



Kandidatspeciale

En empirisk analyse af Heston og Heston-Nandi modellen som udvidelse til Black Scholes

Casper Ehlers

Vejleder: Søren Agergaard Andersen
Antal karakterer: 158.890 svarende til 69,9 normalsider–

Executive summary

This thesis examines the validity of the assumptions in the original 1973 Black Scholes framework and subsequently builds upon them through analyses of both the Heston and Heston-Nandi model. The original framework assumed that the returns of an underlying asset were lognormally distributed with constant volatility. As is easily displayed in this thesis' first section, this is clearly not the case when looking at empirical returns of the S&P 500 index. The empirical returns distribution exhibits, amongst other things, fatter tails along with a higher level of kurtosis, than what should be expected from a theoretical lognormal distribution. In addition, I found that options traded on the S&P 500 exhibits the well-known volatility smile.

To address the issues found when examining the implicit volatility of traded options, I introduce the 1993 Heston model. By analyzing and examining its added parameters, I find that it is useful in correcting the observed volatility smile. Furthermore, to add to the findings of the empirical returns found in the first section, I also apply the Heston-Nandi model and combine it with a thorough analyses of the GARCH component. The GARCH component proves useful in forecasting volatility upwards of 30 trading days into the future.

At last I perform an empirical comparison of the 3 models ability to price options traded in the market. In order to perform this comparison, I initially calibrate the parameters in the Heston and Heston-Nandi model through application of the Nelder-Mead algorithm.

Due to the GARCH models ability to forecast volatility realistically upwards of 30 days, the Heston-Nandi model outperforms the two other models, when comparing option pricing performance in the short term. Moving to the medium and long-term horizon, the Heston model dominates and becomes the prevailing option pricing model. In order to solidify my conclusions, I round with analysis of the 3 models' ability to delta hedge options over a short, medium and long-term period into the future. Again, both the Heston and Heston-Nandi model seem to outperform the classic Black Scholes model. My conclusion is that both models serve as an improvement to the original Black Scholes model.

Indholdsfortegnelse

Executive summary	2
Indledning.....	6
Problemformulering	8
Afgrænsning	10
Metodeafsnit.....	11
1. Black Scholes teorien	12
1.1 Volatilitet under Black Scholes	13
1.1.1 Den Geometriske Brownske bevægelse	14
1.2 Stylized facts of financial data.....	14
1.2.1 Afkastfordelingen er ikke normalfordelt	15
1.2.2 Ingen autokorrelation i finansielle data	16
1.2.3 Autokorrelation for absolutte og kvadrerede afkast	17
1.2.4 Delkonklusion på de stylized facts	18
1.3 Implicit volatilitet i markedet	18
1.3.1 Historisk versus implicit volatilitet.....	19
1.3.2 Black Scholes og den implicitte volatilitet	19
1.3.3 Newton-Raphson metoden	20
1.3.4 Beregning af implicit volatilitet.....	21
1.3.5 Volatilitets skew for Europæiske call optioner.....	22
1.3.6 Leverage effekt	24
1.3.7 Eksempel på leverage komponentens effekt.....	25
1.3.8 Volatilitets surface	25
1.3.9 Delkonklusion på implicit volatilitet	26
2. Modeludvidelser til Black-Scholes.....	27
2.1 Heston Modellen	27
2.1.1 Heston formlen for den Europæiske call option	28
2.2 Heston-Nandi GARCH modellen.....	29
2.3 Modeller med betinget varians	30
2.3.1 ARCH-modellen.....	30
2.3.2 GARCH-modellen	31
2.3.3 GARCH (1,1)	31
2.3.4 GARCH og stylized facts	32

2.4 Implementering af GARCH (1,1) modellen	34
2.4.1 Maximum Likelihood Estimation.....	34
2.4.2 GARCH Estimation.....	35
2.4.3 Langsigtet GARCH estimation.....	36
2.5 Test af GARCH komponenten	37
2.5.1 Test for ARCH-effekt.....	37
2.5.2 Lagrange multiplikator test.....	37
2.6 GARCH (1,1) evaluering.....	38
2.6.1 Parameter estimation	39
2.6.2 Test af stylized facts	40
2.6.3 Volatilitets estimater og perioder med finansiell ustabilitet	40
2.6.4 Svagheder ved GARCH estimaterne	42
2.7 Historisk vurdering af GARCH (1,1) modellen	42
2.8 Forecast med GARCH modellen.....	43
2.8.1 Kort-periode GARCH forecast	43
2.8.2 Enkelt og flerperiodes forecasts vha. GARCH (1,1)	45
2.8.3 Lang-periode GARCH forecast	46
2.8.4 Delkonklusion på GARCH forecasts.....	48
2.9 Heston modellen og dets praktiske anvendelse	48
2.9.1 Korrelation og variansens volatilitet.....	48
2.9.2 Delkonklusion på parametereffekterne.....	50
2.10 Heston modellens parametre til prisfastsætning.....	51
2.10.1 Delkonklusion på prisfastsætningsevnerne.....	53
2.11 Heston modellens parametre under implicit volatilitet.....	53
3. Empirisk sammenligning af optionsmodellerne	57
3.1 Kalibrering af Heston modellen	57
3.1.1 Parameterestimering ved tabsfunktionen.....	57
3.1.2 Nealder-Mead algoritme	58
3.1.3 Initialværdier i Nealder-Mead algoritmen	60
3.2 Heston og Nandi-GARCH modellen.....	60
3.2.1 Udledning af funktion for aktivprisen	62
3.2.2 Integraler for call prisen	62
3.3 Empirisk prissammenligning.....	63

3.3.1 Metode og data	63
3.3.2 Parameterestimer for Heston og Heston-Nandi modellen	64
3.3.4 In-sample model performance	65
3.3.5 Delkonklusion på in-sample performance	69
3.3.6 Out-of-sample model performance.....	69
3.3.7 Delkonklusion på out of sample performance	70
3.4 Dynamisk Hedge sammenligning.....	70
3.4.1 Delta i Black Scholes modellen.....	71
3.4.2. Delta i Heston og Heston-Nandi modellen.....	71
3.4.3 Opsætning af den empiriske hedge analyse.....	72
3.4.4 P&L for de anvendte modeller	73
3.4.5 P&L for delta hedge	73
3.4.6 Delkonklusion på delta hedge performance	75
Konklusion	76
Litteraturliste	78
Bilag 1 – R kode	80
Bilag 1.a.....	80
Bilag 1.b	81
Bilag 1.c.....	82
Bilag 1.d	83
Bilag 1.e.....	84
Bilag 2 – Optionspriser.....	85
Bilag 3 – Excels funktionskoder dannet i VBA.....	95
Bilag 3.1 – NewtRaphson funktion for den implicitte volatilitet	95
Bilag 3.2 – GARCH MLE funktionen.....	96
Bilag 3.3 – NelderMead algoritmen	97
Bilag 3.4 – P1 parameteren i Heston modellen	99
Bilag 3.5 – Delta for Heston modellen	100
Bilag 4 – Empiriske modelpriser og statistik.....	101

Indledning

Optioner har igennem mange år spillet en væsentlig rolle i de finansielle markeder. Årsagen hertil er, at en option er en finansiell kontrakt, hvis værdi er bestemt af udviklingen på et sekundært, underliggende aktiv. En sådan kontrakt har mange mulige anvendelser. Heriblandt at afdække risiko for en virksomheds kerneprodukt, eller virke som et muligt gearingsmiddel for en spekulant, der ønsker en fremtidig gevinst.

Op til starten af halvfjerdserne var der ikke en fuldstændig fælles enighed om hvordan en Europæisk optionskontrakt skulle prisfastsættes. Det var først da Fisher Black og Myron Scholes i 1973 publicerede deres artikel "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" (Black & Fisher, 1973), at aktørerne i de finansielle markeder nåede til en konsensus om den korrekte metode. Formlen blev kaldt Black Scholes formlen, og er stadig i dag en af de hyppigst anvendte modeller til at prisfastsætte optioner. Modellen har den fordel at den er simpel at benytte, og at den kun har en enkelt eksogen parameter, der kræver estimering; volatiliteten på det underliggende aktiv.

Selvom modellen er simpel bærer den dog også på en række restriktive antagelser, der selvom den muliggør simplicitet, også rejser en række problemstillinger, når den skal anvendes i den virkelige verden. For at nævnte et par, er fx antagelsen om den konstante volatilitet, risikofrie rente, samt at kursen på det underliggende aktiv er lognormalfordelt under hele optionens løbetid.

Antagelsen om den konstante volatilitet var tvivlsom, selv for modellens opfindere, Fischer og Myron. Det var dog først efter børskrakket i 1987, at markedspriserne (og dermed den implicitte volatilitet) begyndte at opføre sig væsentlig anderledes, end hvad man havde forventet efter den oprindelige Black Scholes teori. Børskrakket førte til opstandelsen af mønster i den implicitte volatilitet¹, der senere hen skulle blive beskrevet som volatilitets smilet. Det såkaldte volatilitets smil findes ved at plotte den implicitte volatilitet som funktion af en options strike kurs. Mønsteret viste en klar sammenhæng. For optioner med lav strikekurs, dvs. såkaldte in the money (ITM) optioner, var den implicitte volatilitet højere end for optioner med strike omkring den nuværende kurs (ATM). For optioner, der lå out of the money (OTM), var den implicitte volatilitet igen højere end for ATM optioner. Smilet blev oprindeligt dokumenteret i optionsmarkedet for fremmed valuta, og har sidenhen vist sig at antage lidt andre former på fx aktiemarkedet, hvor smilet antager form efter et skew. Et skew er her kendetegnet ved, implicit volatilitet er gradvist faldende med en forøgelse i den gældende strike kurs.

Skulle den oprindelige Black Scholes teori holde stik, burde man i virkeligheden ikke være i stand til at finde noget mønster i den implicitte volatilitet – man burde observere en flad linje. En af de primære årsager til opstandelsen af volatilitets smilet var, at de finansielle markeder blev mere volatile. Dermed øgedes sandsynligheden for mere "ekstreme" udfald i slutkurserne for det underliggende aktiv. De mere volatile markeder har sidenhen resulteret i, at den empiriske lognormalfordeling har besiddet federe haler og højere topstjålhed, end hvad man kunne forvente af en teoretisk lognormalfordeling.

Siden børskrakket har et næsten utal af forfattere forsøgt sig med løsningsforslag, der skulle tage hånd om de nye karakteristika for den empiriske lognormalfordeling. Langt de fleste forslag har behandlet den eksogene parameter, volatiliteten. I flere af de efterfølgende løsningsforslag er det forsøgt at gøre volatiliteten stokastisk,

¹ Den implicitte volatilitet er det niveau for volatilitet, der når indsat i Black-Scholes formelen giver den samme pris, som den der er observeret i markedet, forudsat at alle andre modelparametre stemmer overens med hinanden.

mens andre har forsøgt at komplicere problemet yderligere ved at tillade jumps (såkaldte "skift/hop") i volatiliteten.

Fælles for mange af de nye løsningsforslag var, at de ikke gav en lukket formel for prisfastsætningen af optioner, som den oprindelige Black Scholes model, apropos dens vedholdende popularitet.

Først da Steven L. Heston publicerede sin originale artikel "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options" tilbage i 1993, blev der general enighed om, at der nu var fundet et fornuftigt alternativ til den oprindelige Black Scholes model. Papiret skulle senere danne grundlag for hvad, der senere blev kendt som Heston modellen. Heston modellen havde den store fordel, at den fremsatte et lukket formeludtryk for prisen på den Europæiske call option, og hvor volatiliteten samtidigt fulgte en stokastisk proces. Siden den oprindelige introduktion af modellen, er der introduceret modeller, der bl.a. også tillader spring i volatiliteten, m.m.

Senere, i år 2000, publicerede Steven L. Heston i samarbejde med Saikat Nandi endnu en banebrydende artikel ved navn "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model" (Heston & Nandi, 2000). Denne model havde yderligere den fordel, at volatiliteten blev behandlet fremadrettet med mulighed for at forecaste det fremtidige volatilitetsniveau vha. den i forvejen anerkendte statistiske forecastmodel, GARCH.

Selvom at der i dag er præsenteret og fremlagt en lang række modeller, er der ikke en fuldstændig udbredt konsensus om hvilken model, der er den rigtige at anvende. En af de primære årsager til dette er nok, at de nye modellers effektivitet nok i højere grad afhænger af den tilgængelige data.

Formålet i specialet bliver derfor, at behandle de to Heston modeller til at udlede og fremsætte et mere realistisk bud på en virkelighedsnær modellering. Herunder vil fokus også være på modellernes praktiske egenskaber til modellering af de vanskeligheder, som 'moderne' finansielle data har vist sig at rejse.

Problemformulering

Estimation af optionspriser og forecast af volatilitet med udgangspunkt i Black Scholes opsætningen udgør fokus i denne afhandling. Formålet vil være at undersøge empiriske udvidelser til den oprindelige BS teori. Her er valget faldet på to modeller. 1) Den oprindelige Heston model fra 1993 og i forlængelse herved dens udvidelse fra år 2000; 2) Heston-Nandi GARCH modellen. Med disse to udvidede modeller in mente, formuleres den overordnede problemformulering til spørgsmålet

”Hvilke fordele og ulemper opnås ved anvendelse af de to Heston udvidelser til det oprindelige Black Scholes setup, under prisfastsætningen af optioner?”

Hvor den oprindelige Heston model kan siges at være bagudrettet, er Heston-Nandi modellen fremadrettet, i det den indarbejder et volatilitetsforecast for det underliggende aktiv. Ved at tage udgangspunkt i to modeller, hvis udgangspunkt afviger forholdsvist, opnås en dybere indsigt i optionsteorien og de medvirkende faktorer for prisfastsætningen, end ellers.

Det er efterhånden velkendt, at antagelserne som det oprindelige Black Scholes setup byggede på, ikke holder i praksis. Den første sektion i afhandlingen vil derfor undersøge hvilke egenskaber finansielle data faktisk har, og hvilke konsekvenser det medfører, at de oprindelige BS-antagelser ikke blev modelleret herefter. Behandlingen af emnet og problemstillingen udgør 1. sektion af specialet, hvor det er valgt at undersøge følgende spørgsmål

- I hvilken grad afspejler de teoretiske antagelser om afkastet og dets bevægelser de empiriske afkastforhold?

For at undersøge problemstillingen indledes med en kort introduktion af den oprindelige BS teori efterfulgt af en redegørelse for de empiriske afkast. Teorien og antagelserne i den oprindelige BS teori vil allerede blive sat på prøve i 1. sektion, og resultaterne herom vil danne udgangspunktet for de efterfølgende modeludvidelser. For at skabe kontinuitet efterstræbes der i de efterfølgende introducerede modeller en løbende reference og perspektivering tilbage til resultaterne opnået i 1. sektion.

2. sektion tager udgangspunkt i egentlige modeludvidelser, hvis begrundelse for deres anvendelse, blandt andet, kan refereres tilbage til de delanalyser, der foretages i 1. sektion. I 1. sektion er fokus på antagelserne om aktivets volatilitet, der som det vil vise sig, besidder en række særkarakteristika. For at undersøge hvorvidt modeludvidelserne kan korrigere for de resultater, der findes om finansielle data i 1. sektion undersøges følgende problemstillinger

- Hvor effektiv er GARCH (1,1) modellen til at tage højde for de empiriske afkastforhold, samt forecaste volatilitet herefter?
- Hvilke muligheder giver Heston modellens parametre for at imødekomme de vanskeligheder, som de empiriske afkastforhold rejser?

Fokus i 2. sektion vil være på at teste, afprøve og analysere modellernes egenskaber for dermed at afdække deres bidrag til den oprindelige optionsteori. Følgelig vil resultaterne være med reference til de konklusioner, der fremsættes i 1. sektion. Med udgangspunkt i teorien fremsat i 2. sektion opbygges den tredje og sidste sektion.

3. sektion vil benytte Heston og Heston-Nandi GARCH til at afprøve deres evner til at prisfastsætte empirisk. Fokus i denne sektion vil være på at prisfastsætte optioner handlet i markedet og derigennem sammenligne deres

evner ift. den oprindelige Black Scholes model. Derudover vil der også blive gennemført en analyse af de 3 modellers evne til at delta hedge handlede optioner. Delta hedging er en typisk nødvendig handling for en finansiell institution, der ønsker at afdække sine risici, og det er dermed også interessant at analysere modellernes evner i denne sammenhæng.

For at få et indblik i Heston samt Heston-Nandi modellens bidrag i et prisfastsætningsperspektiv, der om end andet nok er den vigtigste betragtning, tages der udgangspunkt i følgende spørgsmål

- Hvordan performer Black Scholes, Heston og Heston-Nandi modellen ift. markedspriserne, når de benyttes til at prisfastsætte optioner med forskellige løbetider?
- Hvordan performer de 3 modeller i delta hedging perspektiv, når der delta hedges på optioner over forskellige løbetider?

Med ovenstående problemformulering er det således søgt, at nå rundt omkring alle modellernes teoretiske bidrag.

Afgrænsning

Undersøgelsen koncentrerer sig omkring optioner solgt på det amerikanske S&P 500 indeks. Det antages at denne i sandheden følger en stokastisk proces for både prisudvikling og varians. En videre komplicering af setuppet ville være at inddrage muligheden for jumps i volatiliteten. Selvom dette vil gøre opsætningen endnu mere realistisk, peger de empiriske undersøgelser på, at sådanne egenskaber ikke tilfører væsentlig øget forklaringsgrad, når man allerede har inkorporeret muligheden for at volatilitet kan følge en stokastisk proces (Bakshi, Cao og Chen, 1997). For læseren interesseret i stokastiske volatilitets modeller med jumps, henvises derfor i stedet til Cont og Tankov (2004).

Det forventes at læseren er bekendt med det generelle Black Scholes setup, da der kun vil blive givet en overfladisk gennemgang af de vigtigste parametre. Desuden arbejdes der udelukkende med Europæiske optioner. Uanset om der derfor analyseres på call eller put optioner, vil resultaterne derfor være anvendelige ved anvendelse af put call pariteten.

Metodeafsnit

Data

S&P500: Igennem hele opgaven benyttes det amerikanske S&P 500 indeks til at foretage beregninger og teste modellernes egenskaber på. Den primære årsag til anvendelsen af et indeks skal ganske enkelt findes i dets likviditet. Mindre handlede aktier vil have en lavere handelsvolumen, hvilket vil medføre tvetydige resultater, da det er usikkert om det er enten en likviditets- eller en volatilitetseffekt, der er skyld udsvingene i optionsprisen.

Daglige afkast og justerede lukkekurser: Den benyttede afkastserie er, hvis ikke andet nævnes, daglige afkast på S&P 500 hvor lukkekurserne er justerede, dvs. dividende udbetalinger er inkorporeret i indeks prisen. Uden inklusion af dividende betalinger, ville den modellerede volatilitet være overvurderet, da den ville medregne kursudsving som følge af ikke-cash flow påvirkende transaktioner.

Tidshorisont: Der benyttes data fra perioden 1. januar 2000 til og med 1 januar 2017. Årsagen hertil skal findes i, at her både er perioder med høj volatilitet under finanskrisen, og umiddelbart stabil volatilitet før og efter finanskrisen igen. Det er da interessant at se hvor effektiv GARCH (1,1) modellen er til indarbejde skift i volatilitetsniveau.

Optioner: Der benyttes følgelig også optioner, som handles på S&P 500 indekset. Der er derfor tale om 'ægte' markedsdata, der er hentet fra en Bloomberg terminal, hvilket også vil gøre resultaterne anvendelige i den virkelige verden.

Transformerede afkast: Igennem hele analysesektionen og beregningerne, vil der blive benyttet transformerede afkast, dvs. logaritmen til afkast.

Software: Der benyttes forskellige softwarepakker til at foretage flere af de beregningstunge analyser.

Delanalyserne i 1. sektion produceres primært vha. Excel og til tider VBA, når det er muligt. For at foretage flere af 2. sektionens volatilitetsforecast, er det besluttet at benytte open source-værktøjet R. Programmet er yderst nyttigt og VBA langt overlegent i beregningstid, når der ønskes at foretages længere volatilitets forecasts, som det ses i 2. sektion.

Analyserne i 3. sektion bærer præg af VBA funktioner og koderne hertil fremgår af de vedlagte bilag. Koderne er enten skrevet med inspiration fra nettet på eksempelvis stackoverflow.com, følgelig med læst korrektur og test, eller skrevet med inspiration fra andre lærebøger på området.

1. Black Scholes teorien

Black-Scholes formelen for beregning af prisen på en Europæisk call option, C og put option P, er givet ved henholdsvis

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \text{ og} \quad (1)$$

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2)$$

Desuden er d_1 og d_2 i formel 1 og 2 givet som

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (4)$$

Hvor

S_0 = Aktivets pris i dag

K = Optionens specifikke exercise kurs på tidspunkt T

r = Den risikofri rente

T = Tiden fra i dag, målt i år, til optionens udløbstidspunkt

N = Normalfordelingen af d_1 og d_2

σ = Volatiliteten på aktivet, S

(Hull, 2012).

For den almene læser, der ikke er indviet i optionsteori, giver ovenstående formler ikke nødvendigvis intuitiv mening. Der gives derfor en kort forklaring på komponenterne af de væsentligste delelementer.

Det første led i prisen på en Europæisk call option, $S_0 N(d_1)$, er et udtryk for den nuværende aktiekurs vægtet med en sandsynlighed for dets udfald. Det er med andre ord, hvad man vil modtage som ejer af optionen.

Det andet led, $Ke^{-rT} N(d_2)$, er strike kursen tilbagediskonteret ved den risikofri rente, igen ganget med sandsynligheden for dets udfald. Det er derfor et udtryk for, hvad man betaler, hvis man som nuværende ejer ønsker at indløse optionen hos den oprindelige ejer, dvs. sælgeren.

Forskellen imellem de to led er derfor et udtryk for den sandsynlighed man tillægger, at optionen vil handle til en præmie (forstået som forskellen imellem de to) over dets sandsynlighedsvægtede strike sats. For at forstå hvad der påvirker sandsynlighederne, og forskellene imellem, er det nødvendigt at dykke lidt ned i baggrunden for d_1 og d_2 .

Fra formlerne for d_1 og d_2 ses det, at desto højere kursen på aktivet er, relativt til kursen på dets strike, desto større er både d_1 og d_2 , hvilket igen resulterer i en højere sandsynlighed for indløsning af den Europæiske call option. Da værdien af call optionen er begrænset til værdier større end 0, eftersom at man som investor aldrig vil

skulle betale for en evt. negativ indre værdi af call optionen, kan den minimale værdi af den Europæiske call option udtrykkes som

$$S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \geq 0 \quad (5)$$

Fordi den Europæiske call option ikke kan antage negative værdier har volatiliteten en udelukkende positiv indflydelse på dets værdi. Desto højere volatilitet, desto større værdi vil optionen derfor have, alt andet lige. Da volatilitet ikke er givet eksogent, og da den spiller en så afgørende rolle i prisfastsættningen af optioner, vil jeg nu gennemgå hvordan det oprindelige BS setup tænkte at behandle den nok vigtigste input parameter i den originale Black Scholes formel.

1.1 Volatilitet under Black Scholes

Volatilitet beregnes under det originale setup som et simpelt historisk gennemsnit. Det vil sige ved følgende fremgangsmåde, hvor S_i er en aktiekurs.

$n + 1$: Antal af observationer

S_i : Aktiekurs ved slutningen af interval i , med $i = 0, 1, \dots, n$

τ : Længden på hvert enkelt tidsinterval målt i antal år

Og

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad (6)$$

For $i = 1, 2, \dots, n$

Målet for standardafvigelsen af u_i er nu derfor givet ved

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad (7)$$

Hvor

$\bar{u}$ er gennemsnittet af stikprøven u_i . Til sidst kan σ beregnes ved at benytte standardafvigelsen og det førnævnte tidsinterval i antal år ud den følgende formel 8

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \quad (8)$$

Det er således nu tydeligt, at volatiliteten er et simpelt udtryk for den historiske volatilitet estimeret ud fra observeret markedsdata på det underliggende aktiv. Begrundelsen for denne simple modellering skal findes i den geometriske brownske bevægelse, som BS-modellen gør sig omkring aktiekursernes udvikling og dermed også dets volatilitet. Da bevægelsen spiller en afgørende rolle for modelleringen af aktivets kursudvikling og dermed også dets volatilitet, vil virkningen af antagelsen nu blive diskuteret.

1.1.1 Den Geometriske Brownske bevægelse

I Black Scholes teorien benyttes en geometrisk brownsk bevægelse til at beskrive udviklingen i aktivpriser, S_t , over tid. Den geometriske tilføjelse er et udtryk for, at aktiekursen ikke vil kunne antage negative værdier.

Processen er defineret som:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (9)$$

hvor

μ = en procentvis driftsrate

σ = en procentvis volatilitet

S_t = aktiekursen på tidspunkt t

W_t = en Brownsk bevægelse

S er således aktiekursen og μ er en forventning om et (konstant) afkast observeret ud fra volatiliteten, σ på det underliggende aktiv. Da både μ og σ modelleres som konstante parametre, indebærer det, at både afkast og risiko forventes at følge en konstant udvikling over tid.

For at en GBM kan siges at være effektiv, kræves det ifølge Sengupta (2004), at

- Virksomheden er en going-concern og at dets aktiekurser er kontinuerte i tid og værdi.
- Aktiekurser følger en Markov process, der indebærer, at kun den nuværende aktiekurs er relevant for forudsigelsen om den fremtidige kursværdi.
- Det proportionelle afkast på en aktie er lognormal fordelt.
- Det kontinuerte afkast for en aktie er normalfordelt.

Markov antagelsen er i denne sammenhæng særdeles vigtig. I sin egen betydning er en Markov process, en process hvor den forventede udvikling i en given enhed i dag, er uafhængig af enhedens værdi på tidligere, historiske tidspunkter. For aktiekurser medfører det, at de lognormalfordelte afkast antages uafhængige af hinanden over tid, dvs. der vil ikke være nogen form for historik eller afhængighed at spore i afkast, hverken mht. volatilitet eller kursudvikling.

Med de væsentligste Black Scholes antagelser præsenteret bevæger vi os nu videre til en redegørelse af de empiriske forskningsresultater, der foreligger for finansielle data. Disse betegnes også inden for finansieringsteorien; 'stylized facts of financial returns'.

1.2 Stylized facts of financial data

I korte træk kan de stylized facts beskrives som:

” General properties that are expected to be present in any set of returns, are called stylized facts”

(Taylor, 2005)

Da der er fundet talrige egenskaber for afkastserier fokuseres der her på de tre vigtigste fund, som er bevist tilstede i stort set alle afkastserier for finansielle data, inklusiv det amerikanske S&P 500 indeks. De 3 vigtigste forskningsresultater for denne afhandling, er fundet til at være følgende:

- 1) Afkastfordelingen er ikke normalfordelt
- 2) Der er næsten ingen korrelation imellem afkast på forskellige dage
- 3) Der er signifikant autokorrelation imellem afkast, når der måles på de kvadrerede afkast

Der følger nu en stykvis gennemgang af de 3 stylized facts, som naturligvis også vil blive diskuteret og holdt op imod de redegjorte Black Scholes antagelser.

1.2.1 Afkastfordelingen er ikke normalfordelt

I BS-modellen antages det at afkastet på det underliggende aktiv er lognormal fordelt. Det er imidlertid bevist, at den empiriske afkastfordeling ikke er normalfordelt og i stedet besidder de følgende 3 generelle egenskaber (Taylor, 2005):

- Den er approksimativt symmetrisk
- Den besidder federe haler, end normalt
- Den har en større forsamling af observationer omkring gennemsnittet, dvs. topstejlhed

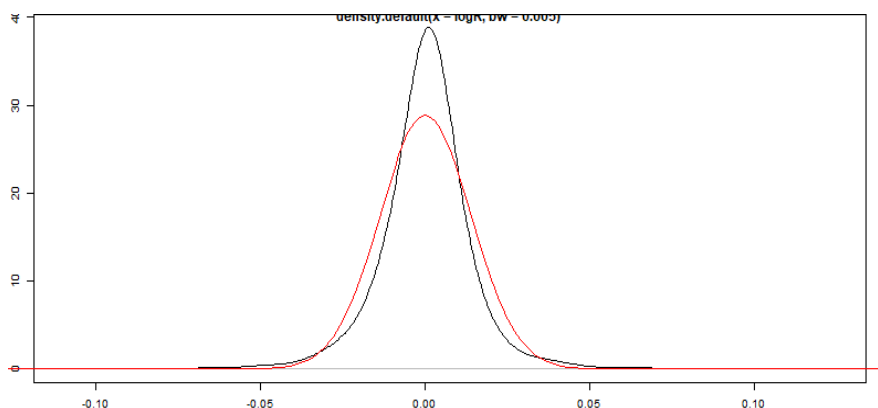
Når den empiriske lognormalfordeling har federe haler medfører det, at man ved brug af BS-modellen til prisfastsætning af optioner, vil have en tendens til at undervurdere sandsynligheden for ekstreme udfald. I optionstermer medfører dette, at "deep in/out of the money" optioner vil have en tendens til at blive prisfastsat for billigt, relativt til optioner, der ligger tættere på strike kursen.

Da den empiriske fordeling også har en større andel af observationer samlet omkring gennemsnittet, er det imidlertid tvetydigt om volatiliteten i gennemsnit er under- eller overvurderet, når man benytter en traditionel lognormalfordeling til modellering af kursen og volatilitet på et finansielt aktiv.

Det er naturligvis interessant, at evaluere om disse resultater også afspejles i S&P 500 indekset. Der er derfor produceret et normalfordelingsplot i figur 1.1. For at producere lognormal fordelingsplottet er R benyttet. Se bilag 1 linje 20-22 for produktion af plottet på næste side.

Den røde linje svarer til en teoretisk lognormalfordeling, mens den sorte linje viser den sande lognormalfordeling for S&P 500 indekset, målt over en 15-årig periode fra 1. januar 2000 til 1. januar 2015. Det er ganske tydeligt at den sande lognormalfordeling også her besidder en større topstejlhed og tilhørende fede haler, relativt til den teoretiske lognormalfordeling.

Figur 1.1



1.2.2 Ingen autokorrelation i finansielle data

De empiriske resultater for stylized facts indikerer, at der næsten ingen korrelation er imellem afkast for forskellige dage. Resultatet er især interessant, da man som investor ellers ville være i stand til at handle efter trends i afkastserien. Man ville med andre ord være i stand til at forudsige den fremtidige udvikling pba. af den historiske udvikling i aktiekursen – og der ville være altså tale om et klart brud på den førnævnte Markov-antagelse.

Da afhandlingen omhandler volatilitets forecast og prisfastsætning af optioner på det amerikanske S&P 500 indeks er det imidlertid interessant, at teste om antagelsen er opfyldt for netop denne afkastserie. En simpel metode til at verificere antagelsen om ingen autokorrelation, er ved blot at beregne en stikprøvekorrelation på afkastet, der her er givet i formeludtryk med lag x :

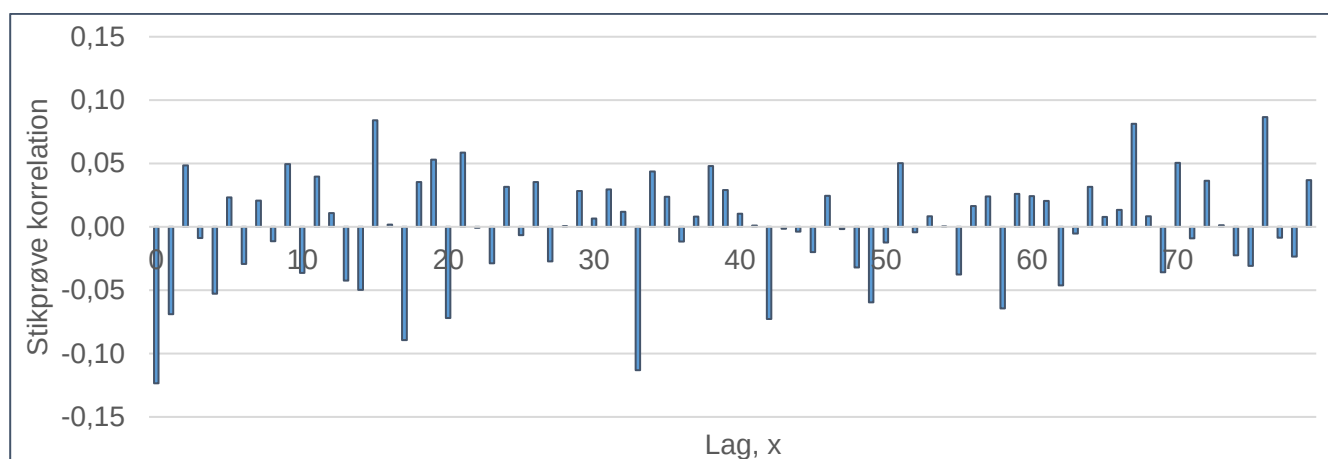
$$r_x = \frac{\sum_{t=1}^{n-x} (x_t - \bar{x})(x_{t+x} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x})^2} = \frac{\hat{y}_x}{\hat{y}_0} \quad (10)$$

Hvor $\hat{y}_x$ derfor er den x 'te stikprøve af autokovarians overfor stikprøvevariansen $\hat{y}_0$. Resultatet af ovenstående formel plottes i et korrelogram, der vil afsløre eventuelle mønstre i afkastet på S&P500 indekset ud fra beregninger på det daglige logafkast.

Fremgangsmåden er benyttet på en afkastserie over perioden 8. september 2011 til og med 30. december 2011, dvs. 80 lags i alt. Resultatet heraf ses i figur 1.2 på næste side.

Som det ses i plottet på næste side er der næsten ingen systematisk autokorrelation i afkastserien. Stort set alle autokorrelationsestimaterne er lig 0, og den største absolutte værdi måles i perioden til blot -0,12. Det må derfor konkluderes, at der ingen signifikant autokorrelation tilstede er i afkastserien på det benyttede S&P 500 indeks. De generelle resultater fra de stylized facts om ingen signifikant autokorrelation er derfor også gældende for det i afhandlingen benyttede S&P 500 indeks.

Figur 1.2

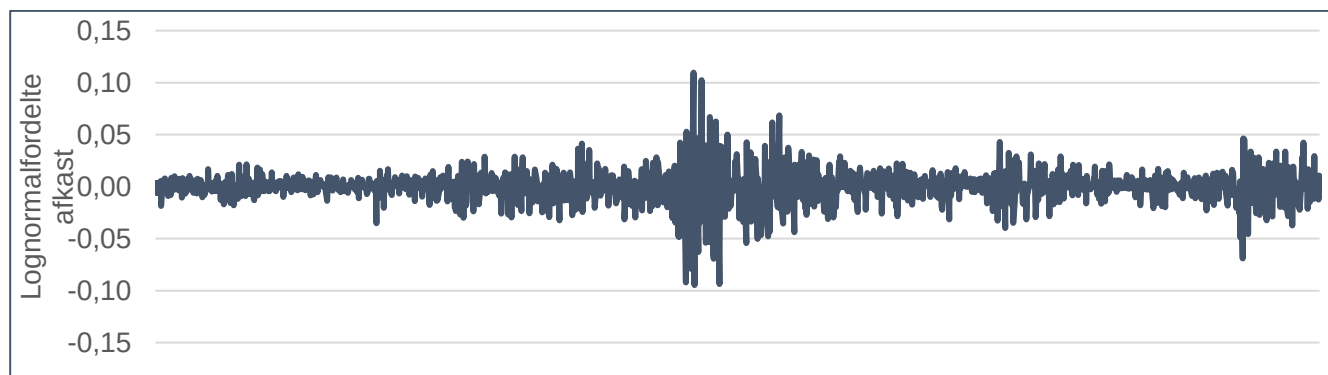


1.2.3 Autokorrelation for absolutte og kvadrerede afkast

De empiriske undersøgelser peger ofte imod, at høje absolutte afkast efterfølges af perioder med høje absolutte afkast. Set i lyset af forrige konklusion er det ellers fristende også at konkludere, at afkastserien udviser uafhængighed. Det er bare ikke tilfældet, når man anskuer de absolutte og kvadrerede afkast.

I figur 1.3 er der foretaget en analyse af de lognormalfordelte afkast, målt over tidshorisonten 8. september 2011 til og med 30. december 2011, på det S&P 500 indekset.

Figur 1.3



Plottet afslører tydelige mønstre i volatiliteten på logafkast. Volatiliteten samler sig omkring midten af tidsperioden, her omkring oktober måned i 2011. Desuden ses der en tendens til at perioder med lav og høj volatilitet følger hinanden. Antagelsen om konstant varians over tid er derfor, tydeligvis, ikke opfyldt.

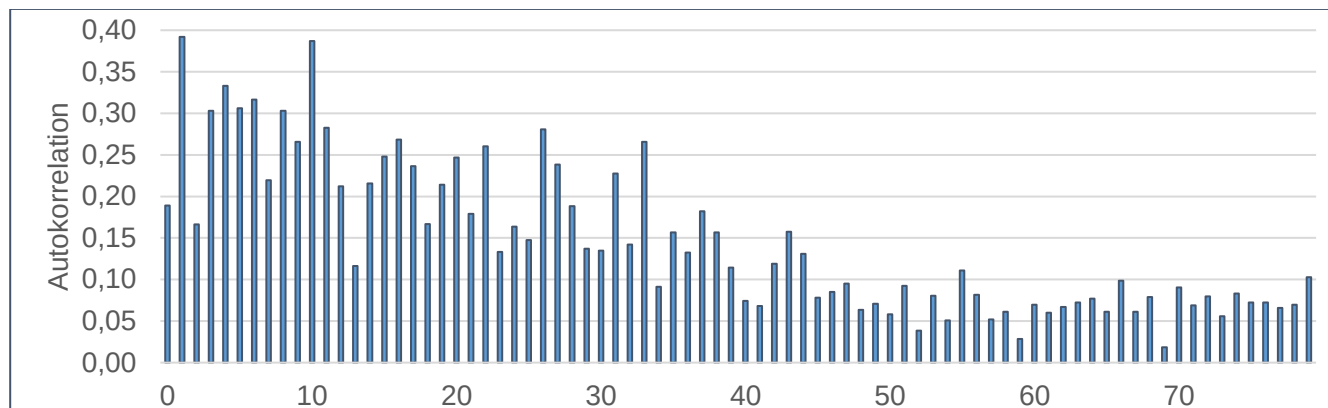
Denne tidsvariation i volatilitet kan, for samme tidsperiode, igen visualiseres i et korrelogram over autokorrelationen på de logaritmiske afkast. For at visualisere tidsafhængigheden i volatilitet benyttes det, at det daglige afkast approksimativt er lig 0. Derfor kan der fremsættes et estimat på den ubetingede varians på følgende vis

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n r_t^2 \quad (11)$$

(Taylor, 2005)

Resultatet af estimerne ses nedenfor i figur 1.4.

Figur 1.4



Ovenstående er således et plot af autokorrelationen på de kvadrerede logaritmiske afkast i et korrelogram. Her er tegnet på autokorrelation ganske tydeligt. Afhængigheden er stærkt signifikant i starten af den målte tidsperiode og aftager langsomt, som antallet af lags tilføres.

Konklusionen er derfor, at selvom der ikke hersker autokorrelation for de logaritmiske afkast, som konkluderet ud fra figur 1.2, så udviser de kvadrerede (dvs. variansen på de) logaritmiske afkast høj autokorrelation, med en tilhørende høj grad af vedholdenhed.

Den i afsnit 1.1.1 omtalte Markov egenskab er derfor ikke opfyldt, når der kan påvises afhængighed i de historisk kvadrerede log afkast, som ydermere ser ud til at have en længere vedholdenhed.

1.2.4 Delkonklusion på de stylized facts

Black Scholes antagelserne om konstant og uafhængig volatilitet, er i praksis ikke opfyldt på det amerikanske S&P 500 indeks, når man arbejder med logaritmiske afkast. Det har vist sig, at der hersker en svag til ingen autokorrelation for de logaritmiske afkast, men at de kvadrerede logaritmiske afkast derimod udviste en høj grad af autokorrelation samt vedholdenhed. Desuden er der en tendens til at volatilitet antager forskellige niveauer under forskellige tidspunkter. Volatilitet er dermed langt fra konstant over tid. Det blev også bevist, at den empiriske lognormalfordeling for S&P 500 afkastet besidder langt federe haler og har en højere topstøjhed, relativt til den teoretiske lognormalfordeling.

Efter at have set hvordan log afkast i praksis opfører sig over tid, er det nu interessant også at anskue markedsaktørernes vurdering af volatilitet over tid. En sådan vurdering kaldes i optionsteori for beregning af den implicitte volatilitet.

1.3 Implicit volatilitet i markedet

Som det netop er påvist, er volatilitet i den virkelige verden ikke konstant over tid, men i stedet afhængig af en række andre faktorer, så som uforudsete hændelser, hvis effekt er en periode med enten højere eller lavere volatilitet end ellers, i de finansielle markeder.

En indvirkning ved antagelsen om konstant volatilitet er, at volatilitets parameteren i BS setuppet udelukkende er afhængig af to faktorer; den historiske volatilitet på det underliggende aktiv, samt optionens tid til udløb. For at

give indblik i hvorfor antagelsen er problematisk, sammenlignes det historiske gennemsnit med den implicitte volatilitet i markedet.

1.3.1 Historisk versus implicit volatilitet

I første omgang beregnes den historiske volatilitet, dvs. vi tager udgangspunkt i Black-Scholes teorien hvor den geometriske brownske bevægelse antages at være opfyldt. Den historiske volatilitet vil senere blive sammenlignet med den i markedet observerede implicitte volatilitet. Idéen herved er at fremsætte konkret bevis på, hvorfor udvidelser til den traditionelle teori er nødvendig, samt at vurdere eventuelle årsager til afvigelser imellem de to estimater.

Tidsperioden er under disse beregninger fastsat til at være perioden fra 1. august 2017 til og med 1. oktober 2017 – en periode på i alt 43 handelsdage. Indsættes i formel 7 opnås en daglig standard afvigelse på 0,49%. For at konvertere denne til en årlig standard afvigelse med 252 handelsdage benyttes blot, at volatilitet i BS-teorien forventes konstant over tid, samt at udviklingen kan modelleres efter kvadratroden af tid. Med 252 handelsdage på et år, bliver den årlige volatilitet da lig

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = 0,49\% * \sqrt{252} = 7,84\%$$

Som vi om lidt vil se, er den historiske volatilitet ikke altid et lige godt bud på den fremtidige volatilitet.

1.3.2 Black Scholes og den implicitte volatilitet

Den empirisk estimerede volatilitet er i Black Scholes verdenen synonymt med implicit volatilitet. Implicit volatilitet, er den volatilitet, der resulterer i den observerede handelspris for en option.

I stedet for at benytte den historiske volatilitet i markedet, som BS-teorien anbefaler, anskues problemet fremadrettet ved at udlede den implicitte volatilitet, dvs. den volatilitet, som når indsat i BS formelen for en Europæisk call eller put option, giver samme pris som optionen observeret i markedet. Implicit volatilitet er således et udtryk for den gennemsnitlige volatilitet, som markedsaktørerne forventer, at det underliggende aktiv vil udvise i perioden frem til optionens udløbstidspunkt. Matematisk kan det formuleres som

$$C_{\text{obs}}(K, T) = C_{\text{BS}}(\sigma_{\text{iv}}, K, T) \quad (12)$$

Hvor

C_{obs} = Den i markedet observerede handelspris for en option med strike K og tiden T til udløb

σ_{iv} = Den implicitte volatilitet, der gør den teoretiske optionspris lig den observerede handelspris

I henhold til ovenstående er det nødvendigt, at foretage en mindre omskrivning af BS formelen for den Europæiske call option, som den er præsenteret i formel 1. Årsagen er, at der udbetales dividender på S&P500 indekset². Den nuværende dividende er fundet til at være ca. 1,86% p.a., som derfor skal indarbejdes i den teoretiske BS optionsformel. Dette gøres ved at indregne et dividend yield, her betegnet q. Det gennemsnitlige dividendeafkast skal fratrækkes i aktiekursen og i sandsynligheden for at ramme dets udfald, da dividenden i teorien sænker det procentvise tidsafkast med et beløb svarende til den gennemsnitlige dividende, q. Resultatet heraf ses i formelen nedenfor, med q indregnet i prisen for den Europæiske Call option:

² <http://www.multpl.com/s-p-500-dividend-yield/>

$$C = S_0 e^{-qt} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \quad (13)$$

d_1 kræver også en mindre omskrivning jf. føromtalt argument

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + t\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}} \quad (14)$$

d_2 kræver ikke nogen behandling da den ikke er møntet på aktiekursen, men derimod strike prisen. BS formelen for den Europæiske put omskrives også ligeledes ved indregning af q som:

$$P = K e^{-rt} N(-d_2) - S_0 e^{-qt} N(-d_1) \quad (15)$$

Hvor d_1 nu også følger førnævnte definition i formel 14.

For fremtiden benyttes nu følgende notation til at beskrive den teoretiske BS pris for en Europæisk call option med dividende:

$$C_{BSDiv}(\sigma, K, T) \quad (16)$$

For at beregne den implicitte volatilitet, kan man gøre brug af Excels solver funktion. Metoden er dog ikke at foretrække, når der skal relativt mange estimeringer. Det er derfor besluttet i stedet at gøre brug af en matematisk fremgangsmåde, der har den fordel at den præsenterer en lukket algoritme for løsningen af den implicitte volatilitet på den Europæiske call option.

1.3.3 Newton-Raphson metoden

Da det ikke er muligt at udlede et lukket formeludtryk for beregningen af volatilitet ud fra den oprindelige BS-formel benyttes i stedet Newton-Raphson metoden, der er en lukket algoritme. Metoden har den fordel at den er relativt simpel og derfor også nem at kode ind som en funktion i Excels VBA. Desuden har fremgangsmåden vist sig mere egnet til at estimere den implicitte volatilitet, når den sammenlignes med andre metoder så som Bisection og Secant metoden (Burden og Faires, 2001). Beregningen af den implicitte volatilitet er i virkeligheden blot et spørgsmål om at 'gætte' sig til den sande volatilitet. At benytte ukvalificerede gæt er dog i praksis ensbetydende med stor mængde manuelt procesarbejde. Det er derfor besluttet at benytte en matematisk fremgangsmåde, der resulterer i en lukket algoritme for et mere kvalificeret gæt på niveauet for den sande implicitte volatilitet.

Newton-Raphson er baseret på en første-ordens Taylor serie approksimation omkring roden. For at finde roden til x af en funktion (x), der defineres som det x , der giver resultatet $f(x) = 0$ vælges en initial værdi af x_0 , som det første gæt for den 'sande' rod. For at komme endnu tættere på den sande værdi af roden, der giver en nulforskel i formel 12, opdateres gættet ved anvendelse af følgende formel

$$f(x_{i+x}) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (17)$$

For hvert $i = 0, 1, 2, \dots$, hvor $f'(x_i)$ betegner den første afledte af $f(x)$ evalueret ved x_i . På et tidspunkt skal

søgningen afsluttes, når det vurderes at gættet er tilpas tæt på den sande værdi. I dette tilfælde benyttes en grænseværdi på 0,00001 til at acceptere forskellen som værende det 'sande' niveau for den implicitte volatilitet. Desuden begrænses antallet af iterationsforsøg til 5.000, som i de fleste tilfælde vil være nok til at opnå et realistisk bud på det sande niveau.

Ovenstående funktion skal naturligvis tilpasses BS formelen. Dette er dog relativt simpelt. Formel 17 omskrives blot til at finde funktionen $f(\sigma)$, som nu i stedet er givet som en kvadreret tabsfunktion:

$$f(\sigma) = [C_{\text{obs}}(K, T) - C_{\text{BSDiv}}(\sigma, K, T)]^2 \quad (18)$$

Implicit volatilitet er således den værdi af volatiliteten, der bevirker at $\sigma = \sigma_{\text{iv}}$, der igen giver en nul forskel mellem den observerede handelspris og Black Scholes optionsprisen:

$$f(\sigma_{\text{iv}}) = 0 \quad (19)$$

Rationalet bag kvadreringen skal findes ved at det er muligt at opnå et tættere estimat med færre gæt, mens man i samme omgang omgår større negative værdigæt for $f(\sigma_{\text{iv}})$, da volatilitet alligevel kun kan antage værdier fra 0 til uendeligt positiv. Som førnævnt er funktionen kodet ind i Excels VBA som en funktion for at lette beregningsarbejdet. Koden hertil fremgår af bilag 3.1.

1.3.4 Beregning af implicit volatilitet

For at beregne den implicitte volatilitet på det amerikanske S&P 500 indeks er der pr. 2 oktober 2017 taget udgangspunkt i handlede optioner på indekset. Perioden tager derfor sit udgangspunkt i samme tidsperiode, som for det historiske estimat fremsat i sektion 1.1.1.

Den såkaldte 'live' data omkring de handlede optioner er hentet fra en Bloomberg terminal og er tilgængeligt i bilag 2. For at beregne den gældende call pris på den Europæiske option, er der beregnet et gennemsnit af de gældende Bid og Ask kurser. Det er også sikret, at der er rigeligt likviditet (volumen) i de handlede optioner, for at holde konklusionerne i denne delanalyse så afgrænsede som muligt til den empiriske optionsteori.

Resultatet af beregningerne af den implicitte volatilitet, ved hjælp af Newton-Raphson metoden, ses på næste side i tabel 1

Tabel 1.1

		T					
		0,28	0,43	0,49	0,65	0,97	1,16
K	2.525	17,1%	16,3%	15,3%	17,0%	17,2%	17,7%
	2.550	15,4%	15,8%	14,9%	16,3%	16,6%	17,6%
	2.575	14,0%	14,7%	13,9%	15,4%	16,0%	17,0%
	2.600	12,8%	13,9%	13,1%	14,3%	15,4%	16,3%
	2.625	11,6%	13,0%	12,2%	13,6%	14,9%	15,8%

Hvis man holder resultatet i tabellen ovenfor sammen med det historiske estimat på den årlige volatilitet på 7,45% ses en markant forskel. Tages blot eksempelvis den korte løbetid på 0,33, dvs. 83 handelsdage til udløb, fås en volatilitet, ud fra det historiske estimat på:

$$0,49\% * \sqrt{83} = 4,46\%$$

Hvor de 0,49% er estimeret på den daglige standardafvigelse hentet fra formel 7.

Når resultatet ovenfor sammenlignes med resultaterne i den første kolonne i tabel 1, fremgår det, at den historiske volatilitet groft undervurderer volatiliteten relativt til markedet, med alt fra omkring 2-3 gange. En anden interessant observation er, at den implicitte volatilitet er forskellig på call og put optioner, som ellers har ens løbetid. Sammenligningen ses i tabellerne nedenfor.

Tabel 1.2

Call optioner								
St	K	T	Bid	Ask	Last	Call pris	Volumen m.	NewtRaph iVol
Chain 1								
2.521,2	2.525	0,33	85,4	86,1	84,2	85,1	73	15,6%
2.521,2	2.550	0,33	66,5	67,2	63,7	65,4	445	14,1%
2.521,2	2.575	0,33	49,3	49,9	47,5	48,7	794	12,9%
2.521,2	2.600	0,33	34,4	34,9	33,9	34,4	49	11,7%
2.521,2	2.625	0,33	22,3	22,8	21,5	22,2	118	10,6%

Put optioner								
St	K	T	Bid	Ask	Last	Put pris	Volumen m.	NewtRaph iVol
Chain 1								
2.521,2	2.525	0,33	33,5	34,0	34,0	34,0	219	6,8%
2.521,2	2.550	0,33	39,5	40,0	40,5	40,3	105	9,7%
2.521,2	2.575	0,33	47,1	47,7	48,9	48,3	13	12,8%
2.521,2	2.600	0,33	57,0	57,6	60,5	59,0	2	16,3%
2.521,2	2.625	0,33	69,8	70,5	71,8	71,2	3	20,1%

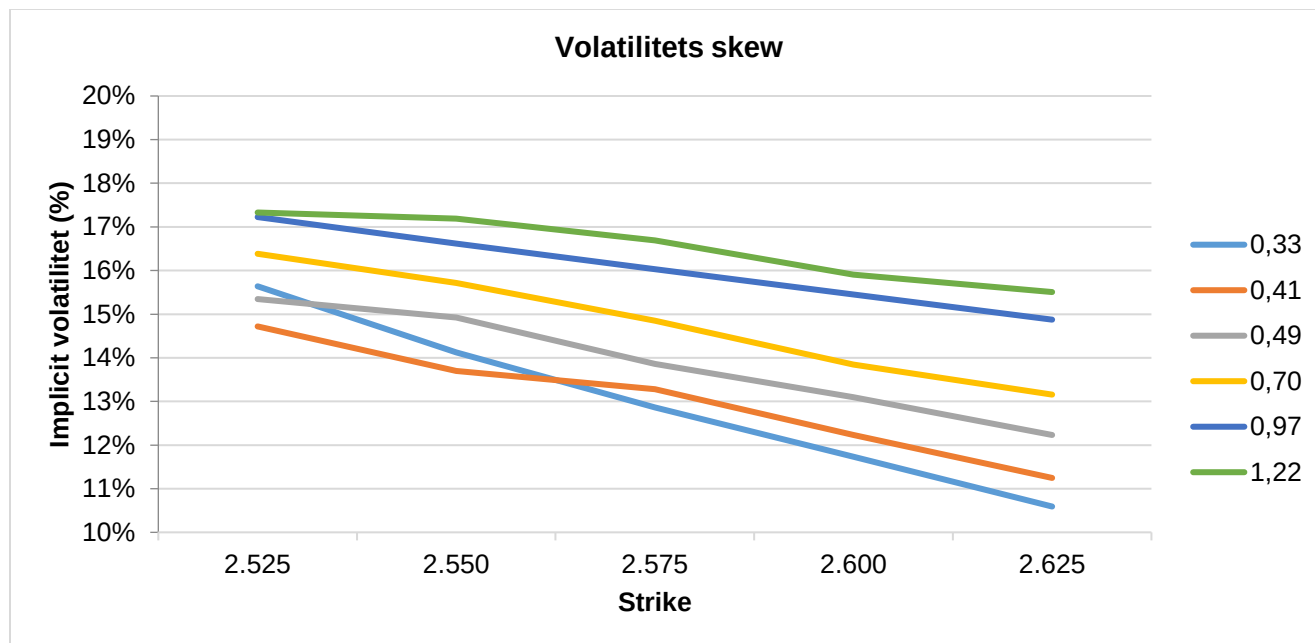
I teorien burde den implicitte volatilitet, efter put call pariteten, være ens for både call og put optioner. I virkeligheden spiller likviditet dog også en stor rolle i prisfastsætningen af optioner. I tabellerne fremgår nemlig også volumen i mio., der måler den daglige omsætning i millioner stk. Sammenlignes de to kolonner for hhv. Call og Put optioner ses det, at der også hersker en negativ sammenhæng imellem volumen og volatilitet.

Optioner med lav volumen er ganske enkelt prisfastsat højere, idet det er sværere at frasælge optionen igen.

1.3.5 Volatilitets skew for Europæiske call optioner

Ifølge BS-formlen er volatilitet uafhængig af en options strike. Uanset hvor langt inde eller ude kursen er ift. optionens strike, vil volatiliteten da være den samme, hvis man ellers holder alle andre parametre konstante. Hvis man derfor plottede den implicitte volatilitet som en funktion af strike efter faste udløbstidspunkter, burde man derfor observere en flad linje. Resultatet af dette forsøg ses i figur 1.5 nedenfor

Figur 1.5



Af figuren fremgår det at den implicitte volatilitet for Europæiske call optioner, er langt fra konstant over de fem målte strikes. Til konstrueringen af figuren er der blot benyttet data fra tabel 1, med strike langs x-aksen og implicit volatilitet op ad y-aksen. Af grafen ovenfor er det dog også muligt at drage en række interessante konklusioner vedrørende den formodne volatilitet i markedet.

For det første fremgår det at volatiliteten antages højere for optioner med lav strike relativt til optioner med en høj strike kurs. Resultatet skyldes ganske enkelte markedsaktørernes forventninger til mulige kursudfald.

Den empiriske afkastfordeling for optioner finder det således mere usandsynligt, at optioner langt fra strike kursen vil blive indløst, relativt til den teoretiske lognormalfordeling. Modsætningsvis vurderer den empiriske fordeling det mere sandsynligt, at optioner langt inde i strike kursen vil blive indløst, relativt til den teoretiske lognormalfordeling – disse prisfastsættes derfor også højere, hvilket altså resulterer i et skew i plottet af den implicitte volatilitet.

Ydermere er det interessant, at mønsteret synes mere ekstremt for optioner med kort løbetid på ca. et kvartal, mens effekten væsentligt aftager for optioner med længere løbetid på over et år (eksemplificeret ved den grønne linje). En del af forklaringen herved skyldes nok at der er tale om Europæiske optioner, som kun kan indløses ved udløb. Optionerne med kort løbetid prisfastsættes derfor relativt højere, da de har kortere tid til udløb og dermed også har en større sandsynlighed for at være pengene værd ved udløb. Optionerne med længere løbetid prisfastsættes lavere, da der er længere tids usikkerhed forbundet med tiden til udløb. En anden medvirkende faktor er også, at in the money call optioner med tiden er blevet populære alternativer til direkte aktiekøb, da optioner tilbyder gearing og forøget ROI, når det benyttes som benchmark til performancemål.

For at forstå hvorfor denne modelleringsfejl opstår i den oprindelige Black Scholes teori, er det nødvendigt at forstå antagelserne, som udviklerne af modellen byggede den på. Dette kommer til udtryk ved den såkaldte leverage effekt.

1.3.6 Leverage effekt

En mulig årsag til det observerede skew i den implicitte volatilitet, kan findes i virksomhedens gearingsniveau, dvs. forholdet imellem gæld og egenkapital. Når en virksomheds egenkapital falder, som følge af tab, vil virksomhedens gældstagnation samtidigt stige. Dette resulterer altså, kort sagt i, at virksomhedens egenkapital bliver mere risikabel, og dens volatilitet stiger dermed som et resultat heraf. For bedre at forstå denne såkaldte 'leverage effekt' gives et kort eksempel på hvad der sker inde i virksomheden, når et tab indtræder.

I det følgende benævnes V, E og D virksomhedens samlede værdi (dvs. værdien af aktiverne), værdien af egenkapital samt værdien af gæld, henholdsvis. Dermed får vi følgende relation for virksomhedens værdi:

$$V = E + D \quad (20)$$

Ovenstående er traditionelt set benyttet til at prisfastsætte risikabel gæld og credit default swaps. Robert Merton, som var en af arkitekterne bag BS-formlen, antog imidlertid i udviklingen af sin formel, at egenkapitalværdien kan anskues som værdien af en call option på V med strike lig D (Hugh, 2009). Rationalet er, at når virksomhedens gæld udløber, vil egenkapitalejerne, i kraft af deres begrænsede hæftelse have en af følgende valgmuligheder; at købe aktiverne eller overdrage dem til ejerne af gælden.

Givet at man kender både værdien af virksomhedens aktiver og gælden ved udløb, kan man dog forudsige ejernes beslutning i denne opsætning. Det gælder nemlig, at hvis værdien af aktiverne er højere end værdien af gæld, vil ejerne betale værdien af aktiverne og gå derfra med den overskydende værdi. Hvis værdien af aktiverne derimod er lavere end gælden, vil ejerne derimod lade virksomheden gå konkurs og overlade resten af værdien til ejerne af gælden. Denne beslutningsregel fører altså til, at man kan betragte værdien af egenkapital som en call option på aktiverne.

Hvis nu ΔV , ΔE og ΔD betegner ændringen i værdien af V, E og D, henholdsvis, opnås det at

$$V + \Delta V = (E + \Delta E) + (D + \Delta D) \quad (21)$$

Som kan omskrives til:

$$\frac{V + \Delta V}{V} = \frac{E + \Delta E}{V} + \frac{D + \Delta D}{V} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{E}{V} \left(\frac{E + \Delta E}{E} \right) + \frac{D}{V} \left(\frac{D + \Delta D}{D} \right) \quad (23)$$

(Hugh, 2009)

Hvis man nu antager at egenkapitalandelen er større end 0, så kan virksomhedens volatilitet beskrives som

$$\sigma_V \approx \frac{E}{V} \sigma_E \quad (24)$$

(Arak & L. Ann Martin, 2006).

Ovenstående udtryk kan let omskrives for at finde volatiliteten på egenkapitalen:

$$\sigma_E \approx \frac{V}{E} \sigma_V \quad (25)$$

1.3.7 Eksempel på leverage komponentens effekt

Hvis man nu antager at værdien af aktiverne, V , er lig 100, værdien af egenkapital, E , er lig 60 og virksomhedens volatilitet er 15%, så kan vi benytte formlen ovenfor til at finde egenkapitalens volatilitet til at være omkring 25%. Den interessante effekt opstår dog først, når der for virksomheden indtræffer et tab. Lad os antage at tabet er lig halvdelen af virksomhedens egenkapital, dvs. 30 i dette tilfælde. Værdien af egenkapital falder derfor med 30, ligeledes gør værdien af aktiverne. Den nye volatilitet på egenkapitalen er nu approksimativt givet som

$$\sigma_E \approx \frac{V}{E} \sigma_V = \frac{0,7}{0,3} * 15\% = 35\%$$

Volatiliteten på egenkapitalen er steget med hele 10%. Alt imens er virksomhedens volatilitet på aktiverne fuldstændig uændret, på trods af tabet:

$$\sigma_V \approx \frac{E}{V} \sigma_E = \frac{0,3}{0,7} * 35\% = 15\%$$

Af ovenstående eksempel ses det at den såkaldte gearingseffekt er tilstede, eftersom at volatiliteten på egenkapitalen stiger, selvom virksomhedens samlede volatilitet er konstant. Markedet har ageret anderledes end hvad Robert Merton antog, og har indarbejdet en højere volatilitet i aktivet, når tab indtræder.

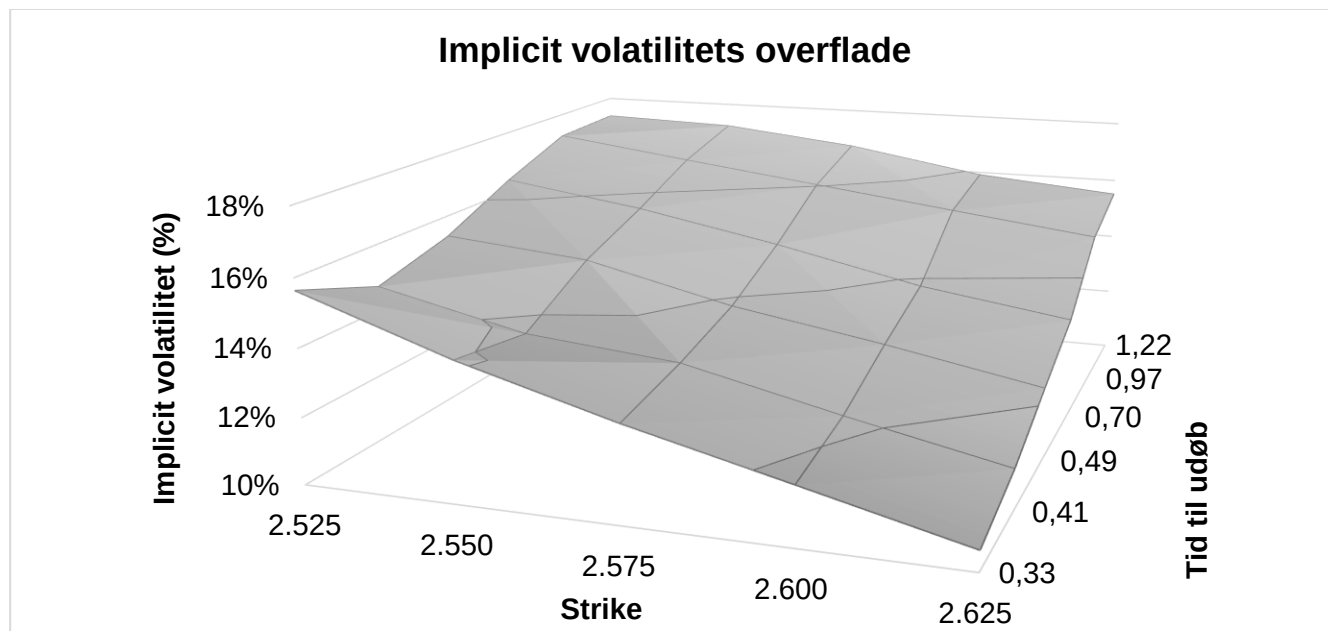
At virksomhedens volatilitet skulle være konstant, uanset tab, kan være et af de argumenter, som lå til grund for lognormal fordelingsantagelsen. I praksis vurderes det dog, at usikkerheden (og dermed volatiliteten) omkring hele virksomheden stiger, når virksomheden lider tab. Det er nøjagtigt denne effekt man kan observere i figur 1.5, hvor optioner med lave strike kurser har højere implicit volatilitet, relativt til optioner med højere strike kurser.

1.3.8 Volatilitets surface

Fra volatilitets skew'et i figur 1.5 så vi at den implicitte volatilitet på S&P 500 indekset afhang af strike kursen, selvom tiden til udløb blev holdt fast. I dette afsnit forsøges det at holde både strike og tid fast, for at se om der igen optræder mønstre. Resultatet vil være en 3D-graf, som for at opfylde BS betingelserne, skal være fuldstændig flad uden nogle former for kurvaturer. For at konstruere grafen tages der udgangspunkt i data fra tabel 1.

Ved at benytte Excels graf-funktion er det ligetil at skabe et 3D-plot over den implicitte volatilitet som funktion af både strike og tid. Resultatet ses i figur 1.6.

Figur 1.6



I ovenstående findes den implicitte volatilitet op ad y-aksen, strike henad x-aksen og til sidst tiden til udløb op langs z-aksen.

Fra den implicitte volatilitets overflade er det således synligt at volatilitet afhænger af både strike og tiden til udløb. Igen ses det at optioner med lav strike generelt har højere implicit volatilitet. Der er dog et såkaldt ”knæk” i plottet, omkring optioner med en strike på 2.550 og 0,41 år til udløb, som kan skyldes relativt bedre likviditet i markedet, end for andre optioner med tilnærmelsesvis samme karakteristika. Når man bevæger sig frem i tiden bliver den implicitte volatilitets afhængighed af strike mindre igen.

Betragtes tiden til udløb fremgår det tydeligt at alle optioners implicitte volatilitet har en vis afhængighed af dens tid til udløb.

1.3.9 Delkonklusion på implicit volatilitet

Med udgangspunkt i det oprindelige Black Scholes setup, er det bevist at den empiriske volatilitet opfører sig anderledes end først tænkt. Det konkluderes, at den historiske volatilitet groft undervurderer den volatilitet, som markedsaktørerne forventer, at S&P500 indekset vil udvise under løbetiden. Det bør dog i denne sammenhæng også pointeres, at det historiske estimat er altafhængig af den benyttede tidsperiode. For andre perioder vil tilfældet derfor være at det er den historiske volatilitet, der overstiger den implicitte volatilitet. Konklusionen vil dog være den samme; det historiske volatilitetsniveau er sjældent en god indikator for det fremtidige niveau.

Den implicitte volatilitet blev analyseret under to delanalyser; 1) hvor implicit volatilitet blev udstillet som en funktion af strike, samt 2) hvor den implicitte volatilitet blev udstillet som en funktion af både strike og tid. I 1) udvist den implicitte volatilitet tegn på afhængighed af strike. En af flere mulige årsager til denne sammenhæng kan skyldes den omtalte leverage effekt, da BS modellen ikke formåede at inkorporere effekten af egenkapitaltab i volatilitets betragtningen.

I 2) udviser optioners implicitte volatilitet også tegn på afhængighed af strike kursen, men her kan yderligere påvises en relation til optionens løbetid. I teorien burde overfladen være flad, uden former eller mønstre.

Volatilitets antagelsernes karakteristika af empiriske afkast samt markedes volatilitet, er nu blevet analyseret. I begge tilfælde er der fundet afvigelser fra modelleringen. Med udgangspunkt i denne motivation introduceres nu 2 nye modeller, som skal søge at afhjælpe de to fejlmodelleringer.

2. Modeludvidelser til Black-Scholes

2.1 Heston Modellen

Heston modellen er en udvidelse til den oprindelige Black Scholes model, der blandt andet inkorporerer en videre modificering af antagelsen om, at afkastet på det underliggende aktiv skulle følge en geometrisk brownisk bevægelse. Det er i afsnit 1.2 omhandlende de stylized facts bevist, at volatilitet varierer over tid, samt at den også har en tendens til at koncentrere sig omkring bestemte tidsperioder. Observationerne stemmer intuitivt overens med virkeligheden hvor (ekstreme) hændelser ind imellem fører til perioder med generelt højere usikkerhed i de mikro- og makroøkonomiske forhold end ellers.

Steven Heston indså, at volatilitet er tidsvarierende og fremsatte i 1993 et forslag til en alternativ beregningsmetode til prisfastsætningen af de Europæiske optioner. For at tage højde for den tidsvarierende volatilitet, antager modellen en såkaldt diffusionsproces for aktiekursen, der er lig BS-antagelsen, men med mulighed for en tidsvarierende volatilitet. Heston modellen fra 1993 antager at logafkastet følger en diffusionsproces for henholdsvis dens kursudvikling, S_t og volatilitet, V_t :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_{1t} \quad (26)$$

Hvor W_{1t} er en Wiener process.

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_{2t} \quad (27)$$

(Heston, 1993).

Og hvor W_{2t} også er en Wiener process, der har korrelation ρ med W_{1t} . Aktiekursen og volatiliteten er derfor nu korrelerede med hinanden med størrelsen ρ , der kan antage værdier i intervallet $\rho \in \{-1,1\}$.

Som vi senere vil se i afsnit 3 giver dette en række fordele, når man arbejder med den empiriske afkastfordeling.

Hvor Black Scholes modellen antager konstant volatilitet følger volatiliteten i Heston modellen, udtrykt i formel 27, nu en Cox, Ingersoll og Ross (CIR) process (Cox, Ingersoll og Ross, 1985). For at opnå en CIR proces er Ito's lemma anvendt til at finde variansprocessen, V_t .

Modellens parametre er givet ved:

μ = som aktiens drift parameter

$\theta > 0$ = det langsigtede gennemsnit af variansen

$\kappa > 0$ = en parameter, der angiver hastigheden hvorved volatiliteten i dag bevæger sig imod den langsigtede volatilitet, θ .

$\sigma > 0$ = variansen af volatiliteten, dvs. et mål for usikkerheden om volatiliteten

$v_0 > 0$ = det initiale (tidspunkt 0) niveau for variansen
 $\rho \in [-1,1]$ = korrelationen imellem de to Brownske bevægelser, W_1 og W_2 og
 λ = volatilitetens risikoparameter

Processen (udtrykt i formel 27) kaldes for en "mean-reverting" proces idet at θ er et såkaldt langtidsniveau for variansen, og κ er et udtryk for variansens trækraft imod dens langtidsniveau. Dvs. desto lavere værdier for κ , desto længere tid vil det tage for langtidsprocessen at tendere imod dets langtidsniveau for variansen.

Volatiliteten kan nu variere over tid og afhænger bl.a. af den langsigtede volatilitet. Processen for volatilitet er derfor nu stokastisk, ensbetydende med at den kan variere over tid, hvilket synes en anelse mere realistisk, når man fx iagttager figur 1.3, hvor volatiliteten tydeligvis er koncentreret omkring specifikke tidsperioder.

Senere i dette afsnit vil det også blive undersøgt hvordan en manipulering af parametrene kan ændre ved fordelingen af aktiekursen ved udløbstidspunktet. I selve prisfastsætningen er det dog nødvendigt med en egentlig parameter estimation af de omdiskuterede modelinput. Dette undersøges nærmere i afsnit 3 hvor Heston modellen vil blive anvendt til at prisfastsætte Europæiske optioner.

2.1.1 Heston formelen for den Europæiske call option

Formlen for beregning af prisen på en Europæisk call option er ikke markant forskellig fra den oprindelige BS formel. For en call option beregnes prisen ud fra Heston modellen som

$$C(K) = S_t P_1 - K^{-rt} P_2 \quad (28)$$

Af ovenstående ses det at $N(d_1)$ og $N(d_2)$ nu er erstattet af P_1 og P_2 fra den oprindelige Black Scholes formel. I de fleste tilfælde, inklusiv dette, er det imidlertid fordelagtigt at prisfastsætte under det risikoneutrale sandsynlighedsmål. Rationalet bag et skifte af sandsynlighedsmål er, at det er nemmere, rent regneteknisk, at antage ens sandsynlighedsmål for alle markedsagenter. En implikation herved er også at man opnår "ækvivalente" resultater, der er ens for alle markedsaktører, hvilket kun er muligt hvis alle markedsaktører arbejder ud fra den samme forventning om afkastkrav.

Ændringen af sandsynlighedsmål gennemføres i praksis ved at ændre driften på det underliggende aktiv fra det forventede afkast på aktivet, u , til den risikofri rente, r . For at prisfastsætte under det risikoneutrale mål introduceres nu derfor to nye mål, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Q}^S$. Derved kan prisen på den Europæiske call option beregnes som

$$C(K) = S_t \mathbb{Q}^S(S_T > K) - K e^{-rt} \mathbb{Q}(S_T > K) \quad (29)$$

(Bakshi og Madan, 2000)

Målet $\mathbb{Q}$ anvender obligationen, B_t , som en måleenhed, imens $\mathbb{Q}^S$ anvender aktiekursen. I Heston modellen er det givet, at P_1 og P_2 kan skrives som

$$P_j = \Pr_j(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi, \quad (30)$$

Hvor $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære enhed, $Pr_1 = \mathbb{Q}^S$, $Pr_2 = \mathbb{Q}$, og $f_j(\phi; x, v)$ er karakteristikkfunktionen for logaritmen til den endelige aktiekurs, $x_T = \ln S_T$. Ifølge Hestons 1993 model, antog karakteristikken følgende log lineære form:

$$f_j(\phi; x_t, v_t) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t) \quad (31)$$

Hvor C_j og D_j er konstante koefficienter og $\tau = T - t$ er tiden til udløb.

Koefficienterne kan findes til at være

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \quad (32)$$

Og

$$C_j(\tau, \phi) = r_i\phi\tau + \frac{\alpha}{\sigma^2} [(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right)] \quad (33)$$

Hvor $\alpha = k\theta$,

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}, \quad (34)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j} \quad (35)$$

Og med $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = k - \rho\sigma$, og $b_2 = k$

Den oprindelige Heston model, som den netop er præsenteret, har et historisk udgangspunkt. Dens fordel er, at den korrigerer den empiriske afkastfordeling, så den stemmer overens med den teoretiske afkastfordeling, der netop udgør udgangspunktet for modelleringen. Modellen tager dog ikke højde for den afhængighed, der er bevist at være tilstede i finansielle data. Til dette formål er det nødvendigt, at introducere en udvidelse af den oprindelige Heston model, Heston-Nandi GARCH modellen.

2.2 Heston-Nandi GARCH modellen

Motivationen for introduktion af Heston-Nandi GARCH modellen var dens evne til at behandle volatilitet. I modellen behandles og forecastes volatilitet efter en GARCH (1,1) proces. Som vi vil se om lidt har dette en række fordele, når man arbejder med finansielle data, der besidder afkast karakteristika, som S&P500 indekset gør.

Formålet i dette, samt det efterfølgende afsnit vil være en redegørelse og analyse af GARCH komponentens vigtigste egenskaber, samt dens teoretiske bidrag. Heston-Nandi modellens udvidelse til Heston modellen er i princippet kun, at volatiliteten kan følge en GARCH proces.

Af netop denne grund vil fremgangsmåden for selve prisfastsætningen vha. Heston-Nandi GARCH modellen først blive gennemgået i 3. sektion, hvor der også gennemføres venter en empirisk vurdering af de nu 3 forskellige optionsmodeller.

2.3 Modeller med betinget varians

For at imødekomme de fejl, som Black Scholes modellen gør sig omkring afkastforholdene for det underliggende aktiv, introduceres nu modeller med betinget varians.

En model med betinget varians tager højde for forskellige niveauer i volatilitet. En simpel model til dette formål er GARCH-modellen, som står for Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. For dog at give en uddybende forståelse for GARCH-modellen gives først en indføring i modellen, der førte til opfindelsen af GARCH-modellen, nemlig ARCH-modellen, herefter Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.

2.3.1 ARCH-modellen

ARCH modellen blev for første gang introduceret af Robert Engle i 1982. Modellen at følger en stokastisk proces hvis afkast (oprindeligt benævnte variabler) har et betinget gennemsnit på 0 og en betinget varians givet som en lineær funktion af tidligere kvadrerede afvigelser på afkastene. De kvadrerede afkast følger da en autoregressiv proces, dvs. de historiske afkast får en indflydelse på forecastet af de fremtidige afkast og deres volatilitet. En implikation af dette er, at modelleringen nu giver mulighed for at volatilitet kan ændre sig over tid. For at forstå vigtigheden af denne egenskab henvises der igen til figur 1.3, som viser en tydelig cluster-effekt for volatiliteten på det amerikanske S&P 500 indeks.

Den simpleste model for en ARCH (1) model udtrykkes som følgende afkast og volatilitets-ligning (Tsay, 2010):

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

Hvor r_t er afkastet givet som et simpelt historisk afkast μ og ϵ_t er ”hvid støj” med gennemsnit 0 og varians 1, som er uafhængigt og identisk fordelte. Den betingede varians beregnes som

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 \quad (36)$$

Derudover gives der følgende krav til de parametre, der indgår i den betingede varians:

$$a_0 > 0 \quad (37)$$

$$a_{t-1} \geq 0 \quad (38)$$

a_0 er den langsigtede varians rate og a_{t-1} er vægten der pålægges det første lag af de kvadrerede forskelle i forventede og observerede afkast. I ovenstående er modellen altså kun præsenteret ved et enkelt lag, men modellen kan sagtens udvides til at medtage flere lags. Den generelle ARCH(q) model med q lags gives som

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + \dots + a_q a_{t-q}^2 \quad (39)$$

En vigtig bemærkning omkring antallet af lags er i denne sammenhæng nødvendig. I finansielle data er der en tendens til, at eksistere en ’lang historik’, dvs. den forecastede volatilitet kan være afhængig af volatilitet langt tilbage i tiden. Hvis dette er tilfældet fører det til ikke-stationaritet, som vil komme til udtryk i værdien af a , der

vil antage værdier større end eller lig med 1. Årsagen hertil skal findes i, at de kvadrerede residualer indeholder autokorrelation, der ikke kan approksimeres vha. autokorrelationsfunktionen. Stationaritet i forecastet kræver derfor, at $\alpha < 1$ (Taylor, 2005).

En af de største svagheder ved ARCH modellen er, at det ofte er tilfældet, at man må indarbejde et arbitrært højt antal af lags for at gøre modellen stationær. I praksis er det dog sjældent realistisk eller meningsfuldt at tilføje flere lags til estimationen, hvorfor der i løsningen af denne problematik, i stedet vil drages nytte af ARCH-modellens udvidelse, GARCH.

2.3.2 GARCH-modellen

GARCH-modellen blev introduceret i 1986 af Bollerslev og Engle, som en videreudvikling til den oprindelige ARCH-model fra 1982. Udvidelsen består af en simpel differensligning, der påføres til ARCH-modellen, for bedre at estimere volatilitet, og inkludere et lagged betinget variansled ind i ligningen. På denne måde formår GARCH modellen at inkorporere en længere historik end den simple ARCH model. Desuden formår GARCH modellen også at behandle de stylized facts mere effektivt, som vi vil se lidt senere.

Den generelle GARCH model er en GARCH (p, q) model, som består af p antal "laggede" værdier af den betingede varians og q antal lags, som det kendes fra ARCH modellen. Fokus i denne afhandling vil være på GARCH (1,1) modellen, da det også er denne model der indgår i Heston-Nandi GARCH modellen.

2.3.3 GARCH (1,1)

(1,1) leddet referer til et autoregressivt led af den kvadrerede afvigelse, som det blev set i ARCH (1) modellen, samt en lagged værdi af det betingede variansled. GARCH (1, 1) modellen tillader, at volatiliteten vægtes med højere vægt på tidligere observationer af ændringer i markedsvARIABLEN, a_{t-1}^2 og det mest hidtidige estimat af den betingede varians.

For at forstå dette bør man igen betragte log afkast serien, r_t , hvor man ved at definere $a_t = r_t - \mu_t$ opnår følgende udtryk:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (40)$$

Som observeret er processen a_t karakteriseret ved en ARCH proces imens den betingede varians, under GARCH-modellen, nu inkluderer et lagged betinget variansled, her udtrykt som β , i nedenstående:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (41)$$

α_0 fortolkes som den langsigtede variansrate

a_{t-1}^2 er det laggede led for forskellen imellem forventet og observeret afkast som i den generelle ARCH proces β er vægten tildelt den laggede betingede varians.

Størrelsen af β afhænger af hvor stor en vægt man antager, at de historiske ændringer vil have på ændringer i dag. Man kan derfor med fordel beskrive β som aftagelsesgraden. En lav β er dermed også ensbetydende med, at der tildeles de historiske afkast en mindre betydning, mens en høj β indikerer, at der er en lang afhængighed i data. $\alpha + \beta$ beskriver tilsammen den samlede persistens af volatilitet, og det kræves naturligvis at $\alpha + \beta < 1$ før

at variansen tenderer tilbage mod gennemsnittet på 0. Desto højere værdier for $\alpha + \beta$, desto længere vil det tage før at variansen bevæger sig tilbage imod 0.

I modellen ovenfor er den forecastede varians for tidspunkt $t + 1$, σ_{t+1}^2 , et vægtet gennemsnit af det kvadrerede afkast på tidspunkt t , r_t^2 og tidspunkt t estimeret af variansen σ_t^2 .

Endog som begge estimer anvender kvadrerede afkast tillægger GARCH (1,1) modellen mere vægt på de nyeste kvadrerede afkast observationer. I meget lange tidsserier er dette selvsagt en nyttig egenskab, da den nyeste observation naturligvis vil have en større forklaringskraft relativt til en flere år gammel observation.

Med introduktionen af GARCH modellen gives nu en uddybning af dens effekt på de førnævnte stylized facts, som ønskes behandlet.

2.3.4 GARCH og stylized facts

GARCH modellen blev som sagt introduceret for bedre at imødekomme de empiriske afkastforhold, der fandtes at foreligge for finansielle data. Der gives derfor nu en punktvis forklaring af GARCH modellens indvirkning på de tre førnævnte stylized facts.

1. Afkastfordelingen

Fordelingen kan analyseres i relation til dets moment for at analysere hvilke egenskaber, der er givet for fordelingen.

Det i 'te moment for en stokastisk variabel er givet som (Tsay, 2010):

$$m'_i = E(X^i) = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f(x) dx \quad (42)$$

E benævner her forventningen og $f(x)$ er sandsynlighedsfordelingen for X . Det første moment kan da anskues som gennemsnittet for X , nemlig (μ_x) , det andet moment variansen som σ_x^2 .

Afslutningsvis kan det tredje og fjerde moment udledes som skævhed og kurtosis, hvor sidstnævnte også betegnes topstejlhed på dansk. Det er endvidere muligt at udlede størrelsen på halerne for disse momenter.

Skævheden beregnes som

$$S(X) = E \left[\frac{(X - \mu_x)^3}{\sigma_x^3} \right] \quad (43)$$

Imens topstejlheden er givet ved

$$K(X) = E \left[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x^4} \right] \quad (44)$$

For at udvide hvorvidt GARCH (1,1) modellen besidder fede haler relativt til en log-normal fordeling, bør $K(x)$ for GARCH modellen overstige 3, da en normalfordeling har en topstejlhed på 3. Hvorvidt dette er tilfældet vil blive belyst i analysesektionen for GARCH (1,1) modellen.

2. Der er næsten ingen korrelation i afkast

I de empiriske undersøgelser blev det konkluderet, at der næsten ingen korrelation tilstede var for de absolutte afkast. Der findes dog udvidelser til GARCH modellen, der behandler de små effekter af autokorrelation, men den tilførte videnskabelige værdi, af at introducere sådanne modeller synes minutøs, taget de empiriske forhold for størrelsen af autokorrelation i betragtning.

For en god ordens skyld testes der dog for eventuel autokorrelation i analyseafsnittet for at undgå bias i estimerterne.

3. Autokorrelation i absolutte og kvadrerede afkast

Autokorrelation i både de absolutte og kvadrerede afkast var en af hovedårsagerne til, at GARCH modellen blev introduceret. I præsentationen af GARCH modellen blev det lagt fast, at selve modellen er influeret af en langsigtet varians rate, a_0 , og to yderligere led, en lagged værdi af variansen raten samt gårsdagens ændring i afkastet. Modellen er derfor konsistent med de stylized facts omhandlende autokorrelation i afkast, da den netop behandler problematikken heromkring ved at introducere yderligere historik til de forecastede estimer.

Hvor effektiv modellen er til at fange korrelation og clustering effekter afhænger i sidste ende af, hvor signifikante parametrene a_1 og β er, men for at bevise GARCH-modellens berettigelse foretages der nu en arbitrær delanalyse, som skal vurdere modellens evne til at fange autokorrelation i volatilitet på en stand-alone basis.

I beregningseksemplet vælges der arbitrære værdier for a_0 , a_1 og β . Værdierne vælges som sagt helt tilfældigt og har fået tildelt følgende:

$$a_0 = 0,000003$$

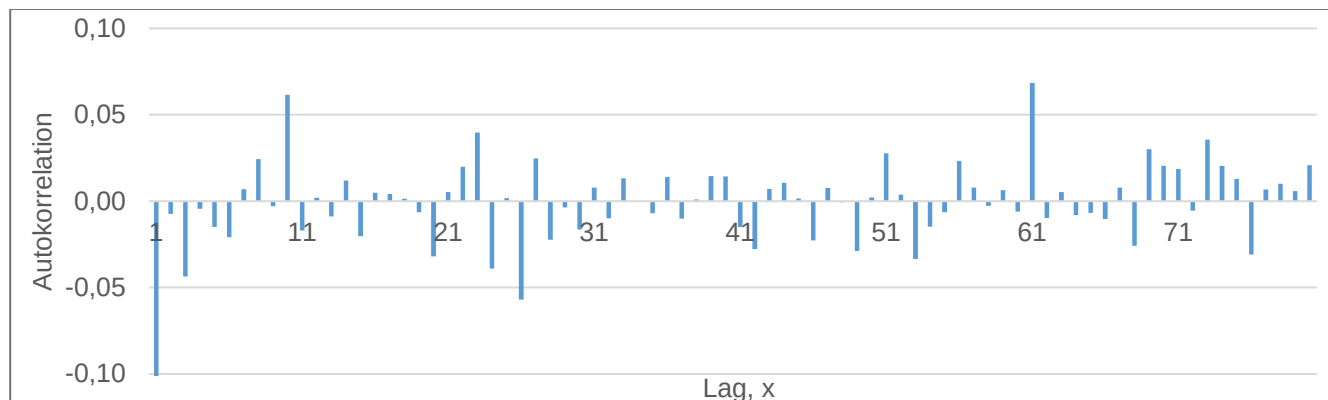
$$a_1 = 0,15$$

$$\beta = 0,80$$

Med $a_1 = 0,15$ tildeles det senest observerede afkast altså en vægt på 15%, altså en mærkbar vægt i forhold til den ubetingede varians i, der vægter alle forrige afkast ligeligt.

Når parameterværdierne indsættes i formel 41, estimeres variansen, dvs. σ_{t+1}^2 for hver dag i tidsserien ved anvendelse af forrige estimerede varianser og kvadrerede afkast, samt initialværdien $\sigma_0^2 = s^2$, der opnås fra den ubetingede varians. Afslutningsvis standardiseres de kvadrerede logafkast ved at dele hvert afkast med kvadratroden af den estimerede varians fra GARCH-modellen. Vi får med andre ord en række standardiserede afkast, defineret som $x_t = \frac{r_t}{\sigma_t}$, hvor σ_t beregnes fra formel 41 igen. Nedenfor ses et korrelogram af disse standardiserede kvadrerede afkast x_t^2

Figur 2.1



I grafen ses det at selv med disse fuldstændigt arbitrært udvalgte værdier for a_0, a_1 og β , så er GARCH modellen alligevel i stand til at fange (og behandle) den tilstedeværende autokorrelation i de kvadrerede afkast. GARCH modellen er således i stand til at fange den tidsvarierende volatilitet, eftersom at autokorrelationen ikke udviser tegn på persistens eller mønstre. GARCH modellen eliminerer, mao. autokorrelationen i de kvadrerede afkast, og må derfor konkluderes at have bevist sin anvendes i afhandlingen.

2.4 Implementering af GARCH (1,1) modellen

I forrige eksempel blev parameterværdierne for ω , α , og β valgt arbitrært, dvs. uden nogen form for estimationsbasis. En populær metode til at estimere parametrene er Maximum Likelihood, som der også vil blive gjort brug af i dette tilfælde.

2.4.1 Maximum Likelihood Estimation

For at anvende GARCH-modellen til volatilitetsestimation kræves en stikprøve af n identisk og uafhængigt fordelte observationer, $x_1, x_2, \dots, x_n$, som antages at stamme fra en diskret fordeling. De to førstnævnte antagelser er her selvsagt brudte, men volatilitets forecast vha. GARCH-modellen vil forhåbentligt afhjælpe dette.

I tilfældet hvor ovennævnte antagelser er opfyldt, er den fælles tæthedsfunktion på stikprøven (dvs. likelihood funktionen) indregnet som et produkt af marginale funktioner, og den maximale likelihood af parametrene, er således de værdier, der maksimerer likelihood. I nogle tilfælde er det muligt, at beregne MLE vha. lukkede formler. Dette er fx tilfældet for μ og σ^2 , som ved at differentiere MLE funktionen giver følgende kendte resultater:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (45)$$

Og

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad (46)$$

I tilfældet med optionsmodeller, som GARCH o.a. lign., er det dog sjældent muligt at udlede et lukket udtryk

som ovenfor. Man er derfor nødsaget til at benytte en algoritme til at approksimere værdien af parametrene, som indgår i ens prisfastsætningsmodel.

I dette tilfælde benyttes en såkaldt Nelder-Mead algoritme for at finde de parameterværdier i GARCH-modellen, der optimerer Maximum Likelihood funktionen. Hvis $x_1, x_2 \dots x_n$ som føromtalt er identisk og uafhængigt fordelt efter en fordeling $f(x_i; \theta)$, hvor θ beskriver en vektor af parametre, da er MLE funktionen for θ givet som

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (47)$$

(Davidson & MacKinnon, 1993).

2.4.2 GARCH Estimation

Med benyttelse af MLE funktionen er det muligt at estimere parameterværdierne, der skal indsættes i GARCH-modellen. Eksemplet med GARCH-modellen kræver dog et par enkelte justeringer til det oprindelige setup.

På en given dag, $t - 1$, vil afkastet for den næste dag, t , antages at være betinget fordelt som en stokastisk variabel med 0 i gennemsnit og varians σ_t^2 . Dette medfører således at $E_{t-1}[r_t] = 0$ og $E_{t-1}[r_t^2] = \sigma_t^2$, hvor $E_{t-1}[\cdot]$ betegner forventningen beregnet for tidspunkt $t - 1$, og at den betingede sandsynlighedsfordeling for r_t er givet ved

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(\frac{-r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (48)$$

Når man antager at afkastet er uafhængigt, er den fælles tæthedsfunktion af $r_1, r_2, \dots, r_n$ indregnet som produktet af de marginale tætheder, givet af formelen ovenfor. Derfor kan den fælles tæthedsfunktion, dvs. likelihood funktionen gives som

$$L(r_1, \dots, r_n) = \prod_{t=1}^n f(r_t) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(\frac{-r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (49)$$

De parameterværdier for ω , α , og β er således de værdier, der producerer den maksimale værdi af ovenstående funktion. For at simplificere ovenstående ligning gøre den nemmere at arbejde med benyttes i stedet den naturlige logaritme til likelihood funktionen, og konstanterne ignoreres:

$$\ell(r_1, r_2, \dots, r_n) \propto \sum_{t=1}^n \left(-\ln \sigma_t^2 - \frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (50)$$

Her står symbolet $\propto$ for "proportionel" til. Når man opnår MLE estimer kan man ignorere konstanter og

arbejde med kernen af fordelingen, dvs. $f(r_t) \propto \frac{\exp\left(-0,5\frac{r_t^2}{\sigma_t^2}\right)}{\sigma_t}$, frem for tæthedsfunktionen af sandsynlighedsfordelingen.

2.4.3 Langsigtet GARCH estimation

Den langsigtede varians i GARCH (1,1) modellen er givet ved

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (51)$$

Hvilket medfører, at den oprindelige formel for den kortsigtede varians nu kan skrives som den langsigtede varians som

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (52)$$

For n antal dage fremad bliver GARCH variansen derfor lig med

$$\sigma_{t+n}^2 = \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha r_{t+n-1}^2 + \beta \sigma_{t+n-1}^2 \quad (53)$$

Hvilket medfører at

$$\sigma_{t+n}^2 - \sigma^2 = \alpha(r_{t+n-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2) \quad (54)$$

På dag t bliver den forventede værdi af r_{t+n-1}^2 nu $E_t[r_{t+n-1}^2] = \sigma_{t+n-1}^2$. Hvis man derfor tager forventningen af ligningen ovenfor og gentager indsætningen opnås

$$E_t[\sigma_{t+n}^2 - \sigma^2] = (\alpha + \beta)E_t[\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2] \quad (55)$$

$$(\alpha + \beta)^n(\sigma_t^2 - \sigma^2) \quad (56)$$

Eftersom at $E_t[\sigma_t^2] = \sigma_t^2$.

Desuden beskrives en procedure i Hull (2006) som kan anvendes til at opnå volatilitets strukturen fra GARCH (1,1) modellen. Hvis man definerer $V(n) = E_t[\sigma_{t+n}^2]$ og $\alpha = -\ln(\alpha + \beta)$ kan funktionen $V(n)$ skrives som

$$V(n) = \sigma^2 + e^{-\alpha n}[V(0) - \sigma^2] \quad (57)$$

Imens kan den gennemsnitlige varians beregnes som

$$\frac{1}{T} \int_{u=0}^T V(u) du = \frac{1}{T} \left(u\sigma^2 - \frac{e^{-\alpha u}}{\alpha} [V(0) - \sigma^2] \right) \Big|_{u=0}^{u=T} \quad (58)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} [V(0) - \sigma^2] \quad (59)$$

Hvor $V(0) = \sigma_t^2$ er den nuværende GARCH varians fra 52. Eftersom at (ligningen ovenfor) repræsenterer den gennemsnitlige daglige varians, skal den naturligvis ganges med 252 for at opnå den årlige varians:

$$\sigma(T)^2 = 252 * \left(\sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \right) \quad (60)$$

Heraf følger det at den årlige volatilitet blot er GARCH variansen ganget med antallet af typiske handelsdage på et år. Volatilitets strukturen af volatilitet, der forudsiges igennem GARCH (1,1) modellen kan anskues ved at plotte $\sigma(T)$ imod T . Når den 'nuværende' GARCH varians benævnt som σ_{t+1}^2 er mindre end den langsigtede varians σ^2 , vil hældningen være positiv, dvs. stigende som en funktion af tiden, T . Dette sker eftersom at den langsigtede varians ikke måles uendeligt og når $\alpha + \beta < 1$, da vil den nuværende GARCH varians bevæge sig tilbage imod den langsigtede varians. Det vil med andre ord sige, at den nuværende varians vil stige imod den langsigtede varians. Det modsatte er selvsagt tilfældet, når $\sigma_{t+1}^2 > \sigma^2$, sådan at den nuværende varians vil stige imod (eller "væk fra") den langsigtede varians og et plot af volatilitets strukturen vil dermed også have en negativ hældning.

2.5 Test af GARCH komponenten

Eftersom at de originale BS-antagelser omkring aktivets volatilitet ikke er opfyldt vil der i dette afsnit foretages volatilitets forecast, som skal forsøge at finde en model der bedre beskrive afkastserien for S&P 500 indekset.

2.5.1 Test for ARCH-effekt

Allerede i teori-afsnittet kunne det umiddelbart konkluderes, at der var heteroskedasticitet tilstede i afkastserien for log afkastene. For bevis herfor henvises der blot til de allerede udførte analyser og konklusioner i afsnit 1.

For at fremsætte et konkret bevis på, at data følger en GARCH process benyttes nu en Lagrange-Multiplikator test, som blev opfundet af Robert Engle (Tsay, 2010).

2.5.2 Lagrange multiplikator test

For at sikre en helt konkret bevisføring og belæg for eksistensen af heteroskedasticitet gennemføres en Lagrange multiplikator test for tilstedeværelsen af betinget heteroskedasticitet på a_t^2 historiske lags.

I denne test gennemføres en multipel lineær regression med 10 lags afhængige af a_t^2 . Det er valgt at benytte 10 lags, eftersom at 10 lags er nok til at verificere hvorvidt at en ARCH-effekt er tilstede i afkastserien på S&P500 indekset. For at foretage selve testet benyttes et F-test, som vil evaluere nulhypotesen om at en model uden lags vil beskrive data ligeså godt som en lineær regression med 10 lags. Dernæst foretages en lineær regression uden lags, og der testes for hvorvidt, at forskellen er signifikant.

De to hypoteser kan derfor beskrives som

$$H_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{10} = 0 \quad (61)$$

$$H_1 \neq a_1 \neq a_2 = \dots \neq a_{10} = 0 \quad (62)$$

Hvor modellen med 10 lags altså antager følgende form

$$a_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + \dots + a_{10} a_{t-10}^2 + e_t, t = m + 1, \dots, T \quad (63)$$

Hvor e_t er fejlleddet.

Som førnævnt er testet et simpelt F-test, som det ses nedenfor

$$F = \frac{\frac{SSR_0 - SSR_1}{m}}{\frac{SSR_1}{T - 2m - 1}}$$

Hvor beslutningsreglen kan formuleres på følgende måde, at hvis $F > X_m^2(a)$ hvor $X_m^2(a)$ er den øvre 100 * (1 - a) kvartil af X_m^2 (Tsay, 2010).

Det kan nu erindres, at $a_t = r_t - u_t$. Det er derfor nu muligt at skabe en kolonne i R ved at benytte en anden datarække, der benævner log afkastet, logR, og herfra udtrække gennemsnittet for hver observation. Dvs. gennemsnittet beregnes som

$$u_t = \text{gns}(\log R) = \frac{1}{n} * \sum_{t=1}^n i_t \quad (64)$$

Denne variable er således gennemsnittet, som vil blive benyttet i et test mod den alternative lineær regression uden lands. Der kan nu testes for en signifikant forklaringskraft imellem de to modeller ved anvendelse af F-statistikken. Ud fra hvad der vides omkring de stylized facts og det forrige ACF-plot, vil det forventes at nulhypotesen på forkastes. Foretages beregningen i R opnås følgende resultat:

Model 1: a ~ a.1 + a.2 + a.3 + a.4 + a.5 + a.6 + a.7 + a.8 + a.9 + a.10

Model 2: a ~ 1

Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)
1	2518	37.274			
2	2528	42.199	-10	-4.9248	33.269 < 2.2e-16 ***

Signif. codes: 0 '*' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1**

Som det kan ses fra F-statistikken på ca. 33,3 med en ekstremt lav P-værdi (laveste P-værdi i R er 2.2e-16), er testen således signifikant med så godt som 100% sikkerhed.

Fra både ACF-plottet og F-testen kan det altså nu konkluderes, at der er en ARCH-process tilstede i data, dvs. må forventes, at afkastserien i S&P500 generelt vil følge en GARCH process.

2.6 GARCH (1,1) evaluering

Da det et blev konkluderet, at der er en heteroskedastisk hukommelse i de historiske lags på variansen, kan det nu begrundes at benytte en GARCH (1,1) model. Til at starte med defineres modellen nu igen

$$a_t = r_t - u_t \quad (65)$$

Hvor

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (66)$$

Ydermere defineres nu igen den betingede varians som

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (67)$$

Før selve estimeringen begyndes kan det indskydes, at der må forventes høje værdier for a_1 og β_1 eftersom at det blev bevist, at der var historik tilstede i afkastserien ud fra ACF plottene i afsnit 2.5.

2.6.1 Parameter estimation

Det bør indledningsvis præciseres, at der for at beregne MLE estimaterne benyttes en længere tidsperiode fra 30. december 2011 tom. 6. januar 2006. Dette gøres for at udjævne eventuelle misvisende resultater for parameter estimaterne under perioder med væsentlig højere eller lavere markedsaktivitet. Da funktionerne til beregningerne alligevel er kodet ind i VBA er det manuelle beregningsarbejde stort set ikke eksisterende, hvorfor der med fordel kan vælges en længere estimeringsperiode.

Til at foretage parameterestimeringen af a_0 , a_1 og β_1 benyttes MLE funktionen som beskrevet i forrige afsnit, er kodet ind i VBA. Koden findes i bilag 3.2. For at gennemføre beregningerne benyttes følgende initiale værdigæt for parametrene:

$$\sigma_{t+1}^2 = 0,000002 + 0,1 * r_t^2 + 0,85 * \sigma_t^2$$

Disse benyttes til at beregne de kvadrerede afkast, r_t^2 . For at beregne de individuelle log-likelihood led vha. formel 47 benyttes ved at anvende de dagligt kvadrerede afkast og de daglige GARCH varians estimater estimeret ud fra de initiale værdigæt. Tages summen af disse findes GARCH likelihood estimatet ud fra formel 47 på i alt 11.800,78.

Med disse resultater in mente benyttes nu Nelder-Mead algoritmen, som den kendes fra formel 47 til at beregne de endelige parametre. Resultaterne for parametrene ses præsenteret i tabellen nedenfor:

GARCH Likelihood	-11.915,20
a_0	0,0000019
a_1	0,0992
β_1	0,8928

Som forventeligt adskiller MLE estimaterne sig fra de arbitrære værdier. Værdien af β_1 er forholdsvis høj og indikerer, at det laggede variansled har den største forudsigelsesevne. Dette må generelt siges at være i tråd med forventningen eftersom at en ellers høj værdi for a_1 ville betyde en højere vægt tillagt det enkelte første led, imens en høj vægt for β_1 kan fortolkes som at der er en længere historik i data, hvilket også må være konklusionen ud fra teoriansnittet.

Desuden udviser MLE estimaterne en høj grad af persistens eftersom at $a_1 + \beta_1 = 0,0992 + 0,8928 = 0,992$. Persistens betegner her modellens hastighed hvormed den konvergerer tilbage imod dets langsigtede varians. I dette tilfælde er estimatet forholdsvis højt, hvilket er ensbetydende med en relativt langsom konvergering imod dets langsigtede gennemsnit, som vi også vil se om lidt. Årsagen hertil findes i modellens lange historie og er i tråd med tidligere fundne resultater.

Da modellens to parametre, $\alpha_1 + \beta_1 = 0,992 < 1$ kan modellen ydermere dømmes stationær, jf. førnævnte diskussion i teori afsnittets sektion 2.3.1. Eftersom at der nu er fundet en stationær model, arbejdes der videre med denne model til volatilitets forecastet på S&P 500 indekset.

Alternativt kunne man også have forsøgt sig med en model med kortere historik, men det skønnes at modellen med lang historik er fortræffelig og en fordel, når der er bevist at være lang historik i afkastseriens volatilitet på S&P 500 indekset.

2.6.2 Test af stylized facts

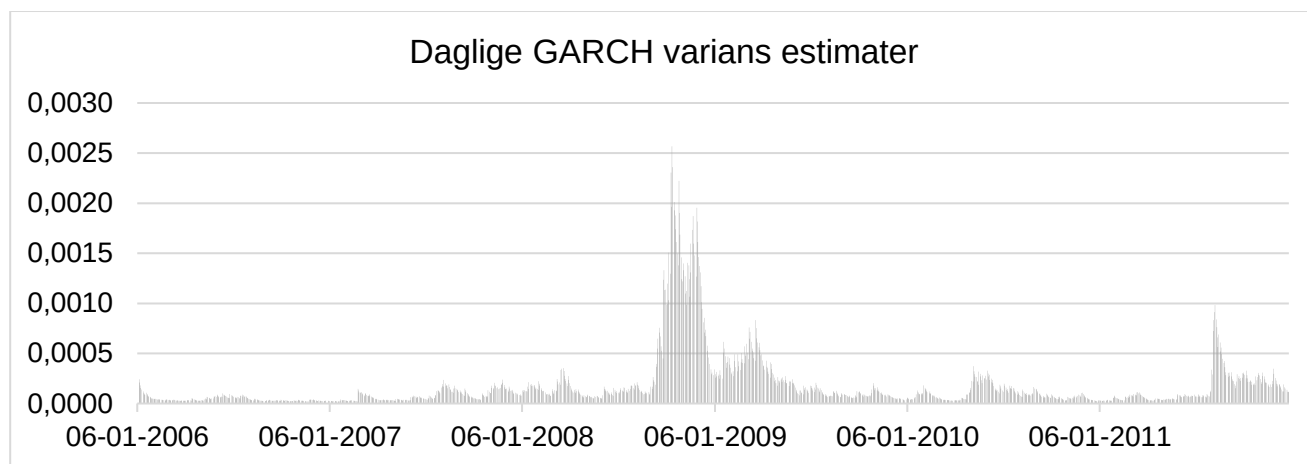
Som tidligere omtalt vil jeg nu teste GARCH modellens evne til at korrigere for de stylized facts. Den første test er den af kurtosis, mao. Topstejlhed. Fra teori afsnittets formel 44 har vi at kurtosis er givet som

$$K(X) = E \left[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x^4} \right] \quad (68)$$

Her er $X - \mu_x$ i vores tilfælde blot lig a_t^4 . Indsættes formelen i Excel for og beregnes der for tidsperioden fra 30. december 2011 tom. 9. januar 2006 opnås en kurtosis på 7,8. Da topstejlhed for en standard normal fordeling er 3, kan det altså udledes at afkastserien besidder ”excess” kurtosis på $7,8 - 3 = 4,8$. Da modellen bl.a. er testet for stationaritet jf. forrige afsnit, må det altså konkluderes at den er i stand til at indarbejde den relativt høje kurtosis, der eksisterer i afkastserien.

For at evaluere hvorvidt GARCH modellens varians estimater er i stand til at opfange perioder med varierende volatilitet, er der nedenfor produceret en graf over alle GARCH-estimerne

Figur 2.2



Hvis vi holder ovenstående figur 2.1 op i mod figur 1.4 produceret i teori afsnittet, kan det ses at GARCH modellen er god til at opfange perioder med varierende volatilitet. Ændringen i volatilitet varierer således over tid som det ses i ovenstående, hvilket altså indikerer, at GARCH modellen er i stand til at opfange den betingede heteroskedasticitet og volatilitets-clustering effekter, som vi allerede har testet for.

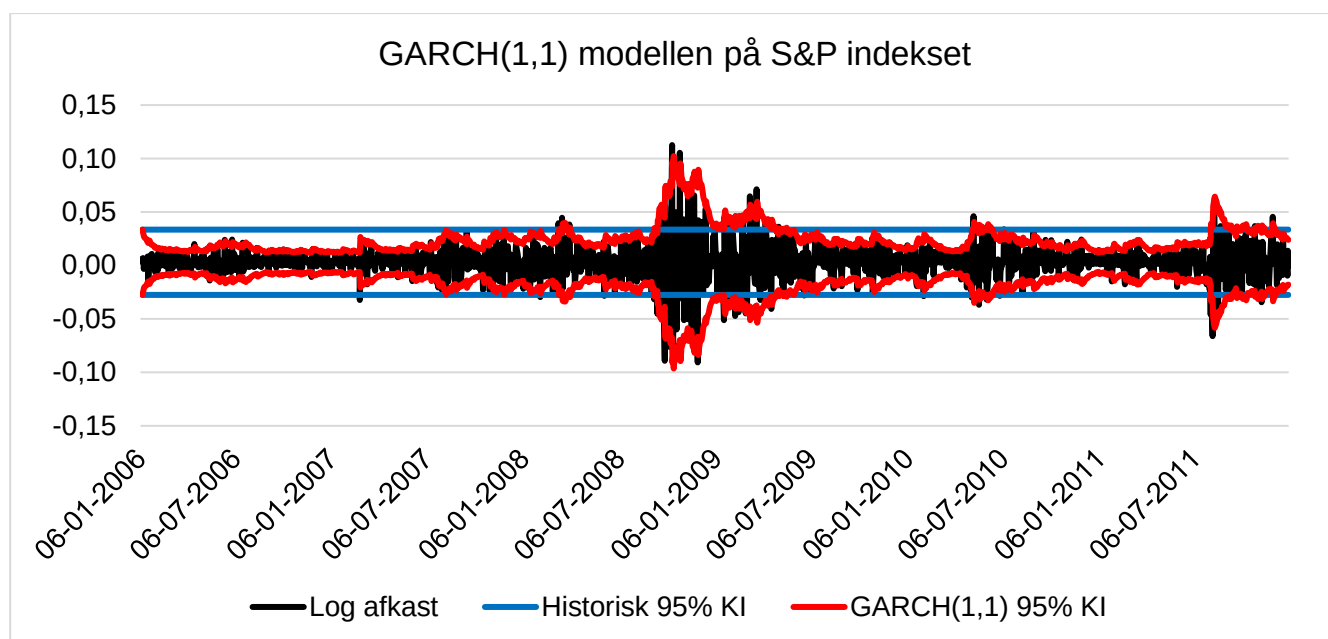
2.6.3 Volatilitets estimater og perioder med finansiell ustabilitet

Det er interessant at teste GARCH modellen under ekstraordinære markedsforhold for at evaluere dens evne til

at afspejle sine forecasts i de faktiske forhold. En delanalyse vil forhåbentligt også kunne afdække årsagen til, at volatiliteten er særdeles høj i perioden mellem ultimo 2008 og primo 2009.

Selve vurderingen af GARCH-modellen må bero på, hvor effektiv den er til at opfange og indarbejde ændringer i afkastserien som skift i volatilitets estimer. I denne sammenhæng er den førnævnte periode omkring finanskrisen særdeles interessant, at kigge nærmere på. For, generelt, at vurdere modellens evne til at opfange og modellere volatilitet er der nedenfor produceret en graf over GARCH (1,1) modellens forecast inklusiv et 95% konfidens interval for afkastene med anvendelse af historisk- og GARCH volatilitet

Figur 2.3



Den røde linje i grafen oven for er GARCH (1,1) modellens estimeret estimeret ud fra et 95% konfidensinterval og den blå linje er det historiske gennemsnits 95% konfidensinterval.

Det historiske konfidensinterval blev altså beregnet som

$$\text{Lavt historisk KI} = -1,96 * \sigma_H = -1,96 * 1,56\% = -3,05\%$$

$$\text{Højt KI} = 1,96 * 1,56\% = 3,05\%$$

For GARCH (1,1) modellen er konfidensintervallet beregnet løbende med udgangspunkt i GARCH-modellens forecast for tidspunkt t , dvs. $u_t \pm 1,96 * \hat{\sigma}_{\text{GARCH}(1,1)}$. Årsagen til at man kan benytte normalfordelingsreglen om at 68% falder inden for 1 standard afvigelse, 95% inden for 2 standardafvigelser og 99,7% indenfor 3 standard afvigelser er, at fejllædet ε_t er en sekvens af tilfældige normalfordelte variable med gennemsnit 0 og varians 1.

Som det kan ses af ovenstående plot, så er GARCH modellen relativt god til at opfange perioder med relativt lavere og højere volatilitet. Især under finanskrisen omkring ultimo 2008, er modellen god til at opfange skiftet i volatilitet. Desuden er modellen også effektiv til at aftage i sin volatilitet og gradvist modellere sig tilbage imod

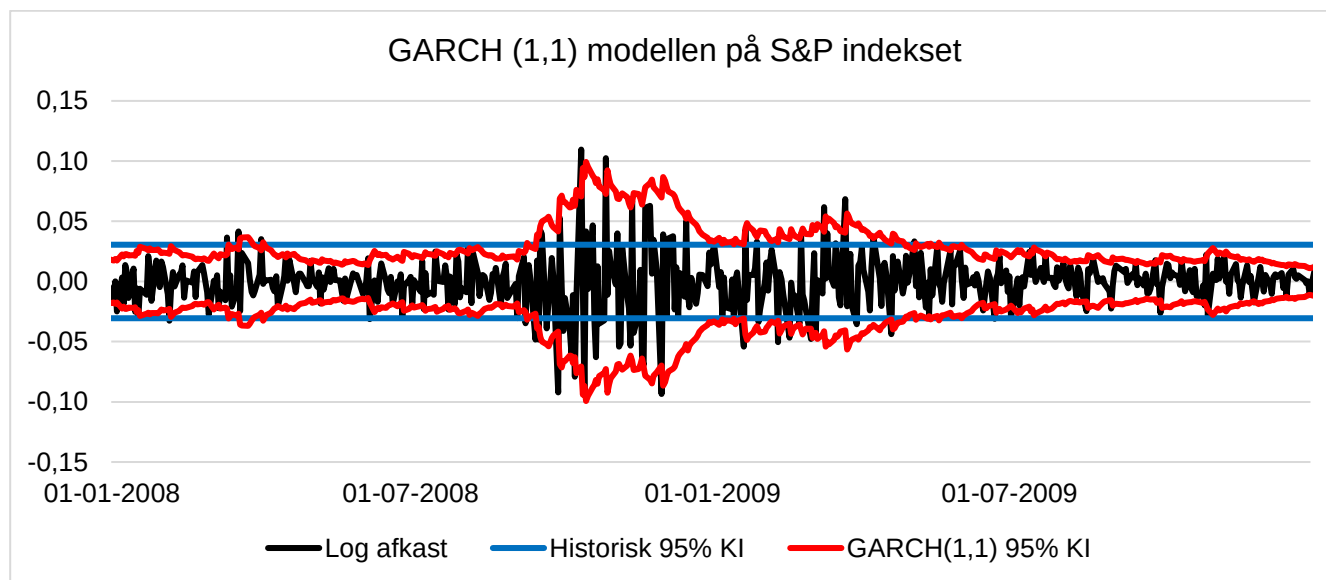
det langsigtede volatilitetsniveau efter perioder med høj markedsaktivitet. Dette er en direkte konsekvens af modellens stationaritet, som allerede er blevet verificeret.

Afslutningsvis bør det også bemærkes, at 95% konfidensintervallet opfanger stort set alle ændringer i volatilitet. Resultatet kan være held, men kan også tilskrives en god modellering af volatilitet.

2.6.4 Svagheder ved GARCH estimerne

For at belyse svagheder ved GARCH-modellen er der i dette afsnit fokuseret på en kortere tidsperiode med høj markedsaktivitet. Den udvalgte periode udgør 1. januar 2008 tom. 31. december 2009. Resultatet af GARCH (1,1) forecastet ses for denne periode i grafen nedenfor

Figur 2.4



I ovenstående graf er det tydeligt, at når der sker shocks i volatiliteten er GARCH (1,1) modellen en tand for langsom til at reagere på det nye volatilitetsniveau. Ved skift i volatiliteten, fx omkring september og oktober i 2008, er modellen længere tid om at vende sig til det nye volatilitetsniveau, mens de efterfølgende estimer med en høj historik tager for lang tid for igen at aftage i sit niveau. Sidstnævnte effekt skyldes modellens relativt høje grad af persistens.

Modellens effektivitet afhænger af, hvilken tidsperiode og type data man ønsker at forecaste sin volatilitet på. I dette tilfælde er der dog også tale om periode med ekstraordinært høj volatilitet, som følge af den største krise igennem 100 år, så modellens svagheder kan ikke siges at være signifikante. Det er dog relevant at foretage sig yderligere overvejelser omkring modelvalg, hvis man ønsker at forecaste volatilitet på aktiver med en høj grad af shocks til volatiliteten.

2.7 Historisk vurdering af GARCH (1,1) modellen

GARCH (1,1) modellen er signifikant med en høj grad af persistens. Modellen er tilmed stationær, hvilket altså indikerer at modellen bevæger sig imod det langsigtede niveau for den ubetingede varians over tid. GARCH (1,1) modellen opsamler og korrigerer for alle de signifikante stylized facts introduceret i teorisektionen. Den

fanger altså volatilitets clusters og autokorrelations effekter i data.

Afslutningsvis må det dog også bemærkes, at modellen ikke er særligt effektiv til at opfange større ændringer i volatilitet på grund af dens høje grad af persistens. Når der sker store ændringer i volatiliteten bevæger modellen sig langsomt op imod det nye niveau for variansen efterfulgt af en langsom korrigerende, som følgende af MLE estimerterne, der gav modellen en høj grad af persistens.

Alt i alt er der tale om en god model, når man inkorporerer lange tidsperioder i sine forecasts, og når antallet af større shocks til volatiliteten ikke er talrige.

2.8 Forecast med GARCH modellen

Da Heston-Nandi GARCH modellen i sidste ende skal benyttes til prisfastsætte optioner frem i tid, er det naturligvis også nødvendigt at vurdere GARCH modellens evne til at forecaste/forudsige det fremtidige volatilitetsniveau.

For at vurdere dette sammenholdes GARCH (1,1) modellens forecast med den observerede varians, som man kan finde på indekset. Den "observerede" varians defineres her som værende det første lag af variansen, dvs.

$$\sigma_{t-1}^2 = (r_t - u_t)^2 \quad (69)$$

Den observerede varians er således lig den kvadrerede forskel mellem det forventede afkast og det observerede afkast. Det vurderes ikke, at man kan komme tætte på den observerede varians, idet at den beregnes på samme måde som den faktiske varians med undtagelse af et stokastisk fejlsled, ϵ_t . I samme vending bør det også nævnes, at der benyttes det første lag af variansen til at beregne den realiserede varians.

I første omgang tages udgangspunkt i et simpelt kort-periodes forecast, forstået på den måde at man arbejder med kort historik til at forudsige sine data. Analysen gennemføres for at få indblik i, hvor stor en historik, der er nødvendig for at producere sigende resultater.

2.8.1 Kort-periode GARCH forecast

For at foretage forecasts over korte perioder erindres formlen, som i tilfældet med 1-periode forecastet formuleres som

$$\sigma_{t+1}^2 = a_0 + \alpha_1 \alpha_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \quad (70)$$

Samtidigt kan forecastet x perioder fremad beskrives ud fra den generelle formel

$$\sigma_t^2(x) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2(x-1), \quad x > 1 \quad (71)$$

For at anskue hvordan modellen opfører sig under forecast, vælges til at begynde med en lidt længere periode med 505 forecasts begyndende fra første handelsdag i 2015, d. 2. januar til og med første handelsdag i 2017, d. 3. januar. Ved at benytte en lang forecast periode er det muligt at observere hvordan modellen konvergerer over tid. Eftersom at modellen er bevist stationær, forventes det at modellens varians vil konvergere imod den ubetingede GARCH varians.

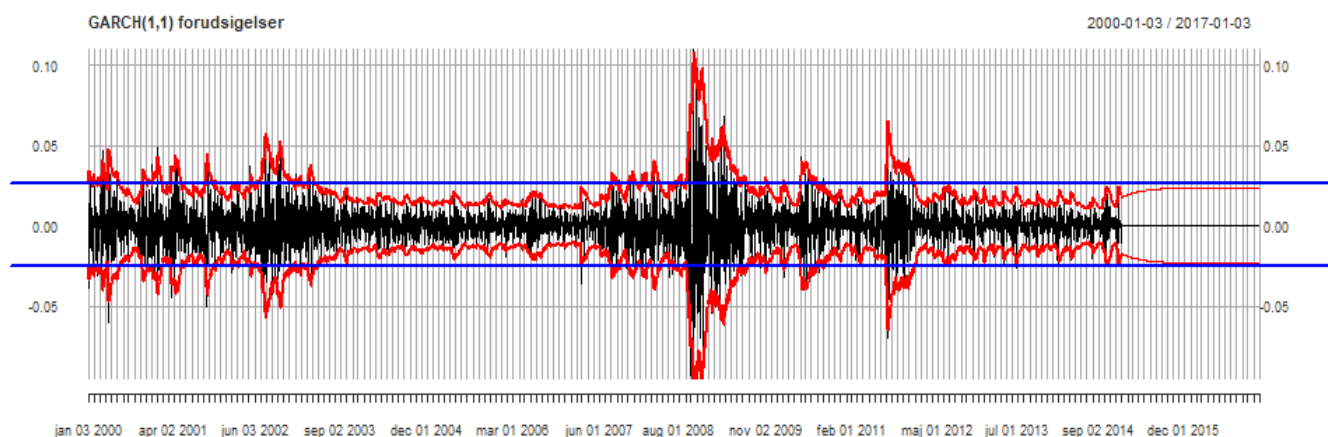
Hvis modellen ikke var stationær, dvs. $\alpha + \beta_1 > 1$, ville modellens estimat konvergere imod et ukendt niveau væk fra stikprøvevariansen. Desuden vil en lang forecast periode give en indikation af hvor vedholdende modellen er, når man bevæger sig væk fra tidspunkt t_0 , og dermed også længere væk fra stikprøven.

Modellen med 505 forudsigelser beregnes vha. R på samme måde som konfidensintervallet i GARCH (1,1) modellen beregnes, dvs.

$$u \pm 1,96\hat{\sigma}_{xG} \quad (72)$$

Det er desuden vigtigt at påpege, at når vi bevæger os længere væk fra t_0 , vil modellen ikke have nogen observationer af α_{t-1} at basere dets forudsigelser på, og vil i højere grad afhænge af den ubetingede GARCH varians, eftersom at modellen konvergerer imod gennemsnittet, som et resultat af dens stationaritet. Til at generere plottet er R benyttet, se linje 57-69.

Figur 2.5



Som det fremgår af ovenstående figur udviser modellen i sit første forecast en relativt høj grad af vedholdenhed, når modellen begynder sine første forecasts. Modellen kan ydermere siges at konvergere relativt langsomt imod den ubetingede GARCH varians og bliver i det niveau, efter ca. 1 år. Dette er konsistent med teorien omkring finansielle data, som har tendens til at besidde en høj grad af historik i sin nuværende og fremtidige udvikling forstået som fx autokorrelation for kvadrerede afkast.

Af ovenstående kan det dog også udledes, at modellen konvergerer og mindre data benyttes til at beregne estimatet i GARCH modellen. Dermed vil GARCH modellens forudsigelse omkring den fremtidige volatilitet, efter ca. 1 år, være lige så godt som den historiske volatilitet estimeret ud fra Black Scholes modellen. Eftersom at modellens estimer stabiliserer sig efter ca. 1 år, er det altså nødvendigt at inddrage andre parametre eller større historik i sine forudsigelser omkring volatilitet. Dette kunne fx være makroøkonomiske begivenheder så som kommende folkeafstemninger om finansielt politiske forhold, der kunne tænkes at influere på det generelle volatilitetsniveau.

I den kommende sektion vil analysen vurdere GARCH (1,1) modellens evne til at forecaste enkelte dage og flere perioder frem i tid. Undersøgelsen er interessant, da man som investor/spekulant i en call option vil have en stor interesse i, at kunne forudsige det fremtidige volatilitetsniveau så langt som muligt frem i tiden.

2.8.2 Enkelt og flerperiodes forecasts vha. GARCH (1,1)

Eftersom at data følger en GARCH process, forventes det at modellen også vil give et godt estimat på volatiliteten mere end 1 dag forud.

Det forventes igen, at estimatet vil blive værre, desto længere væk man bevæger sig fra tidspunkt $t=0$, hvor færre gældende observationer benyttes til betragtningen.

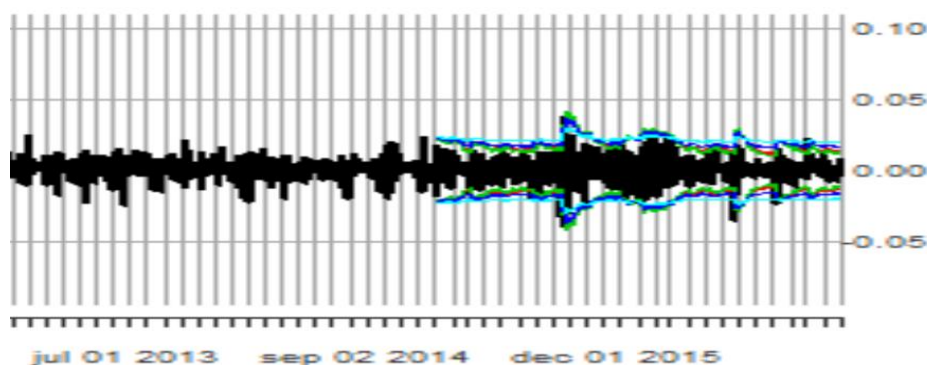
I R programmeres konfidensintervaller for 1, 7, 30 og 100 dages forecast intervaller. Den benyttede tidsperiode er den samme som den anvendt for forrige analyse. Modellen estimeres ved at forecaste x antal dage forud, hvorefter den fra tidspunkt x igen forecaste x dage forud, dvs. modellen ruller sig selv fremad med størrelsen på sin oprindelige forecast længde. Eftersom at modellen ruller sig fremad i tid er det besluttet også at genestimere de oprindelige GARCH (1,1) parametre ved hver estimation.

Modellen gentager efterfølgende denne øvelse over en forecast længde på 505 perioder, dvs. der benyttes samme periode som i forrige sektion. Ved at gentage estimationen af parametrene ved hvert nyt forecast kompromitteres der ikke på den tilgængelige information. Det er selvsagt langt mere hensigtsmæssigt, at benytte en programmeringspakke som R til at løse denne opgave.

Et eksempel herpå er forecastet på 30 dage, hvor information på tidspunkt t_0 benyttes og et estimat for tidspunkt t_{30} opnås. På tidspunkt t_1 foretages den nøjagtigt samme estimation og der opnås et estimat på volatiliteten for tidspunkt t_{31} .

Resultat af disse estimeringer ses i figuren nedenfor og er fundet ved igennem R linje 107-152.

Figur 2.6



Den grønne farve viser 1-dages forecastet, den røde viser 7 dages forecastet, den blå viser 30 dages forecastet og til sidst viser den lyseblå farve 100 dages forecastet.

Eftersom at forecast perioden begynder 2. januar 2015 er den første observation 3. januar 2015, som er lig t_1 for 1 dags forecastet, en enkelt periode fremad. Ved at sammenligne i hvor høj grad de observerede 95% konfidensintervaller for forecasts på volatiliteten afspejler den sande (observerede) volatilitet er det muligt, at vurdere GARCH (1,1) modellens evne til at forudsige volatilitet. Såfremt at forudsigelserne er præcise burde de,

i hvert fald teoretisk set, fange 95% af al volatilitet i den forecastede periode fra 2. januar 2015 til og med 3. januar 2017. Dette ser også umiddelbart ud til at være tilfældet ved en simpel inspektion af figur 2.6 ovenfor. Årsagen hertil behøver dog ikke absolut at være en god model, men kan i stedet skyldes en forholdsvis stabil periode. Ikke desto mindre kan der dog observeres store forskelle i de observerede forecast estimater, hvis der tages et nærmere kig.

Enkeltdages estimatet, repræsenteret ved den grønne linje, ligger forholdsvis pænt omkring den empiriske volatilitet og fanger tilnærmelsesvist omkring 95% af al variation i afkastserien. Man kunne derfor foranlediges til at tro at dette er ensbetydende med en god forecastmodel. Dette samme gør sig nemlig også gældende for 100-dages forecastet, repræsenteret ved den lyseblå linje, der dog over hele perioden har en tendens til at overvurdere den sande volatilitet. Konfidensintervallet er mao. For bredt ift. Den sande variation i afkastfordelingen. Dette skyldes at i 100 dages forecastet har den ubetingede varians en langt større vægt tildelt tidligere tilgængelig information. I teorien burde modellen fange omkring 95% af variationen, men ender således med at fange stort set al variation.

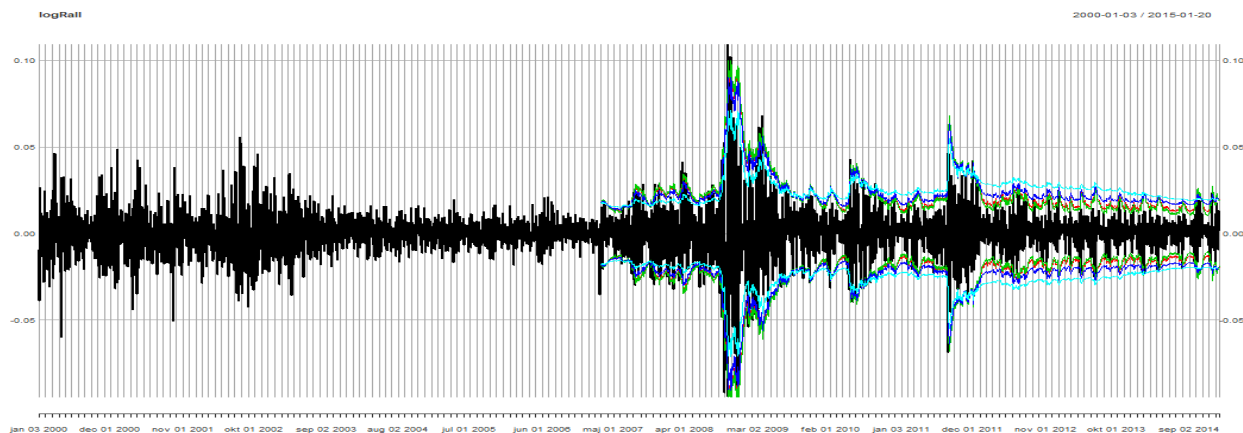
Dette fører således til konklusionen om at det korte periode forecast har for lidt hukommelse og derfor ender med at give et for ukonkret prædiktions interval. Det besluttet derfor, i stedet, at forecaste GARCH (1,1) modellen med en længere forecast periode.

2.8.3 Lang-periode GARCH forecast

Der foretages nu samme analyse, men for en længere tidsperiode, hvor der også sker unormalt høje udsving i variansen. Der er selvfølgelig tale om perioden før, under og en rum tid efter finanskrisens indtog i ultimo 2008. Da GARCH (1,1) modellen, som tidligere konkluderet, kræver en stor mængde af historisk data tages udgangspunkt i data helt tilbage fra oktober 2006, hvorefter at forecasts begynder. Perioden heromkring fanger også den store volatilitet under den finansielle krise, men ved at starte i 2006 opnås der data til også at gøre MLE estimaterne stationære. Det bør igen påpeges, at MLE estimaterne foretages for hver enkelt periode, hvilket altså har krævet anvendelse af R for at udføre sådanne beregninger.

Der er igen foretaget forecasts over 1, 7, 30 og 100 dages intervaller. Resultatet heraf ses i figur 2.7 Se R-kode 156-201.

Figur 2.7



Igen repræsenterer den grønne linje 1 dags forecastet, den røde linje 7 dages forecastet, 30 dages forecastet den mørkeblå og til sidst repræsenterer den lyseblå linje 100 dages forecastet.

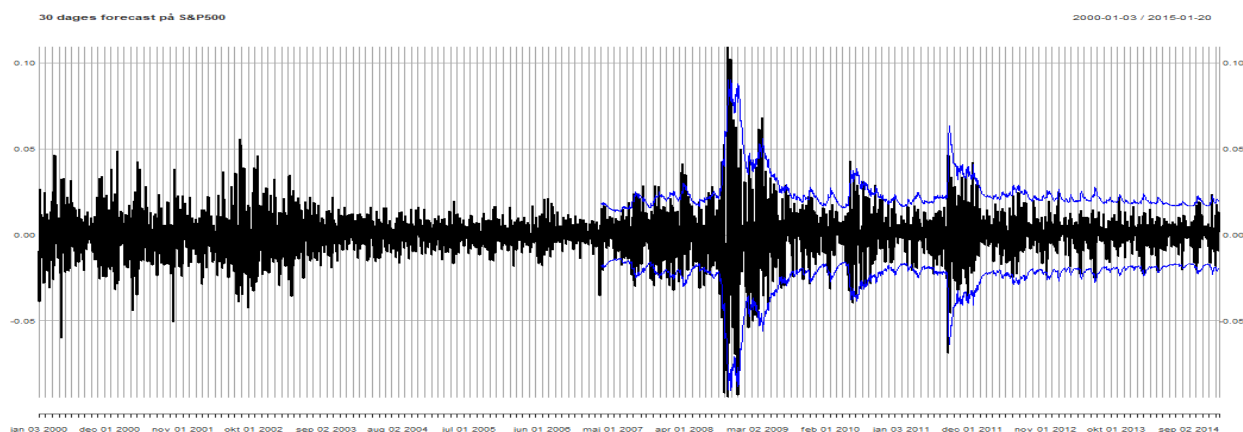
Med en længere forecast periode under en periode med høj finansiell usikkerhed er det nemmere at få et indtryk af adfærden i de forskellige forecast intervaller. 1 dages forecastet fanger fortsat en stor del af den samlede variation og lægger sig faktisk ganske tæt omkring den sande volatilitet, selv under perioder med høj finansiell usikkerhed. 1 dages forecastet er også god til at korrigere tilbage mod den ubetingede varians, når perioder med høj finansiell usikkerhed er ovre igen.

Den simple konklusion på resultatet er, at 1 dages forecastet er forbundet med langt lavere usikkerhed relativt til fx 100 dages forecastet. Da man i praksis sjældent er interesseret i at vurdere volatiliteten en enkelt dag frem er det mere relevant, at vurdere GARCH (1,1) modellens evne til at foretage 100 dages forecasts.

100 dages forecastet fanger stort set al volatilitet, på nær et par enkelte perioder med ekstreme udsving. Man kunne også argumentere for at forecastet er for konservativt, da det i flere tilfælde har en tendens til at overvurdere den sande volatilitet. Dette afspejles i at den lyseblå linje, under en længere periode, lægger sig som et bånd ude over den sande volatilitet med en for stor margin, og fanger dermed omtrent 100% af al variation.

I figur 2.8 ses et isoleret plot af 30 dages forecastet, der umiddelbart ser ud til at være det forecast, der passer bedst til den observerede volatilitet.

Figur 2.8



Som det ses af plottet ovenfor ligger forecastet pænt omkring den sande volatilitet. Det er hurtigt til at korrigere for skift i volatiliteten, såvel som det også er effektivt nok til at korrigere tilbage igen mod den langsigtede varians, når volatiliteten falder igen.

Det kommer dog ikke som den store overraskelse at disse forecasts generelt performer godt set i lyset af, at S&P500 indekset også følger en ARCH-process. Indekset besidder en stor del af de finansielle karakteristika, som GARCH (1, 1) modellen er ment til at tage hånd omkring.

2.8.4 Delkonklusion på GARCH forecasts

GARCH (1, 1) modellen udviser en høj grad af persistens under forecasts. Eftersom at modellen konvergerer imod den ubetingede varians, dvs. den er stationær, er den pr. definition anvendelig som forecastmodel.

Modellen har dog også en høj grad af vedholdenhed og tager ca. 1 år for at konvergere imod den ubetingede varians. Dette er dog i tråd med de stylized facts, og kommer derfor ikke som nogen større overraskelse.

GARCH (1, 1) modellen performer naturligvis bedst, når den skal forudsige volatiliteten over en kortere periode. Modellen performer dog godt helt op til et 30 dages forecast frem i tid. Når volatiliteten skal forudsiges mere end 30 dage forud, fx 100 dage, må det i stedet anbefales at inkorporere mulige effekter af fremtidige hændelser, som de kendes allerede i dag.

2.9 Heston modellen og dets praktiske anvendelse

I teori-afsnittets sektion 1.2.2 så vi helt præcist hvordan den empiriske lognormalfordeling for S&P 500 indeks'et fordelte sig relativt til en teoretisk lognormalfordeling. Fordelingen udviste tegn på en anelse skævhed, med en tilhørende markant topstejlhed. Ud fra de empiriske undersøgelser giver det derfor ikke umiddelbart mening, at approksimere lognormal afkastet på indekset som en standard lognormal fordeling under en prisfastsætning. Således introduceres derfor nu Heston modellen.

Under Heston modellen er det muligt at lade den logaritmiske pris på indekset, $\ln(S_{S\&P500})$, udvise skævhed og topstejlhed ved manipulering af parametrene i Heston modellen, hvis indhold refereres tilbage til sektion 2.1. I den følgende sektion undersøges det derfor hvordan korrelationsparameteren, ρ og variansens volatilitet, σ kan influere på den logaritmiske afkastfordeling. Flere af de producerede figurer antager samme form som de originale figurer produceret i den oprindelige publikation af Heston (Heston, 1993). Formålet er at belyse, hvilken effekt parametrene i Heston modellen, isoleret set, vil få på den empiriske lognormale afkastfordeling.

2.9.1 Korrelation og variansens volatilitet

I dette afsnit undersøges det hvordan de to parametre i Heston modellen, ρ og σ , introduceret i afsnit 2.1, kan benyttes til at gøre den empiriske lognormalfordeling teoretisk ækvivalent.

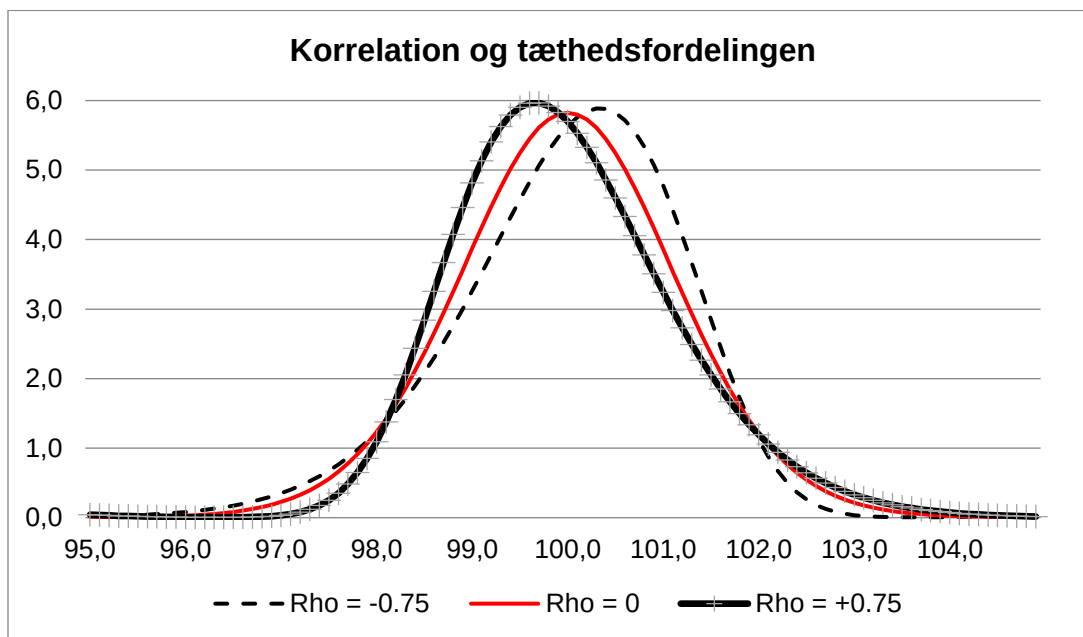
Korrelationsparameteren, ρ , kontrollerer skævheden i fordelingen af $\ln S_T$. Korrelationen referer her til volatilitetens korrelation med kursudviklingen for aktivet udtrykt i formel 26. Uden at benytte en isoleret betragtning bør det være åbenlyst, at positiv korrelation, som udgangspunkt vil føre til tykkere haler i højre side af afkastfordelingen. Derimod vil en negativ korrelation, alt andet lige, føre til en fortætning af fordelings venstre hale, når man anskuer en normalfordelings kurve.

For at visualisere Heston parameterens effekt på den empiriske afkastfordeling, er der i følgende figur udarbejdet et eksempel på hvordan fordelingen lægger sig ved to forskellige værdier af ρ .

Som det ses af figur 2.9 er der benyttet to relativt ekstreme værdier for korrelationen imellem volatilitet og kursudvikling, netop intervallet $p[-0,75; 0,75]$. De resterende parametre er udvalgt til $v_0 = 0,01$, $\kappa = 2$, $\theta = 0,01$, $\lambda = 0$, og $\sigma = 0,1$. For at finde logaritmen til aktiekursen ved udløbstidspunktet er det nødvendigt at inverttere formel 31. For at gøre dette er der i VBA produceret en funktion, der beregner den resulterende aktiekurs ud. Koden findes i bilag 3.3.

Den producerede figur har samme søger at forklare det samme som den oprindelige figur produceret i Hestons figur 1, i den originale 1993 artikel. Som det ses af figur 2.9, er positiv korrelation ensbetydende med en øget varians, når aktiekursen stiger. Dette medfører en federe hale i højre side af fordelingen. Det modsatte gør sig gældende for den negative korrelation.

Figur 2.9



Det er også muligt at drage sammenhæng imellem korrelationsparameteren og den førnævnte leverage effekt. Som det også kan ses i figur X, er venstre hale for tilfældet med $\rho = -0,75$ langt federe end dens højre hale. Korrelationsparameteren har således en ikke-symmetrisk effekt på afkastfordelingen. Når skævheden, som her ændrer sig, vil den implicitte volatilitet ligeledes også ændre sig. Ved at gøre korrelationsparameteren positiv, er det derfor muligt at afhjælpe en del af den modelleringsfejl, som kan observeres i figur X. Dette skyldes ganske enkelt, at $\rho > 0$ fører til en større sandsynlighed for højere absolutte aktiekurser ved udløb. Med en større sandsynlighed for en given kurs' udfald følger en højere implicit volatilitet.

De empiriske undersøgelser peger også på at en forøgelse af volatiliteten fører til et fald i kursen på det underliggende aktiv (Bakshi, Cao og Chen, 1997). Dette er, alt andet lige, et udtryk for at volatilitet og aktiekurs er negativt korrelerede med hinanden.

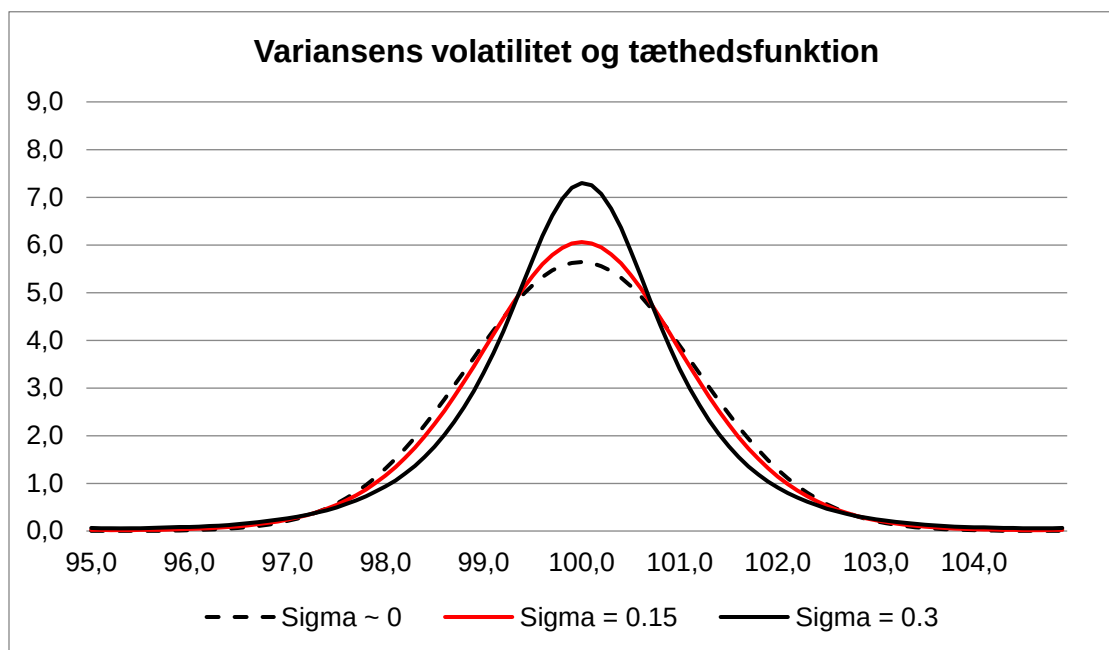
Ved brug af samme metode er der i figur 2.10 også fremsat en grafisk afbildning af, hvilken effekt variansen af volatilitet, σ har på den empiriske fordeling.

For at producere udsvingene i de resulterende aktiekurser, er der benyttet de samme parametre som til at producere figur 2.9.

Det er nu igen tydeligt, at variansens volatilitet bestemmer topstejlheden i den empiriske afkastfordeling, mens korrelationen bestemmer skævheden. Af ovenstående fremgår det også at hvis variansens volatilitet, $\sigma = 0$, vil volatiliteten være deterministisk eftersom at der ganges 0 på det stokastiske led i variansens proces udtrykt i

formel 27. Når σ gøres positiv tillader Heston modellen en stokastisk udvikling for den langsigtede volatilitet, dvs. $\sqrt{\theta}$. Hvis volatiliteten tillades at være stokastisk øger man muligheden for større kursudsving, hvilket fører til en højere volatilitet. Den højere volatilitet resulterer følgelig i federe haler for afkastfordelingen, hvilket også kan udledes af figur 2.10, hvor tætheden af halerne er en positiv funktion af σ . De federe haler fører samtidigt til en højere topstejlhed for fordelingen, hvilket også tydeligt fremgår af figuren.

Figur 2.10



Af figur 2.10 fremgår det da, at desto større værdier af σ desto større er sandsynligheden for, at det målte aktiv vil udvise høj volatilitet. Dette fører til federe haler i afkastfordelingen eftersom at det målte aktiv vil være mere tilbøjelig til at udvise højere kursudsving. Årsagen til at der observeres en større topstejlhed skal findes i, at den øgede volatilitet øger sandsynligheden for ekstreme og 'neutrale' udfald. Sandsynligheden for moderate udfald i slutkursen sænkes dermed, når $\sigma \rightarrow \infty$, og sandsynligheden for slutkurser i området omkring strike øges.

2.9.2 Delkonklusion på parametereffekterne

Heston parametrene gør det muligt at arbejde med afkastfordelingens sande karakteristika. Helt specifikt er det introduktionen af de to Wiener processer udtrykt i formel 26 og 27, der gør det muligt at inkorporere leverage effekten vha. korrelationsparameteren. ρ ændrer ikke blot skævheden, men også den implicite volatilitets overflade, som vi vil se senere. Derudover gør variansparameteren, σ , det muligt at ændre på fordelings topstejlhed. Introduktionen af begge parametre må siges at være en væsentlig forbedring, når man anskuer de problemstillinger, som de empiriske undersøgelser for finansielle afkastserier pegede på i det indledende teoraifsnit. Heston modellen muliggør derfor en mere realistisk modellering af egenskaberne for det underliggende aktiv.

2.10 Heston modellens parametre til prisfastsætning

I dette afsnit undersøges effekten af de to parametre, ρ og σ , på prisfastsætningen af optioner, relativt til den klassiske Black Scholes model. Helt specifikt er det valgt at undersøge parametrenes effekt på Europæiske call optioner. For at beregne priser på optionerne benyttes følgende parametre analogt til dem, der blev valgt i den oprindelige Heston 1993 publikation. Parametrene ses i nedenstående tabel 2.1:

Tabel 2.1

Heston parametre					
Parameter	kappa (k)	theta (θ)	sigma (σ)	v0	lambda (λ)
Værdi	2	0,01	0,1	0,01	0
Options karakteristika					
Parameter	Strike (K)	Tid til udløb (τ)	Risikofri rente (r)	Dividende (q)	
Værdi	100	0,5	0	0	

I forrige afsnit så vi hvordan ρ påvirkede fordelingen af aktiekurserne ved udløb. Når $\rho > 0$ var skævheden i fordelingen af $\ln S_T$ positiv, hvilket betød at fordelingen fik en federe hale i højre side. For optioner har det den indvirkning at out-of-the-money (OTM) call optioner prisfastsat med Heston vil være relativt dyrere end BS', når der modelleres med en værdi for $\rho > 0$ i Heston modellen. Dette skyldes ganske enkelt at deres strike kurs ligger i højre ende af lognormalfordelingen, og at sandsynligheden for højere slutkurs øges med ρ . Omvendt har in the money (ITM) call optioner en strike kurs, der ligger i venstre hale. Når $\rho \rightarrow \infty$, vil der derfor blive pålagt mindre vægt på denne hale, hvilket altså fører til en lavere pris ved Heston modellering, relativt til den klassiske BS-formel.

Nødvendigt vil det modsatte derfor gøre sig gældende, når $\rho < 0$ hvilket altså vil gøre skævheden af $\ln S_T$ negativ. Resultaterne kan opsummeres i tabel 2.2

Tabel 2.2

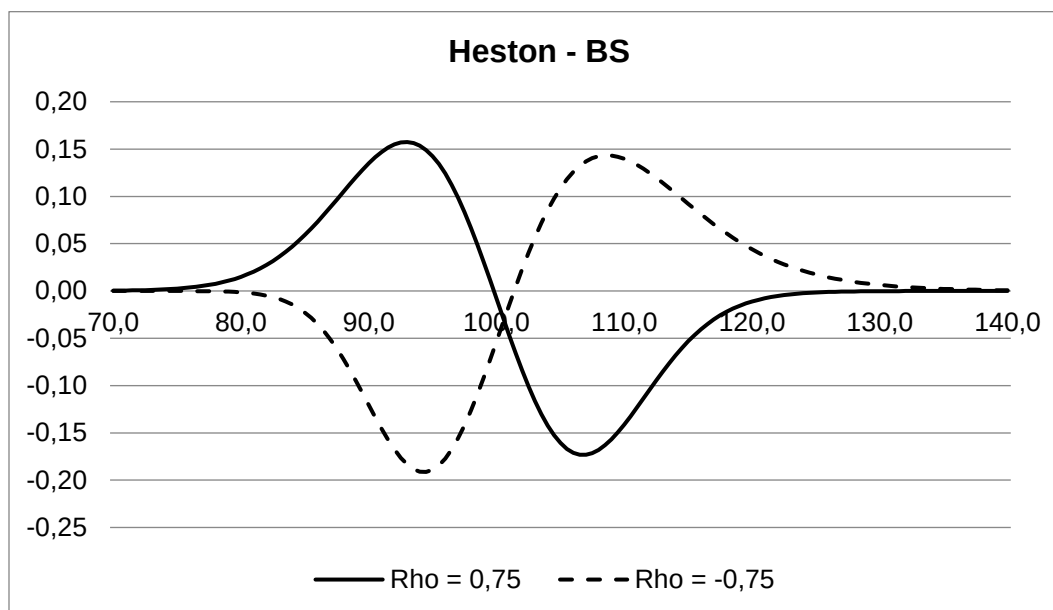
	$\rho > 0$	$\rho < 0$
OTM call optioner	Heston > BS	Heston < BS
ITM call optioner	Heston < BS	Heston > BS

For at give en uddybende forklaring på fænomenet i tabel 2.2 er der i figur 2.11 produceret en grafisk afbildning, der viser prisforskellen imellem en optionspris beregnet med Heston og Black-Scholes. Der tages følgelig udgangspunkt i parametrene fra tabel 2.1.

I figur 2.11 vises forskellen (som $C_{HS} - C_{BS}$) imellem optionspriser produceret ved to forskellige parameterværdier for $\rho[-0,75; 0,75]$. I figuren fremgår det nu tydeligt hvordan Heston modellen producerer højere optionspriser for OTM optioner og lavere priser for ITM optioner, når $\rho > 0$. At man observerer højere optionspriser for OTM optioner skyldes ganske enkelt, at fordelingen $\ln S_T$ gøres højreskæv, når parameteren ρ er positiv. Dette medfører, alt andet lige, en øget sandsynlighed for en højere slutkurs.

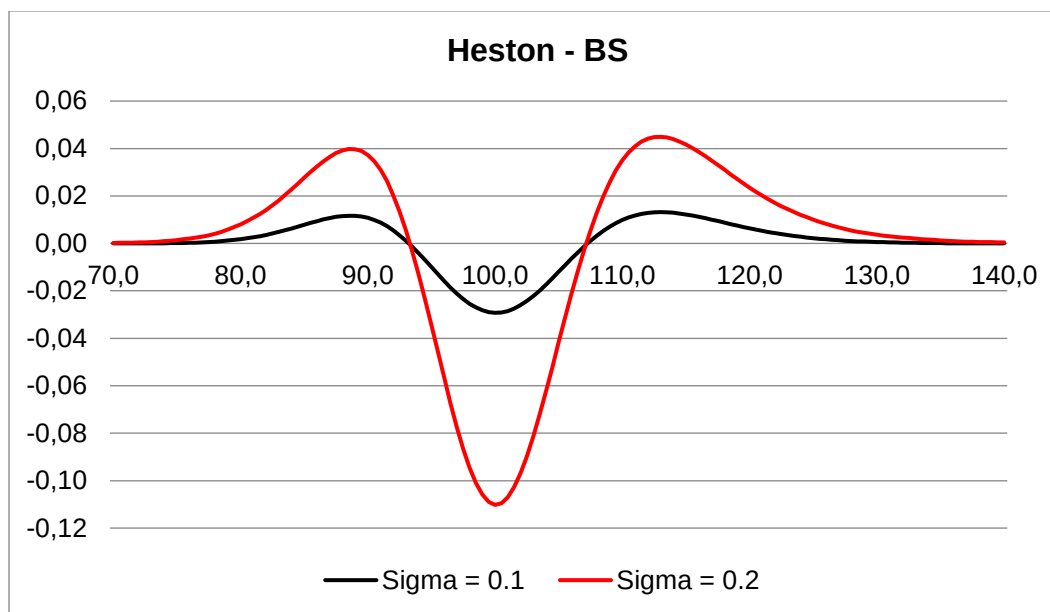
Af figuren er det også muligt at drage inferens om optionspriser, når $\rho < 0$. Her er optionsprisen højere i Heston modellen for ITM optioner og lavere for OTM optioner. Dette skyldes at sandsynligheden for, at optionen ender i det lave ITM niveau er højere i Heston modellen, hvilket igen skyldes at tykkelsen af venstre hale øges, når ρ bliver negativ. Der er dermed en større sandsynlighed for at optionen har en værdi i Heston modellen. Derimod gælder det for de høje strike kurser, at BS-modellen har den største sandsynlighed for at give et afkast, hvilket også resulterer i en højere pris for optionen.

Figur 2.11



Ved at tage udgangspunkt i samme parametre til at producere figur 2.9, foretages nu samme analyse for parameteren σ . For at analysere effekten på optionspriser, er der i figur 2.12 fremsat en grafisk afbildning af prisforskellen imellem Heston og BS prisen, når σ varieres.

Figur 2.12



Af ovenstående figur 2.12 fremgår det tydeligt at prisen for ITM og OTM optioner er højest i Heston modellen, når σ forøges. Som vi så tidligere førte en højere værdi af σ til federe haler, hvilket altså også medfører, at ITM og OTM optioner, prisfastsat ud fra Heston modellen vil blive vurderet højere, relativt til BS modellen.

For ATM optioner må det modsatte dog siges at være gældende. Her er den beregnede optionspris lavere, når den produceres vha. Heston modellen. Det ses ydermere, at prisforskellen imellem de to modeller øges markant, når σ forøges. Det må også bemærkes, at en 100% forøgelse også er relativ stor, men at forøgelsen modsvarer af en prisforskel på mere end 300% er dog værd at bide mærke i. Årsagen til de lave kurser ved Heston modellen er, at sandsynligheden for 'gennemsnitlige' slutkurser sænkes, når σ forøges.

2.10.1 Delkonklusion på prisfastsætningsevnerne

I dette afsnit har jeg diskuteret hvordan Heston modellen kan påvirke skævheden og topstejlheden, hvilket begge udvist problematikker, når blev holdt op imod den empiriske afkastfordeling. Skævheden påvirkes igennem korrelationsparameteren, ρ , og topstejlheden påvirkes igennem σ , der bestemmer variansens volatilitet. De to parametre har såvel en signifikant effekt på afkastfordelingen og de resulterende optionspriser, der produceres vha. Heston modellen. De i afsnittet omtalte effekter vil hjælpe til at beskrive Heston modellens indvirkning på den implicitte volatilitet i det kommende afsnit.

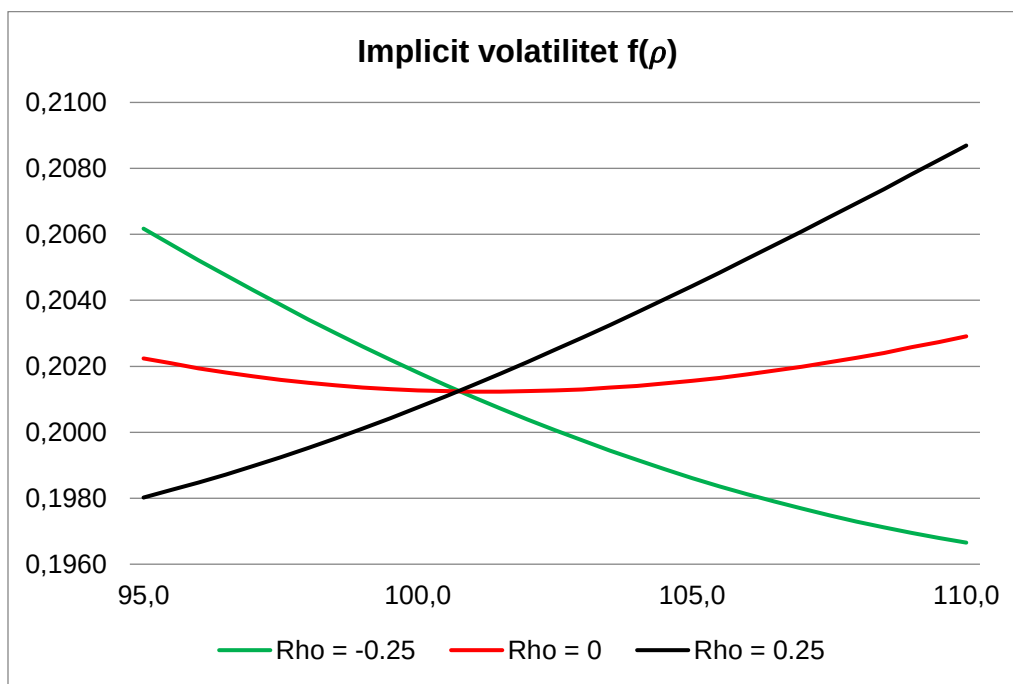
2.11 Heston modellens parametre under implicit volatilitet

Endnu en fordel ved Heston modellen opstår ved dens evne til at inkorporere smil eller skews i den implicitte volatilitet for optionspriser. Når den implicitte volatilitet plottes som en funktion af strike, er det i Heston modellen dens parametre, der bestemmer den endelige form. For at understøtte mine analyser har jeg produceret grafiske afbildninger, hvis parametre er lig dem præsenteret i tabel 2.1.

Korrelationsparameteren bestemmer retningen af hældningen på den implicitte volatilitet, når den plottes over tid. Når $\rho > 0$ vil hældningen være positiv, mens for $\rho < 0$ vil hældningen derimod være negativ. For at

illustrere dette er der i figur 2.13 udarbejdet en figur, der viser de forskellige retninger på volatilitets skew'et for udvalgte værdier af ρ .

Figur 2.13

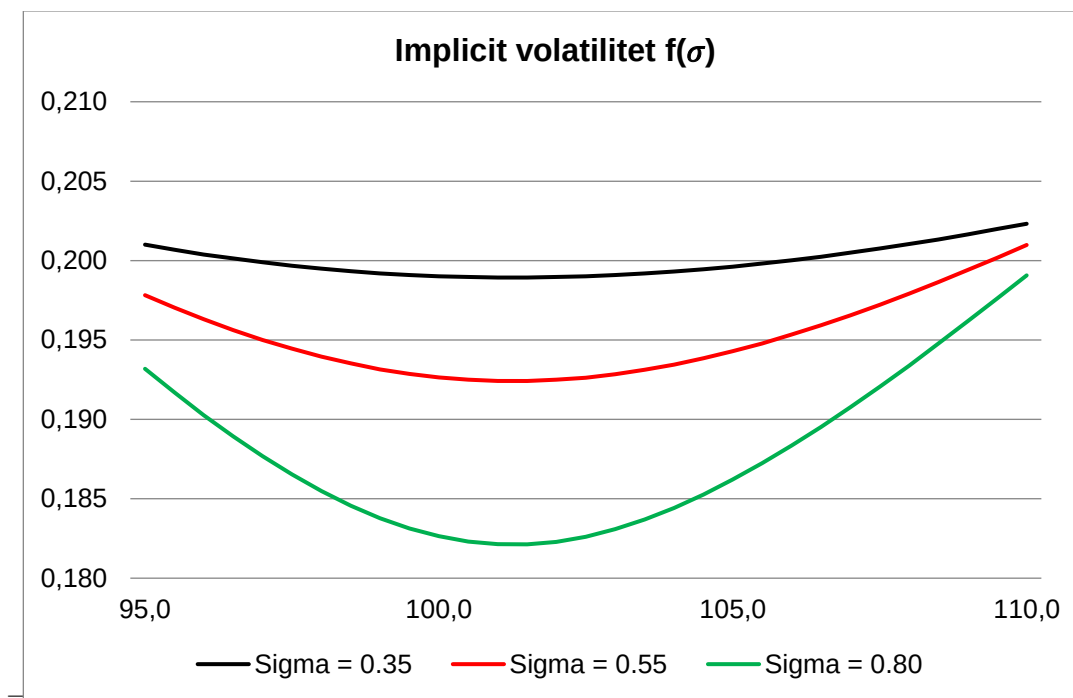


I ovenstående er der benyttet strike satser i intervallet 95 til 110 for fiktive optioner, men konklusionen er den samme – ρ bestemmer hældningen på den implicitte volatilitet. Som vi kan se i ovenstående fører en negativ værdi af ρ til en negativ hældning. Med de oprindelige resultater fra det implicitte volatilitetsplot in mente, må det derfor forventes at Heston parameteren også vil være negativ, når parametrene skal estimeres for den egentlige prisfastsætning.

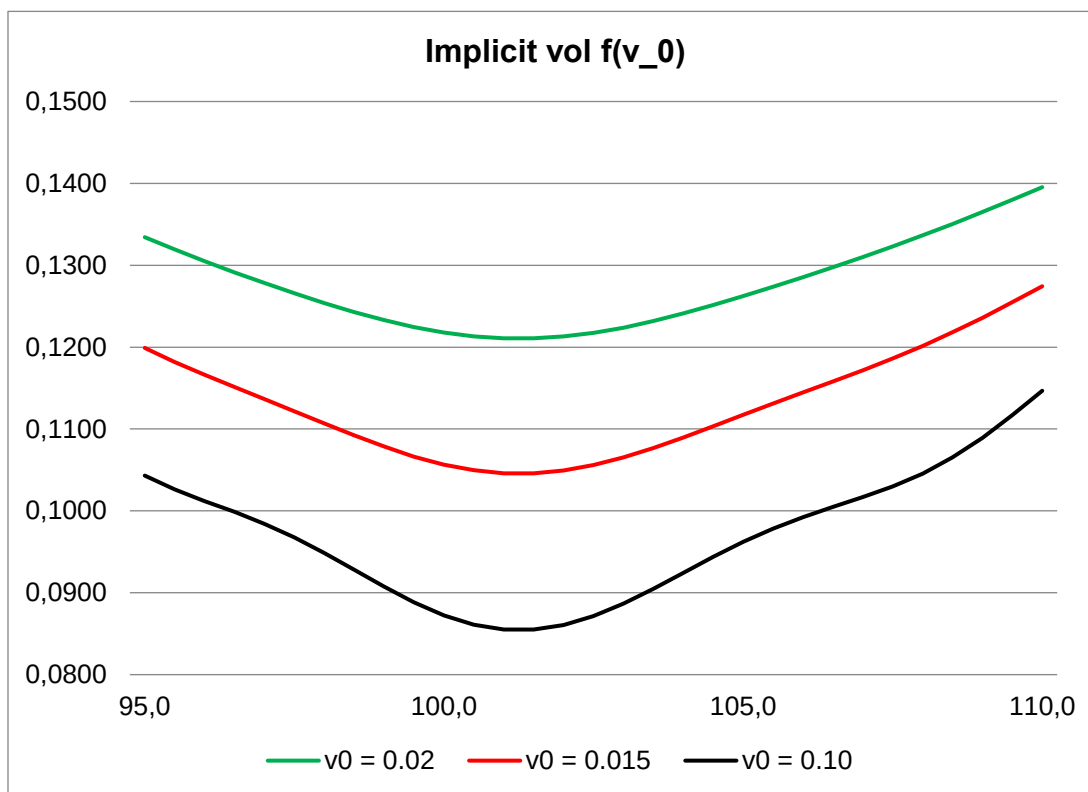
Når man derimod ændrer på værdien af σ ændrer man på krumningen af den implicitte volatilitet. Dette er illustreret i figur 2.14, hvor ρ er sat til 0.

Til sidst er der foretaget samme analyse for κ , θ og v_0 , der alle tre kontrollerer niveauet af smilet, når værdierne manipuleres for forskellige strike kurser. Resultatet fremgår i de følgende tre figurer. Det kan ses af figur 2.14, at κ også til en vis grad bestemmer krumningen af den implicitte volatilitet. Desto større værdi af κ , des fladere bliver krumningen på den implicitte volatilitet.

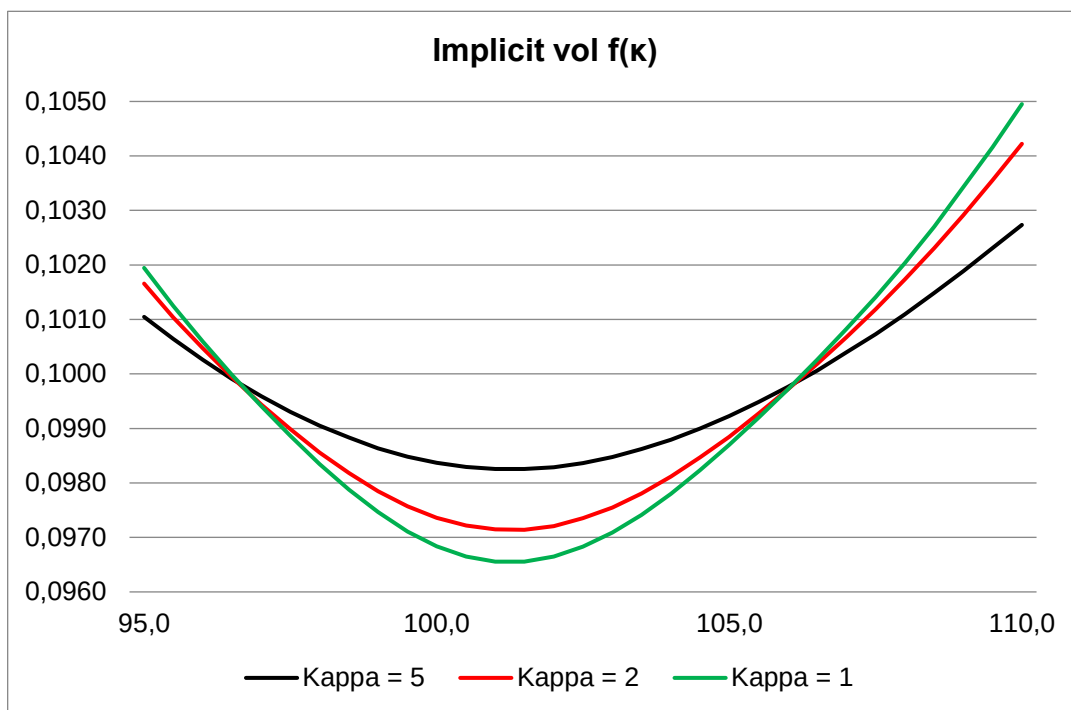
Figur 2.14



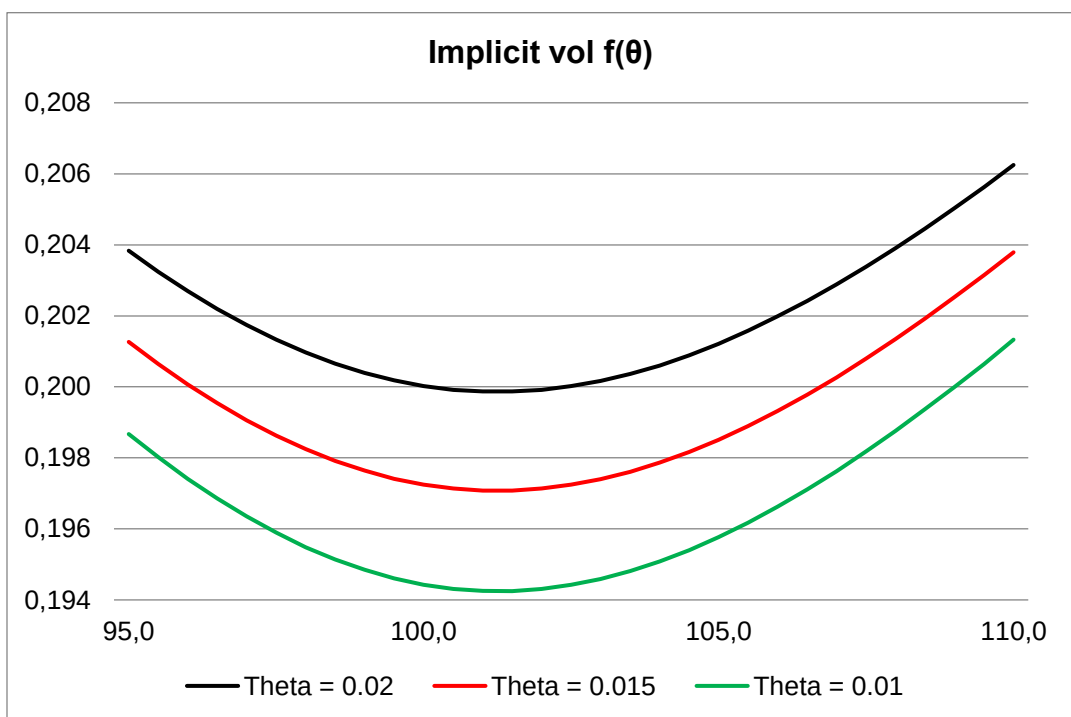
Figur 2.15



Figur 2.16



Figur 2.17



3. Empirisk sammenligning af optionsmodellerne

Formålet i dette afsnit er at give empirisk analyse af, hvordan Black Scholes, den oprindelige Heston samt Heston-Nandi GARCH modellen opfører sig i et prisfastsætnings perspektiv. Resultatet heraf skulle gerne være en afdækning af Heston og Heston-Nandi modellens bidrag til den empiriske prisfastsætning af optioner. Som benchmark benyttes markedspriser på optioner med S&P 500 som det underliggende aktiv. De 3 modelleres bud på den korrekte optionspris vil derfor blive holdt op imod indekset, mhp. at foretage en retfærdig vurdering af modellernes evne til at 'ramme rigtigt'.

3.1 Kalibrering af Heston modellen

I dette afsnit fokuseres på kalibreringen af de to Heston modelleres parametre. Heldigvis er metoden til kalibrering den samme for både Heston og Heston-Nandi modellen, om end sidstnævnte kræver en mindre viderebehandling, før det er muligt at opnå et lukket udtryk for optionsprisen. Da Heston-Nandi modellen bygger ovenpå Heston kalibreringen, med tilføjelse af dens udvidelse til volatilitet, udskydes dens behandling til afsnit 3.1.2.

Indtil nu er Heston modellens parametre taget som givet. Før det er muligt at gennemføre en performancesammenligning er det derfor nødvendigt at gennemgå hvordan selve modellens parametre kalibreres til den tilgængelige data.

Først præsenteres den mest benyttede metode til kalibreringsproblemet, tabsfunktionen. Tabsfunktionen minimerer forskellen imellem markeds- og modelpris, dvs. funktionen finder de parameterværdier, der giver den mindste forskel imellem de to priser. For at finde denne forskel skal der benyttes en algoritme, nøjagtigt som til estimeringen af den implicitte volatilitet. Hvor det førhen var muligt med en Newton-Raphson algoritme introduceres her en Nelder & Mead (Nelder & Mead, 1965) algoritme.

Igen gennem hele afsnittet benævner vektoren Θ Heston parametrene, og $\hat{\Theta}$ benævner modelestimerne af parametrene.

3.1.1 Parameterestimering ved tabsfunktionen

Som sagt er den mest populære metode til parameterestimering benyttelsen af en tabsfunktion. Som alternativ til minimeringen af markeds- og modelpriser, kan man også benytte implicit volatilitet. Da der dog, i bilag 1, er rigeligt med tilgængeligt materiale omhandlende markedspriser benyttes disse.

Parameterestimerne, $\hat{\Theta}$, er her de værdier der producerer den mindste forskel i tabsfunktionen, hvilket også er ensbetydende med at modelprisen er så tæt på markedsprisen, som muligt. I denne tabsfunktion (og kalibrering) er det dog nødvendigt, at indføre følgende restriktioner på Heston parametrene

$$\kappa > 0, \theta > 0, \sigma > 0, v_0 > 0, \rho \in [-1, +1] \quad (73)$$

Uden ovenstående restriktioner, ville modellens volatilitets estimation gå mod 0, hvilket naturligvis ikke giver mening i en optionsteoretisk sammenhæng. Da vi benytter markedspriser som benchmark, bør det også pointeres at de producerede parametre vil være såkaldt risikoneutrale Heston parametre.

For at opstille en tabsfunktion kræves blot en simpel definition af løbetider ($N_T, \tau_i (i = 1, \dots, N_T)$) og strike satser ($K_k (k = 1, \dots, N_k)$). For hver kombination af løbetid og strike (τ, K_k) haves der dermed også en markedspris

$C(\tau_t, K_k) = C_{tk}$ hvortil der også skal følge et estimat af modelpriser $C(\tau_t, K_k; \Theta) = C_{tk}^\Theta$, som dannes ved hjælp af Heston modellen. Til hver enkelt option er det også muligt, at tildele en vægt w_k .

I praksis benyttes ofte flere forskellige tabsfunktioner, da deres modelleringsevner kan afhænge af optionens moneyness. Af denne grund benyttes der både MSE og RMSE tabsfunktioner i dette afsnit.

MSE er et engelsk udtryk for 'mean error sum of squares', dvs. gennemsnittet af de kvadrerede fejl på tabsfunktionen, der defineres som minimum af

$$\frac{1}{N} \sum_{t,k} w_{tk} (C_{tk} - C_{tk}^\Theta)^2 \quad (74)$$

Med hensyn til Heston parametrene, Θ , og hvor N er antallet af kombinationer. Den anden mulighed er RMSE, der står for 'relative mean square error', som opnår sine parameterestimater igennem tabsfunktionen

$$\frac{1}{N} \sum_{t,k} w_{tk} \frac{(C_{tk} - C_{tk}^\Theta)^2}{C_{tk}} \quad (75)$$

Og nu til tabsfunktionernes ulemper.

En velkendt modelleringsfejl ved MSE er dog, at optioner med kort løbetid, der i forvejen er deep out of the money, bidrager meget lidt til summen af de kvadrerede fejl. Modsætningsvist vil optioner med lang løbetid, som er in the money, blive modelleret bedre, men på bekostning af de andre optioner. En mulig løsning er, at øge vægtningen på de kortsigtede optioner, sådan at der i gennemsnit opnås et mere ligeligt fordelt parameterestimat. En anden løsning er, udelukkende at benytte in the money optioner, hvis formålet er prisfastsættelse af en option med sådanne karakteristika.

Ved anvendelsen af RMSE opstår også vanskeligheder, i det at den modsatte effekt optræder. Årsagen skyldes tilstedeværelsen af C_{tk} i nævneren, hvilket medfører at optioner med lav markedsværdi vil få en for stor indflydelse på summen, relativt til hvad de burde givet deres indflydelse. Igen er et muligt løsningsforslag at justere vægtene efter markedandel, om end det i praksis ofte vil være en subjektiv vurdering af hele markedet, der benyttes.

Der eksisterer følgelig et væld af andre muligheder for tabsfunktioner, men der er ikke opnået nogen konsensus om hvilke der skulle være de bedste. Christoffersen og Jacobs påpeger dog, at man bør benytte den samme tabsfunktion til såvel parameterestimation som evaluering af modelfit (Christoffersen & Jacobs, 2004).

Med udgangspunkt i de to tabsfunktioner, er det nu nødvendigt med en introduktion af Nealder-Mead algoritmen, der skal forklare hvordan tabsfunktionerne omskrives til en algoritme.

3.1.2 Nealder-Mead algoritme

Nealder Mead algoritmen kan anvendes til at finde et globalt minimum i en objektfunktion $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. For at køre algoritmen kræves der et sæt af $n + 1$ initialværdier, som hver er en del af en vektor med størrelsen n . Efter hvert forsøg/iteration erstatter algoritmen den vektor, der producerer den værste værdi (i denne henseende den største værdi) af objektfunktionen, $f(x)$ (Dréo m.fl., 2009).

I praksis kræver algoritmen dog indarbejdelse af 6 skridt, der skal sikre at algoritmen ikke går imod en forkert retning.

1. Skridt: initiering

Til at starte med defineres de $n + 1$ parametre, der skal indgå i vektoren som $x_0, x_1, \dots, x_n$. Disse skal rangeres efter objektfunktionen

$$f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_{n-1}) \leq f(x_n) \quad (76)$$

Ved denne opskrivning er x_0 således det bedste punkt da det har den laveste værdi i objektfunktionen. x_n er dermed det værste punkt. Dernæst beregnes gennemsnittet $\bar{x} = (x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1})/n$, hvor det bemærkes at x_n , det værste punkt, er ekskluderet.

2. Skridt: reflektionsreglen

Refleksions punktet defineres og beregnes som

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_n) \quad (77)$$

Her gælder at hvis $f(x_1) \leq f(x_r) \leq f(x_n)$, da erstattes x_n med reflektions punkt x_r og der fortsættes til det næste forsøg, dvs. første skridt gentages. Hvis reflektionsreglen ikke opfyldes evalueres det tredje skridt i stedet.

3. Skridt: ekspansionsreglen

Hvis det skulle ske at $f(x_r)$ bliver mindre end eller lig med $f(x_0)$, da beregnes ekspansionspunktet som

$$x_e = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) \quad (78)$$

Som erstatter punktet x_n med x_e . Dernæst gentages forsøget i 1. skridt. Hvis $f(x_e) > f(x_r)$, da erstattes x_n med reflektionspunktet x_r og der fortsættes til næste iteration.

Hvis $f(x_r) > f(x_0)$, da fortsætter man videre til skridt 4.

4. Skridt: den udvendige sammentrækningsregel

Den udvendige sammentrækningsregel defineres og beregnes som

$$x_{ic} = \bar{x} + \gamma(x_n - \bar{x}) \quad (79)$$

Hvis $f(x_n) \leq f(x_r)$ og $f(x_{ic}) < f(x_{n+1})$, da erstattes x_n med x_{ic} og der fortsættes videre til det næste forsøg, dvs. første skridt.

5. Skridt: den indvendige sammentrækningsregel

Den udvendige sammentrækningsregel defineres og beregnes som

$$x_{ic} = \bar{x} + \gamma(x_n - \bar{x}) \quad (80)$$

Hvis $f(x_n) \leq f(x_r)$ og $f(x_{ic}) < f(x_{n+1})$, da erstattes x_n med x_{ic} og der fortsættes til næste iteration i 1. skridt. Hvis betingelsen ikke opfyldes evalueres den sjette og sidste regel.

6. Skridt: indsvindingsreglen

Under denne evaluering erstattes x_i med $x_i + \sigma(x_0 - x_i)$ for hvert $i = 1, \dots, n$, hvor det bemærkes at det bedste punkt x_0 ikke undergår i reglen. De gængse værdier for de beskrevne evalueringer gives som $\rho = 1$ under refleksionen, $\chi = 2$ under ekspansionen, $\gamma = 1/2$ for sammentrækningen, og $\sigma = 1/2$ under indsvindingen.

Som Newton-Raphson algoritmen kræver Nealder-Mead også fastsættelse af et maksimalt antal forsøg samt definition af en acceptabel tærskelværdi. Jeg har valgt at køre 500 forsøg med en acceptabel grænseværdi på 0,00001. Dette burde være rigeligt til at opnå et realistisk fit af data. Den i Excel kodede VBA funktion ses i bilag 3.3.

Med en diskussion af algoritmens indhold, er det nu tid til en kort diskussion af motivationen bag de benyttede initialværdier til Heston modellen.

3.1.3 Initialværdier i Nealder-Mead algoritmen

Som det gælder med enhver optimering er det nødvendigt, at arbejde med realistiske initialværdier for at opnå et realistisk fit. Initialværdierne må med andre ord ikke ligge for langt fra de sande værdier. Betragter vi den empiriske litteratur, som i tabellen nedenfor, er det muligt at danne sig et indtryk af, hvad der er en passende initialværdi.

Tabel 3.1

Studie	κ	θ	σ	v_0	ρ	Datakilde	Estimationsdato
GS (2012) *1	0,3369	0,0551	0,1927	0,0746	-1,0000	S&P 500	sep-08
Gatheral (2006) *2	1,3253	0,0354	0,3877	0,0174	-0,7165	S&P 500	sep-05
BCC (1997) *3	1,1500	0,0400	0,3900	0,0348	-0,6400	S&P 500	1988-1991
Gennemsnit	0,9374	0,0435	0,3235	0,0423	-0,7855		

*¹= Guillaume og Schoutens, 2012

*²= Gatheral, 2006

*³= Bakshi, m.fl., 1997

Ud fra de parameterverdier, som andre forskere har fundet er det muligt at danne sig et indtryk af i hvilket område en realistisk initialværdi vil ligge. Et andet alternativ til at finde fornuftige initialværdier er, at benytte sig af at beregne dem efter en metode præsenteret i Gauthier og Rivailles bog "Fitting the smile: Smart Parameters for SABR and Heston" (Gauthier og Rivaille, 2009), men med 500 iterationsforsøg vurderes det at de gennemsnitlige værdier, der er udledt i tabel 3.1, vil være tilstrækkelige til dette formål.

Nu hvor selve parameterestimeringen i Heston modellen er introduceret, er det nu tid til en forklaring på, hvordan man udleder et lukket udtryk for Heston og Nandi prisfastsætningsformlen.

3.2 Heston og Nandi-GARCH modellen

Heston-Nandi modellen har den fordel, at når der opereres med en GARCH (1,1) version, er det muligt at udlede et lukket udtryk for prisen på en Europæisk option. Da der udelukkende arbejdes med en GARCH (1,1) version af modellen, vil fokus i dette afsnit derfor være på en udledning af netop dette lukkede udtryk.

Selvom løsningen til prisfastsætningen kan udledes i lukket form er det dog nødvendigt, at arbejde tilbage fra tidspunktet for optionens udløbstidspunkt og udlede funktionen. Så snart, at den genererende funktion er dannet, er fremgangsmåden dog analog til den anvendt i den oprindelige Heston (1993) model, hvor der udledes parameterestimerer igennem en Nealder-Mead algoritme.

Vi betragter som bekendt tilfældet hvor $p = q = 1$, der også benævnes en GARCH (1,1) process for variansen. Desuden forventes det logaritmiske afkast også at følge en GARCH (1,1) process, der drives af følgende to funktioner

$$r_{t+1} = r + \lambda \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1} \quad (81)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta \sigma_t^2 + \alpha (z_t - \gamma \sigma_t)^2 \quad (82)$$

Hvor at

r er den risikofri rente

σ_t^2 er den betingede varians

z_t er et normalfordelt fejllid $\Rightarrow z_t \sim N(0,1)$ og

$\gamma, \omega, \beta, \alpha, \lambda$ er modelparametre

Formel 82 (den for variansen) er en variation af den oprindelige GARCH (1,1) model, som ses i formel 41. I stedet for at processen besidder kvadrerede afkast i leddet, der vedrører α , besidder processen nu leddet $(z_t - \gamma \sigma_t)^2$. Da variansens vedholdenhed nu er målt som $\beta + \alpha \gamma^2$, er processen stationær, dvs. konvergerende tilbage imod den ubetingede varians hvis $\beta + \alpha \gamma^2 < 1$. Ved at isolere parametrene i formel 82, kan det ydermere bevises at α beskriver topstejlheden og γ beskriver skævheden.

Desuden kan den risikoneutrale version af modellen formuleres som

$$r_{t+1} = r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1}^* \quad (83)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta \sigma_t^2 + \alpha (z_t^* - \gamma^* \sigma_t)^2 \quad (84)$$

Den risikoneutrale proces sikres her blot ved at λ erstattes af $-\frac{1}{2}$ og γ erstattes af $\gamma^* = \gamma + \lambda + \frac{1}{2}$.

Det er nu muligt at udlede et lukket udtryk for prisen af en Europæisk call option med tiden $t + T$ til udløb og strike, K , givet som

$$\text{Call} = e^{-rT} E_t^*[(S_{t+T} - K, 0)] = S_t P_1 - K e^{-rT} P_2 \quad (85)$$

Hvor

T er tiden til udløb

E_t^* er forventningen på tidspunkt t under den risikoneutrale fordeling

S_t er prisen på det underliggende aktiv på tidspunkt t

P_1, P_2 er den risikoneutrale sandsynlighed

Under denne model, er P_1 delta på call optionen og P_2 er givet som sandsynligheden for at prisen på det underliggende aktiv er større end strike kursen ved udløb, dvs. kan matematisk defineres som $P_2 = \Pr[S_{t+T} > K]$.

3.2.1 Udledning af funktion for aktivprisen

For at udlede prisen på en call option skal værdierne af P_1 og P_2 fra formel 85, beregnes. Her gælder det at eftersom at $E_t[S_{t+T}^\phi] = E_t[\phi \log S_{t+T}]$, vil den generende funktion af prisen for det underliggende aktiv, $f(\phi) = E_t[S_{t+T}^\phi]$, også være den momentgenererende funktion af den naturlige logaritme til aktivet. Den genererende funktion $f^*(\phi)$ er selvfølgelig den fundet under den risikoneutrale fordeling, sådan at $f^*(\phi) = E_t^*[S_{t+T}^\phi]$. Heston og Nandi viser da, i deres oprindelige publikation, at den genererende funktion antager den følgende log-lineære form for GARCH (1,1) modellen

$$f(\phi) = S_t^\phi \exp(A_t + B_t \sigma_{t+1}^2) \quad (86)$$

Hvor

$$A_t = A_{t+1} + \phi r + B_{t+1} \omega - \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha B_{t+1}) \quad (87)$$

$$B_t = \phi(\lambda + \gamma) - \frac{1}{2} \gamma^2 + \beta B_t + \frac{\frac{1}{2}(\phi - \gamma)^2}{1 - 2\alpha B_{t+1}} \quad (88)$$

Både A_t og B_t er altså her defineret rekursivt, dvs. man beregner dem ved at beregne tilbage fra tidspunkt $t + T$, som tidligere nævnt i indledningen til dette afsnit. For at beregne leddene rekursivt, fra tidspunkt $t + T$, kræver det indarbejdelse af en betingelse om at både A og B skal være lig 0

$$A_{t+T} = B_{t+T} = 0 \quad (89)$$

Til selve prisfastsættningen skal der dog anvendes risikoneutrale termer, hvorfor at γ erstattes med $-\frac{1}{2}$ og γ med γ^* . Som førnævnt sikrer det risikoneutrale udgangspunkt, at resultaterne er gældende for alle markedsaktører.

3.2.2 Integraler for call prisen

Det sidste der mangler for at beregne prisen på en call option ud fra Heston-Nandi modellen, er nu lukkede udtryk for P_1 og P_2 . Heston og Nandi viser, i deres oprindelige publikation, at disse to sandsynligheder antager følgende form

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{e^{-rT}}{\pi S_t} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi \quad (90)$$

Og

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (91)$$

Med disse to sandsynligheder er det nu muligt at udlede call prisen vha. formel 65. Den tilsvarende pris på en Europæisk put kræver ikke selvstændig behandling, da den blot kan udledes igennem put call pariteten.

3.3 Empirisk prissammenligning

I dette afsnit foretages en egentlig analyse af, hvordan de tre modeller Black Scholes, Heston og Heston-Nandi modellen prisfastsætter ift. de empiriske markedspriser. Inden at der foretages en egentlig sammenligning indledes der med et par ord om den anvendte metode.

3.3.1 Metode og data

Igenem den empiriske prisfastsætning benyttes den samme overordnede fremgangsmåde fra Bakshi, Cao og Chens artikel fra 1997 (Bakshi, Cao og Chen, 1997). Det er valgt at benytte et uddrag af den samlede metode, som her vil bestå af tre separate evalueringsmål for de 3 modeller; et indenfor stikprøven (in-sample) samt et mål uden for stikprøven (out-of-sample) og til sidst et mål for modellernes evne til at hedge.

En in-sample test afprøver modellernes evne til at modellere priser, med udgangspunkt i tilgængelige data i dag. For prisfastsætning af optioner d. 20. oktober benyttes derfor data fra det indeværende år til forudsigelsen af optionspriser, dvs. 1 januar 2017 til og med 19. oktober 2017. Under en out-of-sample test benyttes historisk data til at forudsige optionsprisen på et givent tidspunkt i fremtiden. Den i modelleringen benyttede data er derfor adskilt fra den stikprøve af markedsdata, som den skal forsøge at beskrive.

Fordelen ved at benytte både en in-sample og en out-of-sample test er, at det er muligt at vurdere om modellens forudsigelsesevne er et resultat af en statistisk tilpasning. Hvis modellen performer godt i en in-sample test, men dårligt i en out-of-sample test kan det skyldes, at modeller med flere parametre opnår en tættere strukturel tilpasning af data, der ikke nødvendigvis kan videreføres på en anden stikprøve.

For at uddybe analysen benyttes yderligere 3 overordnede beregninger, hvoraf den første er en samlet opgørelse af de statistiske nøgletal, som de præsenteres om et kort øjeblik. Dernæst følger en opdeling på tid til udløb, samt moneyness (S/K), dvs. hvor langt inde ”i pengene” optionen er. På denne måde er det således muligt, at afdække eventuelle mønstre og tendenser i de 3 modellers evne til at modellere priser.

Til sidst benyttes også et mål for modellernes hedgingfejl, som skal søge at vurdere modellernes dynamiske evner, som i denne opgave vil være replikation ud fra et delta hedge. Formålet bliver at vurdere modellernes evne til at forudsige volatiliteten på det underliggende indeks, hvor Heston-Nandi modellen vil forventes at dominere.

Under analysen af prisfastsætningen benyttes 3 statistiske nøgletal fra Joon Kim og Sol Kims 2004 artikel (Kim og Kim, 2004). De 4 anvendte nøgletal er MAPE, MPE, MAE og MSE, der beregnes på følgende måde

$$\text{Mean Absolute Percentage Errors (MAPE)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(C_i^{\text{model}} - C_i^{\text{market}})}{C_i^{\text{market}}} \right| \quad (92)$$

$$\text{Mean Absolute Errors (MAE)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |C_i^{\text{model}} - C_i^{\text{market}}| \quad (93)$$

$$\text{Mean Squared Errors} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i^{\text{model}} - C_i^{\text{market}})^2 \quad (94)$$

C_i^{model} benævner her modellens pris og C_i^{market} benævner her den respektive markedspris, som de fremgår af bilag 2. Selvom alle 4 nøgletal indgår i analysen vil den største forklaringskraft blive lagt på MAPE, da dette er et udtryk for en relativ sammenligning.

Det benyttede data er en samling af priser på Europæiske call optioner, der er hentet fra Bloomberg. Det totale datasæt udgør nøjagtigt 500 Europæiske call optioner, samt 500 Europæiske put optioner. Der tages udelukkende udgangspunkt i data vedr. call optioner, da prisen på put optionen kan beregnes ud fra put call pariteten. Igennem denne analyse er løbetiderne afgrænset til 3; 0,33 år, 0,7 år samt 1,22 år til udløb. Strike er også begrænset til at være i kurserne 2525, 2550, 2575, 2600 og 2625.

Desuden tages også udgangspunkt i følgende optionskarakteristika med 20. oktober 2017 som t_0 .

Spot Pris (S)	2575,21
Risikofri rente (r)	1,00%
Dividende (q)	1,86%
Volatilitet	17,03%

Spot prisen er kursen på S&P 500 indekset pr. 31 oktober 2017, hvilket også er samme dag, som markedspriserne på optionerne med samme underliggende aktiv er trukket fra en Bloomberg Terminal. Den risikofri rente sættes til 1% og antages konstant igennem hele tidsperioden. Dividenden er fastsat til de omdiskuterede 1,86% p.a. De 17,03% i volatilitet er et årligt volatilitets estimat på data fra S&P 500 indekset. Estimatet anvendes kun som parameter i Black-Scholes modellen.

3.3.2 Parameterestimer for Heston og Heston-Nandi modellen

For at gennemføre parameterestimeringen ved brug af Nealder-Mead algoritmen benyttes de gennemsnitlige værdier i tabel 3.1, som initiale gæt for Heston modellen. På denne baggrund er det muligt at få et realistisk bud på de sande parametre. Heldigvis opfylder alle de initiale parametergæt restriktionerne i formel 73, som kræver at alle parametre, undtagen ρ , skal være positive værdier.

De initiale gæt for parameterestimeringen ved Heston-Nandi modellen er valgt fiktivt, da de ikke spiller en væsentlig rolle. Som nævnt i indledningen til dette afsnit er der benyttet data fra 1. januar 2017 til og med 19 oktober 2017 for at generere parameter estimaterne i tabellen nedenfor.

Tabel 3.2

Studie/Heston parametre	κ	θ	σ	v_0	ρ	Datakilde	Estimationsdato
GS (2012) *1	0,3369	0,0551	0,1927	0,0746	-1,0000	S&P 500	sep-08
Gatheral (2006) *2	1,3253	0,0354	0,3877	0,0174	-0,7165	S&P 500	sep-05
BCC (1997) *3	1,1500	0,0400	0,3900	0,0348	-0,6400	S&P 500	1988-1991
Gennemsnit	0,9374	0,0435	0,3235	0,0423	-0,7855		
Empiriske Heston parametre	0,6560	0,0487	0,4476	0,0355	-0,9400	S&P 500	okt-17
Heston-Nandi parametre	ω	β	α	λ	γ	S&P 500	okt-17
Empiriske Heston-Nandi parametre	0,0000	0,6919	0,0000	0,0000	1594,84	S&P 500	okt-17
Black-Scholes parametre	σ						
Empiriske Black-Scholes parametre	0,1703						

Det kan allerede nu bemærkes at Heston-Nandi modellens volatilitetsforecast er stationært, idet der gælder, at $\beta + \alpha\gamma^2 = 0,6919 < 1$. Modellens stationaritet sikrer, at volatilitets estimatet vil gå imod den ubetingede varians. Derudover bør der også bides mærke i parameterværdien $\rho = -0,94$ for Heston modellen. Som vi så i de forrige figurer, vil dette få en række implikationer for de estimerede optionspriser for ITM og OTM optioner.

Igennem den resterende del af denne sektion vil der blive kommenteret og analyseret på de priser og beregninger, der er tilgængelige i bilag 4 Alle beregninger bygger på de fremgangsmåder, der er blevet redegjort for igennem opgaven.

3.3.4 In-sample model performance

I tabel 3.3 ses resultaterne fra bilag 4 summeret op til en samlet totalopgørelse. Samlet set, er det Heston modellen, der ser ud til at klare sig bedst på alle parametre, om end den ikke performer markant bedre end Heston-Nandi modellen på kort sigt. Black Scholes modellen, som har kun en enkelt parameter, ser ikke ud til at klare sig særligt godt. Det bør dog nævnes, at den historiske volatilitet, i dette tilfælde, overvurderer den sande volatilitet med en meget lille faktor. Havde det historiske estimat været 1,5% point lavere, ville BS modellens performance være bedre end Heston og Heston-Nandi modellen målt efter MAPE, eksempelvis.

Tabel 3.3

	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	17,9%	6,0%	6,4%
MAE	14,39	6,55	7,99
MSE	330,15	93,06	104,72

For at få et bedre indtryk af modellernes styrker og svagheder, er der i tabel 3.4 foretaget en opdeling efter optionernes udløbstidspunkt, men med udgangspunkt i samme nøgletal.

Tabel 3.4

	T = 0,28		
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	24,0%	14,8%	2,7%
MAE	14,41	9,28	1,81
MSE	287,68	117,14	3,49
	T = 0,43		
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	19,2%	8,8%	4,5%
MAE	15,95	7,41	3,73
MSE	327,36	68,32	18,70
	T = 0,65		
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	13,9%	2,3%	8,3%
MAE	14,17	1,69	9,30
MSE	306,42	23,41	93,02
	T = 1,16		
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	1,4%	7,3%	10,2%
MAE	1,36	11,87	17,11
MSE	66,07	166,77	303,68

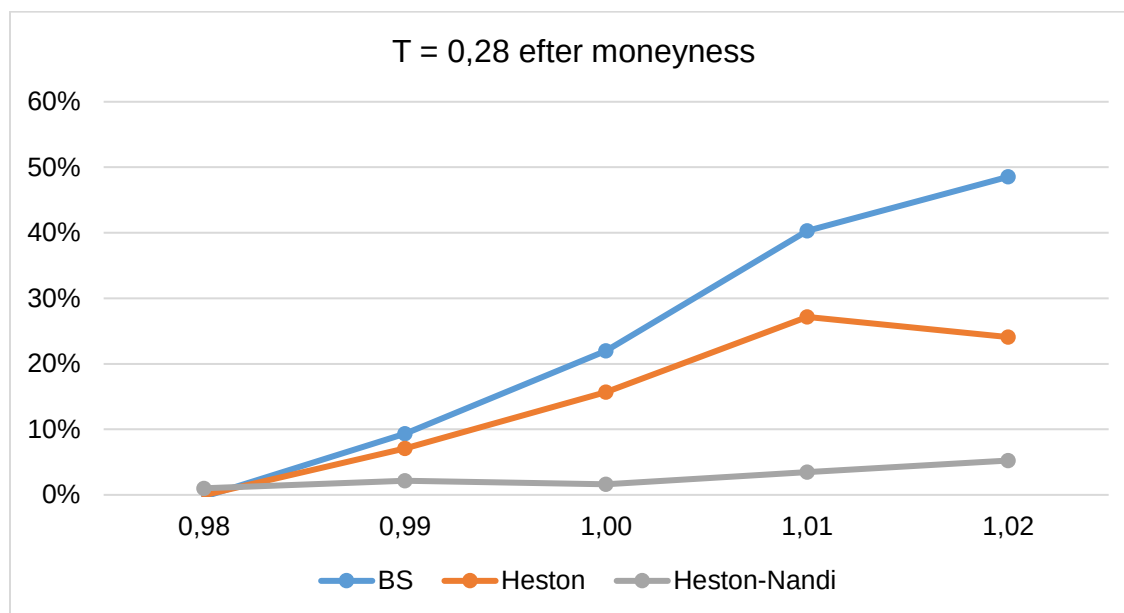
Af ovenstående fremgår det, at Heston-Nandi modellen tydeligvis performer bedst på de to korte tidsintervaller med hhv. 0,28 og 0,43 år til udløb. For at forstå resultaterne kan der med fordel refereres tilbage til analysesektionen 2.8.4 for GARCH modellen. Her blev det bevist, at GARCH modellen forecastede en anelse konservativt, når dets længde lå på omkring 100 dage ($T_{100} = \frac{100}{252} = 0,40$), hvilket også er tilfældet her. At Heston-Nandi modellen har en tendens til at overvurdere volatiliteten en anelse kommer til udtryk i dens positive statistiske nøgletal, der også er en stigende funktion af T. Denne observation stemmer igen godt overens med de producerede konfidensintervaller, som også viste øget bredde, når forecastlængden blev forøget.

En anden interessant observation er, at Black Scholes modellen udviser bedre modelleringsevne som en funktion af tiden. Dette bekræfter blot den løbetidsbias, som vi fandt i figur 1.6 hvor volatilitetssmilet var mest udtalt for korte løbetider. Ud fra en tidsbetragtning må det dog konkluderes, at Heston modellen er den model, der samlet set performer bedst.

I tabel 3.4 fremgår en opgørelse af modellernes MAPE, når der måles efter moneyness. Her foretages opdeling af optionerne i 3 grupper ud fra forholdet mellem strike og kurs. Da alle markedspriserne på optionerne fra bilag 2 har en strike omkring den nuværende kurs defineres derfor kun 3 grupper; ITM (0,98-0,99), ATM (1,00) og OTM (1,01-1,02). Desuden opdeles analysen yderligere i tre delelementer; en med kort løbetid på 0,28 år, en med mellemlang løbetid på 0,65 år, og til sidst en med lang løbetid på 1,16 år.

I figur 3.1 fremgår det at både Heston og Black Scholes modellen udviser en tendens til at fejlmodelleringen øges, når moneyness stiger, når optioner med kort løbetid betragtes. For alle 3 modeller gælder det dog, at de modellerer optionsprisen ret effektivt for optioner med strike in the money.

Figur 3.1



Foretages en direkte sammenligning af Heston og Black Scholes stemmer resultaterne overens med det forventede. Heston prisen er under BS prisen for OTM optioner med en stor andel, hvilket skyldes den stærkt negative parameterværdi ρ på -0,94. En interessant analyse hertil kunne være, at ændre ved korrelationsparameteren, og se om dette vil give en bedre modellering af OTM optioner. Det vurderes dog at en sådan undersøgelse ligger uden for formålet af dette speciale, og at undersøgelserne i 2. sektion allerede har vist effekten af en sådan manipulering af ρ .

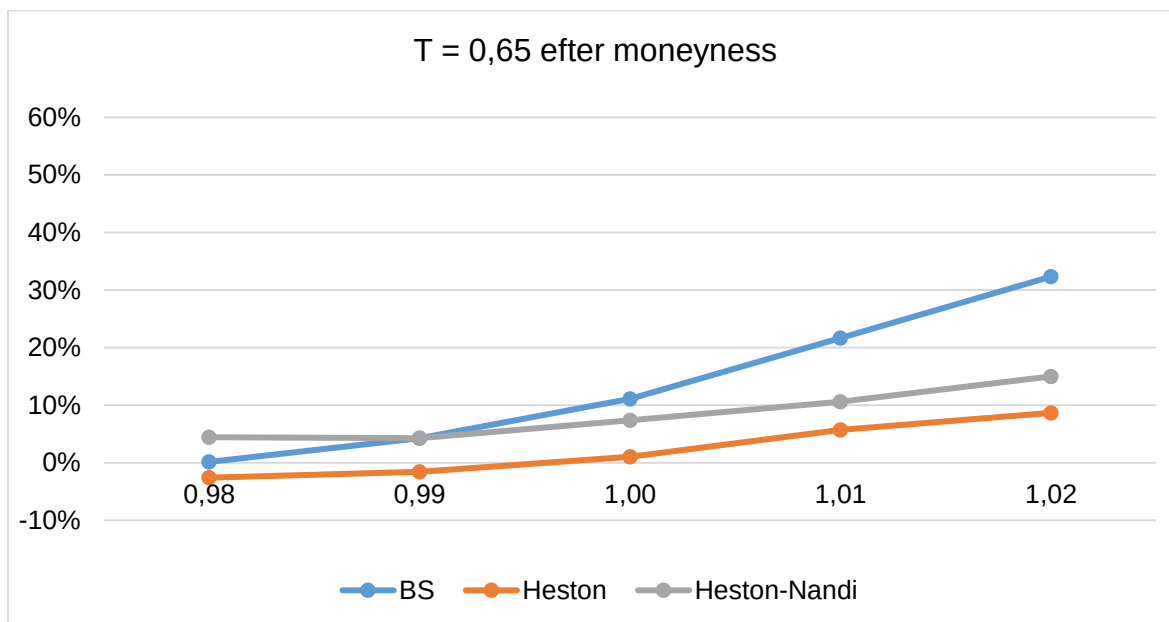
Årsagen til at der ikke observeres signifikant højere priser for Heston modellen i de lave, ITM optioner, skyldes at begge modeller er gode til at modellere prisen på dette niveau.

Selvom alle 3 modeller ser ud til at modellere prisen fornuftigt på optioner ITM, ser det ud til at både Heston og Black Scholes modellen systematisk overvurderer optionsprisen, når optionerne bevæger sig imod ATM og OTM niveauer. Til sidst må det også konkluderes, at Black Scholes modellen, med færrest parametre, ser ud til at klare sig værst af de 3 modeller.

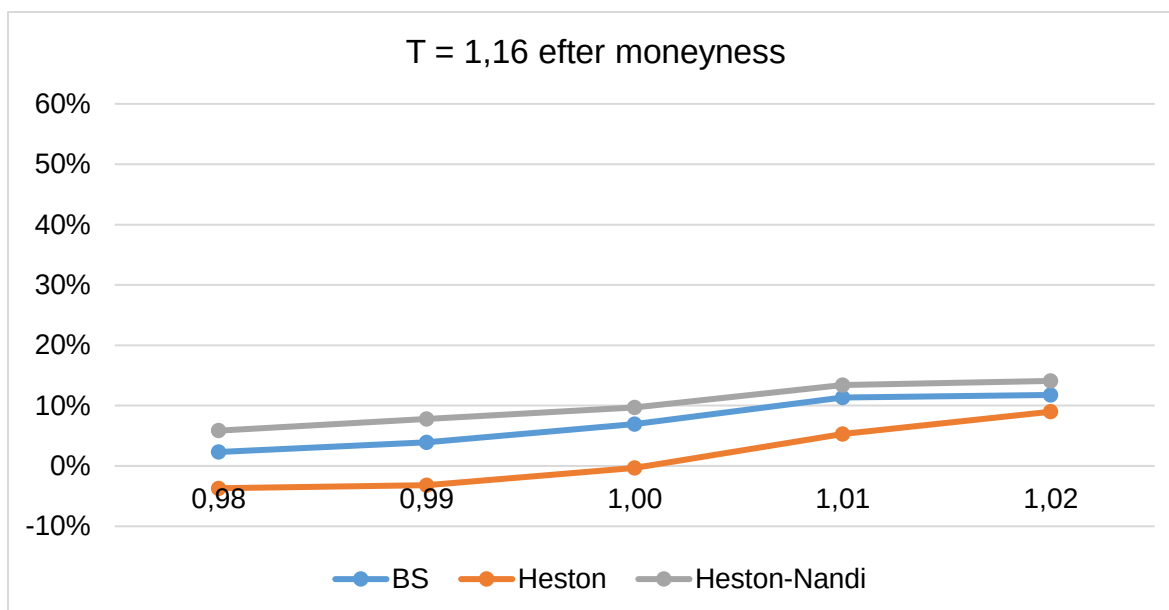
I figur 3.2 er der foretaget samme analyse, blot med en mellemlang løbetid på 0,65 år. I denne omgang ses stort set den samme effekt fra korrelationsparameteren som før. Både Heston og Heston-Nandi modellen klarer sig i denne sammenligning udmærket indtil optionerne går OTM, hvor alle 3 modeller overvurderer prisen. Heston modellen ser ud til at klare sig bedst af de 3 modeller, mens Heston-Nandi modellen ser ud til systematisk at overvurdere prisen en smule. Årsagen hertil skyldes, at GARCH (1,1) processen producerer for konservative volatilitets estimater, når tidsperioden bliver 'for lang'.

I figur 3.2 er der produceret en sidste sammenligning af optionspriser efter moneyness. I denne tredje og sidste sammenligning for optioner med lang løbetid klarer alle 3 modeller sig fortrinligt, når de sammenlignes med markedsprisen. Heston-Nandi modellen overvurderer dog volatiliteten igen, men på trods af en mindre overvurdering klarer alle 3 modeller sig godt, taget den lange tid til udløb i betragtning.

Figur 3.2



Figur 3.3



3.3.5 Delkonklusion på in-sample performance

Ud fra de empiriske resultater kan der drages et par interessante konklusioner omkring modellernes evne til at prisfastsætte optioner, relativt til markedet, men også den oprindelige BS-formel. Heston-Nandi modellen er, generelt, den model der performer bedst på kort sigt (T 0,28), mens Heston modellen performer lidt bedre på mellemlangt sigt (T 0,65 – T 1,16). Årsagen hertil er, at GARCH forecastet har en tendens til at overvurdere den sande varians, når vi bevæger os ud på mellemlangt sigt. Baggrunden for denne konklusion er afsnittet omhandlende GARCH forecasts sektion 2.4.8, der viste tegn på systematisk overvurdering af volatilitet ved længere løbetider. Uden de specifikke afsnit 2.8.1-3 vedrørende forecast med modellen ville det derfor ikke have været muligt, at drage en præcis konklusion omkring årsagen til ovenstående resultater.

En anden interessant observation er parameterværdien ρ , der spiller en væsentlig rolle for Heston modellens prisfastsætning af OTM og ITM optioner. I denne parameter estimering er der opnået en stærkt negativ værdi for $\rho = -0,94$, hvilket har ført til at Heston modellens priser for OTM optioner ligger under BS, mens det omvendte gør sig gældende for ITM optioner.

For alle modeller gælder der, at de har en tendens til at overvurdere prisen på OTM optioner, hvilket kommer til udtryk i en positiv og stigende MAPE, når strike går mod 1,02. Årsagen hertil kan skyldes likviditet, men også at der generelt er større usikkerhed forbundet med modelleringen af OTM optioner.

Resultaterne tyder på, at både Heston og Heston-Nandi modellen er bedre end den oprindelige Black Scholes model, når de benyttes i kombination på korte og mellemlange løbetider. Det er derfor nu interessant at undersøge hvordan modellerne performer på data 'out of sample'.

3.3.6 Out-of-sample model performance

I denne delanalyse benyttes data fra og med 1. januar 2017 til og med 17. oktober til at prisfastsætte optionerne handlet d. 20. oktober 2017. Der foretages derfor en out-of-sample prisfastsætning mhp. at afklare hvorvidt modellernes evner skyldes et bedre fit af data, som følge af flere parametre, eller det rent faktisk skyldes en bedre behandling af data.

I tabel 3.5 ses de nye estimerede parametre for Heston og Heston-Nandi modellen

Tabel 3.5

Studie/Heston parametre	κ	θ	σ	v_0	ρ	Datakilde	Estimationsdato
Empiriske Heston parametre	0,6113	0,0717	0,7103	0,0232	-0,9290	S&P 500	okt-17
Heston-Nandi parametre	ω	β	α	λ	γ	S&P 500	okt-17
Empiriske Heston-Nandi parametre	0,0000	0,7299	0,0000	0,0000	1392,13	S&P 500	okt-17
Black-Scholes parametre	σ						
Empiriske Black-Scholes parametre	0,1727						

Som forventet, fordi det samme underliggende indeks benyttes, er der ikke den store forskel at spore i værdierne. Supplerende oplyses det at aktiekursen d. 17. oktober 2017 lå på 2.559,36 dollar. Resultaterne som funktion af tid er opsummeret i tabel 3.6 på næste side.

Alle 3 modeller udviser, ikke overraskende, større fejlmodellering, når der beskrives data out-of-sample. Vigtigst af alt er dog, at modellerne stadig er rimelige bud på den sande pris, mens at mønsteret hvor Heston og Heston-Nandi modellerne dominerer BS modellen, også stadig er gældende. Det må dog igen understreges, at selvom Black Scholes modellen performer værst, er det ikke ensbetydende med, at det altid vil være tilfældet. I dette specifikke tilfælde ser det ud til at den empiriske volatilitet er en smule overvurderet. Havde den historiske volatilitet i stedet været lidt lavere kunne det meget vel tænkes, at mønsteret havde været et helt andet.

Fælles for alle 3 modeller er, at de overvurderer den sande volatilitet, hvilket også var tilfældet for in-sample analysen, men tendensen er blot mere udtalt, når der måles på out-of-sample data.

Tabel 3.6

T = 0,28			
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	33,4%	17,2%	9,2%
MAE	18,12	11,13	2,84
MSE	414,57	138,99	8,58
T = 0,43			
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	25,4%	12,2%	4,9%
MAE	19,82	15,69	5,71
MSE	462,69	84,59	45,12
T = 0,65			
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	19,2%	7,5%	14,9%
MAE	18,86	3,93	15,19
MSE	458,47	54,29	117,23
T = 1,16			
	BS	Heston	Heston-Nandi
MAPE	5,3%	14,1%	11,4%
MAE	7,67	19,48	26,56
MSE	122,21	204,70	465,93

3.3.7 Delkonklusion på out of sample performance

Resultaterne fra out-of-sample stikprøven minder om dem fra in-sample stikprøven. Tendensen i resultaterne peger dog imod, at modelleringsfejlen bliver en anelse forstørret, når der benyttes 'gammel' data til at forudsige prisen. Samlet set er det samme mønster i data tilstede, hvor Heston-Nandi modellen performer bedst på kort sigt, og Heston modellen performer endnu på lidt længere sigt.

3.4 Dynamisk Hedge sammenligning

I denne, indledende sektion, gennemgås teorien som benyttes til de empiriske undersøgelser af de 3 modellers evne til at hedge/afdække risikoen i optioner. Foretager man en Taylor serie approksimation over ændringen af optionsprisen, opnår man at

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} d\sigma_t + \frac{\partial f}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \quad (95)$$

Hvor de respektive led beskriver tidens, det underliggende aktivs kursudvikling, volatilitetens og den risikofri rentes indvirkning på optionsprisen, henholdsvis. Ovenstående afledte effekter kaldes også, indenfor optionsteorien, for the "greeks". Når man som investor har en større beholdning af optioner kan det være fordelagtigt, at hedge prisudviklingen på sin portefølje (af optioner) over for eksempelvis renten og kursudviklingen på det underliggende aktiv. I praksis ser man ofte, at større finansielle institutioner foretager et delta hedge, hvilket også vil være omdrejningspunktet i denne opgave.

Udledningen af delta er dog forskellig fra de 3 optionsmodeller. Under Black Scholes opsætningen er det muligt, at opnå et lukket udtryk for delta. For Heston og Heston-Nandi modellen er det samme muligt, om end det kræver en løsning af et komplekst integrale.

3.4.1 Delta i Black Scholes modellen

Hvis det antages at alle parametre, undtagen S_t , er konstante, vil det være muligt at hedge udviklingen i optionsprisen vha. et Delta hedge under Black Scholes opsætningen. Ved at tage den partielle afledte af formelen for den Europæiske call option mht. det underliggende aktiv, S_t , kan det bevises at delta for call optionen kan udtrykkes som

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \quad (96)$$

Ovenstående er således et udtryk for hvor meget optionens værdi ændrer sig, givet en ændring i prisen på det underliggende aktiv. Nu præsenteres efterfølgende delta for Heston modellen.

3.4.2. Delta i Heston og Heston-Nandi modellen

I denne sektion præsenteres delta for Heston 1993 modellen, og dens implementeringskode til VBA findes i bilagene. Fra formel 28 haves det at prisen på call optionen, under Heston modellen, er givet som

$$C(K) = S_t P_1 - K^{-rt} P_2 \quad (97)$$

Hvor $e^{-r(T-t)}$ benyttes som diskonteringsfaktor over tidsrummet $P(t, T)$. I Bakshi, Cao og Chens artikel fra 1997 vises det at delta for call optionen Heston modellen kan udledes til at være

$$\Delta_{\text{call}} = \frac{\partial \text{Call}}{\partial S(t)} = P_1 \quad (98)$$

(Bakshi, Cao og Chen, 1997).

Det er dog ikke helt ligetil at beregne P_1 , der skal løses igennem en iterationsproces. For at gøre dette er der i VBA skrevet en funktion, der skal løse dette problem. Koden ses i bilag 3.4. Værdien af P_1 begrænses til positive værdier i intervallet $[0,1]$.

Analogt til Heston modellen argumenterer Heston og Nandi i deres oprindelige publikation for, at delta for call optionen i Heston-Nandi modellen er givet ved

$$\Delta_{\text{Call}} = P_1 \quad (99)$$

For at løse P_1 for Heston-Nandi modellen kræves en ny funktionskode i VBA, der skal løse de komplekse integraler. Koden er skrevet ind i bilag 3.5, der også inkluderer koden til at beregne delta for Heston modellen.

3.4.3 Opsætning af den empiriske hedge analyse

I denne sektion beskrives baggrunden for et delta hedge, samt fremgangsmåden for hvordan man som investor gør brug af et delta hedge i praksis.

En finansiel institution eller anden større virksomhed har som regel en betydelig beholdning af optioner i deres portefølje. Formålet med optionsbeholdningen kan enten være spekulation eller at hedge sig imod en utilsigtet kursudvikling. Denne beholdning afleder en deltaeksponering, som i korte træk betyder, at beholdningens værdi er afhængig af kursudviklingen på optionsporteføljens underliggende aktiv. For at imødekomme denne eksponering kræver det, at institutionen køber/sælger tilsvarende mængder (givet ud fra optionens delta værdi) af det underliggende aktiv. I praksis er der således tale om at man risikoafdækker sin portefølje, men for at opnå resultater, der er lettere at tolke på når de 3 modeller skal sammenlignes, benyttes der i denne delanalyse enkelte optioner.

I gennem analysen foretages en delta neutral hedging strategi. Strategien går ud på, at man køber en position og går kort ("sælger") en tilsvarende mængde af optionens underliggende aktiv. Idéen er at man løbende tilpasser sin korte position i det underliggende aktiv, hvoraf termet "dynamisk" altså udspringer. Nettoafkastet på strategien er derfor den risikofri rente, og det eventuelle overskydende afkast udover det risikofrie kaldes for delta hedge indtægterne. Den eneste overskydende risiko er nu optionens volatilitet, der også er udtrykt ved dens vega. Det er praksis meget svært, at finde instrumenter, der kan gøre en optionsbeholdning vega neutral (Hull, 2005), hvorfor fokus i denne analyse vil være begrænset til at gøre positionen delta neutral.

I empiriske undersøgelser er der fundet evidens for, at denne strategi, i gennemsnit, producerer et nulafkast for modeller, der opererer med stokastisk volatilitet (Bakshi og Kapadia, 2003). Fremgangsmåden i undersøgelsen baserer sig på en kontinuert rebalancering, men da en sådan er svær at implementere i praksis, benyttes i stedet en diskret daglig rebalancering baseret på de justerede lukkekurser. Den daglige rebalancering sker derfor på hvert tidspunkt $t_0, t_1, \dots, t_T$, hvor $t_0 = 0$ og $t_T = T$. Indtægten på porteføljen kan nu defineres som

$$\pi = \max(S_T - K, 0) - C_0 - \sum_{n=1}^T \Delta_{t_{n-1}} (S_{t_n} - S_{t_{n-1}}) - \sum_{n=1}^T r_{n-1} (C_0 - \Delta_{t_{n-1}} S_{t_{n-1}}) \quad (100)$$

(Bakshi, Kapadia og Madan, 2003).

Hvor

S_T = Aktiekursen ved udløb

K = Strike satsen

C_0 = Tidspunkt 0 omkostning af call option med strike K

Δ_{t_n} = Delta af call optionen på tidspunkt t_n

S_{t_n} = Aktiekursen på tidspunkt t_n

r_n = Den risikofri rente på tidspunkt t_n

Ligningen består af fire led, adskilt af minustegnene. Første led beskriver værdien af call optionen ved udløb, tidspunkt T . Første led, C_0 , er prisen for at exercise på tidspunktet for optionens introduktion, dvs. tidspunkt 0. Andet led er prisen på et delta hedge, der også angiver mængden af penge, der tabes eller vindes igennem bevægelser for aktiekursen. Det tredje led prisen for at skabe en strategi, når det antages at kapital kan ind- og udlånes hver dag til den risikofri rente. Afslutningsvis beskriver det fjerde led prisen for at skabe en strategi, når man antager at kapital kan ind- og udlånes hver dag til den risikofri rente. Der skal nødvendigvis foretages en låntagning for at købe call optionen, hvilket sker igennem lån, der forekommer, når aktien sælges med en andel svarende til optionens delta. I Bilag 3.5 findes de nødvendige VBA funktioner for at gennemføre beregningerne.

3.4.4 P&L for de anvendte modeller

P&L måles ud fra indtægten defineret i formlen ovenfor i forrige afsnit. I det følgende afsnit vil fokus være på en undersøgelse af, hvor effektive de 3 modeller er til at replikere optioner i praksis. Opsætningen vil følge 5 call optioner med forskellige strike satser fra bilag 2 over en periode på 20, 40 og 60 dage, som herfra benævnes T1, T2 og T3, henholdsvis. De benyttede call optioner er dem med strike fra 2565 til 2585. Hver dag rebalanceres delta hedge med den delta værdi, der estimeres ud fra den analyserede model, og hvis fremgangsmåde herfor er blevet redegjort for. De benyttede parametre i de 3 modeller svarer til dem præsenteret i tabel 3.5.

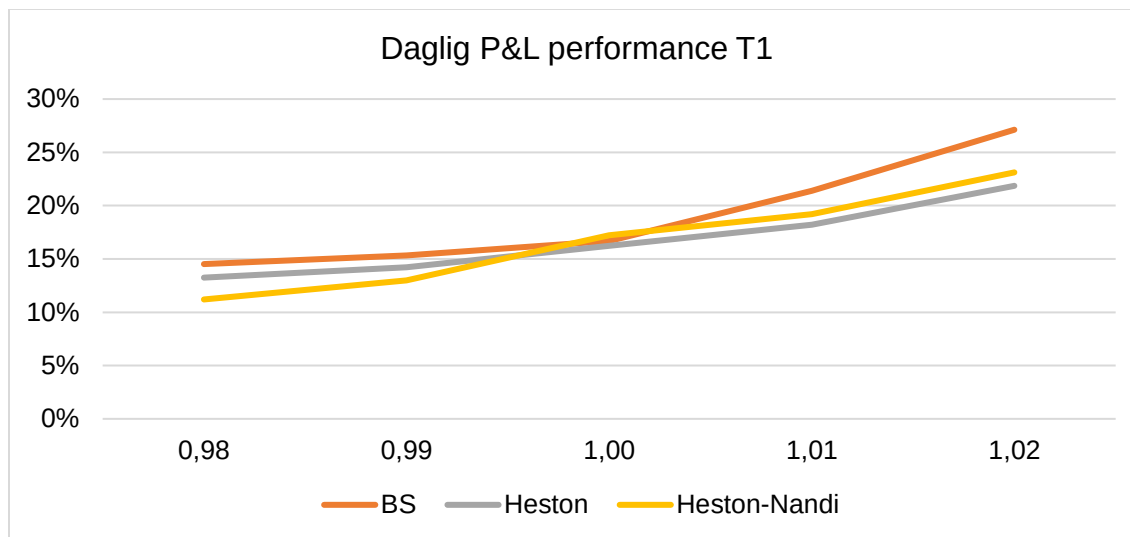
Som performanceparameter benyttes standardafvigelsen af de daglige P&L målt over de udvalgte antal af dage. Alternativt kunne man også have benyttet gennemsnittet af P&L, men da denne i praksis er meget tæt på 0 vurderes det at standardafvigelsen vil være en mere nyttig performanceparameter i denne sammenhæng.

3.4.5 P&L for delta hedge

I følgende figur 3.4 ser vi den daglige P&L performance målt over den korte tidsperiode.

Af ovenstående figur ses det, at den daglige P&L er afhængig af moneyness med klart lavere standardafvigelse for in-the-money optioner og signifikant højere standardafvigelse for out-of-the-money optioner. Det generelle mønster ser ud til at være, at Black Scholes modellen performer værst, om end den er bedre end Heston-Nandi modellen til at hedge på at-the-money optionen. Det er imidlertid tvetydigt om enten Heston eller Heston-Nandi modellen performer bedst samlet set, men de outperformer i hvert fald begge Black Scholes modellens noget simple delta hedge.

Figur 3.4

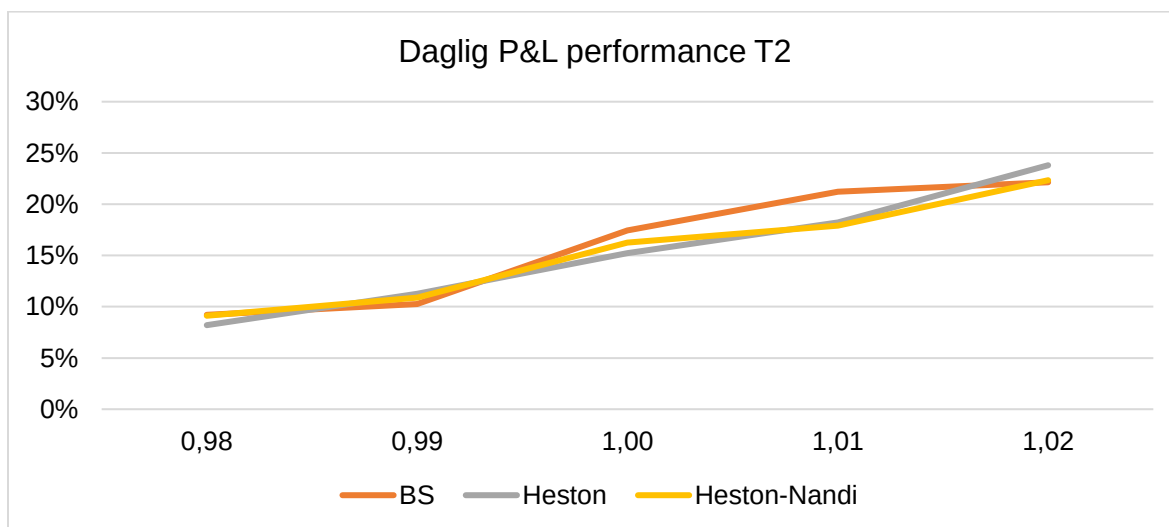


I figur 3.5 fremgår performance, når den måles over 40 dage. Overordnet set gør samme mønster sig gældende md Heston og Heston-Nandi modellen som de to bedst performende modeller.

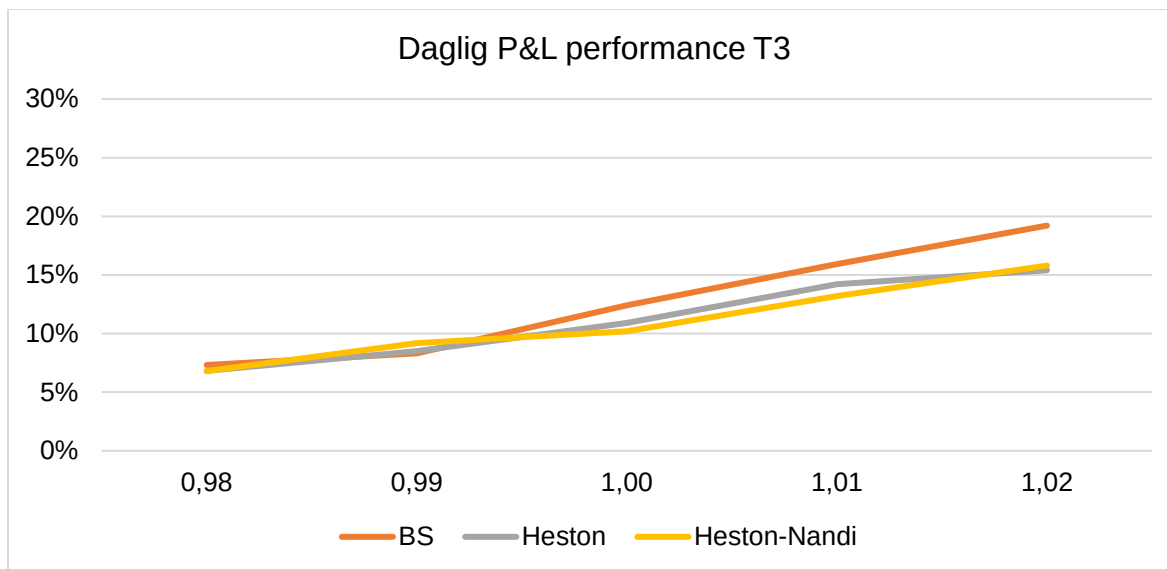
En anden interessant observation er, at standardafvigelsen har taget et nøk nedad, således at modellerne viser sig bedre til at delta hedge, når tidsperioden forlænges. Konklusionen er, at modellerne er bedre til at replikere optionerne, hvilket resulterer et bedre P&L, udtrykt som en lavere standardafvigelse i denne sammenhæng.

Afslutningsvis fremgår også i figur 3.5 den daglige P&L performance for den lange 60-dages periode. På denne tidsperiode er standardafvigelserne endnu lavere. Under denne periode performer Black Scholes og Heston modellerne omtrent in-the-money optionerne, mens Heston modellerne performer marginalt bedre for out-of-the money optionerne.

Figur 3.5



Figur 3.6



3.4.6 Delkonklusion på delta hedge performance

Heston og Heston-Nandi modellerne er generelt set de modeller, der performer bedst på den daglige delta hedge. Standardafvigelsen så ud til systematisk at blive højere desto kortere en periode man målte P&L over.

Selvom både Heston og Heston-Nandi modellerne gjorde det relativt bedre end Black Scholes modellen, er det ikke muligt kåre en egentlig vinder af de to, udover at det må konkluderes at begge modeller var bedre end den oprindelige Black Scholes model, samlet set.

Selvom resultaterne ovenfor er signifikante nok til at drage en konklusion om, at Heston modellerne klarer sig bedre end den oprindelige BS model, skal man være varsom ved at generalisere disse resultater. Analysen er kun udført på en kort serie af optioner, og i andre tilfælde kan det sagtens gælde, at resultatet vil være anderledes.

Konklusion

Igennem den indledende analyse i 1. sektion er det fundet frem til, at mange af de antagelser, som blev gjort under den oprindelige Black Scholes opsætning, har vist sig at være usande. Blandt de tre væsentligste forhold blev nævnt og behandlet S&P 500 indeksets relativt symmetriske fordeling med tilhørende fede haler og for høj topstøjhed, i forhold til den teoretiske lognormalfordeling. De teoretiske indvirkninger, navnlig en under- og overvurdering af prisen på in- og out of the money optioner, blev belyst igennem en analyse af volatiliteten som en funktion af strike. Hertil blev der også givet forskellige forklaringer på, hvorfor den implicitte volatilitet afhænger af optionens strike. Blandt mulige årsager hertil blev nævnt leverage effekten, der gav et dybere indblik i baggrunden for Black Scholes antagelsernes motivation, nemlig at virksomhedens volatilitet skulle være konstant, uanset eventuelt indtrufne tab. Når man ydermere modellerer implicit som en funktion af tid, viste der sig også at være signifikante tendenser i volatilitets niveauet. Dette var tegn på endnu en fejlagtig modellering af volatilitet.

For at imødekomme de flere særkarakteristika ved afkastseriens volatilitet og optionernes implicitte volatilitet, blev der i den følgende sektion introduceret 2 nye modeller til optionsprisfastsætning. Modellernes opsætning tager udgangspunkt i den oprindelige Black Scholes opsætning, men bygger videre på de fejl, der blev observeret i 1. sektion.

Først præsenteres Heston modellen og med den efterfølgende præsentation af Heston-Nandi modellens GARCH udvidelse, er alle problemstillingerne fra 1. sektion nu berørt. Igennem en dybdegående analyse af GARCH-komponenten fandtes det, at den er bedst til at forudsige data med en lang historik op til ca. 30 handelsdage. Udover de 30 dage var der en tydelig tendens til at variansestimaterne blev for konservative, og virkeligheden blot afspejlede den ubetingede varians.

Igennem en efterfølgende analyse af Heston parametrene fandtes det også hvordan dens parameterestimaterne styrer resultaterne for afkastfordelingen. Blandt de mest signifikante resultater, var korrelationsparameterens effekt på tæthedsfordelingen. De praktiske indvirkninger var en afvigende prisfastsætning af OTM og ITM optioner ift. den klassiske Black Scholes model.

I 3. sektion gav store dele af analyserne fra 2. sektion mulighed for at tolke på de resultater, der fremstod, når optionerne blev benyttet til at prisfastsætte. Indledningsvis blev der estimeret parametre for alle 3 modeller, som senere dannede baggrund for diskussion af deres effekt på resultaterne. Ud fra resultaterne, i dette eksempel, var det klart Heston-Nandi modellen, der klarede sig bedst på kort sigt. Årsagen hertil var, at variansens forecasts var klart mest pålideligt op til 30 dage, hvilket også svarede til den korte tidsperiode. På mellemlangt til langt sigt var det Heston modellen, der dominerede. Selvom Black Scholes modellen generelt var den værste model var den dog bedre til at prisfastsætte OTM optioner, grundet Heston modellens stærkt signifikante ρ værdi på -0,94.

I den dynamiske hedge analyse blev billedet bekræftet, hvor Heston og Heston-Nandi modellen generelt performede bedst. For in-the-money optioner bør det dog nævnes, at BS modellen klarede sig stort set ligeså godt som både Heston og Heston-Nandi modellen, når der blev analyseret på mellemlangt og langt sigt.

Samlet set har både Heston og Heston-Nandi modellen, i denne analyse, vist sig at være gode udvidelse til den oprindelige Black Scholes model. Om end de klarer sig bedre, er der også enkelte områder hvor de klarer sig

mindre godt. Disse områder er blevet nuanceret igennem dette speciale, blot eksempelvis ved Heston-Nandi modellens evne til at prisfastsætte optioner på lidt længere sigt.

Litteraturliste

Videnskabelige artikler

- Arak, Marcelle & Martin L. Ann (2006). **“Convertible Bonds: How much Equity, How Much debt?”**, Financial Analysts Journal. Tilgængelig: <http://www.cfainstitute.org/learning/products/publications/faj/Pages/faj.v61.n2.2715.aspx> (tilgået 21. november 2017)
- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. (1997). **“Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models.”** Journal of Finance, s. 2033–2049. Tilgængelig: <http://faculty.som.yale.edu/zhiwuchen/Papers/empirical.pdf> (tilgået 23. november 2017).
- Bakshi, Gurdip., & Madan, Dilip (2000). **“Spanning and derivative-security valuation”**, Journal of Financial Economics 55, s. 205-238. Tilgængelig: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.7.6735&rep=rep1&type=pdf> (tilgået 3. oktober 2017)
- Bakshi, G., N. Kapadia, and D. Madan. 2003. **“Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Differential Pricing of Individual Equity Options.”** Review of Financial Studies, Vol. 16, No. 1, s. 101–143. Tilgængelig: <https://academic.oup.com/rfs/article-abstract/16/1/101/1615098?redirectedFrom=PDF> (tilgået 30. november, 2017)
- Black, Fisher og Scholes, Myron (1973). **“The pricing of Options and Corporate Liabilities”**. The Journal of Political Economy, vol. 81, nr. 3 (maj – juni., 1973), s. 637-654. Tilgængelig: https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf (tilgået 30. oktober 2017)
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll., Stephen A. Ross (1985). **“A Theory of The Term Structure of Interest Rates”**, Econometrica, vol. 53, n0. 2, s. 385-407. Tilgængelig: <http://www.ase.ro/upcpr/professori/167/cox-ingersoll-ross.pdf> (tilgået 7. november 2017)
- Christofferson, Peter & Jacobs, Kris (2004). **“Which GARCH Model for Option Valuation?”**. Faculty of Management, s. 1204-1221. Tilgængelig: <https://pubsonline.informs.org/doi/ref/10.1287/mnsc.1040.0276>
- Gauthier, Pierre and Rivaille, Pierre-Yves Henri. **“Fitting the Smile, Smart Parameters for SABR and Heston”** Tilgængelig: https://papers.ssrn.com/sol3/Papers.cfm?abstract_id=1496982
- Heston L., Steven (1993). **“A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”**. The Review of Financial Studies, volumen 6, 2. udgave, s. 327-343. Tilgængelig: <http://faculty.baruch.cuny.edu/lwu/890/Heston93.pdf> (tilgået 31. oktober 2017)
- Heston L., Steven og Saikat, Nandi (1997). **“A Closed-Form GARCH Option Pricing Model.”** Federal Reserve Bank of Atlanta, s. 97-99. Tilgængelig: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=96651 (tilgået 31. oktober, 2017)
- Hugh, Martin (2009). **“Black-Scholes and the Volatility Surface in Financial Engineering: Continuous Time Models”** Tilgængelig: <http://www.columbia.edu/~mh2078/BlackScholesCtsTime.pdf> (tilgået 24. november 2017)
- Kim, J., & Kim, S. (2004). **“Empirical Comparison of Alternative Stochastic Volatility Models: Evidence from Korean KOSPI 200 Index Option Market”**. Pacific-Basin Finance Journal 12, s. 117-142. Tilgængelig: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927538X03000428?via%3Dihub> (tilgået 3. december 2017)

- Nelder, John A.; R. Mead (1965). “**A simplex method for function minimization**”. Computer Journal. 7: s. 308–313. Tilgængelig: <https://academic.oup.com/comjnl/article-abstract/7/4/308/354237?redirectedFrom=fulltext> (tilgået 25. december 2017)

Anvendte bøger

- Hull, C., John (2012). “**Options, Futures, and Other Derivatives, 8th edn**”. Global version, Pearson.
- Taylor J., Stephen (2005). “**Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction**”. Princeton University Press.
- Tsay S., Ruey, (2010). “**Analysis of Financial Time Series, 3rd**”. A John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- Cont, Rama & Tankov, Peter (2004). “**Financial Modelling with Jump Processes**”. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series
- Sengupta, C. (2004). “**Financial modelling using Excel and VBA**” John Wiley & Sons
- Burden, Richard og Faires, Douglas (2001). “**Numerical Analysis 7th Edition**” Brooks/Cole
- Davidson, R., and J. G. MacKinnon (1993). “**Estimation and Inference in Econometrics**”. New York: Oxford University Press
- Hull, J. C. (2006) “**Options, Futures, and Other Derivatives, 6th ed**”. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Hull, J. C. (2005) “**Options, Futures, and Other Derivatives, 5th ed**”. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Bilag 1 – R kode

Bilag 1.a

```
1 #install.packages("quantmod")
2 library(quantmod)
3
4 setwd("~/Downloads")
5 df <- read.csv("table1.csv",header=TRUE)
6 SP500 <- xts( df[,7], as.Date(df[,1]) )
7 names(SP500) <- "SP500"
8 head(SP500)
9 tail(SP500)
10
11 startDate <- as.Date("2002-01-01")
12 endDate <- as.Date("2012-02-01")
13 endPredDate <- as.Date("2016-01-01")
14
15 SP500 <- window(SP500, end=endPredDate)
16
17 SP <- window(SP500, start=startDate , end=endDate)
18 SPout <- window(SP500,start=endDate )
19
20 plot(SP)
21 barChart(SP)
22 logR <- diff( log(SP) )[-1, ]
23
24 plot(logR, main="SP 500")
25 plot( logR^2 )
26
27 colKurtosis(logR)
28 colSkewness(logR)
29
30 var(logR )
31 sd(logR)*sqrt(252) #constant annualized vol
32
33 plot(logR, main="SP 500")
34 abline(h=2*sd(logR),col="blue",lwd=2)
35 abline(h=-2*sd(logR),col="blue",lwd=2)
36
37 acf(logR, main="logR ACF plot")
38 pacf(logR) #Partial autocorrelation.
39
40 acf(logR^2, main="logR^2 ACF plot")
41
42 a <- logR-mean(logR)
43 names(a) <- "a"
44
45 nLags <- 10
46 lagged <- lag(a^2, 0:nLags)[- (1:nLags),]
47 head(lagged)
48
```


Bilag 1.b

```
49 fit <- lm(a ~ . , data=lagged ) #lineær model, a^2 mod resten (10lags)
50 summary(fit)
51
52 fit2 <- lm(a ~ 1 , data=lagged ) #lineær model, SP500^2 mod resten (10lags)
53 summary(fit2)
54
55 anova(fit,fit2) #F-test laves på de 2 modeller for at se om lags er unødvendige.
56
57 library(fGarch)
58 garch11 <- garchFit(~ garch(1,1), data = logR, trace = FALSE)
59 summary(garch11)
60 mu <-coef(garch11)[1]
61
62 sigma2 <- xts(garch11@h.t, index(logR) )
63 |
64 plot(logR, main="Conditional vs. Unconditional volatility")
65 abline(h=mu + 2*sd(logR),col="blue",lwd=2)
66 abline(h=mu -2*sd(logR),col="blue",lwd=2)
67
68 lines(mu + 2*sqrt(sigma2),col="red",lwd=2)
69 lines(mu - 2*sqrt(sigma2), col="red",lwd=2)
70
71 #n.pred <- 800
72 #datePred <- seq.Date(from=(tail(index(logR),1)+1), by=1,length.out=n.pred )
73 logRout <- diff( log(SPout) )
74 sigmaPredict <- xts( predict(garch11, n.ahead=length(logRout)), index(logRout) )
75
76 plot(window( diff( log(SP500)),start=startDate),main="GARCH(1,1) predictions",type="n")
77 lines(logR) #logReuturns
78 lines(mu + 2*sqrt(sigma2),col="red",lwd=2)
79 lines(mu -2*sqrt(sigma2), col="red",lwd=2)
80 lines(sigmaPredict[,1])
81 lines(mu + 2*sigmaPredict[,3],col=2)
82 lines(mu - 2*sigmaPredict[,3],col=2)
83 abline(h=mu+2*sd(logR),col="blue",lwd=2)
84 abline(h=mu-2*sd(logR),col="blue",lwd=2)
85
86 lambda <- 0.94 # vores lambda parameter.
87 ewma <- logR
88 ewma[1,1] <- var( logR[1:100,] ) #initialisere
89 for(i in 2:length(logR)) ewma[i] <- a[i-1]^2*(1-lambda)+lambda*ewma[i-1]
90
91 lines(2*sqrt(ewma),col=3)
92 lines(-2*sqrt(ewma),col=3)
```

Bilag 1.c

```
94 ewmaout <- logRout
95 ewmaout[1] <- tail(a,1)^2*(1-lambda)+lambda*tail(ewma,1).
96 for(i in 2:length(ewmaout)) ewmaout[i] <- var(logR)*(1-lambda)+lambda*ewmaout[i-1]
97
98 lines(mu+2*sqrt(ewmaout),col=3)
99 lines(mu-2*sqrt(ewmaout),col=3)
100
101
102 coef(garch11)[2]/(1-coef(garch11)[3]-coef(garch11)[4])
103 var(logR)
104
105 ##### GARCH VOLATILITY FORECAST MODELS #####
106
107 logRall <- window(diff(log(SP500)), start=startDate)
108
109 garchPreds <- function(x,h) {
110   M <- garchFit(~garch(1,1), data = x , trace = FALSE)
111   predict(M, n.ahead=h)[h,3]
112 }
113
114 # 1 dage forud, h=1
115 gPreds1 <- rollapply(logRall, length(logR)+2,garchPreds,h=1)
116 result1 <- ifelse(-1.96*gPreds1<logRall & logRall <gPreds1*1.96,1,0)
117 sum(result1,na.rm=TRUE)
118 sum(complete.cases(result1))
119
120 plot(logRall)
121 lines(2*gPreds1,col=2)
122
123 head(gPreds[complete.cases(gPreds1)])
124
125 # 7 dage forud, h=7
126 gPreds7 <- rollapply(logRall, length(logR)+2,garchPreds,h=7)
127 result7 <- ifelse(-1.96*gPreds7<logRall & logRall<gPreds7*1.96,1,0)
128 sum(result7,na.rm=TRUE)
129 sum(complete.cases(result7))
130
131 #30 dage forud, h=30
132 gPreds30 <- rollapply(logRall,length(logR)+2,garchPreds,h=30)
133 result30 <- ifelse(-1.96*gPreds30<logRall & logRall<gPreds30*1.96,1,0)
134 sum(result30,na.rm=TRUE)
135 sum(complete.cases(result30))
136
```

Bilag 1.d

```
137 #100 dage forud, h=100
138 gPreds100 <- rollapply(logRall(length(logR)+2,garchPreds,h=100)
139 result100 <- ifelse(-1.96*gPreds100<-logRall & logRall<gPreds100*1.96,1,0)
140 sum(result100,na.rm=TRUE)
141 sum(complete.cases(result100))
142
143
144 plot(logRall)
145 lines( 2*gPreds7,col=2)
146 lines( 2*gPreds1,col=3)
147 lines( 2*gPreds28,col=4)
148 lines( 2*gPreds100,col=5)
149 lines( -2*gPreds7,col=2)
150 lines( -2*gPreds1,col=3)
151 lines( -2*gPreds28,col=4)
152 lines( -2*gPreds100,col=5)
153
154 ##### Længere periode GARCH forecast #####
155
156 periodeLængde <- 1400
157 logRall <- window(diff(logSP500)), start=startDate,end=(tail(index(SP500),1)-100))
158
159 garchPreds <- function(x,h) {
160 M <- garchFit(~ garch(1,1), data = x , trace = FALSE)
161 predict(M, n.ahead=h)[h,3]
162 }
163
164 gPreds1 <- rollapply(logRall,bredde,garchPreds,h=1)
165 index(gPreds1) <- index(gPreds1)+1
166
167 plot(logRall)
168 lines(2*gPreds1,col=2)
169
170 head(gPreds1[complete.cases(gPreds1)])
171
172
173 gPreds7 <- rollapply(logRall,bredde,garchPreds,h=7)
174 index(gPreds7) <- index(gPreds7)+7
175 result7 <- ifelse(-1.96*gPreds7<logRall & logRall<gPreds7*1.96,1,0)
176 sum(result7,na.rm=TRUE)
177 sum(complete.cases(result7))
178
```

Bilag 1.e

```
180 gPreds30 <- rollapply(logRall,bredde,garchPreds,h=30)
181 index(gPreds28) <- index(gPreds28)+30
182 result28 <- ifelse(-1.96*gPreds28<logRall & logRall<gPreds28*1.96,1,0)
183 sum(result28,na.rm=TRUE)
184 sum(complete.cases(result30))
185
186 #100 dage forud, h=100
187 gPreds100 <- rollapply(logRall,bredde,garchPreds,h=100)
188 index(gPreds100) <- index(gPreds100)+100
189 result100 <- ifelse(-1.96*gPreds100<logRall & logRall<gPreds100*1.96,1,0)
190 sum(result100,na.rm=TRUE)
191 sum(complete.cases(result100))
192
193 plot(logRall, main="Volatility in SP500")
194 lines( 2*gPreds7,col=2)
195 lines( 2*gPreds1,col=3)
196 lines( 2*gPreds28,col=4)
197 lines( 2*gPreds100,col=5)
198 lines( -2*gPreds7,col=2)|
199 lines( -2*gPreds1,col=3)
200 lines( -2*gPreds28,col=4)
201 lines( -2*gPreds100,col=5)
202
```

Bilag 2 – Optionspriser

31. oktober 2017–

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
31-Oct-17 (9d); CSize 100; R 1.21; FF 0						
SPXW 10/31/17 C2565	2565	18,10000038	18,70000076	15,47999954	6,471854061	393
SPXW 10/31/17 C2570	2570	14,39999962	14,89999962	13	6,107322616	385
SPXW 10/31/17 C2575	2575	11	11,5	10	5,777388359	2883
SPXW 10/31/17 C2580	2580	8,199999809	8,600000381	7,150000095	5,543887482	693
SPXW 10/31/17 C2585	2585	5,900000095	6,199999809	6,099999905	5,360222357	424
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPX 11/17/17 C2565	2565	24,79999924	25,89999962	24,77000046	7,133016641	146
SPX 11/17/17 C2570	2570	21,60000038	22,39999962	20,95000076	6,924119892	5334
SPX 11/17/17 C2575	2575	18,10000038	19,10000038	18,25	6,585412969	5119
SPX 11/17/17 C2580	2580	15,19999981	16,10000038	15,55000019	6,420227842	15008
SPX 11/17/17 C2585	2585	12,5	13,39999962	12,30000019	6,180399509	945
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPXW 11/17/17 C2565	2565	25,39999962	25,89999962	24,60000038	7,210549875	94
SPXW 11/17/17 C2570	2570	21,89999962	22,39999962	21,25	6,947672342	556
SPXW 11/17/17 C2575	2575	18,79999924	19,10000038	18,75	6,724640492	145
SPXW 11/17/17 C2580	2580	15,80000019	16,10000038	14,89999962	6,498996572	3912
SPXW 11/17/17 C2585	2585	13,10000038	13,39999962	12,69999981	6,29931464	348
30-Nov-17 (39d); CSize 100; R 1.25; FF 0						
SPXW 11/30/17 C2565	2565	29,60000038	30,10000038	27,14999962	7,298862072	46
SPXW 11/30/17 C2570	2570	26,20000076	26,70000076	24,20000076	7,089637496	73
SPXW 11/30/17 C2575	2575	23	23,5	22	6,893217846	155
SPXW 11/30/17 C2580	2580	20	20,39999962	18,45999908	6,691481723	160
SPXW 11/30/17 C2585	2585	17,20000076	17,60000038	16,60000038	6,509962742	78
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.28; FF 0						
SPX 12/15/17 C2565	2565	36,09999847	37,09999847	35	7,984879866	8101
SPX 12/15/17 C2570	2570	32,79999924	33,79999924	30,5	7,817279478	25980
SPX 12/15/17 C2575	2575	29,60000038	30,60000038	30	7,643109185	5516
SPX 12/15/17 C2580	2580	26,60000038	27,5	26,29999924	7,473475882	57
SPX 12/15/17 C2585	2585	23,79999924	24,70000076	22,80999947	7,331883598	42
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.29; FF 0						
SPXW 12/15/17 C2565	2565	36,59999847	37,09999847	36	7,996058728	2
SPXW 12/15/17 C2570	2570	33,29999924	33,70000076	31,89999962	7,850420209	123
SPXW 12/15/17 C2575	2575	30,10000038	30,5	28,10000038	7,676475088	170
SPXW 12/15/17 C2580	2580	27,10000038	27,5	27,10000038	7,51972535	221
SPXW 12/15/17 C2585	2585	24,29999924	24,60000038	22,37000084	7,3662563	53

17. november 2017

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPX 11/17/17 C2565	2565	24,79999924	25,89999962	24,77000046	7,133016641	146
SPX 11/17/17 C2570	2570	21,60000038	22,39999962	20,95000076	6,924119892	5334
SPX 11/17/17 C2575	2575	18,10000038	19,10000038	18,25	6,585412969	5119
SPX 11/17/17 C2580	2580	15,19999981	16,10000038	15,55000019	6,420227842	15008
SPX 11/17/17 C2585	2585	12,5	13,39999962	12,30000019	6,180399509	945
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPXW 11/17/17 C2565	2565	25,39999962	25,89999962	24,60000038	7,210549875	94
SPXW 11/17/17 C2570	2570	21,89999962	22,39999962	21,25	6,947672342	556
SPXW 11/17/17 C2575	2575	18,79999924	19,10000038	18,75	6,724640492	145
SPXW 11/17/17 C2580	2580	15,80000019	16,10000038	14,89999962	6,498996572	3912
SPXW 11/17/17 C2585	2585	13,10000038	13,39999962	12,69999981	6,29931464	348
30-Nov-17 (39d); CSize 100; R 1.25; FF 0						
SPXW 11/30/17 C2565	2565	29,60000038	30,10000038	27,14999962	7,298862072	46
SPXW 11/30/17 C2570	2570	26,20000076	26,70000076	24,20000076	7,089637496	73
SPXW 11/30/17 C2575	2575	23	23,5	22	6,893217846	155
SPXW 11/30/17 C2580	2580	20	20,39999962	18,45999908	6,691481723	160
SPXW 11/30/17 C2585	2585	17,20000076	17,60000038	16,60000038	6,509962742	78
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.29; FF 0						
SPX 12/15/17 C2565	2565	36,09999847	37,09999847	35	7,984879866	8101
SPX 12/15/17 C2570	2570	32,79999924	33,79999924	30,5	7,817279478	25980
SPX 12/15/17 C2575	2575	29,60000038	30,60000038	30	7,643109185	5516
SPX 12/15/17 C2580	2580	26,60000038	27,5	26,29999924	7,473475882	57
SPX 12/15/17 C2585	2585	23,79999924	24,70000076	22,80999947	7,331883598	42
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.29; FF 0						
SPXW 12/15/17 C2565	2565	36,59999847	37,09999847	36	7,996058728	2
SPXW 12/15/17 C2570	2570	33,29999924	33,70000076	31,89999962	7,850420209	123
SPXW 12/15/17 C2575	2575	30,10000038	30,5	28,10000038	7,676475088	170
SPXW 12/15/17 C2580	2580	27,10000038	27,5	27,10000038	7,51972535	221
SPXW 12/15/17 C2585	2585	24,29999924	24,60000038	22,37000084	7,3662563	53
29-Dec-17 (68d); CSize 100; R 1.31; FF 0						
SPXW 12/29/17 C2565	2565	41,70000076	42,29999924	40	8,203836811	628
SPXW 12/29/17 C2570	2570	38,40000153	38,90000153	36,59999847	8,042864907	26
SPXW 12/29/17 C2575	2575	35,09999847	35,70000076	34	7,885427919	111
SPXW 12/29/17 C2580	2580	32	32,59999847	31,39999962	7,697390878	129
SPXW 12/29/17 C2585	2585	29,10000038	29,60000038	27,60000038	7,575911465	25

30. november 2017

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
30-Nov-17 (39d); CSize 100; R 1.25; FF 0						
SPXW 11/30/17 C2565	2565	29,60000038	30,10000038	27,14999962	7,298862072	46
SPXW 11/30/17 C2570	2570	26,20000076	26,70000076	24,20000076	7,089637496	73
SPXW 11/30/17 C2575	2575	23	23,5	22	6,893217846	155
SPXW 11/30/17 C2580	2580	20	20,39999962	18,45999908	6,691481723	160
SPXW 11/30/17 C2585	2585	17,20000076	17,60000038	16,60000038	6,509962742	78
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.28; FF 0						
SPX 12/15/17 C2565	2565	36,09999847	37,09999847	35	7,984879866	8101
SPX 12/15/17 C2570	2570	32,79999924	33,79999924	30,5	7,817279478	25980
SPX 12/15/17 C2575	2575	29,60000038	30,60000038	30	7,643109185	5516
SPX 12/15/17 C2580	2580	26,60000038	27,5	26,29999924	7,473475882	57
SPX 12/15/17 C2585	2585	23,79999924	24,70000076	22,80999947	7,331883598	42
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.28; FF 0						
SPXW 12/15/17 C2565	2565	36,59999847	37,09999847	36	7,996058728	2
SPXW 12/15/17 C2570	2570	33,29999924	33,70000076	31,89999962	7,850420209	123
SPXW 12/15/17 C2575	2575	30,10000038	30,5	28,10000038	7,676475088	170
SPXW 12/15/17 C2580	2580	27,10000038	27,5	27,10000038	7,51972535	221
SPXW 12/15/17 C2585	2585	24,29999924	24,60000038	22,37000084	7,3662563	53
29-Dec-17 (68d); CSize 100; R 1.31; FF 0						
SPXW 12/29/17 C2565	2565	41,70000076	42,29999924	40	8,203836811	628
SPXW 12/29/17 C2570	2570	38,40000153	38,90000153	36,59999847	8,042864907	26
SPXW 12/29/17 C2575	2575	35,09999847	35,70000076	34	7,885427919	111
SPXW 12/29/17 C2580	2580	32	32,59999847	31,39999962	7,697390878	129
SPXW 12/29/17 C2585	2585	29,10000038	29,60000038	27,60000038	7,575911465	25
19-Jan-18 (89d); CSize 100; R 1.36; FF 0						
SPX 1/19/18 C2560	2560	53,40000153	54,59999847	53,90000153	8,930992392	16
SPX 1/19/18 C2570	2570	46,59999847	47,79999924	45,5	8,628608702	355
SPX 1/19/18 C2575	2575	43,29999924	44,5	41,54999924	8,476084498	2849
SPX 1/19/18 C2580	2580	40,20000076	40,70000076	38,54999924	8,275410096	114
SPX 1/19/18 C2590	2590	34,20000076	35,29999924	32,70000076	8,094635302	70
19-Jan-18 (89d); CSize 100; R 1.36; FF 0						
SPXW 1/19/18 C2560	2560	54	54,5	50,45000076	8,967627881	6
SPXW 1/19/18 C2570	2570	47,20000076	47,70000076	43,63999939	8,655468072	34
SPXW 1/19/18 C2575	2575	43,90000153	44,40000153	40,5	8,512954599	1
SPXW 1/19/18 C2580	2580	40,70000076	41,20000076	39,09999847	8,337235657	34
SPXW 1/19/18 C2590	2590	34,79999924	35,20000076	33,20000076	8,087959759	1
31-Jan-18 (101d); CSize 100; R 1.39; FF 0						
SPXW 1/31/18 C2525	2525	85,40000153	86,09999847	84,19999695	10,40210216	73
SPXW 1/31/18 C2550	2550	66,5	67,19999695	63,70000076	9,647683431	445
SPXW 1/31/18 C2575	2575	49,29999924	49,90000153	47,5	8,912216863	794
SPXW 1/31/18 C2600	2600	34,40000153	34,90000153	33,90000153	8,257369112	49
SPXW 1/31/18 C2625	2625	22,29999924	22,79999924	21,54999924	7,678126227	118

15. december 2017

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.28; FF 0						
SPX 12/15/17 C2565	2565	36,09999847	37,09999847	35	7,984879866	8101
SPX 12/15/17 C2570	2570	32,79999924	33,79999924	30,5	7,817279478	25980
SPX 12/15/17 C2575	2575	29,60000038	30,60000038	30	7,643109185	5516
SPX 12/15/17 C2580	2580	26,60000038	27,5	26,29999924	7,473475882	57
SPX 12/15/17 C2585	2585	23,79999924	24,70000076	22,80999947	7,331883598	42
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.29; FF 0						
SPXW 12/15/17 C2565	2565	36,59999847	37,09999847	36	7,996058728	2
SPXW 12/15/17 C2570	2570	33,29999924	33,70000076	31,89999962	7,850420209	123
SPXW 12/15/17 C2575	2575	30,10000038	30,5	28,10000038	7,676475088	170
SPXW 12/15/17 C2580	2580	27,10000038	27,5	27,10000038	7,51972535	221
SPXW 12/15/17 C2585	2585	24,29999924	24,60000038	22,37000084	7,3662563	53
29-Dec-17 (68d); CSize 100; R 1.31; FF 0						
SPXW 12/29/17 C2565	2565	41,70000076	42,29999924	40	8,203836811	628
SPXW 12/29/17 C2570	2570	38,40000153	38,90000153	36,59999847	8,042864907	26
SPXW 12/29/17 C2575	2575	35,09999847	35,70000076	34	7,885427919	111
SPXW 12/29/17 C2580	2580	32	32,59999847	31,39999962	7,697390878	129
SPXW 12/29/17 C2585	2585	29,10000038	29,60000038	27,60000038	7,575911465	25
19-Jan-18 (89d); CSize 100; R 1.36; FF 0						
SPX 1/19/18 C2560	2560	53,40000153	54,59999847	53,90000153	8,930992392	16
SPX 1/19/18 C2570	2570	46,59999847	47,79999924	45,5	8,628608702	355
SPX 1/19/18 C2575	2575	43,29999924	44,5	41,54999924	8,476084498	2849
SPX 1/19/18 C2580	2580	40,20000076	40,70000076	38,54999924	8,275410096	114
SPX 1/19/18 C2590	2590	34,20000076	35,29999924	32,70000076	8,094635302	70
19-Jan-18 (89d); CSize 100; R 1.36; FF 0						
SPXW 1/19/18 C2560	2560	54	54,5	50,45000076	8,967627881	6
SPXW 1/19/18 C2570	2570	47,20000076	47,70000076	43,63999939	8,655468072	34
SPXW 1/19/18 C2575	2575	43,90000153	44,40000153	40,5	8,512954599	1
SPXW 1/19/18 C2580	2580	40,70000076	41,20000076	39,09999847	8,337235657	34
SPXW 1/19/18 C2590	2590	34,79999924	35,20000076	33,20000076	8,087959759	1
31-Jan-18 (101d); CSize 100; R 1.39; FF 0						
SPXW 1/31/18 C2525	2525	85,40000153	86,09999847	84,19999695	10,40210216	73
SPXW 1/31/18 C2550	2550	66,5	67,19999695	63,70000076	9,647683431	445
SPXW 1/31/18 C2575	2575	49,29999924	49,90000153	47,5	8,912216863	794
SPXW 1/31/18 C2600	2600	34,40000153	34,90000153	33,90000153	8,257369112	49
SPXW 1/31/18 C2625	2625	22,29999924	22,79999924	21,54999924	7,678126227	118

16. marts 2018

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
16-Mar-18 (145d); CSize 100; R 1.48; FF 0						
SPX 3/16/18 C2525	2525	98	101,0999985	99	11,30429203	1
SPX 3/16/18 C2550	2550	80,90000153	82,40000153	78	10,69988449	1403
SPX 3/16/18 C2575	2575	64,40000153	65,80000305	63,5	10,09563263	1505
SPX 3/16/18 C2600	2600	49,59999847	50,90000153	48,54999924	9,571957521	1151
SPX 3/16/18 C2610	2610	44,09999847	45,40000153	43,29999924	9,342073514	5
29-Mar-18 (158d); CSize 100; R 1.50; FF 0						
SPXW 3/29/18 C2525	2525	104,6999969	105,3000031	95,40000153	11,56165704	0
SPXW 3/29/18 C2550	2550	86,90000153	87,5	85,5	11,0044599	1
SPXW 3/29/18 C2575	2575	70,40000153	70,90000153	67,55000305	10,44518832	1
SPXW 3/29/18 C2600	2600	55,40000153	55,79999924	54,58000183	9,898143534	78
SPXW 3/29/18 C2625	2625	42,09999847	42,40000153	41,41999817	9,382749698	40
15-Jun-18 (236d); CSize 100; R 1.63; FF 0						
SPX 6/15/18 C2525	2525	127,9000015	129,6999969	125,6100006	12,62407392	1
SPX 6/15/18 C2550	2550	110,6999969	112,5	110	12,12824521	3
SPX 6/15/18 C2575	2575	94,59999847	96,30000305	91,69999695	11,66115591	6
SPX 6/15/18 C2600	2600	79,5	81,19999695	72	11,19819202	0
SPX 6/15/18 C2625	2625	65,5	67,09999847	58,5	10,75477753	0
15-Jun-18 (236d); CSize 100; R 1.63; FF 0						
SPXW 6/15/18 C2525	2525	128,6999969	129,3999939	119,4000015	12,6405513	0
SPXW 6/15/18 C2550	2550	111,5999985	112,3000031	103,0999985	12,16496365	0
SPXW 6/15/18 C2575	2575	95,40000153	96,09999847	87,30000305	11,69537578	0
SPXW 6/15/18 C2600	2600	80,30000305	80,90000153	69,69999695	11,24052258	0
SPXW 6/15/18 C2625	2625	66,30000305	66,90000153	60,90000153	10,78618154	0
29-Jun-18 (250d); CSize 100; R 1.65; FF 0						
SPXW 6/29/18 C2525	2525	133,6999969	134,3999939	123,5	12,82676056	0
SPXW 6/29/18 C2550	2550	116,6999969	117,4000015	107,3000031	12,36862722	0
SPXW 6/29/18 C2575	2575	100,5999985	101,1999969	91,68000031	11,91875328	0
SPXW 6/29/18 C2600	2600	85,5	86	78,80000305	11,46181309	0
SPXW 6/29/18 C2625	2625	71,40000153	71,90000153	65,69999695	11,03760653	0
21-Sep-18 (334d); CSize 100; R 1.78; FF 0						
SPX 9/21/18 C2525	2525	154	158,5	154,3699951	13,53094573	150
SPX 9/21/18 C2550	2550	137,6000061	141,8999939	137,7899933	13,15645696	321
SPX 9/21/18 C2575	2575	121,8000031	126	122,0999985	12,75876314	634
SPX 9/21/18 C2600	2600	106,8000031	110,9000015	107	12,37297905	176
SPX 9/21/18 C2625	2625	92,69999695	96,59999847	92,75	11,99897501	1
21-Sep-18 (334d); CSize 100; R 1.78; FF 0						
SPXW 9/21/18 C2525	2525	155,8000031	156,8999939	142,5200043	13,54172119	0
SPXW 9/21/18 C2550	2550	139,3000031	140,3000031	135,5500031	13,15273063	9
SPXW 9/21/18 C2575	2575	123,5	124,4000015	120,3499985	12,75916628	9
SPXW 9/21/18 C2600	2600	108,5	109,3000031	99,62999725	12,3778338	0
SPXW 9/21/18 C2625	2625	94,30000305	95	86,23999786	11,99447431	0

29 juni 2018

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
29-Jun-18 (250d); CSize 100; R 1.65; FF 0						
SPXW 6/29/18 C2525	2525	133,6999969	134,3999939	123,5	12,82676056	0
SPXW 6/29/18 C2550	2550	116,6999969	117,4000015	107,3000031	12,36862722	0
SPXW 6/29/18 C2575	2575	100,5999985	101,1999969	91,68000031	11,91875328	0
SPXW 6/29/18 C2600	2600	85,5	86	78,80000305	11,46181309	0
SPXW 6/29/18 C2625	2625	71,40000153	71,90000153	65,69999695	11,03760653	0
21-Sep-18 (334d); CSize 100; R 1.78; FF 0						
SPX 9/21/18 C2525	2525	154	158,5	154,3699951	13,53094573	150
SPX 9/21/18 C2550	2550	137,6000061	141,8999939	137,7899933	13,15645696	321
SPX 9/21/18 C2575	2575	121,8000031	126	122,0999985	12,75876314	634
SPX 9/21/18 C2600	2600	106,8000031	110,9000015	107	12,37297905	176
SPX 9/21/18 C2625	2625	92,69999695	96,59999847	92,75	11,99897501	1
21-Sep-18 (334d); CSize 100; R 1.78; FF 0						
SPXW 9/21/18 C2525	2525	155,8000031	156,8999939	142,5200043	13,54172119	0
SPXW 9/21/18 C2550	2550	139,3000031	140,3000031	135,5500031	13,15273063	9
SPXW 9/21/18 C2575	2575	123,5	124,4000015	120,3499985	12,75916628	9
SPXW 9/21/18 C2600	2600	108,5	109,3000031	99,62999725	12,3778338	0
SPXW 9/21/18 C2625	2625	94,30000305	95	86,23999786	11,99447431	0
28-Sep-18 (341d); CSize 100; R 1.79; FF 0						
SPXW 9/28/18 C2525	2525	157,6999969	158,6999969	141,8999939	13,57229793	0
SPXW 9/28/18 C2550	2550	141,1999969	142,1999969	130,5500031	13,18204958	0
SPXW 9/28/18 C2575	2575	125,5	126,4000015	112,0500031	12,8159828	0
SPXW 9/28/18 C2600	2600	110,4000015	111,3000031	106,1999969	12,43360257	100
SPXW 9/28/18 C2625	2625	96,19999695	97	88,23000336	12,05631581	0
21-Dec-18 (425d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPX 12/21/18 C2525	2525	175,5	181,1000061	167,8999939	14,11346856	0
SPX 12/21/18 C2550	2550	159,6000061	165,1000061	159,8000031	13,79372123	150
SPX 12/21/18 C2575	2575	144,1999969	149,6000061	144,3999939	13,46417184	150
SPX 12/21/18 C2600	2600	129,5	134,8000031	123,3000031	13,13033222	0
SPX 12/21/18 C2625	2625	115,4000015	120,5999985	111	12,80392475	0
21-Dec-18 (425d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPXW 12/21/18 C2525	2525	177,8999939	178,8999939	164,5	14,10533192	0
SPXW 12/21/18 C2550	2550	161,8999939	162,8999939	158,1300049	13,78165345	65
SPXW 12/21/18 C2575	2575	146,5	147,5	145	13,45746335	70
SPXW 12/21/18 C2600	2600	131,8000031	132,6999969	119,5999985	13,131078	0
SPXW 12/21/18 C2625	2625	117,5999985	118,5	104,5999985	12,80474372	0
18-Jan-19 (453d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPX 1/18/19 C2525	2525	180	188,6000061	172,5299988	14,16596235	0
SPX 1/18/19 C2550	2550	164,1000061	172,8000031	154,8800049	13,88565195	0
SPX 1/18/19 C2575	2575	148,8999939	157,6999969	134	13,55731861	0
SPX 1/18/19 C2600	2600	134,1999969	143,3000031	115,4700012	13,26043051	0
SPX 1/18/19 C2625	2625	120,0999985	129,1999969	0	12,96003424	0

28. september 2018

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
28-Sep-18 (341d); CSize 100; R 1.79; FF 0						
SPXW 9/28/18 C2525	2525	157,6999969	158,6999969	141,8999939	13,57229793	0
SPXW 9/28/18 C2550	2550	141,1999969	142,1999969	130,5500031	13,18204958	0
SPXW 9/28/18 C2575	2575	125,5	126,4000015	112,0500031	12,8159828	0
SPXW 9/28/18 C2600	2600	110,4000015	111,3000031	106,1999969	12,43360257	100
SPXW 9/28/18 C2625	2625	96,19999695	97	88,23000336	12,05631581	0
21-Dec-18 (425d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPX 12/21/18 C2525	2525	175,5	181,1000061	167,8999939	14,11346856	0
SPX 12/21/18 C2550	2550	159,6000061	165,1000061	159,8000031	13,79372123	150
SPX 12/21/18 C2575	2575	144,1999969	149,6000061	144,3999939	13,46417184	150
SPX 12/21/18 C2600	2600	129,5	134,8000031	123,3000031	13,13033222	0
SPX 12/21/18 C2625	2625	115,4000015	120,5999985	111	12,80392475	0
21-Dec-18 (425d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPXW 12/21/18 C2525	2525	177,8999939	178,8999939	164,5	14,10533192	0
SPXW 12/21/18 C2550	2550	161,8999939	162,8999939	158,1300049	13,78165345	65
SPXW 12/21/18 C2575	2575	146,5	147,5	145	13,45746335	70
SPXW 12/21/18 C2600	2600	131,8000031	132,6999969	119,5999985	13,131078	0
SPXW 12/21/18 C2625	2625	117,5999985	118,5	104,5999985	12,80474372	0
18-Jan-19 (453d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPX 1/18/19 C2525	2525	180	188,6000061	172,5299988	14,16596235	0
SPX 1/18/19 C2550	2550	164,1000061	172,8000031	154,8800049	13,88565195	0
SPX 1/18/19 C2575	2575	148,8999939	157,6999969	134	13,55731861	0
SPX 1/18/19 C2600	2600	134,1999969	143,3000031	115,4700012	13,26043051	0
SPX 1/18/19 C2625	2625	120,0999985	129,1999969	0	12,96003424	0
21-Jun-19 (607d); CSize 100; R 1.81; FF 0						
SPX 6/21/19 C2525	2525	214,6000061	225	206,5500031	15,10636503	0
SPX 6/21/19 C2550	2550	199,3000031	208	192,5	14,76604565	0
SPX 6/21/19 C2575	2575	184,5	193,3999939	0	14,53306139	0
SPX 6/21/19 C2600	2600	170,1000061	179,6999969	165,5	14,30893724	0
SPX 6/21/19 C2625	2625	156,3000031	166,1000061	144,1900024	14,04779438	0
20-Dec-19 (789d); CSize 100; R 1.83; FF 0						
SPX 12/20/19 C2525	2525	248,3999939	262,2000122	252,3699951	15,72413221	5
SPX 12/20/19 C2550	2550	233,6999969	246,5	237,4600067	15,48641953	505
SPX 12/20/19 C2575	2575	219,3999939	232,6000061	225,6999969	15,29448542	1
SPX 12/20/19 C2600	2600	205,5	216,8999939	199,5	15,01433331	0
SPX 12/20/19 C2625	2625	192	203,6999969	187,3999939	14,82750376	0
31-Oct-17 (9d); CSize 100; R 1.21; FF 0						
SPXW 10/31/17 C2565	2565	18,10000038	18,70000076	15,47999954	6,471854061	393
SPXW 10/31/17 C2570	2570	14,39999962	14,89999962	13	6,107322616	385
SPXW 10/31/17 C2575	2575	11	11,5	10	5,777388359	2883
SPXW 10/31/17 C2580	2580	8,199999809	8,600000381	7,150000095	5,543887482	693
SPXW 10/31/17 C2585	2585	5,900000095	6,199999809	6,099999905	5,360222357	424

18. januar 2019

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
18-Jan-19 (453d); CSize 100; R 1.82; FF 0						
SPX 1/18/1	2525	180	188,6000061	172,5299988	14,16596235	0
SPX 1/18/1	2550	164,1000061	172,8000031	154,8800049	13,88565195	0
SPX 1/18/1	2575	148,8999939	157,6999969	134	13,55731861	0
SPX 1/18/1	2600	134,1999969	143,3000031	115,4700012	13,26043051	0
SPX 1/18/1	2625	120,0999985	129,1999969	0	12,96003424	0
21-Jun-19 (607d); CSize 100; R 1.81; FF 0						
SPX 6/21/1	2525	214,6000061	225	206,5500031	15,10636503	0
SPX 6/21/1	2550	199,3000031	208	192,5	14,76604565	0
SPX 6/21/1	2575	184,5	193,3999939	0	14,53306139	0
SPX 6/21/1	2600	170,1000061	179,6999969	165,5	14,30893724	0
SPX 6/21/1	2625	156,3000031	166,1000061	144,1900024	14,04779438	0
20-Dec-19 (789d); CSize 100; R 1.83; FF 0						
SPX 12/20/	2525	248,3999939	262,2000122	252,3699951	15,72413221	5
SPX 12/20/	2550	233,6999969	246,5	237,4600067	15,48641953	505
SPX 12/20/	2575	219,3999939	232,6000061	225,6999969	15,29448542	1
SPX 12/20/	2600	205,5	216,8999939	199,5	15,01433331	0
SPX 12/20/	2625	192	203,6999969	187,3999939	14,82750376	0
31-Oct-17 (9d); CSize 100; R 1.21; FF 0						
SPXW 10/3	2565	18,10000038	18,70000076	15,47999954	6,471854061	393
SPXW 10/3	2570	14,39999962	14,89999962	13	6,107322616	385
SPXW 10/3	2575	11	11,5	10	5,777388359	2883
SPXW 10/3	2580	8,199999809	8,600000381	7,150000095	5,543887482	693
SPXW 10/3	2585	5,900000095	6,199999809	6,099999905	5,360222357	424
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPX 11/17/	2565	24,79999924	25,89999962	24,77000046	7,133016641	146
SPX 11/17/	2570	21,60000038	22,39999962	20,95000076	6,924119892	5334
SPX 11/17/	2575	18,10000038	19,10000038	18,25	6,585412969	5119
SPX 11/17/	2580	15,19999981	16,10000038	15,55000019	6,420227842	15008
SPX 11/17/	2585	12,5	13,39999962	12,30000019	6,180399509	945
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPXW 11/1	2565	25,39999962	25,89999962	24,60000038	7,210549875	94
SPXW 11/1	2570	21,89999962	22,39999962	21,25	6,947672342	556
SPXW 11/1	2575	18,79999924	19,10000038	18,75	6,724640492	145
SPXW 11/1	2580	15,80000019	16,10000038	14,89999962	6,498996572	3912
SPXW 11/1	2585	13,10000038	13,39999962	12,69999981	6,29931464	348
30-Nov-17 (39d); CSize 100; R 1.25; FF 0						
SPXW 11/3	2565	29,60000038	30,10000038	27,14999962	7,298862072	46
SPXW 11/3	2570	26,20000076	26,70000076	24,20000076	7,089637496	73
SPXW 11/3	2575	23	23,5	22	6,893217846	155
SPXW 11/3	2580	20	20,39999962	18,45999908	6,691481723	160
SPXW 11/3	2585	17,20000076	17,60000038	16,60000038	6,509962742	78

21. juni 2019

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
21-Jun-19 (607d); CSize 100; R 1.81; FF 0						
SPX 6/21/1	2525	214,6000061	225	206,5500031	15,10636503	0
SPX 6/21/1	2550	199,3000031	208	192,5	14,76604565	0
SPX 6/21/1	2575	184,5	193,3999939	0	14,53306139	0
SPX 6/21/1	2600	170,1000061	179,6999969	165,5	14,30893724	0
SPX 6/21/1	2625	156,3000031	166,1000061	144,1900024	14,04779438	0
20-Dec-19 (789d); CSize 100; R 1.83; FF 0						
SPX 12/20/	2525	248,3999939	262,2000122	252,3699951	15,72413221	5
SPX 12/20/	2550	233,6999969	246,5	237,4600067	15,48641953	505
SPX 12/20/	2575	219,3999939	232,6000061	225,6999969	15,29448542	1
SPX 12/20/	2600	205,5	216,8999939	199,5	15,01433331	0
SPX 12/20/	2625	192	203,6999969	187,3999939	14,82750376	0
31-Oct-17 (9d); CSize 100; R 1.21; FF 0						
SPXW 10/3	2565	18,10000038	18,70000076	15,47999954	6,471854061	393
SPXW 10/3	2570	14,39999962	14,89999962	13	6,107322616	385
SPXW 10/3	2575	11	11,5	10	5,777388359	2883
SPXW 10/3	2580	8,199999809	8,600000381	7,150000095	5,543887482	693
SPXW 10/3	2585	5,900000095	6,199999809	6,099999905	5,360222357	424
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPX 11/17/	2565	24,79999924	25,89999962	24,77000046	7,133016641	146
SPX 11/17/	2570	21,60000038	22,39999962	20,95000076	6,924119892	5334
SPX 11/17/	2575	18,10000038	19,10000038	18,25	6,585412969	5119
SPX 11/17/	2580	15,19999981	16,10000038	15,55000019	6,420227842	15008
SPX 11/17/	2585	12,5	13,39999962	12,30000019	6,180399509	945
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPXW 11/1	2565	25,39999962	25,89999962	24,60000038	7,210549875	94
SPXW 11/1	2570	21,89999962	22,39999962	21,25	6,947672342	556
SPXW 11/1	2575	18,79999924	19,10000038	18,75	6,724640492	145
SPXW 11/1	2580	15,80000019	16,10000038	14,89999962	6,498996572	3912
SPXW 11/1	2585	13,10000038	13,39999962	12,69999981	6,29931464	348
30-Nov-17 (39d); CSize 100; R 1.25; FF 0						
SPXW 11/3	2565	29,60000038	30,10000038	27,14999962	7,298862072	46
SPXW 11/3	2570	26,20000076	26,70000076	24,20000076	7,089637496	73
SPXW 11/3	2575	23	23,5	22	6,893217846	155
SPXW 11/3	2580	20	20,39999962	18,45999908	6,691481723	160
SPXW 11/3	2585	17,20000076	17,60000038	16,60000038	6,509962742	78
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.28; FF 0						
SPX 12/15/	2565	36,09999847	37,09999847	35	7,984879866	8101
SPX 12/15/	2570	32,79999924	33,79999924	30,5	7,817279478	25980
SPX 12/15/	2575	29,60000038	30,60000038	30	7,643109185	5516
SPX 12/15/	2580	26,60000038	27,5	26,29999924	7,473475882	57
SPX 12/15/	2585	23,79999924	24,70000076	22,80999947	7,331883598	42

20. december 2019

Calls						
Ticker	Strike	Bid	Ask	Last	IVM	Volm
20-Dec-19 (789d); CSize 100; R 1.83; FF 0						
SPX 12/20/19 C2525	2525	248,3999939	262,2000122	252,3699951	15,72413221	5
SPX 12/20/19 C2550	2550	233,6999969	246,5	237,4600067	15,48641953	505
SPX 12/20/19 C2575	2575	219,3999939	232,6000061	225,6999969	15,29448542	1
SPX 12/20/19 C2600	2600	205,5	216,8999939	199,5	15,01433331	0
SPX 12/20/19 C2625	2625	192	203,6999969	187,3999939	14,82750376	0
31-Oct-17 (9d); CSize 100; R 1.21; FF 0						
SPXW 10/31/17 C2565	2565	18,10000038	18,70000076	15,47999954	6,471854061	393
SPXW 10/31/17 C2570	2570	14,39999962	14,89999962	13	6,107322616	385
SPXW 10/31/17 C2575	2575	11	11,5	10	5,777388359	2883
SPXW 10/31/17 C2580	2580	8,199999809	8,600000381	7,150000095	5,543887482	693
SPXW 10/31/17 C2585	2585	5,900000095	6,199999809	6,099999905	5,360222357	424
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPX 11/17/17 C2565	2565	24,79999924	25,89999962	24,77000046	7,133016641	146
SPX 11/17/17 C2570	2570	21,60000038	22,39999962	20,95000076	6,924119892	5334
SPX 11/17/17 C2575	2575	18,10000038	19,10000038	18,25	6,585412969	5119
SPX 11/17/17 C2580	2580	15,19999981	16,10000038	15,55000019	6,420227842	15008
SPX 11/17/17 C2585	2585	12,5	13,39999962	12,30000019	6,180399509	945
17-Nov-17 (26d); CSize 100; R 1.23; FF 0						
SPXW 11/17/17 C2565	2565	25,39999962	25,89999962	24,60000038	7,210549875	94
SPXW 11/17/17 C2570	2570	21,89999962	22,39999962	21,25	6,947672342	556
SPXW 11/17/17 C2575	2575	18,79999924	19,10000038	18,75	6,724640492	145
SPXW 11/17/17 C2580	2580	15,80000019	16,10000038	14,89999962	6,498996572	3912
SPXW 11/17/17 C2585	2585	13,10000038	13,39999962	12,69999981	6,29931464	348
30-Nov-17 (39d); CSize 100; R 1.25; FF 0						
SPXW 11/30/17 C2565	2565	29,60000038	30,10000038	27,14999962	7,298862072	46
SPXW 11/30/17 C2570	2570	26,20000076	26,70000076	24,20000076	7,089637496	73
SPXW 11/30/17 C2575	2575	23	23,5	22	6,893217846	155
SPXW 11/30/17 C2580	2580	20	20,39999962	18,45999908	6,691481723	160
SPXW 11/30/17 C2585	2585	17,20000076	17,60000038	16,60000038	6,509962742	78
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.28; FF 0						
SPX 12/15/17 C2565	2565	36,09999847	37,09999847	35	7,984879866	8101
SPX 12/15/17 C2570	2570	32,79999924	33,79999924	30,5	7,817279478	25980
SPX 12/15/17 C2575	2575	29,60000038	30,60000038	30	7,643109185	5516
SPX 12/15/17 C2580	2580	26,60000038	27,5	26,29999924	7,473475882	57
SPX 12/15/17 C2585	2585	23,79999924	24,70000076	22,80999947	7,331883598	42
15-Dec-17 (54d); CSize 100; R 1.29; FF 0						
SPXW 12/15/17 C2565	2565	36,59999847	37,09999847	36	7,996058728	2
SPXW 12/15/17 C2570	2570	33,29999924	33,70000076	31,89999962	7,850420209	123
SPXW 12/15/17 C2575	2575	30,10000038	30,5	28,10000038	7,676475088	170
SPXW 12/15/17 C2580	2580	27,10000038	27,5	27,10000038	7,51972535	221
SPXW 12/15/17 C2585	2585	24,29999924	24,60000038	22,37000084	7,3662563	53

Bilag 3 – Excels funktionskoder dannet i VBA

Bilag 3.1 – NewtRaphson funktion for den implicitte volatilitet

```
Function NewtRaph(S, K, r, q, T, x_gæt, Callpris)
    Dim MaxForsoeg As Integer
    Dim EPS As Double
    delta_x = 0.000000001
    MaxForsoeg = 5000
    EPS = 0.00001
    cur_x = x_gæt
    For i = 1 To MaxForsoeg
        fx = Run("ImplicitVolatilitet", S, K, r, q, T, cur_x, Callpris)
        cur_x_delta = cur_x - delta_x
        fx_delta = Run("ImplicitVolatilitet", S, K, r, q, T, cur_x_delta, Callpris)
        dx = ((fx - fx_delta) / delta_x)
        If (Abs(dx) < EPS) Then
            Exit For
        End If
        cur_x = cur_x - (fx / dx)
    Next i
    NewtRaph = cur_x
End Function
```

```
' Nu skabes en funktion for den kumulative standardnormalfordeling

Function Gauss(X As Double) As Double
    Gauss = Application.NormSDist(X)
End Function
```

```
' Her skabes funktionen for den implicitte volatilitet, som den ses benyttet i NewtRaph
'funktionen

Function ImplicitVolatilitet(S, K, r, q, T, V, Callpris)
    ImplicitVolatilitet = (Callpris - BS_call(S, K, r, q, T, V)) ^ 2
End Function
```

```
' Her genereres funktionen for BS call prisen
Function BS_call(S, K, r, q, T, V)
    Dim d As Double
    d = (Log(S / K) + T * (r - q + 0.5 * V ^ 2)) / (V * Sqr(T))
    BS_call = S * Exp(-q * T) * Gauss(d) - Exp(-r * T) * K * Gauss(d - V * Sqr(T))
End Function
```

Bilag 3.2 – GARCH MLE funktionen

```
' GARCH Likelihood funktionen skrives ind med simpel logik

Function GARCHMLE(rets, startParams)
Dim VART() As Double
n = Application.Count(rets)
ReDim VART(n) As Double
omega = startParams(1)
alpha = startParams(2)
beta = startParams(3)

'Fejlcheck
If ((omega < 0) Or (alpha < 0) Or (beta < 0)) Then
    GARCHMLE = -9999
Else

VART(n) = Application.Var(rets)
GARCHMLE = -Log(VART(n)) - (rets(n) ^ 2 / VART(n))
For cnt = n - 1 To 1 Step -1
    VART(cnt) = omega + alpha * rets(cnt + 1) ^ 2 + beta * VART(cnt + 1)
    GARCHMLE = GARCHMLE - Log(VART(cnt)) - (rets(cnt) ^ 2 / VART(cnt))
Next cnt
End If
    GARCHMLE = -GARCHMLE
End Function

' Finder GARCH MLE parameterestimerne
|
Function GARCHparams(rets, startParams)
    GARCHparams = NelderMead("GARCHMLE", rets, startParams)
End Function
```


Bilag 3.3 – NelderMead algoritmen

```
Function NelderMead(fname As String, startParams)
    Dim resMatrix() As Double
    Dim x1() As Double, xn() As Double, xw() As Double, xbar() As Double, xr() As Double, xe() As Double,
    xc() As Double, xcc() As Double
    Dim funRes() As Double, passParams() As Double
    MAXFUN = 1000
    TOL = 0.00000000001
    rho = 1
    Xi = 2
    gam = 0.5
    sigma = 0.5

    paramnum = Application.Count(startParams)
    ReDim resmat(paramnum + 1, paramnum + 1) As Double
    ReDim x1(paramnum) As Double, xn(paramnum) As Double, xw(paramnum) As Double, xbar(paramnum) As Double,
    xr(paramnum) As Double, xe(paramnum) As Double, xc(paramnum) As Double, xcc(paramnum) As Double
    ReDim funRes(paramnum + 1) As Double, passParams(paramnum)
    For i = 1 To paramnum
        resmat(1, i + 1) = startParams(i)
    Next i
    resmat(1, 1) = Run(fname, startParams)

    For j = 1 To paramnum
        For i = 1 To paramnum
            If (i = j) Then
                If (startParams(i) = 0) Then
                    resmat(j + 1, i + 1) = 0.05
                Else
                    resmat(j + 1, i + 1) = startParams(i) * 1.05
                End If
            Else
                resmat(j + 1, i + 1) = startParams(i)
            End If
            passParams(i) = resmat(j + 1, i + 1)
        Next i
        resmat(j + 1, 1) = Run(fname, passParams)
    Next j

    For lnum = 1 To MAXFUN
        resmat = BubSortRows(resmat)
        If (Abs(resmat(1, 1) - resmat(paramnum + 1, 1)) < TOL) Then
            Exit For
        End If

        f1 = resmat(1, 1)

        For i = 1 To paramnum
            x1(i) = resmat(1, i + 1)
        Next i
        fn = resmat(paramnum, 1)

        For i = 1 To paramnum
            xn(i) = resmat(paramnum, i + 1)
        Next i
        fw = resmat(paramnum + 1, 1)
        For i = 1 To paramnum
            xw(i) = resmat(paramnum + 1, i + 1)
        Next i
```

```
For i = 1 To paramnum
    xbar(i) = 0
    For j = 1 To paramnum
        xbar(i) = xbar(i) + resmat(j, i + 1)
    Next j
    xbar(i) = xbar(i) / paramnum
Next i

For i = 1 To paramnum
    xr(i) = xbar(i) + rho * (xbar(i) - xw(i))
Next i

fr = Run(fname, xr)

shrink = 0
If ((fr >= fl) And (fr < fn)) Then
    newpoint = xr
    newf = fr
ElseIf (fr < fl) Then
    'beregner ekspansionspunktet
    For i = 1 To paramnum
        xe(i) = xbar(i) + Xi * (xr(i) - xbar(i))
    Next i
    fe = Run(fname, xe)
    If (fe < fr) Then
        newpoint = xe
        newf = fe
    Else
        newpoint = xr
        newf = fr
    End If
ElseIf (fr >= fn) Then
    If ((fr >= fn) And (fr < fw)) Then
        For i = 1 To paramnum
            xc(i) = xbar(i) + gam * (xr(i) - xbar(i))
        Next i
        fc = Run(fname, xc)
        If (fc <= fr) Then
            newpoint = xc
            newf = fc
        Else
            shrink = 1
        End If
    Else
        For i = 1 To paramnum
            xcc(i) = xbar(i) - gam * (xbar(i) - xw(i))
        Next i
        fcc = Run(fname, xcc)
        If (fcc < fw) Then
            newpoint = xcc
            newf = fcc
        Else
            shrink = 1
        End If
    End If
End If
```

```

End If
If (shrink = 1) Then
    For scnt = 2 To paramnum + 1
        For i = 1 To paramnum
            resmat(scnt, i + 1) = x1(i) + sigma * (resmat(scnt, i + 1) - x1(1))
            passParams(i) = resmat(scnt, i + 1)
        Next i
        resmat(scnt, 1) = Run(fname, passParams)
    Next scnt
Else
    For i = 1 To paramnum
        resmat(paramnum + 1, i + 1) = newpoint(i)
    Next i
    resmat(paramnum + 1, 1) = newf
End If

Next lnum
If (lnum = MAXFUN + 1) Then
    MsgBox "Maximum Iteration (" & MAXFUN & ") exceeded"
End If
resmat = BubSortRows(resmat)
For i = 1 To paramnum + 1
    funRes(i) = resmat(1, i)
Next i
funRes(1) = funRes(1)
NelderMead = Application.Transpose(funRes)

End Function

```

Bilag 3.4 – P1 parameteren i Heston modellen

```

Function HestonP1(phi, kappa, theta, lambda, rho, sigma, tau, K, S, r, v)
Dim tmp_f1 As cNum, f1 As cNum, d1 As cNum, g1 As cNum, DD1 As cNum, CC1 As cNum, b1 As cNum
Dim DD1_1 As cNum, DD1_2 As cNum, DD1_3 As cNum, CC1_1 As cNum, CC1_2 As cNum, CC1_3 As cNum, CC1_4 As cNum

Dim gtest As cNum, t1 As cNum, t2 As cNum, t3 As cNum
Dim ttl As Variant, mul As Double

mul = 0.5
b1 = set_cNum(kappa + lambda - rho * sigma, 0)
d1 = cNumSqrt(cNumSub(cNumSq(cNumSub(set_cNum(0, rho * sigma * phi), b1)), cNumSub(set_cNum(0, sigma ^ 2 * 2 * mul * phi), set_cNum(sigma ^ 2 * phi ^ 2, 0))))
g1 = cNumDiv(cNumAdd(cNumSub(b1, set_cNum(0, rho * sigma * phi)), d1), cNumSub(cNumSub(b1, set_cNum(0, rho * sigma * phi)), d1))
DD1_1 = cNumDiv(cNumAdd(cNumSub(b1, set_cNum(0, rho * sigma * phi)), d1), set_cNum(sigma ^ 2, 0))
DD1_2 = cNumSub(set_cNum(1, 0), cNumExp(cNumProd(d1, set_cNum(tau, 0))))
DD1_3 = cNumSub(set_cNum(1, 0), cNumProd(g1, cNumExp(cNumProd(d1, set_cNum(tau, 0)))))
DD1 = cNumProd(DD1_1, cNumDiv(DD1_2, DD1_3))
CC1_1 = set_cNum(0, r * phi * tau)
CC1_2 = set_cNum((kappa * theta) / (sigma ^ 2), 0)
CC1_3 = cNumProd(cNumAdd(cNumSub(b1, set_cNum(0, rho * sigma * phi)), d1), set_cNum(tau, 0))
CC1_4 = cNumProd(set_cNum(2, 0), cNumLn(cNumDiv(cNumSub(set_cNum(1, 0), cNumProd(g1, cNumExp(cNumProd(d1, set_cNum(tau, 0)))))), cNumSub(set_cNum(1, 0), g1)))
CC1 = cNumAdd(CC1_1, cNumProd(CC1_2, cNumSub(CC1_3, CC1_4)))
f1 = cNumExp(cNumAdd(cNumAdd(CC1, cNumProd(DD1, set_cNum(v, 0))), set_cNum(0, phi * Application.Ln(S))))

HestonP1 = cNumReal(cNumDiv(cNumProd(cNumExp(set_cNum(0, -phi * Application.Ln(K))), f1), set_cNum(0, phi)))

End Function

```

Bilag 3.5 – Delta for Heston modellen

' Heston Delta

```
Function HDelta(PutCall As String, kappa, theta, lambda, rho, sigma, tau, K, S, r, v)
Dim P1_int(1001) As Double, P2_int(1001) As Double, phi_int(1001) As Double
Dim p1 As Double, p2 As Double, phi As Double, xg(16) As Double, wg(16) As Double
Dim cnt As Integer, HestonC As Double
cnt = 1
```

```
For phi = 0.0001 To 100.0001 Step 0.1
    phi_int(cnt) = phi
    P1_int(cnt) = HestonP1(phi, kappa, theta, lambda, rho, sigma, tau, K, S, r, v)
    cnt = cnt + 1
Next phi
```

```
p1 = 0.5 + (1 / thePI) * TRAPnumint(phi_int, P1_int)
```

```
If p1 < 0 Then p1 = 0
If p1 > 1 Then p1 = 1
```

```
If PutCall = "Call" Then
    HDelta = p1
ElseIf PutCall = "Put" Then
    HDelta = p1 - 1
End If
End Function
```

' Delta for Heston-Nandi modellen

```
Function HNDelta(alpha, beta, gamma, omega, lambda, S, K, r, v, dtm, PutCall As String)
Dim phi As cNum
Dim int_x(401) As Double, int_y1(401) As Double, int_y2(401) As Double
Dim int1 As Double, int2 As Double
cnt = 0
For phicnt = 0.000001 To 100.000001 Step 0.25
    cnt = cnt + 1
    phi = set_cNum(1, phicnt)
    int_x(cnt) = phicnt
    int_y1(cnt) = (1 / S) * Exp(-r * dtm) * HNC_f(phi, alpha, beta, gamma, omega, lambda, S, K, r, v, dtm)
Next phicnt

int1 = TRAPnumint(int_x, int_y1)

P1 = 0.5 + (1 / thePI) * int1

If P1 < 0 Then P1 = 0
If P1 > 1 Then P1 = 1

Select Case PutCall
    Case "Call": HNDelta = P1
    Case "Put": HNDelta = P1 - 1
End Select

End Function
```

Bilag 4 – Empiriske modelpriser og statistik

Side 1: Heston og Black Scholes priser og statistik

S&P500 Heston Call Priser					Black Scholes priser				
Løbetid					Løbetid				
Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600	Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600
2525	121,9913	139,0836	156,6416	211,6166	2525	121,6952	140,7531	161,0488	199,1905
2550	106,2570	123,0348	140,3999	201,2826	2550	108,5096	128,0257	148,7320	187,5427
2575	91,3457	107,7136	124,6926	189,2377	2575	96,3209	116,1154	137,0970	176,4067
2600	77,1440	93,0602	109,5951	175,3463	2600	85,1167	105,0108	126,1335	165,7745
2625	54,3949	79,0226	95,1127	159,6112	2625	65,1230	94,6956	115,8284	155,6367
MAPE					MAPE				
Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600	Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600
2525	0,0%	2,5%	-2,6%	2,3%	2525	-0,3%	3,7%	0,2%	-3,7%
2550	7,1%	2,7%	-1,6%	3,9%	2550	9,4%	6,9%	4,3%	-3,2%
2575	15,7%	7,9%	1,1%	6,9%	2575	22,0%	16,3%	11,1%	-0,3%
2600	27,2%	12,1%	5,7%	11,4%	2600	40,3%	26,5%	21,7%	5,3%
2625	24,1%	18,8%	8,7%	11,8%	2625	48,5%	42,3%	32,3%	9,0%
Total MAPE	8,3%				Total MAPE	14,6%			
MAE					MAE				
Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600	Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600
2525	-0,05	3,37	-4,16	4,78	2525	-0,35	5,04	0,25	-7,64
2550	7,03	3,23	-2,25	7,59	2550	9,28	8,22	6,09	-6,15
2575	12,39	7,89	1,31	12,29	2575	17,36	16,29	13,72	-0,54
2600	16,48	10,07	5,95	17,89	2600	24,45	22,02	22,49	8,32
2625	10,55	12,50	7,59	16,80	2625	21,28	28,17	28,31	12,83
Total MAE	7,56				Total MAE	11,47			
MSE					MSE				
Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600	Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600
2525	0,00	11,34	17,32	22,89	2525	0,12	25,37	0,06	58,39
2550	49,45	10,45	5,05	57,55	2550	86,20	67,62	37,03	37,87
2575	153,41	62,27	1,73	151,00	2575	301,40	265,46	188,19	0,29
2600	271,46	101,38	35,37	320,02	2600	597,74	484,85	505,60	69,18
2625	111,39	156,16	57,61	282,39	2625	452,93	793,51	801,22	164,61
Total MSE	93,91				Total MSE	246,88			

Side 2: Heston-Nandi priser og statistik

Heston-Nandi priser				
Løbetid				
Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600
2525	123,2749	137,4980	167,9265	218,9413
2550	101,3550	121,7848	148,7498	208,8202
2575	80,2311	103,6936	132,5072	194,0734
2600	62,7911	86,2012	114,6673	178,5484
2625	46,1388	74,3436	100,6516	162,9297
MAPE				
Strike	0,2800	0,4300	0,6500	1,1600
2525	1,0%	1,3%	4,4%	5,9%
2550	2,1%	1,7%	4,3%	7,8%
2575	1,6%	3,9%	7,4%	9,7%
2600	3,5%	3,9%	10,6%	13,4%
2625	5,2%	11,8%	15,0%	14,1%
Total MAPE	6,4%			
MAE				
Strike	0,28	0,43	0,65	1,16
2525	1,23	1,78	7,12	12,11
2550	2,13	1,98	6,10	15,12
2575	1,27	3,87	9,13	17,12
2600	2,12	3,21	11,02	21,09
2625	2,30	7,82	13,13	20,12
Total MAE	7,99			