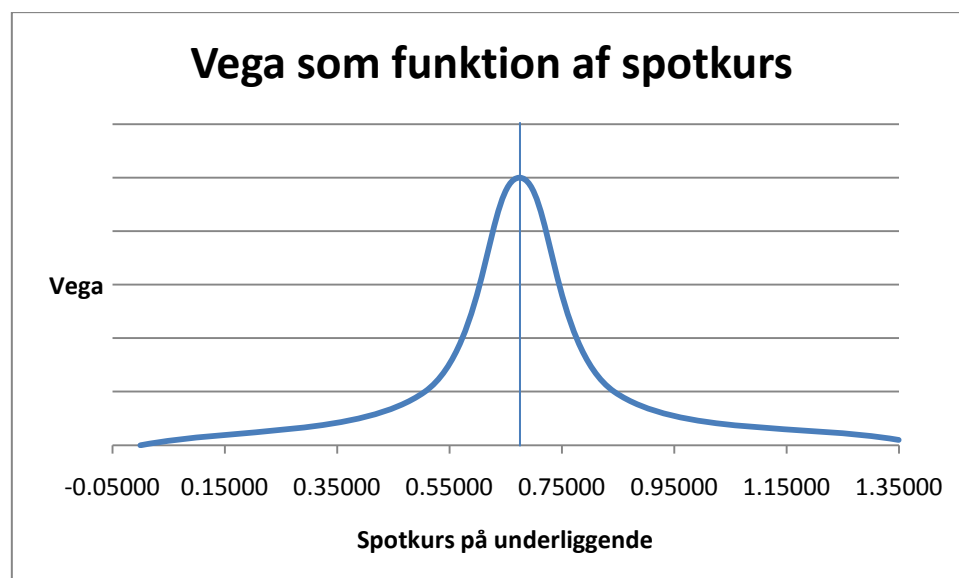
Effekt på options og MV ved ændringer i spotkursen					
Ændring i spotkursen	0%	-1%	1%	-25%	25%
MV i DKK u Asian tail DKK	15.666.228,32	14.322.648,92	17.067.905,55	417.504,76	67.988.278,06
Ændring i optionens afkast %		-0,415%	0,433%	-4,706%	16,149%

Tabel 6: Sensitivetsanalyse – variation af spotkursen

De empiriske beregninger understøtter i høj grad teorien, og konklusionen må være at jo mere ITM optionen er, jo vigtigere bliver det at spotkursen er aflæst korrekt. Hvorvidt spotkursen kan være skyld i differencer i markedsværdien i en markedssituation kan diskuteres. Under normale omstændigheder vil markedsværdier, der udveksles, være blevet beregnet på end-of-day værdier, men ved intra-dag beregninger vil en difference let kunne opstå, og gearingen medfører, at selv en lille ændring er afspejlet i en større nominel difference.

Variation af volatiliteten

Hvad angår ændringen i volatiliteten er dette ret interessant i forhold til Garman Kohlhagen. Selve modellen er baseret på en forudsætning om at volatiliteten på beregningstidspunktet forbliver konstant igennem resten af løbetiden. De observerede markedsdatasæt indikerer at dette langt fra er tilfældet og at antagelsen om en konstant volatilitet altså ikke er holdbar. Vega er et mål for ændringen i markedsværdien givet en ændring i volatiliteten på det underliggende. Dette betyder at for en høj værdi af Vega, reagerer markedsværdien meget ved ændringer i volatiliteten. Grafisk kan sammenhængen mellem Vega og spotkursen beskrives som vist nedenfor:



Figur 9: Illustration af Vega som funktion af spotkursen

Så teorien foreskriver at Vega og dermed markedsværdiens afhængighed af volatiliteten er størst ved en option, der er ATM. Samtidig er en lang restløbetid også bestemmende for hvor meget markedsværdien kan tænkes at blive påvirket af en høj volatilitet, hvilket kan afspejles i et bredere bånd ved et givent konfidensinterval. Vega kan, en anelse kontraintuitivt, for en europæisk call-option bestemmes igennem Black Scholes formel for prisning af optioner. Det kan virke mærkeligt at bestemme Vega ud fra en formel, der har konstant volatilitet som grundantagelse, og principielt ville det være mere korrekt at beregne Vega ud fra en model med Stokastisk volatilitet. Det er dog vist at differencen mellem Vega beregnet i en stokastisk vol model og en Black-Scholes er til at overse, og begge dele er i øvrigt anvendt i markedet. Vega for en europæisk option kan bestemmes igennem Black Scholes som:

$$V = S_0 \sqrt{T} N'(d_1) \quad (4.3.1)$$

Hvor

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \quad (4.3.2)$$

og

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.6.2)$$

Sidste led burde være velkendt. I sensitivitetsanalysen er markedsværdien blevet beregnet, hvor volatiliteten er blevet ændret med henholdsvis $\pm 1\%$ og $\pm 5\%$ på årsbasis. Det vil sige ændringen på månedsbasis skal nedskaleres med en faktor $\sqrt{12}$. Der kunne godt have været foretaget en mere ekstrem ændring af volatiliteten taget i betragtning at volatilitetens udsving i de observerede markedsdatasæt.

Effekt på options og MV ved ændringer i volatiliteten					
Ændring i Volatiliteten	0%	-1%	1%	-5%	5%
MV i DKK u Asian tail DKK	15.666.228,32	13.888.208,62	17.445.355,74	6.811.697,49	24.564.026,58
Ændring i optionens afkast %		-0,549%	0,549%	-2,733%	2,746%

Tabel 7: Sensitivitetsanalyse – variation af volatiliteten

og

Beregnet Vega	0,601
---------------	-------

Værdien af Vega indikerer, at ved en ændring af volatiliteten på 1 %, kan markedsværdien forventes at ændre sig i omegnen af $0,601 \times 0,01 = 0,601 \%$. Dette ser ud til at være nogenlunde i overensstemmelse med de beregnede værdier. Konklusionen på ændringer i volatiliteten er derved, at denne er af meget stor betydning ved en underliggende spotkurs, der ligger i nærheden af exercisekursen. Modellens antagelse om konstant volatilitet virker ikke holdbar taget betydningen af ændringer i denne i betragtning. I lyset af at volatiliteten på bare 6 måneder blev fordoblet, kan dette nemt være årsag til misledende markedsværdier. Ydermere findes der ikke er nogle fastdefinerede bestemmelser for hvordan volatiliteten skal estimeres og hvilke markedsdata der skal indgå. For Fx volatilitet på USD/DKK er der tilgængelige volatiliteter op til 2 år og derefter er det op til anvenderen selv at extrapolere, hvis man skal bruge volatiliteter på noget med løbetid over 2 år. Dette alene gør det meget plausibelt at to modparter kan bruge forskellige mål for volatiliteten og dermed fremkomme med forskellige markedsværdier.

Variation af renten

Eftersom Garman-Kohlhagen bygger på en antagelse om statiske renter er det interessant at se hvilken indflydelse en variation af renterne vil have på markedsværdien. I løbet af finanskrisen tiltag er renterne igennem optionens levetid styrtdykket, så som følge af de observerede markedsdata, kan det allerede nu dementeres at renterne er statiske. Igennem sensitivitetsanalysen er det intentionen at afdække hvor stor en effekt på markedsværdien en ændring i renterne vil have. De observerede korrelationer (Tabel 1) afslører at renternes udvikling er positivt korreleret med hinanden, og for at bibeholde et realistisk scenarie vil begge renter derfor først blive varieret samme grad. Efterfølgende varieres kun den ene rente, hvormed effekten af ændringer på rentedifferentialet kan ses. Rent intuitivt er forventningen at r_d bærer den største betydning eftersom den både indgår i relationen $\hat{\mu} = r_d - r_f - 0,5\sigma^2$ og som diskonteringsfaktor.

Rho er den analoge variant til Delta og Vega, i og med den beskriver variationen i optionens værdi som følge af den underliggende rente. Det er markedspraksis at angive Rho i

forbindelse med en ændring på renten på 1 %, hvilket også vil være tilfældet her. Rho kan ligesom Vega udledes fra Black Scholes formel, hvor metoden er angivet nedenfor:

$$Rho = KTe^{-r_d T} N(d_2) \quad (4.3.3)$$

Hvor

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.6.3)$$

Fra formelen er det også øjensynligt at r_d indgår to steder. Igen kan det virke en anelse kontraintuitivt at beregne optionsværdiens sensitivitet overfor ændringer i renten igennem en model, der bygger på statiske renter, men ikke desto mindre er det anvendt markedspraksis. Nedenstående tabel viser beregningerne udført hvor renterne varieres henholdsvis $\pm 1\%$ og som et stresset scenarie varieres de $\pm 3\%$, ud fra en betragtning at de er faldet med godt 3 % igennem optionens levetid.

Effekt på MV ved ændringer i renterne					
Ændring i Volatiliteten	0%	-1%	1%	-3%	3%
MV i DKK u Asian tail DKK	15.666.228,32	15.279.427,77	16.062.820,78	14.534.241,28	16.886.379,21
Ændring i optionens afkast %		-0,119%	0,122%	-0,349%	0,377%

Tabel 8: Sensitivitetsanalyse – Variation af renterne – 100% korreleret

Beregnet RHO	0,079
--------------	--------------

Størrelsen på ændringen i markedsværdien taget i betragtning, lader renten til at være knap så vigtig som eksempelvis spotkursen og volatiliteten, når begge renter antages at variere i samme grad. Værdien af Rho giver også en indikation af dette, eftersom der ved en ændring på 1 % i renten forventes en ændring i markedsværdien på $0,079 \times 0,01 = 0,079\%$, hvilket er forholdsvis tæt på ændringen observeret i de simulerede beregninger.

Nedenstående tabel illustrerer konsekvensen af at lade kun den ene rente henholdsvis stige og falde med 1%. Ved at holde den anden rente konstant, vil dette afspejle hvorledes en ændring i rentedifferentialet vil påvirke markedsværdien.

Effekt på MV ved ændringer i rentedifferentialet					
Ændring i Volatiliteten	0%	-1% EUR	+1% EUR	-1% USD	+1% USD
MV i DKK u Asian tail DKK	15,666,228.32	12,785,651.40	18,904,168.84	19,382,730.15	12,469,972.54
Ændring i optionens afkast %		-0.889%	0.999%	1.147%	-0.986%

Tabel 9: Sensitivitetsanalyse – Variation af renterne – 0% korrelation

Fra beregningerne kan det udledes at renten har en målbar effekt på markedsværdien, specielt når rentedifferentialet ændres. Af større udledninger, er det åbenlyst at en antagelse om statiske renter ikke understøttes af markedets udvikling. Ligeledes kan det påvises at variation af renteniveauet har en effekt på prisdannelsen. Såfremt denne variation skal fanges, er det nødvendigt at bruge en model, der også tager højde for rentens udvikling.

Variation af simuleringsmetode

Indtil videre er de ovennævnte eksempler er beregningerne blevet udført med udgangspunkt i Wienerprocesser baseret på de samme "tilfældige" tal, som beskrevet under fremgangsmåden i afsnit 4.2. Det er dog et meget usandsynligt scenarie at to modparter ville ende op med de samme "tilfældige" tal, men ved at benytte et højt antal simulationer bliver dette udvandet. For at teste hvor følsom markedsværdien er overfor simulationsmetode, vil der blive varieret over to dimensioner. Der vil blive anvendt et andet sæt "tilfældige" tal og antallet af simulationer bliver varieret. Forventningen vil være, at hvor markedsværdien vil være nogenlunde stabil ved et højt antal simulationer uagtet sættet af tilfældige tal, vil det være besværligt at fremkomme med ens markedsværdier ved et lavt antal simulationer. Nedenstående tabel viser denne sammenhæng:

Variation over antallet af simuleringer og generering af tilfældige tal				
Simuleringer	100	1000	5000	10000
Seed: -25000	16.439.421	15.361.006	15.591.577	15.666.228
Seed: -20000	10.903.308	15.224.439	14.956.996	15.401.096
Seed: -35000	14.797.109	16.356.280	15.292.941	15.856.923
Seed: -15000	16.595.056	14.681.493	15.626.121	15.506.532
Maks-Min	5.691.749	1.674.787	669.125	455.827

Tabel 10: Sensitivitetsanalyse – Variation på simuleringsmetoden

Beregningerne viser med al tydelighed at metoden anvendt ved simulation kan påvirke markedsværdien. Selv ved 10.000 simuleringer på samme markedsdatagrundlag varierer den beregnede markedsværdi med en halv million. Til sammenligning er det normal praksis at

anvende 3000-5000 stier, så mindre uoverensstemmelser i markedsværdien kan let forestilles at opstå som resultat af simuleringen.

4.4 Konklusion på Garman Kohlhagen

Igennem beregningerne og den foreståede analyse virker det oplagt at udfordre validiteten af modellens antagelser om statiske renter og volatilitet. Når det igennem analysen er påvist at både de to renter, og volatiliteten har en indflydelse på markedsværdien, kan man kun konkludere at Garman-Kohlhagen må have en indbygget unøjagtighed igennem de underliggende antagelser. Hvorvidt unøjagtigheden er så stor at modellens skal forkastes er selvfølgelig et spørgsmål om formålet med beregningen. Hvis formålet er at indhente en indikativ værdi af optionen er metoden både let og anvendelig, men med de forsimplende antagelser er det på bekostning af præcisionen. Sammenholdt med praksis på markedet, virker det sandsynligt, at der forekommer variationer over volatilitet og renter hvis man ser på markedsdatabaserne. Specielt estimationen af volatiliteten lader til at have en stor indflydelse på markedsværdien, og en forbedring til modellen ville uden tvivl være at undersøge hvordan enten en tidsafhængig eller stokastisk volatilitet kunne inddrages i stedet. Med hensyn til renten, vil næste model undersøge hvorvidt en model med stokastiske renter udgør en forbedring.

For at drage en parallel til andre undersøgelser, er der i forhold til modeller der, som Garman-Kohlhagen, betragter renterne og volatiliteten som statisk, igennem tiden udført en del empiriske undersøgelser. For at kunne sammenstille med egne beregnede resultater samt at tilføre yderligere materiale til kritisk diskussion af modellen, virker det hensigtsmæssigt at kort inddrage nogle af disse studier.

Shastri og Tandon (1986) foretog igennem empiriske tests en undersøgelse af, hvor effektivt markedet var i stand til at prise valutaoptioner. Denne undersøgelse blev udført med beregninger igennem en model tilsvarende Garman-Kohlhagen, hvor samtidig forskellige metoder til estimering af volatiliteten blev inddraget i analysen. Analysen blev udført på et datamateriale bestående af lukke-kurserne på 6750 handlede valutaoptioner på Philadelphia Stock Exchange inden for fire valutaer (GBP, JPY, CHF og DEM) igennem en periode på 14

måneder (14 december 1982 – 15 februar 1984). I forhold til denne opgave var der tre væsentlige implikationer. Først og fremmest virker det til at markedet ikke er effektivt ved prisfastsættelse gennem Garman-Kohlhagen modellen eftersom der blev fundet statistisk signifikante muligheder for abnormal profit. Derudover er et af de, i sammenhæng med denne opgave, vigtigste resultater fra Shastri og Tandon's undersøgelse, at de observerede markedspriser på valutaoptionerne afveg signifikant fra værdierne estimeret igennem modellen. Dette var tilfældet på trods af at tre forskellige mål for volatiliteten blev anvendt. Den tredje væsentlige implikation var, at metoden til estimering af volatiliteten havde en mærkbar effekt på resultaterne. Shastri og Tandon estimerede volatiliteten både igennem den historiske volatilitet, den implicitte volatilitet igennem de observerede optionspriser og via den implicitte volatilitet ved den mest sensitive option. Her viste de to implicitte mål sig som bedre estimater, selvom den implicitte volatilitet fra den mest sensitive option havde et bias imod overprisning.

4.5 Fremgangsmåde for beregning med Vasicek-modellen

Som gennemgået i det teoretiske afsnit inddrager den modificerede Vasicek model antagelsen, at både renter og den underliggende valutakurs er stokastiske variable. Fremgangsmåden for analysen er analog til den anvendte metode ved Garman-Kohlhagen modellen. Dette vil sige, at indledningsvis gennemgås fremgangsmåden ved beregningerne, hvorefter resultaterne præsenteres i forbindelse med en nærmere sensitivitsanalyse. Den primære difference i forhold til gennemgangen af Garman-Kohlhagen modellen ligger i den mere omfattende beskrivelse af fremgangsmåden, der er nødvendigt grundet Vasicek modellens højere grad af kompleksitet.

Selve fremgangsmåden kan for overskuelighedens skyld deles op i tre trin, hvor det første dækker over tilpasning af markedssdata, hvilket indbefatter at transformere markedssdata til anvendeligt input i modellen. Dernæst skal nogle parametre findes igennem en kalibreringsproces og slutteligt skal selve modellen inkluderes i en Monte Carlo simulering. Udgangspunktet for analysen er det samme markedssdatagrundlag som for Garman-Kohlhagen modellen, men en inddragelse af stokastiske renter forudsætter, at flere data er

nødvendige før en decideret prisfastsættelse kan finde sted. De ekstra markedsdata der skal anvendes, er korrelationsmatricen, som er beskrevet i afsnit 3.3.3 et udtryk for renternes volatilitet, hvilket er beskrevet i afsnit 3.3.5, samt de respektive rentekurver afsnit 3.3.4.

Renterne til tidspunkt $t = 0$ er i modsætning til i Garman-Kohlhagen modellen ikke renten til udløb, men de instantane renter. De i beregningen anvendte renter er 1-dags eller overnight renterne, der også på markedet er kendt som TN-renter (Tomorrow/Next).

Ved en model med stokastiske renter er det ikke tilstrækkeligt med et volatilitetsudtryk for den underliggende valutakurs alene. Her er det nødvendigt at inkludere renternes volatilitet også, hvilket opnås igennem anvendelse af de implicitte ATM Cap volatiliteter, beskrevet i afsnit 3.3.5. Under Garman-Kohlhagen blev volatiliteten for valutakrydset antaget som værende deterministisk, hvilket er en antagelse, der kan genbruges. Ligeledes kan den implicitte rentevolatilitet antages at være deterministisk og bestemmes som henholdsvis

$$\sigma_d = \sqrt{\int_0^T \sigma_d^2 ds} \quad \text{og} \quad \sigma_{df} = \sqrt{\int_0^T \sigma_f^2 ds} \quad (4.5.1 \text{ og } 4.5.2)$$

for hjem- og udlandsrenten. Såfremt dette ikke var tilfældet ville det antyde at optionerne, hvorfra de implicitte volatiliteter beregnes, ikke var prisfastsat korrekt. Selve beregningen tager udgangspunkt i de tilgængelige cap volatiliteter for de to 3-måneders renter, hvor der er antaget en lineær relation imellem de tilgængelige punkter. Beregningen af rentevolatiliteterne er foretaget for alle tre tidspunkter, der ønskes beregnet markedsværdi på. Modelleringsmæssigt er det muligt at inkludere volatiliteterne som tidsvarierende (igennem en Hull-White model), men det er undladt i denne opgave for at holde kompleksiteten på et overskueligt niveau. Ligeledes sikrer det, at de beregnede resultater er mere sammenlignelige for de to modeller, da samme antagelse om konstant volatilitet er bibeholdt.

Eftersom de tre stokastiske variable ikke er fuldstændigt ukorrelerede, er det nødvendigt at korrigere for korrelationen i beregningen. Som det fremgår i (2.7.1, 2.7.2 og 2.7.3) indgår der tre wienerprocesser og det er disse Brownske bevægelser, hvori der skal justeres for denne korrelation. Som det vil fremgå senere når førnævnte formel bliver diskretiseret, bliver de tre Wienerprocesser erstattet med ϵ_s, ϵ_d og ϵ_f , der repræsenterer wienerprocesserne korrigeret for korrelation. Hvis man indledningsvis antager tre uafhængige wienerprocesser,

$$\begin{cases} u_s \sim N(0,1) \\ u_d \sim N(0,1) \\ u_f \sim N(0,1) \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Kan de tre værdier for epsilon udtrykkes igennem en Cholesky dekomposition som:

$$\begin{cases} \epsilon_s = u_s \\ \epsilon_d = a_1 u_s + a_2 u_d \\ \epsilon_f = b_1 u_s + b_2 u_d + b_3 u_f \end{cases} \quad (4.5.4)$$

Eftersom værdierne for u bliver simuleret igennem funktionen til generering af tilfældige normalfordelte tal i Excel, er det nødvendige input forud for programmeringen værdierne konstanterne: a_1, a_2, b_1, b_2 og b_3 . Disse findes ved at foretage en Cholesky dekomposition baseret på korrelationsmatricen beskrevet i afsnit 3.3.5. Det underliggende princip i en Cholesky dekomposition forklaret kort, er at dekomponere en symmetrisk matrice til produktet af en Matrice L og dens transponerede modstykke. Koden for dette er inkluderet i appendiks B En forudsætning udover symmetri er at matricen man tager udgangspunkt i er positiv definit. En kontrol af hvorvidt Eigenværdierne er positive afslører at alle tre korrelationsmatricer er positiv definite og derved opfylder forudsætningerne for en Cholesky dekomposition. Efterfølgende dekompositionen indeholder den resulterende matrice de nødvendige værdier for a_1, a_2, b_1, b_2 og b_3 som følger:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \quad (4.5.5)$$

Denne dekomposition udføres for korrelationsmatricen til hvert værdiansættelsestidspunkt. Denne indledende fastlæggelse af korrelationerne betyder, at der er en antagelse om at de er statiske igennem restløbetiden. Som det vil fremgå af markedsdataene er dette ikke helt tilfældet, så der tilføres en smule unøjagtighed ved denne antagelse.

4.5.2 Kalibrering

Slutteligt mangler parametrene for mean reversion og hastigheden hvormed dette sker for de to renter, θ_d, θ_f, V_d og V_f . Metoden hvormed disse parametre fastlægges er igennem en kalibrering. Det grundlæggende princip i kalibreringen er at modellen forsøges tilpasset til den observerede rentekurve, hvor værdier af Theta og V søges igennem en itereringsproces sådan at misfittet bliver minimeret. Hvis vi denoterer $R(0,T)$ som den kontinuerligt tilskrevne rente på tidspunkt 0 for en løbetid af længde T, er det muligt at udtrykke renten til ethvert tidspunkt som funktion af V, θ, σ, T og R_0 igennem følgende sammenhæng:

$$R(0, T) = -\frac{1}{T} \ln A(0, T) + \frac{1}{T} B(0, T) r_0 \quad (4.5.6)$$

Hvor

$$B(0, T) = \frac{1 - e^{-VT}}{V} \quad (4.5.7)$$

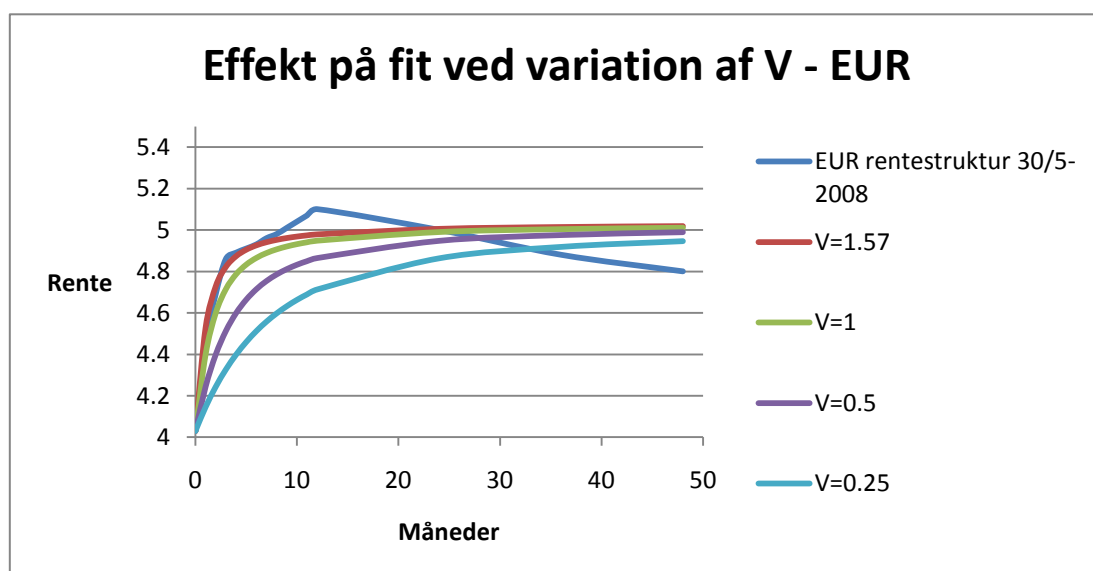
Og

$$A(0, T) = e^{\frac{B(0, T) - T(V^2 \theta - \frac{\sigma^2}{2})}{V^2} - \frac{\sigma^2 B(0, T)^2}{4V}} \quad (4.5.8)$$

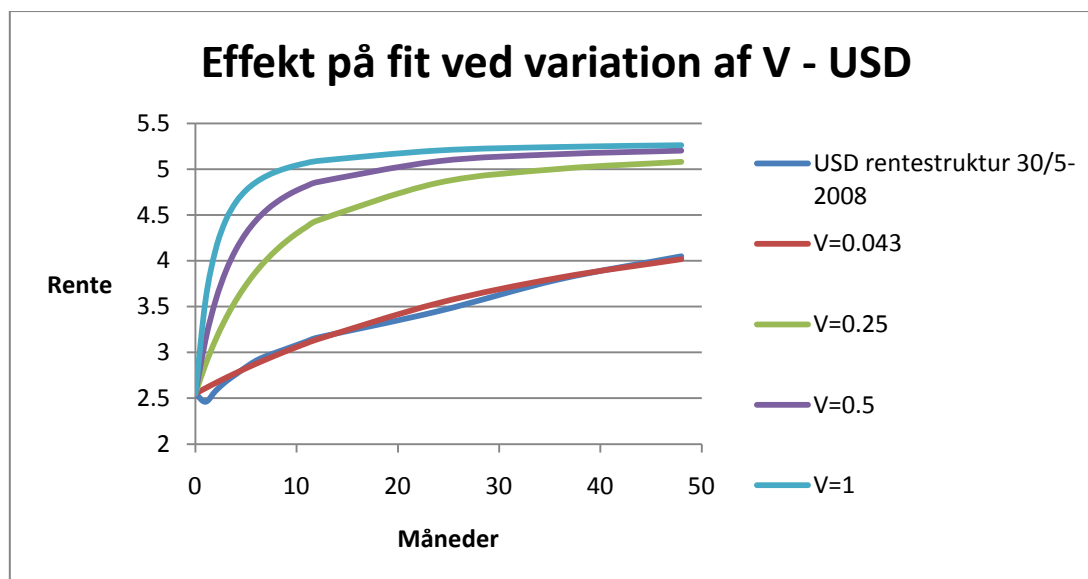
Ved på denne måde at beregne rentekurven ud fra ovenstående formler, kan en itereringsproces efterfølgende anvendes, der søger at minimere summen af de kvadrerede residualer ved at finde værdier for V og Theta. Betydningen af værdierne for V og Theta er

dermed i hvor høj grad modellen er i stand til at replikere den observerede rentekurve ud fra markedsdatabene som de ser ud i dag. I forhold til (2.7.2 og 2.7.3), er betydningen af V , hastigheden, hvormed renten søger mod Theta, der er et udtryk for den lange rente, som kurven konvergerer mod. I princippet vil denne kalibreringsproces skulle gentages når den observerede rentekurve ændrer sig, men anvendt markedspraksis er at anvende samme kalibrering og acceptere en grad af misfit og i stedet kalibrere på faste intervaller.

Nedenstående 4 grafer illustrerer resultatet af kalibreringsprocessen baseret på rentesatserne ud til 4 årspunktet for begge valutaer, hvor både den optimale kalibreringsværdi er angivet og samtidigt illustreret hvorledes modellen ville estimere rentekurven hvis andre værdier for V blev anvendt. Udgangspunktet er markedsdatabene som de så ud d. 30/5 2008.

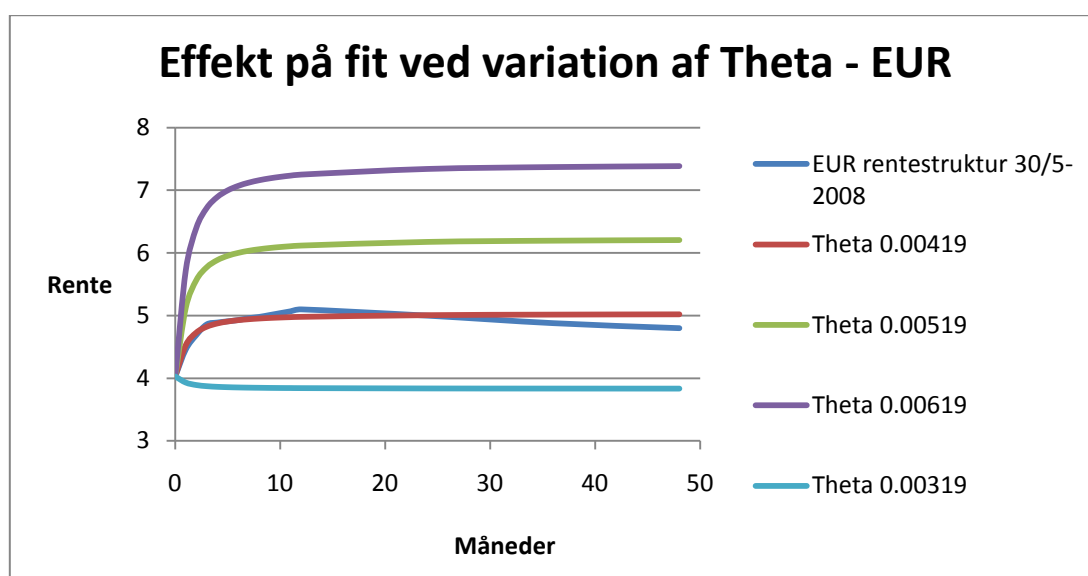


Figur 10: Estimering af EUR-rentekurven – Variation af V

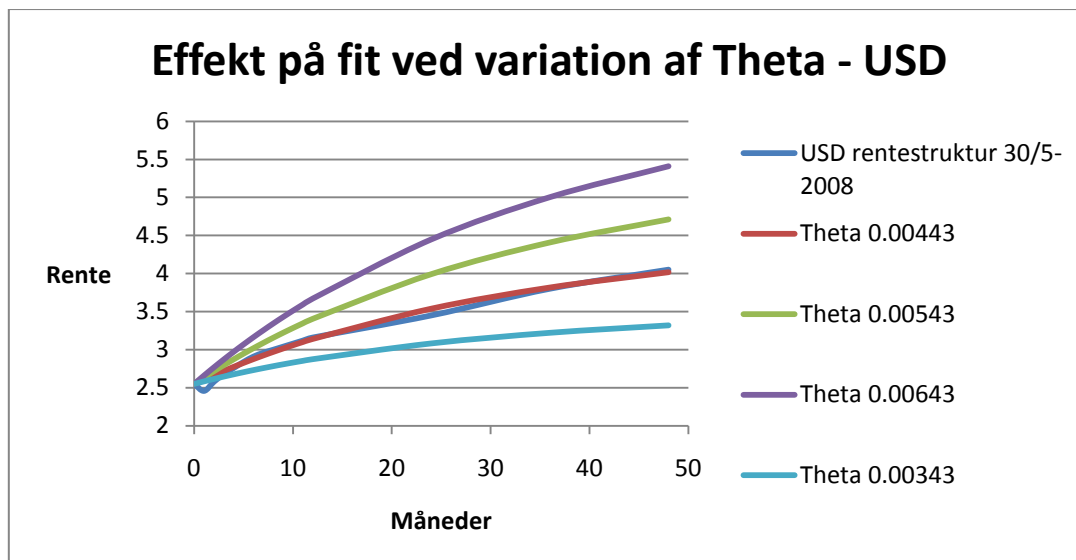


Figur 11: Estimering af USD-rentekurven – Variation af V

Som det ses fra graferne, angiver V hastigheden hvormed renten nærmer sig Theta. Fra EUR-estimeringen ses det tydeligt hvordan modellen har svært ved at håndtere rentestrukturer med en pukkel, når der ikke er flere variable end to. Ved kalibreringen mod USD, får vi et meget tæt fit på den aktuelle rentekurve af den simple årsag at rentekurven er meget lineær, hvilket også er aflæseligt i den meget lave værdi for V. Med hensyn til Theta illustrerer nedenstående kalibreringer hvordan fittet bliver når V holdes konstant og Theta varieres.



Figur 12: Estimering af EUR-rentekurven – Variation af Theta



Figur 13: Estimering af USD-rentekurven – Variation af Theta

Som graferne med al tydelighed viser, vil en ændring i enten den observerede rentekurves udseende eller det langsigtede renteniveau indebære at der skal genkalibreres. Samtidig giver ovenstående grafer et godt billede af Vasicek-modellens begrænsninger, hvor især pukler på rentekurven ikke kan modeleres med kun Theta og V som kalibreringsparametre. Derudover giver det mening at kommentere på at kalibreringsparametrene, når de først er bestemt, antages af modellen som værende statiske i resten af løbetiden, på trods af at kalibreringsprocessen afslører at dette ikke er tilfældet.

Efter at have gennemgået de indledende beregninger og programmeret modellen i en simuleringsproces, er det muligt at foretage beregningerne for de tre tidspunkter. Det nødvendige input kan ses i nedenstående tabel:

Månedlige input				
	30/05/2008	30/11/2008	30/05/2009	Kilde
s0	0.64267	0.79152	0.70932	Observeret værdi
X	0.67477	0.67477	0.67477	Observeret værdi
T	30	24	18	Observeret værdi
rd0	0.00336	0.00238	0.00054	Observeret værdi
rf0	0.00213	0.00083	0.00021	Observeret værdi
sigmas	0.02874	0.05202	0.04230	Observeret værdi / lineært interpoleret
sigmad	0.00043	0.00126	0.00139	Observeret værdi / lineært interpoleret
sigmaf	0.00107	0.00207	0.00214	Observeret værdi / lineært interpoleret
Vd	1.57535	0.59034	0.18583	Kalibreret værdi
Vf	0.04356	1.91557	0.30927	Kalibreret værdi
Thetad	0.00419	0.00333	0.00211	Kalibreret værdi
Thetaf	0.00443	0.00216	0.00162	Kalibreret værdi
A1	-0.03875	-0.00318	-0.06612	Fra Cholesky dekomposition
A2	0.99925	0.99999	0.99781	Fra Cholesky dekomposition
B1	-0.03219	0.02780	-0.06662	Fra Cholesky dekomposition
B2	0.34988	0.45309	0.29494	Fra Cholesky dekomposition
B3	0.93624	0.89103	0.95319	Fra Cholesky dekomposition
Seed	-25000	-25000	-25000	Valgt
Stier	10000	10000	10000	Valgt

Tabel 11: Input til beregning med Vasicek

Som det fremgår af tabellen er inputtet væsentligt mere omfattende end for Garman-Kohlhagen modellen, hvilket igen afspejler den højere grad af kompleksitet. Både den indledende tilpasning af markedsdata samt beregningen er væsentligt mere resourcekrævende, hvilket skal opvejes mod kvaliteten af det resulterende output.

4.5.3 Diskretisering ved Eulers metode

I simuleringssammenhæng er det nødvendigt at beskrive udviklingen af det underliggende valutakryds igennem hele levetiden. Med udgangspunkt i (2.7.2, 2.7.3 og 2.7.4) kan stien diskretiseres med Eulers metode på følgende vis:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + (r_{d_t} - r_{f_t})S_t\Delta t + \sigma_s S_t \epsilon_s \sqrt{\Delta t} \quad \text{hvor } \epsilon_s \sim N(0,1) \quad (4.5.9)$$

hvor de to stokastiske renter følger processerne

$$r_{d_{t+\Delta t}} = r_{d_t} + V_d(\theta_d - r_{d_t})\Delta t + \sigma_{r_d}\epsilon_d\sqrt{\Delta t} \quad \text{hvor } \epsilon_d \sim N(0,1) \quad (4.5.10)$$

og

$$r_{f_{t+\Delta t}} = r_{f_t} + V_f(\theta_f - r_{f_t})\Delta t + \sigma_{r_f}\epsilon_f\sqrt{\Delta t} \quad \text{hvor } \epsilon_f \sim N(0,1) \quad (4.5.11)$$

Den anvendte formel for stien for valutakrydsets udvikling er den omskrevne version af (4.5.9) angivet nedenfor. Samtidig betyder anvendelse af Δt med størrelsen 1 måned, når månedlige data anvendes, at dette samt leddet $\sqrt{\Delta t}$ kan elimineres da de er lig 1. Det vil sige at den simulerede sti for valutakrydset er:

$$S_{t+\Delta t} = S_t(1 + (r_{d_t} - r_{f_t}) + \sigma_s\epsilon_s) \quad \text{hvor } \epsilon_s \sim N(0,1) \quad (4.5.12)$$

Ved modellering af stien er igen anvendt Monte Carlo Simulering, hvor koden er vedlagt i appendiks B. Der hvor fremgangsmetoden adskiller sig fra den anvendte ved Garman-Kohlhagen modellen er, at tre stier skal modelleres simultant, der beskriver både renternes og valutakrydsets udvikling. Samtidig betyder korrelationen mellem de tre processer at en korrektion skal inkluderes igennem de tre epsilonværdier. Betydningen af dette er at beregningsbyrden er væsentligt tungere, hvilket kan være et incitament til at nedjustere antallet af stier.

Nedenfor er angivet et eksempel på fire stier, hvor denne simuleringsproces implementeres på markedsdataene fra d. 30/11 2008. Det endelige resultat er ligesom for Garman-Kohlhagen det tilbagediskonterede gennemsnit af afkastet for valutakrydsets stier ved terminaltidspunktet. Ligeledes her findes også en angivelse af resultatet såfremt Asian tail elementet var inkluderet.

Simulerede stier for valutakursens udvikling 30/11-2008 (Euler diskretisering)												
T	S	rd	rf	S	rd	rf	S	rd	rf	S	rd	rf
0	0.79	0.0024	0.0008	0.79	0.0024	0.0008	0.79	0.0024	0.0008	0.79	0.0024	0.0008
1	0.88	0.0046	0.0060	0.81	0.0029	0.0038	0.80	0.0035	0.0041	0.74	0.0027	0.0032
2	0.82	0.0056	0.0015	0.76	0.0032	0.0005	0.77	0.0055	0.0021	0.78	0.0042	0.0023
3	0.83	0.0024	-0.0012	0.70	0.0037	0.0036	0.71	0.0050	0.0020	0.81	0.0037	0.0028
4	0.77	0.0041	0.0074	0.65	0.0032	0.0003	0.76	0.0041	0.0024	0.80	0.0032	0.0010
5	0.74	0.0041	-0.0008	0.65	0.0051	0.0064	0.73	0.0024	0.0011	0.80	0.0023	0.0025
6	0.70	0.0047	0.0083	0.62	0.0060	0.0011	0.77	0.0030	0.0040	0.82	0.0020	-0.0001
7	0.69	0.0052	-0.0014	0.57	0.0033	0.0009	0.73	0.0049	0.0043	0.80	0.0014	0.0011
8	0.76	0.0030	0.0047	0.58	0.0011	0.0006	0.67	0.0038	0.0010	0.86	0.0026	0.0029
9	0.74	0.0028	-0.0022	0.60	0.0026	0.0044	0.68	0.0041	0.0024	0.85	0.0014	0.0012
10	0.79	0.0033	0.0059	0.60	0.0047	0.0033	0.68	0.0036	0.0041	0.80	0.0015	0.0016
11	0.87	0.0026	-0.0023	0.60	0.0044	0.0019	0.64	0.0056	0.0034	0.79	0.0008	0.0003
12	0.86	0.0039	0.0072	0.61	0.0034	0.0027	0.64	0.0040	0.0002	0.85	0.0025	0.0037
13	0.90	0.0022	-0.0050	0.63	0.0030	0.0010	0.68	0.0035	0.0052	0.89	0.0039	0.0022
14	0.93	0.0019	0.0070	0.68	0.0052	0.0061	0.66	0.0026	-0.0019	0.84	0.0036	0.0012
15	0.82	0.0021	-0.0043	0.72	0.0026	-0.0037	0.65	0.0026	0.0039	0.83	0.0039	0.0038
16	0.89	0.0016	0.0051	0.69	0.0031	0.0056	0.66	0.0026	0.0000	0.75	0.0039	0.0012
17	0.88	0.0019	-0.0011	0.74	0.0044	-0.0001	0.65	0.0076	0.0092	0.81	0.0047	0.0041
18	0.87	0.0007	0.0035	0.75	0.0041	0.0045	0.66	0.0046	-0.0041	0.82	0.0042	0.0012
19	0.83	0.0012	-0.0007	0.85	0.0041	-0.0011	0.69	0.0033	0.0072	0.80	0.0030	-0.0003
20	0.89	0.0012	0.0019	0.93	0.0029	0.0060	0.72	0.0037	-0.0013	0.77	0.0037	0.0064
21	0.88	0.0023	0.0029	0.96	0.0008	-0.0062	0.75	0.0048	0.0086	0.81	0.0017	-0.0034
22	0.83	0.0020	0.0027	1.03	0.0032	0.0117	0.77	0.0034	-0.0058	0.85	0.0011	0.0056
23	0.85	0.0027	0.0006	1.07	0.0043	-0.0047	0.81	0.0032	0.0078	0.77	0.0036	0.0008
24	0.84	0.0026	0.0033	1.00	0.0037	0.0086	0.82	0.0021	-0.0051	0.82	0.0067	0.0074
Afkast	24.20%			47.84%			22.08%			21.51%		
Asian tail	25.97%			50.59%			17.21%			20.29%		

m/ asian tail	26.93%
MV m/ asian tail	87,268,807
U/asian tail	27.31%
MV u/ asian tail	88,474,223

Tabel 12: 4 Simulerede stier for valutakursen og tilhørende renter ved Euler diskretisering

Tabellen illustrerer hvordan, der for hver af de stokastiske variable, simuleres en sti igennem restløbetiden. Om end det vigtigste element for markedsværdien i dette tilfælde er valutakursen ved $t=24$, giver det mening at kort dvæle ved de respektive renters udvikling. Vasicek-modellen tillader negative renter, hvilket bliver øjensynligt for R_f . Kombinationen af en høj værdi af V og tilsvarende stort spænd mellem Θ og r_0 medvirker at rentens estimerede sti foretager nogle store udsving. Årsagen skal findes i diskretiseringsmetoden.

4.5.4 Eksakt diskretisering

Et alternativ til anvendelsen af Eulers metode ved diskretisering er en eksakt diskretisering, hvor de to renter i stedet følger processerne:

$$S_{t+\Delta t} = S_t(1 + (r_{d_t} - r_{f_t}) + \sigma_s \epsilon_s) \quad \text{hvor } \epsilon_s \sim N(0,1) \quad (4.5.13)$$

Hvor

$$r_{d_{t+\Delta t}} = \left(e^{-V_d \Delta t} r_{d_t} + \theta_d (1 - e^{-V_d \Delta t}) \right) + \frac{\sigma_d^2}{2V_d} (1 - e^{2V_d \Delta t}) \epsilon_d \quad \text{hvor } \epsilon_d \sim N(0,1) \quad (4.5.14)$$

$$r_{f_{t+\Delta t}} = \left(e^{-V_f \Delta t} r_{f_t} + \theta_f (1 - e^{-V_f \Delta t}) \right) + \frac{\sigma_f^2}{2V_f} (1 - e^{2V_f \Delta t}) \epsilon_f \quad \text{hvor } \epsilon_f \sim N(0,1) \quad (4.5.15)$$

Betydningen af anvendelsen af denne metode er at tilnærmelsen mod Theta følger en eksponentialprocess, i stedet for en lineær, hvilket forhåbentligt burde minimere graden af overshooting for renten som var observerbart i tabel 12. Nedenstående viser de samme 4 stier baseret på de samme tilfældigt genererede værdier, men hvor eksakt diskretisering nu er anvendt.

Simulerede stier for valutakursens udvikling 30/11-2008 (Eksakt diskretisering)												
T	S	rd	rf	S	rd	rf	S	rd	rf	S	rd	rf
0	0.79	0.0024	0.0008	0.79	0.0024	0.0008	0.79	0.0024	0.0008	0.79	0.0024	0.0008
1	0.88	0.0028	0.0011	0.81	0.0028	0.0011	0.80	0.0028	0.0011	0.74	0.0028	0.0011
2	0.82	0.0030	0.0011	0.76	0.0030	0.0011	0.77	0.0030	0.0011	0.78	0.0030	0.0011
3	0.83	0.0032	0.0011	0.70	0.0032	0.0011	0.71	0.0032	0.0011	0.81	0.0032	0.0011
4	0.77	0.0032	0.0011	0.65	0.0032	0.0011	0.76	0.0032	0.0011	0.81	0.0032	0.0011
5	0.74	0.0033	0.0011	0.65	0.0033	0.0011	0.73	0.0033	0.0011	0.80	0.0033	0.0011
6	0.70	0.0033	0.0011	0.63	0.0033	0.0011	0.77	0.0033	0.0011	0.83	0.0033	0.0011
7	0.70	0.0033	0.0011	0.57	0.0033	0.0011	0.73	0.0033	0.0011	0.81	0.0033	0.0011
8	0.76	0.0033	0.0011	0.58	0.0033	0.0011	0.68	0.0033	0.0011	0.87	0.0033	0.0011
9	0.75	0.0033	0.0011	0.60	0.0033	0.0011	0.68	0.0033	0.0011	0.86	0.0033	0.0011
10	0.79	0.0033	0.0011	0.61	0.0033	0.0011	0.68	0.0033	0.0011	0.81	0.0033	0.0011
11	0.88	0.0033	0.0011	0.60	0.0033	0.0011	0.65	0.0033	0.0011	0.80	0.0033	0.0011
12	0.87	0.0033	0.0011	0.62	0.0033	0.0011	0.65	0.0033	0.0011	0.86	0.0033	0.0011
13	0.91	0.0033	0.0011	0.64	0.0033	0.0011	0.69	0.0033	0.0011	0.90	0.0033	0.0011
14	0.93	0.0033	0.0011	0.69	0.0033	0.0011	0.67	0.0033	0.0011	0.86	0.0033	0.0011
15	0.83	0.0033	0.0011	0.73	0.0033	0.0011	0.66	0.0033	0.0011	0.85	0.0033	0.0011
16	0.90	0.0033	0.0011	0.70	0.0033	0.0011	0.67	0.0033	0.0011	0.77	0.0033	0.0011
17	0.90	0.0033	0.0011	0.75	0.0033	0.0011	0.66	0.0033	0.0011	0.83	0.0033	0.0011
18	0.89	0.0033	0.0011	0.76	0.0033	0.0011	0.67	0.0033	0.0011	0.84	0.0033	0.0011
19	0.84	0.0033	0.0011	0.86	0.0033	0.0011	0.69	0.0033	0.0011	0.82	0.0033	0.0011
20	0.91	0.0033	0.0011	0.95	0.0033	0.0011	0.73	0.0033	0.0011	0.78	0.0033	0.0011
21	0.90	0.0033	0.0011	0.98	0.0033	0.0011	0.76	0.0033	0.0011	0.83	0.0033	0.0011
22	0.85	0.0033	0.0011	1.04	0.0033	0.0011	0.79	0.0033	0.0011	0.87	0.0033	0.0011
23	0.88	0.0033	0.0011	1.10	0.0033	0.0011	0.82	0.0033	0.0011	0.79	0.0033	0.0011
24	0.86	0.0033	0.0011	1.01	0.0033	0.0011	0.84	0.0033	0.0011	0.84	0.0033	0.0011
Afkast	28.09%			50.16%			24.33%			25.12%		
Asian tail	29.62%			53.18%			19.01%			23.54%		

m/ asian tail	29.60%
MV m/ asian tail	95,899,601
U/asian tail	30.16%
MV u/ asian tail	97,706,670

Tabel 13: 4 Simulerede stier for valutakursen og tilhørende renter ved eksakt diskretisering

Her er det tydelig at se hvorledes renterne konvergerer mod det langsigtede niveau langt hurtigere. Konvergenshastigheden er igen determineret af størrelsen på V , men det eksponentielle led i funktionen anvendt ved diskretiseringen bevirker, at det går langt hurtigere for renten at nærme sig Θ .

4.6 Resultater fra beregning

Ud fra de aflæste og beregnede input som vist i tabel 11, er det muligt at foretage simuleringer til at bestemme optionens afkast og markedsværdien. Beregningerne er udført på de tre tidspunkter, hvor udgangspunktet igen er 10.000 simulationer ud fra samme tilfældige værdier som ved Garman Kohlhagen. Beregningerne er udført på baggrund af begge de

gennemgåede metoder til diskretisering. Nedenstående tabel angiver de beregnede værdier, hvor der både er udført beregning med og uden asian tail elementet.

Beregninger med Vasicek-modellen			
Ved diskretisering med Euler			
	30/05/2008	30/11/2008	30/05/2009
Simuleret afkast %	5.4872%	22.5840%	10.4844%
Simuleret afkast Asian %	5.2174%	22.1071%	9.9998%
Markedsværdi i DKK	17,778,530.83	73,172,218.50	33,969,526.92
Markedsværdi i DKK Asian	16,904,481.07	71,626,990.19	32,399,255.12
Ved eksakt diskretisering			
Simuleret afkast %	4.8745%	22.6462%	10.3524%
Simuleret afkast Asian %	4.6505%	22.1549%	9.8819%
Markedsværdi i DKK	15,793,331.34	73,373,772.67	33,541,794.36
Markedsværdi i DKK Asian	15,067,487.35	71,781,884.05	32,017,487.42

Tabel 14: Resultat fra beregninger udført med Vasicekmodellen

I lighed med resultaterne for Garman-Kohlhagen, er det tydeligt at Asian-tail elementet giver en form for udglattende effekt, der resulterer i en anelse lavere forventet afkast. Derudover er det værd at bemærke at beregningshastigheden er kraftigt hæmmet af at modellen skal producere 3 stokastiske processer for hver simulation. Med hensyn til præcisionen er det muligt at foretage en lignende beregning som ved Garman-Kohlhagen, men sammenhængen mellem præcision og antal simuleringer anses som værende demonstreret allerede, hvorfor samme øvelse ikke udføres endnu en gang. Med en beregningstid på knap 5 minutter pr 10.000 simulationer på en standard tidssvarende PC, vil en større portefølje kræve enten væsentligt mere regnekraft eller færre simulationer. Resultatet af analysen af i afsnit 4.2 afslørede at antallet af simulationer godt kunne mindskes til 5000, uden at der gik væsentligt præcision tabt.

4.7 Sensitivitetsanalyse

I lighed med sensitivitetsanalysen udført for Garman-Kohlhagen, vil der her blive udført samme analyse. Belært af den tidligere udførte analyse, vil fokus her være målrettet mod ændringer i volatilitet og renteniveauet. De ekstra inkluderede markedsdatoelementer, korrelationsmatricen og rentevolatiliteten er af så lille en betydning i det samlede billede at de i denne sensitivitetsanalyse overses. Med hensyn til variation af metode, betragtes dette

allerede som udført, eftersom forskellige metoder for diskretisering er udført. I denne analyse er datagrundlaget, ligesom for Garman-Kohlhagen, markedsdata fra d. 30/5 2008 og der er anvendt eksakt diskretisering med 5000 stier i simuleringen.

I forhold til volatiliteten er samme variationsmønster anvendt, det vil sige at volatiliteten for valutakrydset antages at stige og falde i beregningerne med henholdsvis 1 % og 5 %. Nedenstående tabel viser beregningerne udført med varieret volatilitet, hvor resultaterne for den lignende analyse er inkluderet som sammenligningsgrundlag.

Effekt på options og MV ved ændringer i volatiliteten					
Ændring i Volatiliteten	0%	-1%	1%	-5%	5%
MV U/ Asian Tail Garman-Kohlhagen	15,666,228.32	13,888,208.62	17,445,355.74	6,811,697.49	24,564,026.58
Ændring i optionens afkast %		-0.549%	0.549%	-2.733%	2.746%
MV U/ Asian Tail Vasicek	15,391,478.68	13,621,588.29	17,163,063.14	6,591,932.01	24,258,227.51
Ændring i optionens afkast %		-0.631%	0.462%	-2.801%	2.652%

Tabel 15: Sensitivitetsanalyse – Variation af volatiliteten

Som det kan ses er variationen i volatiliteten årsag til en ændring i markedsværdien, der til forveksling virker meget identisk til den vi observerede ved Garman-Kohlhagen. Det er derfor nærliggende at drage samme konklusion om at denne model heller ikke er optimal, når det samtidigt er vist rent empirisk at volatiliteten er langt fra statisk.

Ved en antagelse om stokastisk rente, er der et spørgsmål omkring hvordan renten skal variere. Principielt kunne man både antage at renten steg i den korte eller lange ende. For at bevare en kontakt med markedspraksis antages renteniveauet at foretage et parallelskift på 1%, hvor hele rentekurven påvirkes med 1 %. Rent praktisk vil det betyde at den instantane rente og theta ændres med 1/12 %. Der testes effekten af både rentebewægelser der er 100% korrelerede og hvor der ingen korrelation er.

Effekt på options og MV ved ændringer i begge renter			
Ændring i årlig rente	0%	-1%	1%
MV U/ Asian Tail Garman-Kohlhagen	15,666,228.32	15,279,427.77	16,062,820.78
Ændring i optionens afkast %		-0.119%	0.122%
MV U/ Asian Tail Vasicek	15,391,478.68	15,011,461.71	15,781,115.81
Ændring i optionens afkast %		-0.117%	0.120%

Tabel 16: Sensitivitetsanalyse – Variation af renter 100 % korrelation

Effekt på options og MV ved ændringer i kun 1 rente					
Ændring i årlig rente	0%	-1% EUR	+1% EUR	-1% USD	+1% USD
MV U/ Asian Tail Garman-Kohlhagen	15,666,228.32	12,785,651.40	18,904,168.84	19,382,730.15	12,469,972.54
Ændring i optionens afkast %		-0.889%	0.999%	1.147%	-0.986%
MV U/ Asian Tail Vasicek	15,391,478.68	12,580,109.40	18,565,139.39	19,035,118.13	12,269,505.39
Ændring i optionens afkast %		-0.868%	0.980%	1.125%	-0.964%

Tabel 17: Sensitivitetsanalyse – Variation af renter 0 % korrelation

Fra de to ovenstående tabeller kan renteniveauets indvirkning på markedsværdien ses sammenholdt med resultaterne fra Garman-Kohlhagen. Interessant nok viser det sig at ændringerne på markedsværdien, hvad enten man anvender en stokastisk rente eller en konstant rente, er mere eller mindre identisk. På trods af at Vasicek bruger den instantane rente som udgangspunkt og Garman-Kohlhagen benytter renten til udløbstidspunktet. Forklaringen skal findes i forhold til kombinationen af kalibreringen og diskretiseringsmetoden. Ved kalibreringen var udgangspunktet en tidsmæssig horisont svarende til udløbstidspunktet, så værdien af Theta nærmede sig den tilsvarende rente anvendt i Garman-Kohlhagen. Samtidig viste tabel 13, hvor hurtigt renterne konvergerede mod Theta ved en eksakt diskretisering. Kombinationen af disse to elementer bidrager til at de anvendte renter i simuleringerne nærmer hinanden. Man kunne forestille sig, at vi var nået frem til at andet resultat, hvis vi havde antaget andet end et parallelt skift i rentekurven, men i dette tilfælde viser det sig, at betydningen om man anvender en stokastisk eller en konstant rentestrukturmodel er minimal, også ved ændringer i renteniveauet.

4.8 Konklusion for Vasicek

Som afrunding på Vasicek-modellen, er der flere væsentlige fund, der er værd at nævne. For det første er den tilførte kompleksitet er ikke helt uvæsentlig. Foruden ekstra

markedsdataelementer i form af korrelationsmatricer og rentevolatiliteter, som ikke er nødvendigvis direkte observerbare, kræver modellen en indledende kalibrering til begge rentekurver. Selve kalibreringen afslørede at Vasicek-modellen har nogle indbyggede begrænsninger, hvor blandt andet inverse eller puklede rentekurver ikke kan fittes specielt godt til modellen. Derudover vil de kalibrerede værdier for V og Θ forblive statiske igennem beregningen, hvilket markedsdata viser ikke er en holdbar antagelse. Dette betyder også at ønsker man at beregne markedsværdien på et senere tidspunkt, bør man rekalibrere til den på det tidspunkt observerede rentekurve.

Med hensyn til metoden anvendt til diskretisering, var der en væsentlig forskel på hvordan stierne for renten blev estimeret. Hvor Eulers metode rent intuitivt virker mere simpel, resulterer metoden med en lineær tilnærmelse, at der foregår en væsentlig overshooting når modellen forsøger at tilnærme renten til det langsigtede niveau. Dette kunne afhjælpes ved at benytte en eksakt diskretisering, hvor renten konvergerede mod θ meget hurtigt. Dette afspejlede sig dog ikke i den store ændring i forhold til markedsværdien, så stien renterne tager lader ikke til at have en afgørende indflydelse på den endelige markedsværdi.

Det værende sagt, var det muligt at specificere en model, hvori renterne optrådte som stokastiske variable, hvilket i forhold til Garman-Kohlhagen udgør et skridt i den rigtige retning, hvis målet er at imitere den virkelige verden. Den tilføjede grad af kompleksitet ved tre variable viste sig dog at kræve betydeligt mere regnekraft, hvorfor man vil være tvunget til at gå på kompromis med enten beregningstid eller præcision i sammenlignet med en mere simpel model.

4.9 Komparativ analyse

Efter at have udført beregninger både igennem Garman Kohlhagen og den Vasicek baserede model, søges der her at drage nogle overordnede konklusioner på den empiriske analyse. Som et objektive sammenligningsmateriale, er der indhentet de markedsværdier, som swapmodparten (Nykredit) har beregnet og rapporteret i en MTM-opgørelse¹⁶. Nedenstående

¹⁶ Mindre justeringer er foretaget for at isolere optionens værdi. Dertil er der korrigeret for nedskrivninger i swappens nominelle værdi.

viser beregningerne foretaget hvor Asian – Tail elementet er inkluderet for at sikre konsistens mellem markedsværdierne, da det må antages, at Nykredit har inkluderet dette i deres beregninger også.

Sammenligning af Markedsværdiberegninger			
	30/05/2008	30/11/2008	30/05/2009
Garman Kohlhagen	14,793,500	70,704,668	31,414,643
Vasicek Euler	16,904,481	71,626,990	32,399,255
Vasicek Eksakt	15,067,487	71,781,884	32,017,487
Swapmodpart	13,948,671	96,069,855	43,508,713
Maks - Min	2,955,810	25,365,187	12,094,070

Tabel 18: Komparativ opstilling af beregnede markedsværdier

Sammenligner man først værdierne for de anvendte modeller i denne empiriske analyse, er det slående hvor tæt modellen estimerer markedsværdien til alle tre tidspunkter. Dette bliver kun yderligere understreget når man i sine betragtninger tager højde for at den underliggende hovedstol er 108 millioner og optionen er gearet 300 %. På trods af at renterne inkluderes som stokastiske variable, lader det til at markedsværdien forbliver nogenlunde uændret, hvilket kan indikere, at antagelsen om en fast rente i Garman-Kohlhagen ikke er kilden til stor unøjagtighed. Sensitivitetsanalysen afslørede samtidigt at effekten på markedsværdien ved ændringer i volatilitet og renteniveauet, var stort set identisk med billedet for Garman-Kohlhagen. Dette er yderligere medvirkende til at man kan tvivle på hvor meget værdi en model med stokastiske renter tilføjer i forhold til at anvende en mere simpel model med statiske renter. I forhold til graden af tilført kompleksitet og ekstra beregningsarbejde i forhold til forbedringen, virker det på indeværende grundlag som den oplagte konklusion at forkaste Vasicek modellen som et forbedrende alternativ til Garman Kohlhagen. Vender man i stedet blikket mod sensitivitetsanalysen foretaget i afsnit 4.3, var konklusionen på det tidspunkt, at volatiliteten havde en stor indflydelse på markedsværdien, som indikeret af den høje værdi af Vega. Denne information, sammenholdt med de udfordringer og valgmuligheder der ligger i estimering af volatiliteten, gør det oplagt at foreslå estimering og modellering af volatiliteten som en mulig kilde til differencer i markedsværdier modparter imellem. Estimeringen af volatiliteten kan foregå med udgangspunkt i historiske spotpriser, som implicit volatilitet af handlede optioner eller på anden vis, og der findes ingen forskrifter for en standard metode, så det virker meget sandsynligt at modparter kan anvende forskellige mål for volatiliteten. Anvendt markedspraksis inden for FX-derivater, når der skal opnås meget præcise priser går også i retning af anvendelse af stokastiske volatilitetsmodeller, hvor

en hel volatilitetsflade med volatilitetssmil og skew bliver inkluderet som stokastisk variabel i modelleringen. Ellers har det været almen praksis at benytte en Local Volatility Model eller Dupire-model¹⁷.

Sammenstiller man de beregnede værdier med swapmodparten, er det øjensynligt, at den generelle trend på de tre tidspunkter er ens, hvilket også var nogenlunde forventet taget spotkursen i betragtning. Ved den første beregning, hvor volatiliteten var lav og optionen i øvrigt er en anelse OTM, lader de beregnede værdier til at ligge meget tæt, men dette billede ændrer sig en anelse på de to andre tidspunkter. Årsagen til differencen kan umiddelbart være svær at pege på uden et nærmere kendskab til Nykredits anvendte model og markedsddata, men det virker sandsynligt at en model, der inkluderer volatiliteten på en anden måde er anvendt, taget almen markedspraksis i betragtning. Netop denne usikkerhed omkring markedsværdi og modelvalg er også medvirkende til uoverensstemmelser i markedsværdier, og der findes handler hvor gearingsfaktoren og dermed også den procentvise nominelle afvigelse er væsentligt højere. Konklusionen er, at hvis swapmodpartens værdi antages at være den sande, ville vi i værste tilfælde have underestimeret vores kreditrisiko med godt 25 millioner, hvilket er betragteligt i forhold til den nominelle hovedstol på 108 millioner.

¹⁷ Bruno Dupire (1994). *Pricing with a Smile*. Risk.

5.0 Diskussion

Såfremt vi tager udgangspunkt i den beregnede markedsværdi fra d. 30/11 2008, er det tydeligt, at der i dette tilfælde er en uoverensstemmelse i forhold til den værdi som modparten har opgjort. Som det blev beskrevet i afsnit 2.9, er markedsværdien essentiel i en betragtning af modpartsrisiko. Dette afsnit søger at diskutere, hvilke implikationer sådanne forskelle i den beregnede markedsværdi har fra et risikomæssigt synspunkt. Dette eksempel illustrer samtidig vigtigheden i at der løbende foretages afstemning af markedsværdier på handelsniveau. Isoleret set, kunne man på første beregningstidspunkt få indtrykket af, at markedsværdien blev beregnet nogenlunde ens og fejlagtigt konkludere at de anvendte metoder og markedsdatabundlaget var nogenlunde ens. Alene 6 måneder senere er billedet markant anderledes, og set på ændringerne i både markedsdata og beregnet værdi illustrerer denne handel på effektiv vis dynamikken af markedsværdien over tid. I risikosammenhæng, er betydningen selvfølgelig ikke så stor så længe modparten ikke går konkurs, men i situationen hvor det alligevel skulle ske, ville det i værste fald kunne resultere i et ikke ubetydeligt tab.

Selvom denne pre-settlement risiko, først ville blive realiseret ved enten misligholdelse, eller en novation af handlen, hvori modparten skiftes ud, ville det fremstå som et tab igennem en undervurdering af genplaceringsomkostningen associeret med at indgå samme handel med en ny modpart. I et scenarie, hvor ingen aftale om sikkerhedsstillelse er på plads, vil estimatet af modpartsrisikoen være 25 millioner lavere end den reelle risiko, hvis vi antager at modpartens værdi er korrekt. Alt afhængig af rammerne for eksponering man er villig til at påtage i forhold til den pågældende modpart, vil man altså, alt andet lige, være parat til at indgå handler svarende til en yderligere eksponering på 25 millioner. Såfremt der eksisterede en sikkerhedsstillelses-aftale, ville modparten kunne stille 25 millioner mindre i sikkerhed, end deres egne beregninger indikerede og vi ville stadig være i den tro, at vores kreditrisiko var tilstrækkeligt afdækket.

Havde eksemplet været modsatrettet og vi i stedet havde overestimeret markedsværdien, ville det ligeledes kunne resultere i en omkostning. Konfronteret med en åben risikoposition er det

ikke utænkeligt, at man ville søge at afdække risikoen ved enten at indgå i en modsatrettet swapforretning eller, måske mere sandsynligt, indgå i en Credit Default Swap (CDS). I begge tilfælde er der en udgift forbundet med at afdække risikoen, og dermed er det altså ikke utænkeligt at man indløber et unødigt tab ved at foretage dispositioner for at afdække en ikke-eksisterende risiko. Samtidig vil en højere grad af modpartsrisiko have en betydning for indgåelse af nye handler. Alt afhængig af eksponeringen man er klar til tage på modparten, kan en for højt estimeret modpartsrisiko betyde, at man på et forkert grundlag potentielt afholdes fra at indgå nye handler med den modpart, indtil kreditrisikoen igen er mindsket. Derudover, hvis man er i en aftale om sikkerhedsstillelse, vil man med stor sandsynlighed søge at få modparten til at overføre yderligere kollateral, hvilket de med ligeledes stor sandsynlighed vil udfordre. Ved sådanne disputer omkring markedsværdier kan der påføres en ikke ubetydelig tidsmæssig udgift forbundet med at undersøge markedsddata, model og beregningsgrundlag, og ved en uløselig konflikt må der også påregnes udgifter til en eventuel uafhængig 3. part.

I forhold til incitamenter den ene eller anden vej, er det svært at forestille sig at nogle ligefrem tænker strategisk i forhold manipulation af markedsværdier. Dels fordi der typisk er en forretningsmæssig skillelinje mellem dem der håndterer kollateral og dem der er ansvarlige for markedsværdier, men også fordi de fleste markedsdeltagere må forventes at agere i en forretningsmæssig forsvarlig måde og i øvrigt er underlagt revision for at sikre dette. Samtidig er det også et område, hvor fokus bliver markant øget i situationer med usikkerhed på markedet. Specielt når modparter er i problemer er kreditrisiko og dermed markedsværdier underlagt stor opmærksomhed. Hvorvidt det skal tolkes som mistillid, eller om det skal ses som en accept af, at markedsværdier let kan være fejlberegnet og den øgede fokus blot er resultatet af rettidig omhu, kan være svært at afgøre. Uanset hvad, er en væsentlig udledning, at en forkert beregnet markedsværdi kan resultere i en potentiel omkostning, hvad enten man under- eller over-estimerer risikoen.

6.0 Konklusion

Efter at have fuldført den empiriske analyse og efterfølgende have diskuteret resultaterne, er det muligt at adressere problemstillingen med henblik på at konkludere på opgaven. I forhold til spørgsmålet, hvorledes modelvalg og inputparametre påvirker markedsværdien, blev det tydeligt illustreret igennem de empiriske beregninger og tilhørende sensitivitetsanalyse. I forhold til markedsdatabehandlingen, blev det vist hvordan markedsværdien ændrede sig som følge af ændring i spotkursen, FX-volatiliteten og renteniveauet. Hvor det blev argumenteret, at differencer i spotkursen næppe ville forekomme mellem to modparter, da det er forholdsvis veldefineret hvordan spotkursen aflæses, blev det i stedet diskuteret at renter og især volatiliteter nemt kunne afvige. Samtidig er det tydeligt fra markedsdatabehandlingen at volatiliteter og renter er langt fra statiske, og at modeller der bygger på antagelser om statiske renter og volatiliteter derfor måtte være upræcise.

Dermed var udgangspunktet, at en model, der byggede på en forudsætning om stokastiske renter måtte udgøre en forbedring. Denne forventning blev dog afvist, eftersom resultaterne af de empiriske beregninger viste at vi fremkom med stort set uændret resultat ved de to modeller, på trods af en væsentlig mere kompleks beregningsproces. Konklusionen for den komparative analyse mellem de to modeller, var dermed at forkaste teorien om at en stokastisk rentemodel ville udgøre en forbedring. Derudover blev der sammenlignet med den originale swapmodpart, der fremkom med væsentlig anderledes markedsværdier på to af beregningstidspunkterne. Dette afstedkom et postulat om at FX-volatiliteten med stor sandsynlighed var den største kilde til differencen. Dette postulat blev dels underbygget af sensitivitetsanalysen og af problematikken ved aflæsning af volatilitet i markedspraksis.

Differencen i markedsværdi i forhold til modparten foranledigede en diskussion, der adresserede den anden del af problemformuleringen vedrørende modpartsrisikoen. Konklusionen på dette punkt er, at hvis man agerer på en dårligt estimeret markedsværdi, vil man uanset om man over- eller underestimerer den reelle markedsværdi kunne indløbe udgifter, der kunne have været undgået. Implikationen ved for lav estimeret markedsværdi er at man undervurderer sin pre-settlement risiko, med dertil risiko for tab. Ved en overestimering, kan udgiften opstå enten som resultatet af unødige hedge-tiltag eller igennem en tidsmæssig udgift ved afstemning med modparten.

Litteraturliste

- Amin, K. I. & Jarrow, R. A.(1991): Pricing foreign currency options under stochastic interest rates, *Journal of international money and finance* (1991), no 10, pp 310-329.
- Basel Committee on Banking Supervision (2010): *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, Bank for international settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (2004): *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A Revised Framework*, Bank for international settlements.
- Black, F. & Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* 81 (3): pp 637–654.
- Bodurtha, J. N. Jr. & Courtadon, G. R. (1987): Tests of an American Option Pricing Model on the Foreign Currency Options Market, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, No. 2 (Jun., 1987), pp. 153 -167.
- Garman, M. B. & Kohlhagen, S. W.(1983): Foreign Currency Option Values, *J. International Money and Finance* 2, pp 231-237.
- GPO (2010): Public law 111-203 Dodd–Frank Wall Street Reform and Consumer Protection Act,
- Grabbe, J. O. (1982): *The pricing of call and put options of foreign exchange*, department of finance the Wharton school, university of Pennsylvania
- Gregory, J. (2010), *Counterparty Credit Risk*, Wiltshire: John Wiley and Sons, 1. Ed.
- Heath, D.; Jarrow R. A.; Morton, A. (1992): Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation., *Econometrica*, vol. 60, no 1, pp 77–105.
- Hull, J. C. (2009): *Options, Futures, and other Derivatives*, 7th ed, Prentice hall, New Jersey, USA
- Melino, A. & Turnbull, S. M. (1991): The Pricing of Foreign Currency Options, *The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d'Economie*, Vol. 24, No. 2 (May, 1991), pp. 251-28
- Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, no 1 (spring 1973), pp 144-183.
- Metropolis N. & Ulam, S. (1949): The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association* (American Statistical Association), vol 44, no 247, pp 335–341.
- Miltersen, K. R. (2005): “Afløste Aktiver”. Chapter 8 in Michael Christensen (edt.) ”Udviklingslinier i Finansiering”, Jurist og Økonomforbundets Forlag, København, Denmark, pp 245–285.
- Miltersen, K. R. (1999): *An arbitrage theory of the term structure of interest rates*, Dept. of Management, Odense University, Odense, Denmark
- Rubinstein, M. (1985): Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through August 31, 1978, *The Journal of Finance*, Vol. 40, No. 2 (Jun., 1985), pp. 455-480

- Sharstri, K. & Tandon, K. (1986): Valuation of foreign currency options: some empirical tests, *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 21, no. 2 (June 1986), pp 145-160.
- Vasicek, O. (1977): An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of financial* 5 (1977), pp 177-188.

Internetresourcer:

- Bank for international Settlements (2009): Table 19: Amounts outstanding of over-the-counter (OTC) derivatives by risk category and instrument, csv, [cited: July 3 th 2011] Available at the Internet. <<http://www.bis.org/statistics/derstats.htm>>
- Chicago Board of Exchange (2011): CBOE History, CBOE, cboe.com [online]. [cited: July 3th 2011] Available at the Internet. <<http://www.cboe.com/aboutcboe/History.aspx>>
- Danmarks Nationalbank (2011): kreditrisiko, nationalbanken.dk[online]. [cited: July 3 th 2011] Available at the Internet. <<http://www.nationalbanken.dk/DNDK/Statsgæld.nsf/side/Kreditrisiko!OpenDocument>>.
- European commission (2010): Proposal for a regulation of the European parliament and of the council on OTC derivatives, central counterparties and trade repositories, eur-lex.europa.eu [online]. [cited: July 3th 2011] Available at the Internet.<<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=CELEX:52010PC0484:EN:NOT>>

Bilag A – Handelsdetaljer på Swap

Bilag B – Kode anvendt til simuleringer i VBA

Kode anvendt til Garman Kohlhagen

Function normalRandomMatrixSeed(N, M, mean, std, seed)

```
Dim dummy
dummy = Rnd(seed)
Dim randomMatrix()
ReDim randomMatrix(N, M)
Dim i, j
For i = 1 To N
    For j = 1 To M
        randomMatrix(i, j) = mean + std * Application.NormInv(Rnd, 0, 1)
    Next j
Next i
normalRandomMatrixSeed = randomMatrix
End Function
```

Function MCSingleEuroccyCallPrice(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed)

```
Dim mu, i
mu = rd - rf - 0.5 * Sigma ^ 2
Dim returns()
ReDim returns(T, 1)
returns = normalRandomMatrixSeed(T, 1, mu, Sigma, seed)
Dim path()
ReDim path(T)
path(1) = S * Exp(returns(1, 1))
For i = 2 To T
    path(i) = path(i - 1) * Exp(returns(i, 1))
Next i
Dim S_T
S_T = path(T)
MCSingleEuroccyCallPrice = Exp(-rd * T) * Application.Max((S_T - X) / X, 0)
```

End Function

Function MCEuroccyCallPrice(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed, M)

Dim i, dummy, sumOfPrices

dummy = Rnd(seed)

sumOfPrices = 0

For i = 1 To M

 sumOfPrices = sumOfPrices + MCSingleEuroccyCallPrice(S, X, T, rd, rf, Sigma, 1)

Next i

MCEuroccyCallPrice = sumOfPrices / M

End Function

Function MCSingleEuroccyAsianPrice(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed)

Dim mu, i

mu = rd - rf - 0.5 * Sigma ^ 2

Dim returns()

ReDim returns(T, 1)

returns = normalRandomMatrixSeed(T, 1, mu, Sigma, seed)

Dim path()

ReDim path(T)

path(1) = S * Exp(returns(1, 1))

For i = 2 To T

 path(i) = path(i - 1) * Exp(returns(i, 1))

Next i

Dim S_T

S_T = (path(T) + path(T - 1) + path(T - 2) + path(T - 3)) / 4

MCSingleEuroccyAsianPrice = Exp(-rd * T) * Application.Max((S_T - X) / X, 0)

End Function

Function MCEuroccyAsianPrice(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed, M)

Dim i, dummy, sumOfPrices

```

dummy = Rnd(seed)
sumOfPrices = 0
For i = 1 To M
    sumOfPrices = sumOfPrices + MCSingleEuroccyAsianPrice(S, X, T, rd, rf, Sigma, 1)
Next i
MCEuroccyAsianPrice = sumOfPrices / M
End Function

```

Function testSingleStd(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed, middel)

```

Dim mu, i
mu = rd - rf - 0.5 * Sigma ^ 2
Dim returns()
ReDim returns(T, 1)
returns = normalRandomMatrixSeed(T, 1, mu, Sigma, seed)
Dim path()
ReDim path(T)
path(1) = S * Exp(returns(1, 1))
For i = 2 To T
    path(i) = path(i - 1) * Exp(returns(i, 1))
Next i
Dim S_T
S_T = path(T)
testSingleStd = (Exp(-rd * T) * (Application.Max((S_T - X) / X, 0) - middel)) ^ 2
End Function

```

Function testMCstd(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed, M, middel)

```

Dim i, dummy, sumOfPrices
dummy = Rnd(seed)
sumOfPrices = 0

```

```

For i = 1 To M
    sumOfPrices = sumOfPrices + testSingleStd(S, X, T, rd, rf, Sigma, 1, middel)
Next i
testMCStd = sumOfPrices / M
End Function

```

Function testSingleAsianstd(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed, middel)

```

Dim mu, i
mu = rd - rf - 0.5 * Sigma ^ 2
Dim returns()
ReDim returns(T, 1)
returns = testnormalRandomMatrixSeed(T, 1, mu, Sigma, seed)
Dim path()
ReDim path(T)
path(1) = S * Exp(returns(1, 1))
For i = 2 To T
    path(i) = path(i - 1) * Exp(returns(i, 1))
Next i
Dim S_T
S_T = (path(T) + path(T - 1) + path(T - 2) + path(T - 3)) / 4

testSingleAsianstd = Exp(-rd * T) * Application.Max(S_T - X, 0)
End Function

```

Function TestMCAsianstd(S, X, T, rd, rf, Sigma, seed, M, middel)

```

Dim i, dummy, sumOfPrices
dummy = Rnd(seed)
sumOfPrices = 0

```



```

For i = 1 To M

    sumOfPrices = sumOfPrices + testMCSingleAsianstd(S, X, T, rd, rf, Sigma, 1, middel)

Next i

TestMCAsianstd = sumOfPrices / M

End Function

```

Kode anvendt til Vasicek:

Public Function Cholesky(mat As Range)

```
Dim a, L() As Double, S As Double
```

```
a = mat
```

```
N = mat.Rows.Count
```

```
M = mat.Columns.Count
```

```
If N <> M Then
```

```
    Cholesky = "?"
```

```
    Exit Function
```

```
End If
```

```
ReDim L(1 To N, 1 To N)
```

```
For j = 1 To N
```

```
    S = 0
```

```
    For K = 1 To j - 1
```

```
        S = S + L(j, K) ^ 2
```

```
    Next K
```

```
L(j, j) = a(j, j) - S
```

```
If L(j, j) <= 0 Then Exit For
```

```
L(j, j) = Sqr(L(j, j))
```

```
    For i = j + 1 To N
```

```
        S = 0
```

```
        For K = 1 To j - 1
```

```
            S = S + L(i, K) * L(j, K)
```

```

    Next K

    L(i, j) = (a(i, j) - S) / L(j, j)

    Next i

Next j

Cholesky = L

End Function

```

Euler Diskretisering

Option Base 1

Function CorrMatrix(N, M, Mean, Sigma, Seed, a1, a2, b1, b2, b3)

Dim Matrix()

ReDim Matrix(N, M)

Dim Epsmatrix()

ReDim Epsmatrix(N, M)

Dim i, j

For i = 1 To N

For j = 1 To M

Matrix(i, j) = Mean + Sigma * Application.NormInv(Rnd(), 0, 1)

Epsmatrix(i, 1) = Matrix(i, 1)

Epsmatrix(i, 2) = Matrix(i, 1) * a1 + Matrix(i, 2) * a2

Epsmatrix(i, 3) = Matrix(i, 1) * b1 + Matrix(i, 2) * b2 + Matrix(i, 3) * b3

Next j

Next i

CorrMatrix = Epsmatrix

End Function

Function MCVasicekSingle(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed)

Dim returnsS()

```

ReDim returnsS(T, 3)

returnsS = CorrMatrix(T, 3, 0, 1, Seed, a1, a2, b1, b2, b3)

Dim pathS()

ReDim pathS(T)

Dim PathRd()

ReDim PathRd(T)

Dim Pathrf()

ReDim Pathrf(T)

pathS(1) = S * (1 + (rd0 - rf0) + Sigmas * returnsS(1, 1))

PathRd(1) = rd0 + (Vd * (Thetad - rd0)) + (sigmard * returnsS(1, 2))

Pathrf(1) = rf0 + (Vf * (Thetaf - rf0)) + (sigmarf * returnsS(1, 3))

For i = 2 To T

    pathS(i) = pathS(i - 1) * (1 + (PathRd(i - 1) - Pathrf(i - 1)) + Sigmas * returnsS(i, 1))

    PathRd(i) = PathRd(i - 1) + (Vd * (Thetad - PathRd(i - 1))) + sigmard * returnsS(i, 2)

    Pathrf(i) = Pathrf(i - 1) + (Vf * (Thetaf - Pathrf(i - 1))) + sigmarf * returnsS(i, 3)

Next i

Dim S_T

S_T = pathS(T)

Dim rate

rate = PathRd(T)

MCVasicekSingle = Exp(-rate * T) * Application.Max((S_T - X) / X, 0)

End Function

```

Function VasicekPrice(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed, M)

```

Dim i, dummy, sumOfPrices, price, sumofsquaredprices

dummy = Rnd(Seed)

sumOfPrices = 0

sumofsquaredprices = 0

```

```

For i = 1 To M

    price = MCVasicekSingle(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1,
a2, b1, b2, b3, Seed)

    sumOfPrices = sumOfPrices + price

    sumofsquaredprices = sumofsquaredprices + price ^ 2

Next i

VasicekPrice = sumOfPrices / M

End Function

```

Function MCAAsianVasicekSingle(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed)

```

Dim returnsS()

ReDim returnsS(T, 3)

returnsS = CorrMatrix(T, 3, 0, 1, Seed, a1, a2, b1, b2, b3)

Dim pathS()

ReDim pathS(T)

Dim PathRd()

ReDim PathRd(T)

Dim Pathrf()

ReDim Pathrf(T)

pathS(1) = S * (1 + (rd0 - rf0) + Sigmas * returnsS(1, 1))

PathRd(1) = rd0 + (Vd * (Thetad - rd0)) + (sigmard * returnsS(1, 2))

Pathrf(1) = rf0 + (Vf * (Thetaf - rf0)) + (sigmarf * returnsS(1, 3))

For i = 2 To T

    pathS(i) = pathS(i - 1) * (1 + (PathRd(i - 1) - Pathrf(i - 1)) + Sigmas * returnsS(i, 1))

    PathRd(i) = PathRd(i - 1) + (Vd * (Thetad - PathRd(i - 1))) + sigmard * returnsS(i, 2)

    Pathrf(i) = Pathrf(i - 1) + (Vf * (Thetaf - Pathrf(i - 1))) + sigmarf * returnsS(i, 3)

Next i

Dim S_T

```

```
S_T = (pathS(T) + pathS(T - 1) + pathS(T - 2) + pathS(T - 3)) / 4
```

```
Dim rate
```

```
rate = PathRd(T)
```

```
MCAsianVasicekSingle = Exp(-rate * T) * Application.Max((S_T - X) / X, 0)
```

```
End Function
```

```
Function AsianVasicekPrice(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed, M)
```

```
Dim i, dummy, sumOfPrices, price, sumofsquaredprices
```

```
dummy = Rnd(Seed)
```

```
sumOfPrices = 0
```

```
sumofsquaredprices = 0
```

```
‘‘Ou est Bob L’Éponge?
```

```
For i = 1 To M
```

```
    price = MCAsianVasicekSingle(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed)
```

```
    sumOfPrices = sumOfPrices + price
```

```
    sumofsquaredprices = sumofsquaredprices + price ^ 2
```

```
Next i
```

```
AsianVasicekPrice = sumOfPrices / M
```

```
End Function
```

Eksakt diskretisering

Option Base 1

Function CorrMatrix(N, M, Mean, Sigma, Seed, a1, a2, b1, b2, b3)

Dim Matrix()

ReDim Matrix(N, M)

Dim Epsmatrix()

ReDim Epsmatrix(N, M)

Dim i, j

For i = 1 To N

For j = 1 To M

Matrix(i, j) = Mean + Sigma * Application.NormInv(Rnd(), 0, 1)

Epsmatrix(i, 1) = Matrix(i, 1)

Epsmatrix(i, 2) = Matrix(i, 1) * a1 + Matrix(i, 2) * a2

Epsmatrix(i, 3) = Matrix(i, 1) * b1 + Matrix(i, 2) * b2 + Matrix(i, 3) * b3

Next j

Next i

CorrMatrix = Epsmatrix

End Function

Function MCVasicekSingleEKS(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed)

Dim returnsS()

ReDim returnsS(T, 3)

returnsS = CorrMatrix(T, 3, 0, 1, Seed, a1, a2, b1, b2, b3)

Dim pathS()

ReDim pathS(T)

Dim PathRd()

ReDim PathRd(T)

Dim Pathrf()

ReDim Pathrf(T)

```

pathS(1) = S * (1 + (rd0 - rf0) + Sigmas * returnsS(1, 1))

PathRd(1) = Exp(-Vd) * rd0 + Thetad * (1 - Exp(-Vd)) + ((sigmard ^ 2) / (2 * Vd)) * (1 - Exp(-2 *
Vd)) * returnsS(1, 2)

Pathrf(1) = Exp(-Vf) * rf0 + Thetaf * (1 - Exp(-Vf)) + ((sigmarf ^ 2) / (2 * Vf)) * (1 - Exp(-2 * Vf)) *
returnsS(1, 3)

For i = 2 To T

    pathS(i) = pathS(i - 1) * (1 + (PathRd(i - 1) - Pathrf(i - 1)) + Sigmas * returnsS(i, 1))

    PathRd(i) = Exp(-Vd) * PathRd(i - 1) + Thetad * (1 - Exp(-Vd)) + ((sigmard ^ 2) / (2 * Vd)) * (1 -
Exp(-2 * Vd)) * returnsS(i, 2)

    Pathrf(i) = Exp(-Vf) * Pathrf(i - 1) + Thetaf * (1 - Exp(-Vf)) + ((sigmarf ^ 2) / (2 * Vf)) * (1 - Exp(-
2 * Vf)) * returnsS(i, 3)

Next i

Dim S_T

S_T = pathS(T)

Dim rate

rate = PathRd(T)

MCVasicekSingleEKS = Exp(-rate * T) * Application.Max((S_T - X) / X, 0)

End Function

```

Function VasicekPriceEKS(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed, M)

```

Dim i, dummy, sumOfPrices, price, sumofsquaredprices

dummy = Rnd(Seed)

sumOfPrices = 0

sumofsquaredprices = 0

For i = 1 To M

    price = MCVasicekSingleEKS(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf,
a1, a2, b1, b2, b3, Seed)

    sumOfPrices = sumOfPrices + price

    sumofsquaredprices = sumofsquaredprices + price ^ 2

Next i

VasicekPriceEKS = sumOfPrices / M

End Function

```

Function MCAAsianVasicekSingleEKS(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed)

Dim returnsS()

ReDim returnsS(T, 3)

returnsS = CorrMatrix(T, 3, 0, 1, Seed, a1, a2, b1, b2, b3)

Dim pathS()

ReDim pathS(T)

Dim PathRd()

ReDim PathRd(T)

Dim Pathrf()

ReDim Pathrf(T)

pathS(1) = S * (1 + (rd0 - rf0) + Sigmas * returnsS(1, 1))

PathRd(1) = Exp(-Vd) * rd0 + Thetad * (1 - Exp(-Vd)) + ((sigmard ^ 2) / (2 * Vd)) * (1 - Exp(-2 * Vd)) * returnsS(1, 2)

Pathrf(1) = Exp(-Vf) * rf0 + Thetaf * (1 - Exp(-Vf)) + ((sigmarf ^ 2) / (2 * Vf)) * (1 - Exp(-2 * Vf)) * returnsS(1, 3)

For i = 2 To T

 pathS(i) = pathS(i - 1) * (1 + (PathRd(i - 1) - Pathrf(i - 1)) + Sigmas * returnsS(i, 1))

 PathRd(i) = Exp(-Vd) * PathRd(i - 1) + Thetad * (1 - Exp(-Vd)) + ((sigmard ^ 2) / (2 * Vd)) * (1 - Exp(-2 * Vd)) * returnsS(i, 2)

 Pathrf(i) = Exp(-Vf) * Pathrf(i - 1) + Thetaf * (1 - Exp(-Vf)) + ((sigmarf ^ 2) / (2 * Vf)) * (1 - Exp(-2 * Vf)) * returnsS(i, 3)

Next i

Dim S_T

Dim rate

rate = PathRd(T)

MCAAsianVasicekSingleEKS = Exp(-rate * T) * Application.Max((S_T - X) / X, 0)

End Function

Function AsianVasicekPriceEKS(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad, Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed, M)

Dim i, dummy, sumOfPrices, price, sumofsquaredprices


```

dummy = Rnd(Seed)
sumOfPrices = 0
sumofsquaredprices = 0
For i = 1 To M
    price = MCAAsianVasicekSingleEKS(S, X, T, rd0, rf0, Sigmas, sigmard, sigmarf, Vd, Vf, Thetad,
    Thetaf, a1, a2, b1, b2, b3, Seed)
    sumOfPrices = sumOfPrices + price
    sumofsquaredprices = sumofsquaredprices + price ^ 2
Next i
AsianVasicekPriceEKS = sumOfPrices / M
End Function

```

Bilag C – Kode anvendt ved simuleringer i MatLab

Wiener.m

```
%-----  
% Wiener process  
%  
%[W]- wiener(N,M) % N is size(Nx1 - matrix) of wiener process  
%               % M is number of wiener processes wanted  
%-----  
function [W] = wiener(N,M)  
randn('state',0);  
W(1,:)= norminv(rand(1,N));  
for i=2:M  
W(i,:)=norminv(rand(1,N));  
end  
  
end
```

Vasicek.m

```
%-----  
% Script for Cholesky Decomposition and Monte Carlo Sampling - Vasicek  
%-----  
clear all;  
  
% Choleski decomposition  
%-----  
% MV1-3 Market value matrix from 30-05-2008, 30-11-2008 and 30-05-2009  
% respectively. CH1-3 are the factorized matrices where we get a1, a2, b1,  
b2 and  
% b3.  
  
%disp('Load data from txt file');  
%Path=input('path; C:');  
%MV1 = loaddata('C:\Path');  
  
MV1 = [1 -0.038752632 -0.032190339 ; -0.038752632 1 0.350861864 ; -  
0.032190339 0.350861864 1]; % Korrelationer  
MV2 = [1 -0.003180708 0.027795642 ; -0.003180708 1 0.453000146 ;  
0.027795642 0.453000146 1];  
MV3 = [1 -0.06612 -0.06662 ; -0.06612 1 0.298702 ; -0.06662 0.298702 1];  
  
CH1 = chol(MV1, 'lower'); %Choleski factorized matrix  
CH2 = chol(MV2, 'lower');  
CH3 = chol(MV3, 'lower');  
  
a1=zeros(1,3);a2=zeros(1,3); b1=zeros(1,3); b2=zeros(1,3); b3=zeros(1,3);  
a1(1,1)=CH1(2,1); a2(1,1)=CH1(2,2); b1(1,1)=CH1(3,1); b2(1,1)=CH1(3,2);  
b3(1,1)=CH1(3,3); %  
a1(1,2)=CH2(2,1); a2(1,2)=CH2(2,2); b1(1,2)=CH2(3,1); b2(1,2)=CH2(3,2);  
b3(1,2)=CH2(3,3);  
a1(1,3)=CH3(2,1); a2(1,3)=CH3(2,2); b1(1,3)=CH3(3,1); b2(1,3)=CH3(3,2);  
b3(1,3)=CH3(3,3);  
  
%-----
```

```

% Simulation Declarations

epsilons1 = zeros(30,3);           % Defining size of epsilon matrix
epsilond1 = zeros(30,3);
epsilonf1 = zeros(30,3);

dt=1;                               % timestep - 1 month
x = [0.67477 0.67477 0.67477] ;    % Exercise kurs
S0 = [0.64267 0.79152 0.70932] ;   % Start kurs paa valuta
rd0 = [0.00336 0.00238 0.00054] ;  % Renten domestic - [EUR]
rf0 = [0.00213 0.00083 0.00021] ;  % Renten foreign - [USD]
Vd = [1.57535 0.59034 0.18583] ;   % Domestic Convergens velocity
Vf = [0.04356 1.91557 0.30927] ;   % Foreign Convergen velocity
thetad = [0.00419 0.00333 0.00211] ; % Domestic Convergens lvl
thetaf = [0.00443 0.00216 0.00162] ; % Foreign Convergens lvl
sigmas = [0.02874 0.05205 0.04230] ; % Volatilitet , monthly, for
valutakurs
sigmad = [0.00043 0.00126 0.00139] ; % Domestic, monthly, volatility -
[1/month]
sigmaf = [0.00107 0.00207 0.00214] ; % Foreign, monthly, volatility -
[1/month]

%-----
%loop declarations

N_sim = 5000;                       % number of simulations
N_time = 30;                        % Time - [months]
S1=zeros(N_time,3);                % Define S-matrix size
Rdt1=zeros(N_time,3);              % Define Rd-matrix size
Rft1=zeros(N_time,3);              % Define Rf-matrix size
res= zeros(1,3);                   % Afkast graden
T = [30 24 18] ;                   % Months in the future
S1(1,:)= S0 ;                      % Starting values for S, Rd and Rf
Rdt1(1,:)= rd0 ;
Rft1(1,:) = rf0 ;

%-----
% Simulation

W=wiener(30,N_sim*3);              % Creates a (Nx30) matrix of Wiener processes
                                   % from script wiener.m
    Ws=W([1:3:end],:);             % takes every third number satrating with the
first
    Wd=W([2:3:end],:);             % takes every third number satrating with the
second
    Wf=W([3:3:end],:);             % takes every third number satrating with the
third

for i = 1:N_sim;                   % Start of simulation loop

    for l=1:3;                     % loop defining values for the 3 dates (0508, 1108,
0509).
        for k=1:30;               % loop adding cholesky components to epsilon-d,and-
f.
            A1(k)=a1(l)*Ws(i,k);
            A2(k)=a2(l)*Wd(i,k);
            B1(k)=b1(l)*Ws(i,k);
            B2(k)=b2(l)*Wd(i,k);

```

```

        B3(k)=b3(1)*Wf(i,k);
    end
    epsilons1(:,1) = Ws(i,:) ;    % Epsilon - Wierprocess Corigated for
    correlation
    epsilond1(:,1) = A1+A2 ;      % Domestic Wierprocess Corigated for
    correlation
    epsilonf1(:,1) = B1+B2+B3;    % Foreign Wierprocess Corigated for
    correlation
    end
    for j=2:N_time;              % time loop iterating the values of S, rd and
    rf.

        S1(j,:) = S1(j-1,:).*(1+(Rdt1(j-1,:)-Rft1(j-1,:)))+sigmas.*epsilons1(j-
        1,:);    % eq.

        Rdt1(j,:) = Rdt1(j-1,:) + Vd.*(thetad-Rdt1(j-
        1,:)).*dt+sigmad.*epsilond1(j-1,:)*sqrt(dt) ; % eq.

        Rft1(j,:) = Rft1(j-1,:) + Vf.*(thetaf-Rft1(j-
        1,:)).*dt+sigmaf.*epsilonf1(j-1,:)*sqrt(dt) ; % eq.

    end
    res(1,:) = max(0.0, (S1(30,:)-x)./x).*exp(-Rdt1(30,:).*T);    % Values >0 are
    saved for the 30 iterations

    res0508(i,:)=res(1,1);      % Values for 05-2008
    res1108(i,:)=res(1,2);      % Values for 11-2008
    res0509(i,:)=res(1,3);      % Values for 05-2009

end

resultat0508= mean(res0508);    % Mean of values
resultat1108= mean(res1108);
resultat0509= mean(res0509);

disp('Afkast for 0508, 1108 og 0509:');
s=[ resultat0508 resultat1108 resultat0509];
disp(s);
(s.*3*108)

```

ModVasicek.m

```

%-----
% Script for Choleski Decomposition and Monte Carlo Sampeling - Modified
% Vasicek
%-----
clear all;

% Choleski decomposition
%-----
% MV1-3 Market value matrix from 30-05-2008, 30-11-2008 and 30-05-2009
% respectivly. CH1-3 are the factorized matricies where we get a1, a2. b1,
b2 and
% b3.

%disp('Load data from txt file');
%Path=input('path; C:');

```

```

%MV1 = loaddata('C:\Path');

MV1 = [1 -0.038752632 -0.032190339 ; -0.038752632 1 0.350861864 ; -
0.032190339 0.350861864 1]; % Korrelationer
MV2 = [1 -0.003180708 0.027795642 ; -0.003180708 1 0.453000146 ;
0.027795642 0.453000146 1];
MV3 = [1 -0.06612 -0.06662 ; -0.06612 1 0.298702 ; -0.06662 0.298702 1];

CH1 = chol(MV1,'lower'); %Choleski factorized matrix
CH2 = chol(MV2,'lower');
CH3 = chol(MV3,'lower');

a1=zeros(1,3);a2=zeros(1,3); b1=zeros(1,3); b2=zeros(1,3); b3=zeros(1,3);
a1(1,1)=CH1(2,1); a2(1,1)=CH1(2,2); b1(1,1)=CH1(3,1); b2(1,1)=CH1(3,2);
b3(1,1)=CH1(3,3); %
a1(1,2)=CH2(2,1); a2(1,2)=CH2(2,2); b1(1,2)=CH2(3,1); b2(1,2)=CH2(3,2);
b3(1,2)=CH2(3,3);
a1(1,3)=CH3(2,1); a2(1,3)=CH3(2,2); b1(1,3)=CH3(3,1); b2(1,3)=CH3(3,2);
b3(1,3)=CH3(3,3);

%-----
% Simulation Declarations

epsilons1 = zeros(30,3); % Defining size of epsilon matrix
epsilond1 = zeros(30,3);
epsilonf1 = zeros(30,3);

dt=1; % timestep - 1 month
x = [0.67477 0.67477 0.67477] ; % Exercise kurs
S0 = [0.64267 0.79152 0.70932] ; % Start kurs paa valuta
rd0 = [0.00336 0.00238 0.00054] ; % Renten domestic - [EUR]
rf0 = [0.00213 0.00083 0.00021] ; % Renten foreign - [USD]
Vd = [1.57535 0.59034 0.18583] ; % Domestic Convergens velocity
Vf = [0.04356 1.91557 0.30927] ; % Foreign Convergens velocity
thetad = [0.00419 0.00333 0.00211] ; % Domestic Convergens lvl
thetaf = [0.00443 0.00216 0.00162] ; % Foreign Convergens lvl
sigmas = [0.02874 0.05205 0.04230] ; % Volatilitet , monthly, for
valutakurs
sigmad = [0.00043 0.00126 0.00139] ; % Domestic, monthly, volatility -
[1/month]
sigmaf = [0.00107 0.00207 0.00214] ; % Foreign, monthly, volatility -
[1/month]

%-----
%loop declarations

N_sim = 5000; % number of simulations
N_time = 30; % Time - [months]
S1=zeros(N_time,3); % Define S-matrix size
Rdt1=zeros(N_time,3); % Define Rd-matrix size
Rft1=zeros(N_time,3); % Define Rf-matrix size
res= zeros(1,3); % Afkast graden
T = [30 24 18] ; % Months in the future
S1(1,:)= S0 ; % Starting values for S, Rd and Rf
Rdt1(1,:)= rd0 ;
Rft1(1,:) = rf0 ;

%-----

```

```

% Simulation
S=zeros(N_time,3);
Rdt=zeros(N_time,3);
Rft=zeros(N_time,3);
S(1,:)= S0 ;           %starting value for S
Rdt(1,:)= rd0 ;
Rft(1,:) = rf0 ;

for i = 1:N_sim;           %generated random values of a N(0,1)
distribution

    randn('state',i*sum(clock)) % dt is not necessary as it is 1. the
'i' denotes
    R(:,:)=randn(30,3);       %starting point of random numbers

    for l=1:3;               % loop defining values for the 3 dates
(0508, 1108, 0509)
        for k=1:30;          % loop adding choleski components to
epsilon-d,and-f. not necessary.

            A1(k)=a1(1)*R(k,1);
            A2(k)=a2(1)*R(k,2);
            B1(k)=b1(1)*R(k,1);
            B2(k)=b2(1)*R(k,2);
            B3(k)=b3(1)*R(k,3);
        end
        epsilons(:,l) = R(:,l) ;           % Wierprocess Corigated for correlation
        epsilond(:,l) = A1+A2 ;           % Domestic Wierprocess Corigated for
correlation
        epsilonf(:,l) = B1+B2+B3;         % Foreign Wierprocess Corigated for
correlation
        end
        for j=2:N_time;               % loop iterating the values of S, rd
and rf

            S(j,:) = S(j-1,:).*(1+(Rdt(j-1,:)-Rft(j-1,:)))+sigmas.*epsilons(j-1,:);

            Rdt(j,:)= exp(-Vd.*dt).*Rdt(j-1,:)+thetad.*(1-exp(-
Vd.*dt)))+(sigmad.^2./(2*Vd)).*(1-exp(-2*Vd*dt)).*epsilond(j-1,:);

            Rft(j,:)= exp(-Vf.*dt).*Rft(j-1,:)+thetaf.*(1-exp(-
Vf.*dt)))+(sigmaf.^2./(2*Vf)).*(1-exp(-2*Vf*dt)).*epsilonf(j-1,:);

        end
        res1(1,:) = max(0.0, (S(30,:)-x)./x).*exp(-Rdt(30,:).*T); % Values >0 are
saved for the 30 iterations
        res0508_d(i,:)=res1(1,1);
        res1108_d(i,:)=res1(1,2);
        res0509_d(i,:)=res1(1,3);
    end

    resultat0508= mean(res0508_d);
    resultat1108= mean(res1108_d);
    resultat0509= mean(res0509_d);

    disp('Afkast for eksakt kritisering 0508, 1108 og 0509:');
    s=[ resultat0508 resultat1108 resultat0509];
    disp(s);
    (s.*3*108)

```