



**Copenhagen
Business School**
HANDELSHØJSKOLEN

Cand. Merc. FIR
Kandidatafhandling

Pensionsprognose modellering – et studie af risiko, følsomhed og krav
til opsparing

Jon Fogelstrøm Reitz

Vejledere: Henrik Ramlau-Hansen & Bjarne Astrup Jensen

Sider: 80

Antal anslag: 148.661

Dato: 15/1-2018

Abstract

This paper examines the increasing significance of risk assessment for individuals saving for retirement. The need for such assessment has shown persistent growth in recent years as the amount deposited to market-rate pension products has risen from 10% of total deposits in 2003 to over 60% in 2015. This change in the environment has shifted the investment risk from the pension provider to the individual and thus has brought increased responsibilities to both parties to track and be informed of the risks involved.

This thesis provides an alternative to the deterministic frame used in pension advice today with an introduction of a stochastic model for asset prices.

The short rate is modelled with the 1-factor Vasicek Model. The stock fund and bond fund is modelled as Geometric Brownian Motions with constant parameters for volatility and risk premiums over the short rate. The stochastic model is combined with numerous parameters and a limited number of personal preferences.

The model output provides an overview of the needed savings as a percent of the income and the risks associated with different weight-paths for the short rate, stock fund and bond fund respectively. Furthermore, the model functions as a tool to easily solve the maximum risk and minimum savings rate before fulfilling a pre-specified minimum income from pensions measured as a 10% Value-at-Risk and the desired income when retired.

The modelling shows that the pension varies substantially with the individual's attitude towards risk and that the savings rate needed to reach the desired pension differs substantially with the percentage of pension constituted by the stable amount of income from the Danish public pension. The model and the sensitivity analysis stresses this point as wealthy individuals are especially exposed to changes in the investment environment.

I finally conclude that the payout phase must be included for the pension advice to be reliable and reflect the risk in the pension payments. A focus on wealth lacks inclusion of the exposure towards longevity, the short rate and the importance of the proportion of the pension constituted by the public pension.

Indholdsfortegnelse

1. Introduktion	4
1.1 Indledning	4
1.2 Motivation	4
1.3 Problemfelt	5
1.3.1 Problemformulering	6
1.4.1 Valg af software og modelleringsværktøj	6
1.4.2 Dataindsamling og datakilder	6
1.5 Afgrænsning	7
2. Det danske pensionssystem	9
2.1 Det danske pensionssystems udvikling	9
2.1.1 Udvikling i regulatoriske forhold og fradragsmuligheder	12
2.2 Pensionssystemets 3 elementer	12
2.2.1 Offentlige ydelser og ATP	13
2.2.2 Arbejdsmarkedspensionsordninger	16
2.2.3 Privattegnede pensionsordninger	16
2.3 Pensionstyper	17
2.3.1 Aldersopsparing og kapitalpension	17
2.3.2 Ratepension	18
2.3.3 Livsvarig livrente	18
2.4 Pensionsprodukter	20
2.4.1 Gennemsnitsrenteprodukter	20
2.4.2 Markedsrente produkter	21
2.5 Opsummering	23
3. Pensionsmodellen	23
3.1 Modellens ramme	23
3.2 Parametre	23
3.2.1 Investeringsrammen	24
3.2.2 Inflation	28
3.2.3 Lønudvikling	28
3.2.4 Andre parametre	29
3.3 Opstilling af model	31
3.4 Fastsættelse af værdier for parametrene	34
4. Modellering og simulering	35
4.1 Simulering af aktivpriser	36
4.2 Opsparing og pensionsydelse	38
4.3 Simulering af dækningsgrader	42
5. Resultater	46
5.1 Høj grad af sikkerhed, $MG^* = 65\%$	48
5.2 Nogen usikkerhed, $MG^* = 60\%$	52
5.3 Risikovillig, $MG^* = 50\%$	53
5.5 Faste procentvise indbetalingssatser	55
5.6 Yderligere alder- og formueforhold	58

5.7 Opsummering af resultater	61
6. Sensitivitetsanalyse	64
6.1 Øget volatilitet	65
6.2 Ændring i langsigtet middelværdi for rente og risikopræmier	67
6.3 Stigende levealder	69
6.4 Ændring i lønudviklingen	71
6.5 Reduktion i væksten i de offentlige ydelser	72
7. Diskussion af model og resultater	73
7.1 Diskussion af modellen	73
7.2 Diskussion af resultater	76
7.3 Implikationer i praksis	78
8. Konklusion	79
Referencer	81
Appendix	85
Appendix A – Inflation	85
Appendix B – Realvækst i BNP (%)	86
Appendix C – Observeret dødelighed og levetidsforbedringer	87
Appendix D – R kode	88
Appendix E – Risikoprofiler og vægte	95
Appendix F – W_{27} for forskellige risikoforløb, $N=100.000$	96
Appendix I – I.2 _{65%} "100% obligationer"	98
Appendix J – I.2 "100% kontant"	98
Appendix K – Output for ligevægtede porteføljer I.2	99
Appendix L – I.1 _{60%} "Højeste Risiko" og I.1 _{50%} "100% aktier"	99
Appendix M – I.2 _{50%}	100
Appendix N – I.1 fast indbetalingssats	100
Appendix O – I.2 fast indbetalingssats	100
Appendix P – Individ 3 "Middel Risiko"	100
Appendix Q – Simulationsresultater for I.3 og I.1 _{60%}	101
Appendix R – Fraktiler og R-output for I.4	101
Appendix S – Individ 4 "Laveste Risiko"	102
Appendix T – Følsomhed i DG ved en højere rente vol.	103
Appendix U – Højere aktie volatilitet	103
Appendix V – Højere rente og aktie volatilitet	104
Appendix X – Følsomhedsanalyse, b ned	104
Appendix Y – Højere risikopræmier	105
Appendix Z – Relation mellem risikopræmier og F&P	105
Appendix W – Lavere risikopræmier	105
Appendix AA – Justerede levetidsforbedringer	106
Appendix AB – Følsomhedsanalyse $R_M(X)$	107
Appendix AC – Ændring i lønstigningstaksten	108
Appendix AD – Ændring i væksten i de offentlige ydelser	110
Appendix AE – Udvikling i løn og inflation siden 2006	111

1. Introduktion

1.1 Indledning

Det danske pensionssystem er unikt og blev i 2017 for 6. år i træk kåret som verdens bedste (Mercer, 2017). Vores prisbelønnede pensionssystem er et produkt af mange års arbejde fra politisk hold og markedets aktører. Danskerne bliver i dag ældre end nogensinde før, får færre børn og i en historisk sen alder. Denne demografiske tidsbombe har i mange år gjort pensionsalderen og de offentlige pensionsydelser til et varmt emne i dansk politik. Der har desuden i de seneste to årtier været et særligt stort politisk fokus på den finansielle stabilitet med implementeringen af øgede kapitalkrav, trafiklysordning og senest implementeringen af solvens II (Finanstilsynet, 2017). De nødvendige reformer har sikret et robust pensionssystem og pensionsmarkedets tredeling i offentlige ydelser, arbejdsmarkedspensionsordninger og anden opsparing har sikret, at et meget lille antal danskere lever under lavindkomstgrænsen efter pensionsalderen (Pensionskommissionen, 2015). Majoriteten ønsker imidlertid ikke kun at være sikret basalt, men også ikke at opleve et for stort økonomisk skel mellem arbejdsliv og pension. Over en fjerdedel af danskerne bliver dog stadig negativt overrasket over forskellen i indkomst mellem arbejdsliv og pension (Pensionskommissionen, 2015), og kun omkring en fjerdedel er trygge ved, at de sparer nok op til pension (Danske Bank, 2017). Dette speciale forsøger ved modellering af et pensionsprognoseværktøj at belyse usikkerheden i pensionsydelserne, hvor stor en dækning i procent af slutlønnen et givent individ kan forvente ved forskellige risikoprofiler, samt hvad det kræver af opsparings størrelse for, at den ønskede dækningsgrad i den tredje alder kan realiseres.

1.2 Motivation

Udviklingen i regulatoriske forhold, samt rentemiljø og levealder har medført et skift i det foretrukne valg af pensionsprodukt fra garantirenter til markedsrenteprodukter. Et skift som for mange pensionsopsparere har betydet højere forventede afkast, men også en større grad af investeringsrisiko og usikkerhed omkring ydelsens størrelse på pensioneringstidspunktet, hvilket har medført et større krav til individet med hensyn til at tage stilling til og følge op på udviklingen af dennes pensionsopsparing. Det er netop denne problematik, som dette speciale forsøger at belyse. Motivationen for specialet er således at udvikle et forbrugeroplysende værktøj, der kan hjælpe med at afdække, hvor stor

usikkerhed i dækningsgraden ift. slutlønnen et individ kan forvente, hvad det kræver af præmiernes størrelse for at være garanteret den ønskede dækningsgrad, samt hvilken risikoprofil der bedst matcher opsparerens præferencer.

1.3 Problemfelt

De forbrugeroplysende værktøjer der er tilgængelige hos pensionsselskaberne, bygger i høj grad på deterministiske forudsætninger (Forsikring & Pension, 2018, Finanstilsynet, 2005), hvor opsparingen fremskrives med indbetalinger og et årligt forventet afkast for de respektive aktivklasser indtil pensioneringstidspunktet. Disse rigide forudsætninger bygger på optimistiske forventninger til fremtiden (Rangvid, 2016). Med en stadig større andel af markedsrenteprodukter opstår der en væsentlig grad af usikkerhed omkring opsparingen og dermed ydelsens størrelse til pensioneringstidspunktet. På baggrund af ovenstående ønskes i specialet belyst, om en pensionsprognosemodel (herefter model) baseret på realistiske forudsætninger og begrænset subjektiv stillingtagen kan være vejledende for, hvordan forskellige individer skal forholde sig til deres pensionsopsparing, samt for hvor følsom størrelsen på ydelsen er over for ændringer i investeringsmiljøet og andre forudsætninger.

Specialets fokus er todelt. Først og fremmest er fokus at opstille en numerisk model, der kan udlede den nødvendige indbetaling til pension som pct. af lønnen for vidt forskellige individer, samt belyse følsomheden af dækningsgraden ved forskellige risikoprofiler. Dernæst vil jeg uddybende undersøge, hvor følsom pensionsopsparingen er over for ændringer i de modellerede og antagne forudsætninger.

Pensionsmodellen forsøges løst numerisk for et givent individ med ønsket dækningsgrad (DG^*) og Minimum ønsket dækningsgrad (MG^*)¹. Under restriktionerne for den ønskede dækningsgrad og Value-at-Risk søges indbetalingerne i pct. af lønnen minimeret. Simuleringerne tager udgangspunkt i forskellige risikoforløb. Specialet har således til formål at finde valide resultater for forskellige individers pensionssammensætning, der opfylder den enkeltes pensionsmål i den tredje alder.

¹ Målt som 10% fraktilen $DG_{VaR10\%}$

1.3.1 Problemformulering

Problemfeltet giver anledning til følgende problemformulering:

- Hvad betyder en pensionsmodel med stokastisk afkast og individuelle præferencer for kravene til indbetalingernes størrelse og valg af risikoprofil?

Underspørgsmål

1. Hvor stor usikkerhed kan en pensionist forvente, der vil være i pensionsudbetalingerne i den tredje alder?
2. Hvordan påvirker valget af risikoprofil dækningsgraden, hvis indbetalingerne er faste og dikteret af arbejdsmarkedsparterne?
3. Hvor følsom er dækningsgraden over for ændringer i de valgte forudsætninger/parametre?

1.4 Metode

For at holde specialet virkelighedsnært har fokus været på at anvende realistiske parametre og data i modelleringen og ligeledes at vise følsomheden i resultaterne ift. de anvendte parametre, da parameterværdierne i praksis er fremtidige ukendte størrelser. Specialets resultater er baseret på numeriske løsninger fundet via store simulationsforløb over lange tidshorisonter. I erkendelse af, at en numerisk løsning indebærer en vis estimationsusikkerhed er der simuleret 100.000 stier for hver aktivklasse for hvert indbetalingsniveau. Det høje antal simuleringer gør resultaterne mere robuste og giver mulighed for potentielt at genskabe resultaterne, hvis ønsket.

1.4.1 Valg af software og modelleringsværktøj

Excel er anvendt til deterministiske udregninger samt nogle visuelle præsentationer.

Specialets modellering og simuleringer er lavet i open-source statistiksoftware programmet R. Dette valg er foretaget ud fra en afvejning af muligheder i de tilgængelige software samt et ønske om at minimere simulationstiden, da der køres mange og tunge simulationsforløb.

1.4.2 Dataindsamling og datakilder

Da modelleringen af afkast bygger på en 1-faktor model for rentestrukturen og faste risikopræmier, er modelleringen ikke følsom over for specifikke datakilder, om end valget

af størrelserne for parametrene i modelleringen vil have stor betydning for resultaterne. For at holde modelleringen aktuel er Finanstilsynets Levetidsmodel inkl. levetidsforbedringer anvendt. Levetidsmodellen tager udgangspunkt i data fra en lang række danske livsforsikringsselskaber og tværgående pensionskasser, der samlet dækker næsten 2,9 mio. mennesker (Finanstilsynet, 2017.3).

1.5 Afgrænsning

Specialet har fokus på de danske pensionsopsparere og tager derfor ikke højde for udenlandske pensionsordninger og opsparinger. Det er forsøgt af validitets hensyn at begrænse subjektive valg således, at modellen giver troværdige resultater for bl.a. risikoen i pensionsudbetalingerne. Projektet er afgrænset til alene at tage højde for, hvor meget der ønskes udbetalt i pension som pct. af lønnen, samt hvor sikker denne udbetaling skal være. Der arbejdes under en rigid ramme, hvori der udelukkende spares op til pension igennem én livrenteordning i ét markedsrenteprodukt uden mulighed for tilkøb af garanti. Således vil garanterede produkter ikke blive belyst.

For at begrænse omfanget af output tager resultaterne alene udgangspunkt i enlige mænd, men modellen ville nemt kunne inkorporere samlevende, kvinder eller levetider for en kundeportefølje med blandet køn² ved en ændring i forudsætningerne.

Der inkluderes ikke forskellige udbetalingsprofiler, produkter eller skat (herunder AM-bidrag). Dette overlades til en ramme, hvor skatteoptimering, opsparings- og nedsparingsplanlægning er i fokus. Af samme årsag vil virksomhedsspecifikke detaljer, som f.eks. omkostninger ikke være inkluderet. Modellen vil tage udgangspunkt i et investeringsrum bestående af en aktiefond, en obligationsfond og en kontantbeholdning (kort rente).

Da antallet af metoder og modeller indenfor asset pricing og asset allocation er enorm, har det været nødvendigt at lave en streng afgrænsning ved valget af model for aktivpriserne. Samuelson (1969) og Merton (1971) har tidligere løst allokeringens problemet for en investor med konstant relativ nytte (CRRA), konstant rente og aktivpriser, der følger en geometrisk

² Kønsneutral prisfastsættelse på forsikringspræmier (EU, 2012) foreskriver, at mænd og kvinder skal have samme beregningstekniske grundlag på trods af mænd i gennemsnit har kortere liv end kvinder.

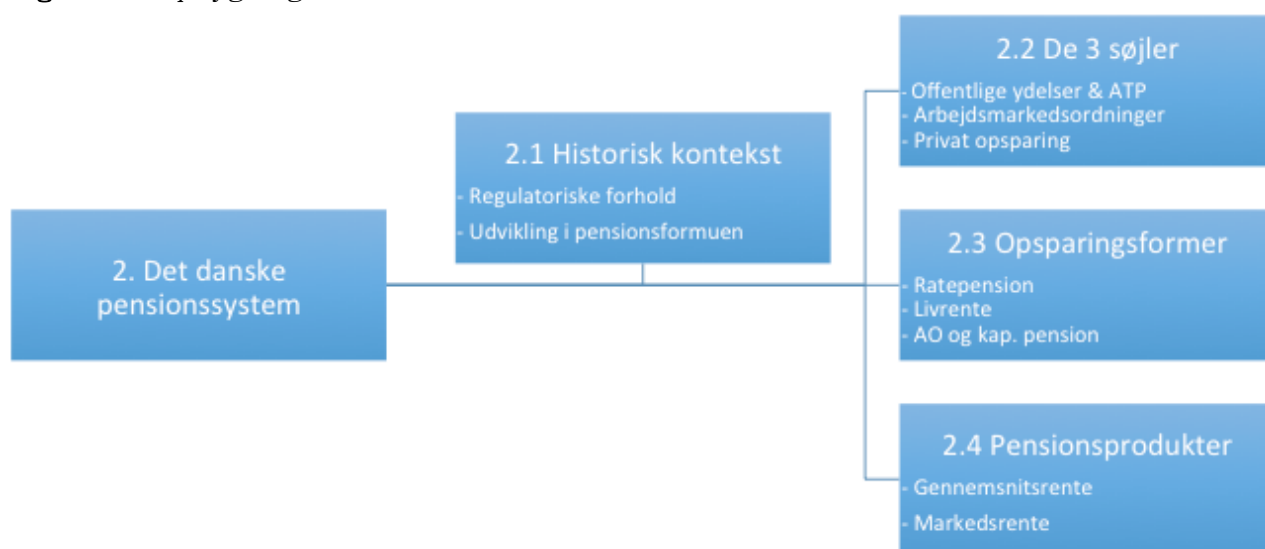
brownsk bevægelse. Astrup og Sørensen (2001) viste, at en investeringsgaranti tilknyttet pensionsordningen ofte er forbundet med et stort nyttetab for forbrugeren og Bajeux-Besnainou et. al (2003) løste det dynamiske allokeringssproblem ved en stokastisk rente. Dette speciale vil i stedet fokusere på at belyse faktorer, der er interessante for forbrugeren ift. den årlige pension som andel af slutlønnen, herefter dækningsgraden. Målet med den valgte investeringsramme er derfor ikke at producere en lukket løsning for aktivvægtene. Investeringsrammen skal i stedet anses som et værktøj til at modellere dækningsgrader til pensioneringstidspunktet ved forskellige risikoforløb således, at forbrugeren kan tage veloplyste beslutninger om andelen af risikofyldte aktiver, indbetalinger til pension mm. Valget er faldet på en 1-faktor model for den korte rente, samt et investeringsrum bestående af en aktie- og obligationsfond med konstante risikopræmier, da det er vurderet, at en mere kompleks modellering af aktivpriserne og inkludering af flere stokastiske parametre ikke ville gavne specialet i en sådan grad, at dette retfærdiggøres. Nyttfunktioner vil ikke være inkluderet i modelleringen.

Det er vurderet, at en egentlig estimering af de i modellen anvendte parametre ikke vil bidrage væsentligt til specialets formål. Parametrene er fastsat ud fra tilgængelige videnskabelige udgivelser og litteratur på området. I stedet analyseres effekten af ændringer i det fremtidige niveau for parametrene, dvs. hvor følsom dækningsgraderne er over for de anvendte parametre. Forsikringsomkostningerne er holdt konstante som andel af indbetalingerne, med et loft på 3,6% af lønnen svarende til en indbetaling på 18% og en omkostning til forsikringer på 20% af pensionsindbetalingen. Denne proportionalitet med lønnen er vurderet realistisk, da individer med højere indkomster typisk også ønsker en bedre dækning ved sygdom, invaliditet, død mv.

2. Det danske pensionssystem

I dette afsnit gives læseren et indblik i sammensætningen af det danske pensionssystem. Læseren introduceres først til en historisk kontekst, hvorefter pensionssystemets rammer ridses op. Den historiske ramme skal fungere som understøttende i forståelsen af, hvordan pensionsmarkedet i dag er skruet sammen.

Figur 2.1: *Opbygning af afsnit 2*

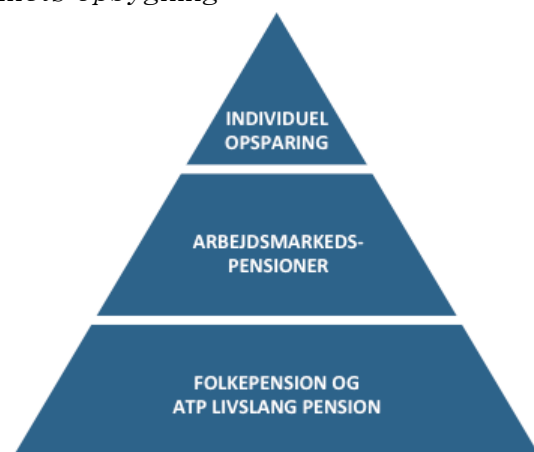


Kilde: Egen tilvirkning.

2.1 Det danske pensionssystems udvikling

Det første danske private livsforsikringsselskab Hafnia blev oprettet i 1872. Den danske pensions- og forsikringssektor forvalter i dag en pensionsformue, der er over dobbelt så stor som det danske bruttonationalprodukt (OECD, 2017). Pensionssystemet er bygget op af tre elementer: Offentlige ydelser, arbejdsmarkedspensionsordninger og private opsparinger.

Figur 2.2: Pensionssystemets opbygning



Kilde: Eget produkt

Arbejdsmarkedspensionsordningerne og de private opsparinger har været i kraftig vækst siden 1990'erne. Udviklingen har hovedsageligt været drevet af frivillige aftaler mellem arbejdsmarkedets parter om arbejdsmarkedspensionsordninger (Pensionskommissionen, 2015). Mange arbejdsmarkedspensionsordninger har haft en blød optrapning af det procentvise bidrag, hvorfor udviklingen i pensionsindbetalingerne fortsat øges, og stadig flere danskere vil have en større privat opsparing, når de går på pension. Først i 2040 vil alle lønmodtagere, der går på pension, have indbetalt arbejdsmarkedspension med nuværende gældende bidragssatser gennem hele arbejdslivet (Pensionskommissionen, 2015). Arbejdsmarkedspensionsordninger vil blive behandlet i afsnit 2.2.

Udviklingen, hvor private opsparinger fylder en stadig større del af pensionsydelsen, har været drevet af et politisk ønske om at sikre de dårligst stillede og samtidig give de bedre stillede danskere de fornødne muligheder for at udjævne deres indkomst, så der ikke opleves markante fald i levestandarden ved pensionering. Den demografiske udvikling, med stigende middellevetid i gennem mange år, samt en lavere fødselsrate, har medført et pres på den offentlige søjle på baggrund af færre i den arbejdsdygtige alder og flere på pension. Dette problem blev i midt 1990erne døbt ældrebyrden.

Middellevetiden for nyfødte er således øget fra 72,2 år for mænd og 77,8 år for kvinder i 1990 (dst.dk,1) til 78,8 år for mænd og 82,8 år for kvinder i 2016 (dst.dk,2). Der blev i 1990 født 62.982 børn, hvor tallet i 2016 var 61.614. Folkepensionsalderen er løbende

blevet revideret. Folkepensionsydelsen så dagens lys i ”*Lov om alderdomsunderstøttelse til værdige trængende uden for fattigvæsenet*” i år 1891 (skm.dk, 1), hvor aldersbegrænsningen var 60 år. Nedenstående tabel illustrerer ændringer fra 1957, hvor folkepensionen, som vi kender den i dag, blev indført (erstatning af aldersrenteydelsen).

Tabel 2.1: *Udvikling i folkepensionsalder siden 1957*

1957	1977	1979	2004	2019-2022	2030 -
Aldersgrænse hæves til 67 år. Enlige kvinder: 62 år.	Førtidig folkepension mulig fra 55 år.	Efterlønsordning indføres. Mulig tilbagetrækning: 60 år.	Aldersgrænse sænkes til 65 år.	Aldersgrænse hæves gradvist til 67 år.	67 < Indeksering af folkepension salderen.

Kilde: Eget produkt. Data fra skm.dk og ae.dk

Det observeres, at de offentlige ydelser løbende er blevet gjort mere komplekse for at give førtidig adgang til ydelser for bestemte samfundsgrupper f.eks. afspejlet i efterlønsordningen fra 1979, men at folkepensionsalderen før indekseringen har været relativt stabil. Som følger af den stigende middellevetid har man fra politisk side valgt at indeksere folkepensionsalderen. Målet med dette er, at en pensionist i gennemsnit kan nyde 14,5 år på folkepension (Beskæftigelsesministeriet, 2015), hvorfor ens fødselstidspunkt vil være afgørende for, hvornår man har ret til folkepension.

Tabel 2.2: *Folkepensionsalder efter fødselsdato*

Fødselsdato	Folkepensionsalder
31. December 1953 eller tidligere	65 år
1. Januar 1954 – 30. juni 1954	65,5 år
1. Juli 1954 – 31. december 1954	66 år
1. Januar 1955 – 30. juni 1955	66,5 år
1. Juli 1955 – 31. december 1962	67 år
1. Januar 1963 – 30. Juni 1966	68 år
1. Juli 1966 –	68+ år

Kilde: Borger.dk og aeldresagen.dk

Denne indeksering gør folkepensionsalderen uvis for den yngre generation. For selv at kunne bestemme sin tilbagetrækningsalder er det i dag derfor i højere grad nødvendigt at forholde sig tidligt til opsparing og pension³.

2.1.1 Udvikling i regulatoriske forhold og fradragsmuligheder

Da pensionssystemet skal dække alle danskere i den tredje alder, er det i samfundets interesse, at vi har et sundt pensionssystem. I Mercer undersøgelsens metodik vægtes tilstrækkelighed, bæredygtighed og integritet (Mercer, 2016). Således vægtes det højt, at der gives et incitament til at spare op, at der ikke opleves store fald i indkomst (dækningsgrad) og, at sektoren er tilstrækkelig reguleret. Parametre, som Danmark alle scorer højt på.

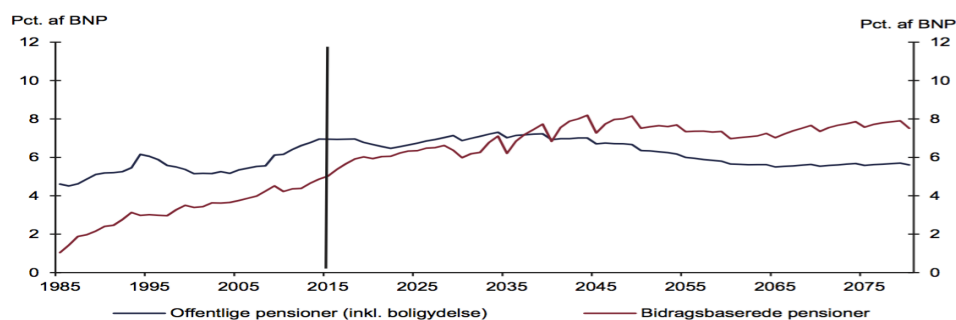
Livsforsikringsvirksomheder har været reguleret af Finanstilsynet (før Forsikringsraadet) siden 1904 (Finanstilsynet, 1997). Første lov om skadeforsikring indførtes i 1934 og i pensionskasseloven fra 1935 indførtes krav om, at pensionsforpligtelserne skal være fuldt fundede (Finanstilsynet, 2017). Efter 1935 er de regulatoriske rammer løbende blevet ændret med et forbrugerbeskyttende formål for øje, da en konkurs i et pensionsselskab ville kunne have katastrofale følger for kunderne. Senest har indførelsen af stresstest (trafiklys), Solvens 1 og Solvens 2 (2016) haft fokus på at have bedre kontrol med risikoen, kapitalkrav og værdiansættelse af passiver og aktiver til markedsværdi. Den øgede regulering i kombination med et lavt rentemiljø og længere levetid har medført en stigende popularitet af markedsrenteprodukter, hvilket har flyttet risikoen fra pensionsselskab over til kunden. Populært sagt er risikoen blevet privatiseret. Dette skifte, som er af afgørende betydning for specialets relevans, er uddybet i afsnit 2.4.

2.2 Pensionssystemets 3 elementer

Ændringer i demografiske forhold, politiske aftaler og aftaler mellem arbejdsmarkedets parter har medført, at forholdet mellem de 3 søjler har ændret sig markant over de seneste tre årtier.

³ Afhængig af hvornår ordningen er oprettet kan udbetaling først påbegyndes 5 år før folkepensionsalderen og 3 år for ordninger oprettet i 2018. Vedtaget i *Aftale om flere år på arbejdsmarkedet (fm.dk)*.

Figur 2.3: Udbetalinger fra offentlige samt bidragsbaserede pensioner



Kilde: Pensionskommissionen, 2015

Figur 2.3 illustrerer hvorledes individuel opsparing fortsat får større betydning for den samlede indkomst i den tredje alder. Arbejdsmarkedspensionsordninger fylder cirka 80% af pensionsopsparingen for 25–64 årige og er fortsat stigende (Forsikring&Pension, 2015.1). Den stigende opsparing har sekundært været drevet af skattebegunstigede bidrag til pension med mulighed for fradrag i indkomstskatten ved indbetaling til en pensionsordning, samt en lavere pensionsafkastskat (PAL) på 15,3% (skat.dk). Den stigende pensionsalder samt politisk fokus på pensionsalder og udbetalingsmuligheder har ligeledes medført fortsat vækst i de privattegnede pensionsordninger og fri opsparing. Udviklingen har medført, at Danmark aktuelt har verdens største pensionsformue målt i forhold til BNP (OECD, 2017). Den danske pensionsformue er fra 2006 til 2016 fordoblet til 4315 mia. kr., svarende til 209% af det danske bruttonationalprodukt (OECD, 2017).

2.2.1 Offentlige ydelser og ATP

De offentlige pensionsudbetalinger udgør, på trods af stigende privat opsparing, stadig en væsentlig del af danskernes samlede pensionsudbetalinger. Folkepensionen består af folkepensionens grundbeløb, folkepensionstillægget og ældrechecken. Folkepensionen dækker alle personer med mere end 10 års tilknytning til Danmark, men for at få den fulde folkepensionsydelse kræves det, at personen har været bosat 40 år i Danmark (2017). De offentlige ydelser kan opdeles i en indkomstuafhængig og en indkomstafhængig del, hvor der med indkomstuafhængig refereres til uafhængig af anden opsparing og pensionsudbetalingernes størrelse. Se Tabel 2.3.

Tabel 2.3: Kriterier for tildeling af offentlige ydelser

Ydelser	Erhvervsindkomst	Anden indkomst	Formue	Behovsbestemt
Folkepensionens grundbeløb	X			
Folkepensionens pensionstillæg	X	X		
Ældrecheck	X	X	X	
Varmetillæg	X	X		X
Boligydelse og helbredstillæg	X	X	X	X

Kilde: Pensionskommissionen, 2015.

Folkepension

Folkepensionen kan opdeles i en indkomstuafhængig og en indkomstafhængig del.

Den indkomstuafhængige del består af folkepensionens grundbeløb, som i 2017 var 6160 kr. om måneden.

$$\text{Folkepensionens grundbeløb, 2017} = 73.920 \text{ kr. årligt} \quad \text{Parameter 1}$$

Folkepensionens grundbeløb er imidlertid afhængig af erhvervsindtægt ved siden af folkepensionen. Grundbeløbet nedsættes med 30% af den del af indtægten, der overstiger 316.200 kr. om året (2017).

Den indkomstafhængige del består af flere ydelser med pensionstillægget, som den mest markante kilde i indkomstgrundlaget. De årlige ydelser er

$$\text{Folkepensionens pensionstillæg (enlig), 2017} = 78.612 \text{ kr.} \quad \text{Parameter 2}$$

$$\text{Folkepensionens pensionstillæg (gift eller samlevende), 2017} = 38.676 \text{ kr.}$$

Kilde: Borger.dk

Folkepensionens pensionstillæg reguleres ud fra al indkomst fra arbejde, kapitalindkomst, pensionsudbetalinger og anden indkomst. Pensionstillægget nedsættes med 30,9% af det årlige indkomstgrundlag over 69.800 kr. og bortfalder ved en indkomst på 324.200 kr. (2017). Denne modregning er i medierne blevet døbt samspilsproblematikken, grundet modregningens påvirkning på den marginale effekt af indbetalinger for visse samfundsgrupper.

Folkepensionen er sat til at stige med lønudviklingen, men er siden 1995 fratrukket et tillæg til den kritiserede satspuljeordning på op til 0,3% (retsinformation.dk, 1).

Ud over folkepensionens pensionstillæg kommer diverse tilskud til borgere med en særdeles lav indkomst og formue, såsom: ældrecheck, varmetillæg og helbredstillæg.

Retten til ældrecheck tabes ved en likvid formue på over 84.300 (2017) eller en indkomst på over 69.800 kr. for enlige og 140.000 kr. for gifte/samlevende (tillægsprocent på 0%).

ATP livslang pension

ATP livslang pension er en livrenteydelse, som kan udbetales fra folkepensionsalderen.

Indbetaling er tvungen for lønmodtagere, der arbejder mindst 9 timer om ugen i Danmark eller på vegne af den danske stat i udlandet (borger.dk), som følger indbetaler 9/10 i den erhvervsaktive alder til ATP og ordningen omfatter således stort set alle danskere.

Indbetalingerne for en fuldtidsbeskæftiget beløber sig til 284 kr. om måneden, hvoraf 94,65 kr. er betalt af arbejdstager og den resterende del af arbejdsgiver⁴.

ATP er en selvejende institution, men indregnes ofte i søjlen under de offentlige ydelser, grundet ATP's udbetalingsstruktur som supplement til folkepensionen, den brede dækning af den danske befolkning med 5 millioner medlemmer samt bidragenes tvungne natur.

Størrelsen på ATP ydelsen afgøres af bidragene indtil folkepensionsalderen. Den maksimale ydelse ved fuldt bidrag fra 18 år indtil folkepensionsalderen er 23.500 kr. før skat om året (årgang 1952, borger.dk). Den præcise ydelse for forskellige individer er afhængig af ATPs forrentning af formuen og levetiden. Den livsvarige ydelse er bestemt af forrentningen af hhv. en garanteret ydelse, fastsat 15 år før pensionering, og et bonuspotentiale (ATP, 2017). I gennemsnit var ATP udbetalingen på 14.219 kr. om året i 2015.

Gennemsnitlig ATP ydelse (2015) = 14.219 kr. om året

Kilde: pensionforalle.dk

⁴ Indbetalingerne kan variere for visse lønmodtagere med særlige aftaler (virk.dk).

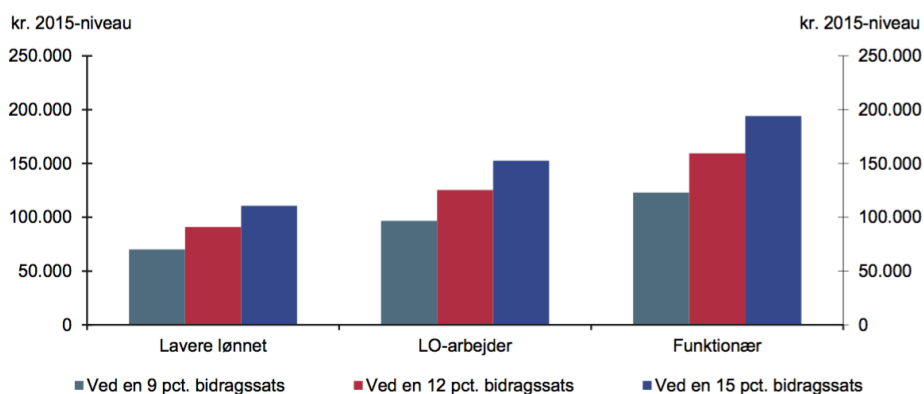
2.2.2 Arbejdsmarkedspensionsordninger

Arbejdsmarkedspensionsordningerne er en fællesbetegnelse for de solidariske ordninger, som mange lønmodtagere i dag indbetaler til. Arbejdsmarkedspensionerne er baseret på aftaler mellem arbejdsmarkedets parter og er obligatoriske for det enkelte individ.

Aftalerne blev for alvor udbredt efter fælleserklæringen i 1987 mellem arbejdsmarkedets parter (Finanstilsynet, 2017).

I 2015 udgjorde pensionsudbetalinger fra privat opsparing 20,5% af de samlede udbetalinger (Ramlau-Hansen, 2017 & dst.dk). Grundet arbejdsmarkedspensionernes unge alder og en gradvis indførsel med optrapning af bidragssatsen er mange af ordningerne fortsat under opbygning. Bidragssatserne varierer typisk mellem 11-18% før forsikringsomkostninger afhængig af ansættelsesforhold og overenskomst (Pensionskommissionen, 2015). Se figur 2.4. Hvor store udbetalinger en pensionist kan forvente af sin bidragsbaserede arbejdsmarkedspensionsordning afhænger af bidragenes størrelse, antal år der indbetales på ordningen samt forrentningen af formuen.

Figur 2.4: Årlige pensioner målt på bidrag gennem arbejdsliv



Kilde: Pensionskommissionen, 2015

2.2.3 Privattegnede pensionsordninger

Den gennemsnitlige pensionsformue for 25 til 64-årige i privattegnede ordninger udgjorde 159.471 kr. i 2016, en vækst på 2,1% ift. året før, sammenlignet med en gennemsnitlig pensionsformue for arbejdsgiveradministrerede pensionsordninger på 544.386 kr., en vækst på 2,4% ift. året før. Privattegnede ordninger udgjorde således 22,7% af den samlede private opsparing i pensionsregi (forsikringopension.dk).

2.3 Pensionstyper

Valg af opsparingsform kan have store konsekvenser for, hvordan indkomsten udlignes under den tredje alder. Pensionsmidler er i det danske skattesystem begunstigede med en lavere afkastskat på 15,3%. I frie midler beskattes aktieindkomst med 27% for beløb under 51.700 og 37,7% for kapitalindkomst under 42.800 (2017). For beløb over 51.700 for aktieindkomst, samt kapitalindkomst over 42.800 er den gældende skattesats 42% (skat.dk):

$$PAL - skat = 15,3\%$$

Parameter 3

2.3.1 Aldersopsparing og kapitalpension

Aldersopsparingen er en ny opsparingsmulighed fra 1. januar 2013, som erstatter kapitalpensionen. Modsat kapitalpensionen er aldersopsparingen ikke fradragsberettiget i den skattepligtige indkomst. Hvor ratepensionen og livrenten er ydelser over en årrække, kan hele opsparingens størrelse af aldersopsparingen og kapitalpensionen udbetales på en gang eller over flere omgange senest 15 år efter, at individet har nået pensionsalderen.

Aldersopsparingens er skattebegunstiget og afkast beskattes med PAL skattesatsen på 15,3% (parameter 3). Aldersopsparingen modregnes ikke i folkepensionstillægget. Af samme årsag er øgede indbetalingsmuligheder til aldersopsparingen op til pensionsalderen diskuteret, som en mulig politisk løsning til samspilsproblematikken og delvist implementeret ved øgede indbetalingsmuligheder fra 5 år før folkepensionsalderen fra 1/1-18 (Lovforslag L16, ft.dk).

Det var i 2017 muligt at indbetale 29.600 kr. efter skat til aldersopsparingen. Fra 2018 er beløbet øget til 46.000 kr. de sidste 5 år inden folkepensionsalderen, men nedsat før dette til 5.100 kr. (skm.dk, 2). Indbetales der over grænsen trækkes en afgift på 20% af den del, der overstiger grænsen.

I 2015 var opsparingen i kapital- eller alderspension på 12,6% af de samlede arbejdsgiveradministrerede ordninger, hvor tallet for privattegnede ordninger var 35,9% (forsikringogpension.dk)

2.3.2 Ratepension

En ratepension er en aftale med et livsforsikringsselskab, en pensionskasse eller en bank, hvor et individ indbetaler en eller flere præmier mod at få en række ydelser udbetalt over en årrække ved pensionering. Udbetalingsperioden kan vælges, så opsparingen udbetales over en periode på mellem 10–30 år.

Ved indbetalingen opnås et fradrag i den skattepligtige indkomst i det indkomstår indbetalingen er foretaget. Grænsen for fradrag i ratepensionsregi er 53.500 kr. efter arbejdsmarkedsbidrag (2017). Ved udbetaling beskattes ydelsen med den gældende skattesats. Ordningen er især populær som privat opsparing for topskatteydere, der forventer at ligge under topskattegrænsen ved pensionering. Ved død bliver arvinger begunstiget med den resterende del af opsparingen efter skat. Opsparingen har ikke karakter af forsikring, som den livsvarige livrente har det. I 2015 var 31,4% af opsparingen i arbejdsgiveradministrerede ordninger i ratepension, hvor tallet var 48,7% for privattegnede ordninger (forsikringogpension.dk).

Ved en deterministisk og konstant rente kan den udbetalte ratepension, beregnes i diskret tid som en simpel annuitet,

$$Ydelse(rate) = \frac{Opsparing \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}} \quad \text{Formel 2.1}$$

hvor et højere afkast end r i løbet af udbetalingsperioden vil give større ydelser (nominelt) over tid, og omvendt vil et lavere afkast give faldende ydelser.

2.3.3 Livsvarig livrente

Ligesom ved ratepension opnås et fradrag i den skattepligtige indkomst ved indbetaling på ordningen i det indkomstår indbetalingen er foretaget. Der er ingen beløbsgrænse for fradrag i livsvarig livrente⁵ og indbetalingerne kan fradrages op i topskatten. Ligesom ratepensionen beskattes ydelserne ved udbetaling.

⁵ Privattegnede ordninger med mindre end 10 år til udbetaling har en grænse på 49.300 i 2017 (forsikringogpension.dk)

I 2015 var 56,1% af opsparingen i arbejdsgiveradministrerede ordninger i livrente, hvor tallet var 15,4% for privattegnede ordninger (forsikringopension.dk). Da den livsvarige livrente adskiller sig ved at være en forsikring, hvor den forsikrede er sikret pensionsydelse hele livet, er arvinger ikke begunstiget. Populært sagt betaler individer med et kort liv, for dem med et langt liv.

Beregningsteknisk for livrenter

Generelt for livrenter gælder det i opsparingsfasen, $t < m$, at livrenten vokser med (Steffensen & Ramlau-Hansen, 2016)

$$\frac{d}{dt}V(t) = r(t)V(t) + \pi - \mu(t)(b^d - V(t)) \quad \text{Formel 2.2}$$

hvor $\mu(t)$ er dødelighedsintensiteten, π er de kontinuerte præmieindbetalinger, b^d er forsikringsdækning ved død, $V(t)$ er formuen til tidspunkt t og $r(t)$ er forrentningen af formuen. Således siges det, at livrenten forrentes af *både* din overlevelse (eller omvendt af den andel, der er døde i perioden) og af afkastet på formuen.

Ofte tegnes livrenter med garanti for udbetaling af hele opsparingen ved død før pensionering. Således kan vi ved at lade $b^d = V(t)$ i opsparingsfasen, forkorte til

$$\frac{d}{dt}V(t) = r(t)V(t) + \pi \quad \text{Formel 2.3}$$

Ved udbetalingens start, $t > m$, kan vi opstille ændringen i formuen $V(t)$, som

$$\frac{d}{dt}V(t) = r(t)V(t) - b^p(t) + \mu(t)V(t) \quad \text{Formel 2.4}$$

hvor $b^p(t)$ er pensionsudbetalinger, som indgår med negativt fortegn, da opsparingen er under udbetaling.

Ved deterministisk og konstant rente, r , kan nutidsværdien af en ydelse på 1 kr. årligt indtil død beregnes som

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} {}_t p_x dt \approx \sum_{t=1}^{\infty} e^{-r(t+0,5)} {}_t p_x \quad \text{Formel 2.5}$$

hvor r er renteintensiteten og ${}_t p_x$ er sandsynligheden for at overleve til tidspunkt t ved alder x . Levetid vil blive behandlet i afsnit 3.1.

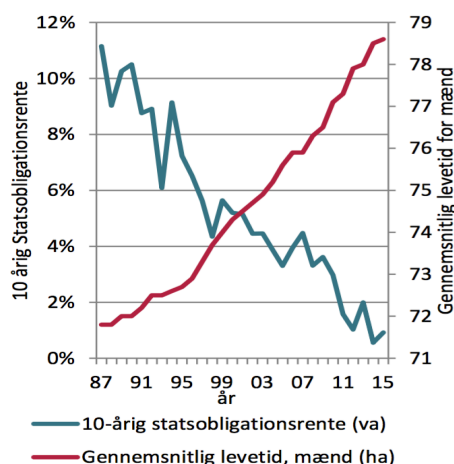
2.4 Pensionsprodukter

I afsnittet gennemgås produkterne i det danske pensionssystem, og der gives et overblik over, hvilke konsekvenser valget af produkt har for kunden i forhold til forventet afkast, investeringsrisiko og forudsigelighed.

2.4.1 Gennemsnitsrenteprodukter

Gennemsnitsrenteprodukter er en fællesbetegnelse for traditionelle ordninger, hvor alle deltagere indgår i et investeringsfællesskab med de øvrige opsparere. Alle kunder ejer en andel af investeringsporteføljen. I Danmark er der til gennemsnitsrenteprodukterne almindeligvis knyttet en garanti for størrelsen af udbetalingerne. Disse produkter var indtil omkring årtusindskiftet den altdominerende pensionsopsparingsform i Danmark (Linnemann et. al, 2011). Størrelsen af ydelsesgarantien er afhængig af, hvilket grundlag ordningen er oprettet på, hvilket er afgjort af hvornår ordningen er oprettet. Garantien størrelse spænder fra en gennemsnitslig minimumsforrentning på 5% til 0% nominel garanteret forrentning pr. år. Garantier, som illustreret i figur 1, var konservative i forhold til renteniveauet, da de blev oprettet, skaber i dag store problemer på mange pensionsselskabers balance, da garantierne på baggrund af det lave rentemiljø og den fortsat stigende levealder er høje, er diskonteret blødt og afdækningen af garantierne er omkostningsfuld. Omkostningerne (målt i nutidskroner) for en livsvarig ydelse udbetalt fra det 65ende leveår i 1987 er som følger steget til det tredobbelte i 2015. Udviklingen kan ses nærmere i figur 1.

Figur 1: *Udviklingen i middellevetid og renteniveau*



Kilde: Finanstilsynet, 2017 – med data fra Danmarks Statistik.

2.4.2 Markedsrente produkter

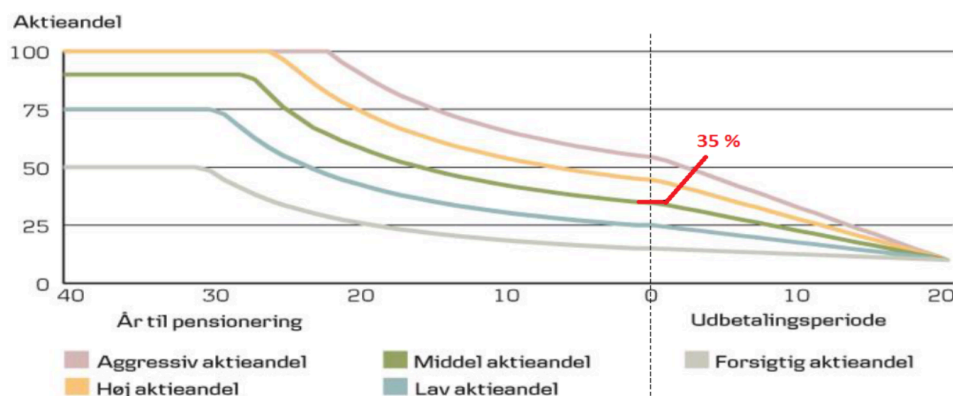
Markedsrenteprodukter adskiller sig fra gennemsnitsrenteprodukter ved, at der for indbetalingerne bliver købt investeringsaktiver i markedet, hvor depotet løbende tilskrives en rente, der afspejler det faktiske afkast.

Den væsentligste forskel er derfor, at markedsrenteprodukter som udgangspunkt er uden garanti⁶, hvorfor kunden selv bærer investeringsrisikoen. Visse udbydere har i deres produkter en 0% garanti tilknyttet udbetalingsfasen. Markedsrenteprodukter har typisk en større andel af risikofyldte aktiver og et større forventet afkast end gennemsnitsrenteprodukterne. Den større investeringsrisiko skaber en mindre grad af forudsigelighed og indebærer en større grad af usikkerhed omkring pensionsydelse (Finanstilsynet, 2017). Markedsrenteprodukter kan tage form af Unit-Link i sin rene form, hvor kunden selv investerer, men typisk i form af et udvalg af investeringsforeninger, eller som livscyklusprodukt.

Et livscyklusprodukt gør uforudsigeligheden i pensionsydelserne mindre ved at lade investeringsrisikoen falde hen mod pensioneringstidspunktet. Således starter vægten i risikofyldte aktiver og bevæger sig gradvist mod en mere konservativ portefølje hen mod pensioneringstidspunktet, som f.eks. illustreret i figur 2.

⁶ Det er i mange selskaber muligt at tilkøbe en garanti tæt på pensioneringstidspunktet.

Figur 2: Aktieandel i Danica Balance

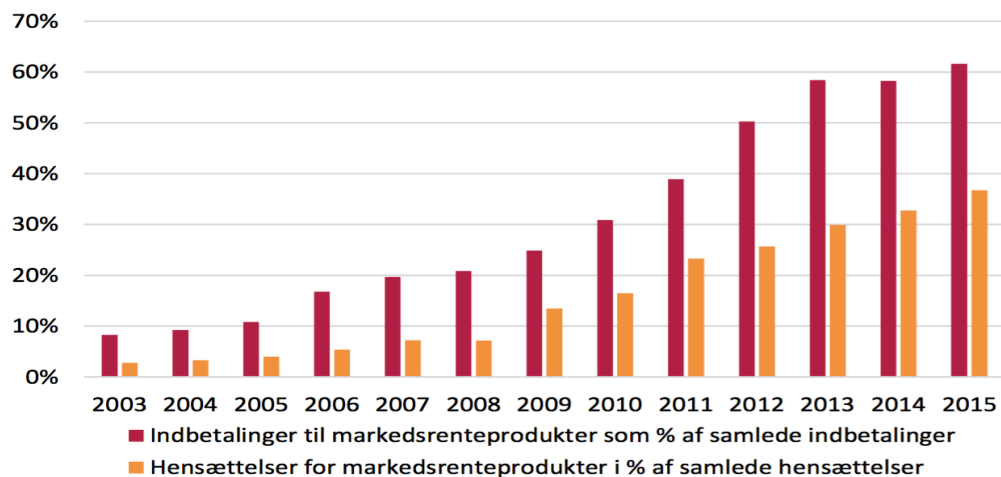


Kilde: Ramlau-Hansen, 2017

Den større investeringsrisiko ved lang tid til pensionering kan ses i lyset af den lange tidshorisont og den større andel udgjort af de forventede fremtidige indbetalinger tilbagediskonteret (human kapital). Som følger vil den påtagne risiko være relativt konstant når human kapital inkluderes.

De lave renter, den stigende levetid, samt de øgede kapitalkrav til pensionsselskaberne (afsnit 2.1.1) har gjort markedsrenteprodukter til danskernes, og pensionsselskabernes, foretrukne produkt. Som følger er over 60% af præmieindbetalingerne i dag til markedsrenteprodukter (figur 3).

Figur 3: Udviklingen i markedsrenteprodukter, 2003-2015



Kilde: Finanstilsynet, 2017

2.5 Opsummering

En stigende folkepensionsalder, længere levetid og et lavrentemiljø er faktorer, der har ændret pensionslandskabet. Et skifte i det foretrukne produkt har ført til en større grad af handlefrihed og forventet afkast for forbrugerne, men som resultat medført en markant større risiko og usikkerhed om den fremtidige pension.

3. Pensionsmodellen

I dette afsnit vælges den underliggende finansielle model for aktivpriserne, og der fastsættes realistiske størrelser for relevante parametre, hvorefter der opstilles en samlet prognosemodel.

3.1 Modellens ramme

Modelleringen er delt op i 3 overordnede elementer. Første del indeholder en introduktion af investeringsrammen og den dertil hørende anvendte stokastiske model for renten og aktivpriserne. Dernæst defineres yderligere parameterværdier og faktorer af betydning for modelleringen. I afsnit 3.3 defineres yderligere begrænsninger, hvorefter den samlede model til simulationsbrug opstilles. Til slut er afsnit 3.4 dedikeret til at fastsætte realistiske værdier for parametrene i den i afsnit 3.2.1 opstillede model for renten, samt aktie- og obligationsfonden.

3.2 Parametre

Da den samlede model indeholder et væsentligt antal parametre, som vil være afgørende for validiteten af modellens output, vil dette afsnit fokusere på at definere de enkelte parametre.

I hvor høj grad, der bliver gået i dybden med de enkelte parametre, er vurderet ud fra, hvor meget modellens resultater afhænger af parametrene. Fokus vil derfor være størst, hvor følsomheden af parametrene er størst. Da modellens resultater vil være meget følsomme ift. hvordan renten, obligations- og aktiefonden defineres, vil der f.eks. her være et naturligt større fokus end på andre mindre vigtige parametre. Ligeledes vil inflation og reallønsudvikling have en stor betydning for størrelsen af opsparingen og yderligere have en direkte effekt på, hvor stor en indkomst der ønskes i pensionsalderen,

da dækningsgraden er beregnet procentuelt ift. lønnen umiddelbart før pensionstidspunktet.

Der vil blive gået mindre i dybden med parametre, som folkepensionsalder og dødsintensiteten. Sidstnævnte vil blive behandlet yderligere i sensitivitetsanalysen i afsnit 6.

3.2.1 Investeringsrammen

Som beskrevet i afgrænsningen vil porteføljens mulige investeringer være begrænset til 3 aktiver. En kort rente, ofte refereret til som kontantbeholdningen, en obligationsfond og en aktiefond. De tre aktivklasser vil i det følgende afsnit blive behandlet i nævnte rækkefølge.

Renten

Ofte antages det, at den korte rente er risikofri og konstant. På trods af, at sandsynligheden i dag for at få den pålydende rente er sikker, er niveauet af renten i fremtiden uvis. Renten vil for langsigtede investorer derfor være et betydeligt risikoelement. For at lade denne usikkerhed indgå i modelleringen vil dette afsnit behandle modellering af renten.

Gaussisk 1-faktor model

Af de mange rentestrukturmodeller er valget faldet på gruppen af Gaussiske 1-faktor modeller. Helt præcist vil rentestrukturen være defineret ud fra Vasiceks 1-faktor model. Baggrunden for valget af Vasiceks 1-faktor model er modellens tydelige fordele ift. specialets senere simuleringer, da modellens eneste varierende faktor er den korte rente. Modellen har konstante vægte for graden af mean-reversion, long-term mean og et konstant parameter for volatiliteten. En Gaussisk model simplificerer yderligere modelleringen ved at definere obligationsprisen som log-normalfordelt og den relative ændring i afkastet som normalfordelt (Duffie, 2001). Dette forhold har medført kritik af modellen, da fordelingen som følger giver en positiv sandsynlighed for en negativ rente. Dette forhold er ikke et problem ved værdier i modelleringen, der afspejler muligheden for marginalt negative renteniveauer, men problematisk ved høje negative værdier.

Vasiceks rentestruktur model

Et beløb, W , forrentet med spotrenten vil med sikkerhed blive tilskrevet et afkast svarende til (Vasicek, 1977)

$$dW = Wr(t)dt \quad \text{Formel 3.1}$$

hvor

$$r(t) = \text{den korte rente}$$

hvor $r(t)$ følger en kontinuert Markov proces (Vasicek, 1977). Renten kan karakteriseres ved en Ornstein–Uhlenbeck process givet som den stokastiske differentialligning (Vasicek, 1977):

$$dr = a_r[b - r(t)]dt + \sigma_r dW_t \quad \text{Formel 3.2}$$

hvor

W_t er en Wiener proces eller en standard brownsk bevægelse,

a_r er returhastigheden til rentens long-term mean,

b er long-term mean, og $a(b-r_t)$ er driften.

$r(t)$ er den korte rente til tidspunkt t og

σ er modellens volatilitetsparameter

Aktie og obligationsfonden

Det har længe været anerkendt, at risikovillige investorer kan forvente betaling for at tage en højere (systematisk) risiko end investorer, der alene foretrækker sikre investeringer.

Mindre konsensus er der om størrelsen af risikopræmien, som længe og af gode grunde, har været et omdiskuteret emne indenfor asset pricing. En stor afvigelse i den valgte

risikopræmie vil potentielt kunne betyde store forecast fejl. Den lange tidshorisont gør dette problem mere udtalt, idet en 1%-points forskel over 30 år vil kunne betyde flere

hundrede tusinde kroners afvigelse i pensionsopsparingen. Da størrelsen af risikopræmien har stor betydning for dækningsgraden ved pensionering, vil følsomheden i

dækningsgraden ved ændringer i risikopræmien blive nærmere undersøgt i afsnit 6.

For at forsimple modelleringen arbejdes der alene med en obligationsfond og en aktiefond svarende til, hvad en investor ville kunne forvente af en passiv investering i en markedsportefølje af alle obligationer hhv. aktier. Det er derfor alene muligt for den enkelte investor at allokere sine ressourcer i kontanter (den korte rente), obligationer eller aktier.

For at sikre den, i praksis observerede, negative korrelation mellem renteændringer og aktie- samt obligationspriser lades volatilitetsparameteret for renteprocessen σ_r indgå med negativt fortegn (Bajeux-Besnainou et. al, 2003).

$$dr = a_r[b - r(t)]dt - \sigma_r dW_r \quad \text{Formel 3.3}$$

Ved at antage en konstant risikopræmie samt et konstant volatilitetsparameter kan den stokastiske proces for aktieprisen gives ved (Bajeux-Besnainou et. al, 2003)

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = [r(t) + \theta_S]dt + \sigma_1 dW + \sigma_2 dW_r \quad \text{Formel 3.4}$$

hvor dW er en standard brownsk bevægelse og dW_r ligeledes er en brownsk bevægelse uafhængig af dW . Den stokastiske proces for $S(t)$ følger en Geometrisk Brownsk bevægelse under den givne SDE. Prisen for aktiefonden er som følger log-normalfordelt. σ_2 kan tolkes som risikoen knyttet til ændringer i renten. σ_1 kan tolkes som den specifikke risiko knyttet til aktieafkastet og $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma_S$.

Obligationsfonden opstilles som en kontinuert rebalanceret fond, så tiden til udløb, K , holdes konstant. Den stokastiske proces for obligationsprisen kan nu defineres som (Bajeux-Besnainou et. al, 2003)

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = [r(t) + \theta_B]dt + \sigma_B dW_r \quad \text{Formel 3.5}$$

hvor risikopræmien θ_S og θ_B er størrelsen af, hvad en investor ville kunne forvente af risikopræmie for at investere i et mere risikofyldt aktiv, dvs. hvad en investor ville kunne forvente af merafkast, over $r(t)$ i kontinuert tid. Volatilitetsparameter, σ , og risikopræmierne, θ_S og θ_B , er konstanter. Ligeledes antages kovariansen mellem aktivklasserne konstant.

Volatiliteten og risikopræmien for obligationsfonden kan beregnes som (Bajoux-Besnainou et. al, 2003):

$$\sigma_B = \frac{\sigma_r(1 - e^{-a_r K})}{a_r} \quad \text{Formel 3.6}$$

hvor obligationsfonden er konstant rebalanceret, så K er den konstante tid til udløb.

$$\theta_B = \sigma_B \lambda_r \quad \text{Formel 3.7}$$

som alle er konstanter, og

$$\theta_S = \sigma_1 \lambda + \sigma_2 \lambda_r \quad \text{Formel 3.8}$$

hvor λ_r betegner markedsprisen for renterisiko og λ betegner markedsprisen på aktierisiko.

Aktiefondens risiko kan derfor udtrykkes som $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Hele varians-kovarians matrixen for obligations- og aktiefonden er givet som (Bajoux-Besnainou et. al, 2003).

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_2 \sigma_B \\ \sigma_2 \sigma_B & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \quad \text{Definition 3.1}$$

Lad α betegne vægten i aktiefonden, β vægten i obligationsfonden og den resterende andel $(1 - \alpha - \beta)$ vægten i kontanter. Da rammerne for pensionsinvestering er mindre fleksibel i forhold til short selling og gearing, indsættes den rimelige restriktion⁷:

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 0 \\ \beta &\geq 0 \\ (1 - \alpha - \beta) &\geq 0 \end{aligned}$$

⁷ Det er muligt at investere pensionsmidler i certifikater og Hedgefonde, hvori der kan ligge en implicit gearing og/eller short selling. Dette er imidlertid vurderet til at være af mindre betydning for den almene investor.

3.2.2 Inflation

Da der i modelleringen af pensionsopsparingen arbejdes over en længere horisont og det generelle prisniveau er stigende, skal der i modelleringen tages højde for inflation, enten implicit i det forventede afkast eller eksplicit. Inflation i den eksplicitte form vil være af afgørende interesse i modelleringen særligt for lønudviklingen og det inflationskorrigerede afkast i udbetalingsfasen.

For at simplificere modelleringen, og for at undgå de matematiske konsekvenser en stokastisk modellering af inflationen ville give, antages inflationsraten konstant. Inflationen beregnes som et gennemsnit af den procentvise ændring siden 1990 (appendix A – Inflation):

$$i = 2\% \qquad \text{Parameter 4}$$

Som det kan ses i appendix A har inflationen siden 1990 været relativt konstant omkring dens middelværdi med undtagelse af de seneste 4 år. Parameter 4 er i overensstemmelse med fastkurspolitikken og euroområdet's pengepolitiske mål om en inflationsrate på under, men tæt på 2% (nationalbanken.dk).

3.2.3 Lønudvikling

Historisk set har stigningerne i lønnen været større end inflationen. Det vil derfor være at undervurdere lønstigningerne, og som afledt effekt indbetalingerne til pensionsopsparingen, hvis modellen ikke tager højde for forventede stigninger i reallønnen.

Siden en tilstrækkelig dataperiode for reallønnen ikke er tilgængelig anvendes Realvækst i BNP i pct. som proxy for reallønsvæksten (Produktivitetskommissionen, 2013). Her er anvendt data fra 1997–2016 begge år inkl. Tidsperioden er valgt for at få en fuld konjunkturcyklus afvejet mod at inkludere historisk data, der ikke er retvisende for fremtidigt niveau. Herved fås en gennemsnitlig realvækst i BNP på 1,4% (Appendix B). Historisk har væksten i reallønnen ikke været proportional med realvæksten i BNP, hvorfor der i modelleringen er anvendt 1%. Følsomheden af parameteren vil blive behandlet i afsnit 6.

$$R(L_{real}) = 1\% \qquad \text{Parameter 5}$$

Den samlede årlige lønstigning i procent bliver derfor

$$R(L_{nom}) = (1 + 2\%) \cdot (1 + 1\%) - 1 = 3,02\% \quad \text{Udregning 3.1}$$

3.2.4 Andre parametre

Offentlige ydelser

På trods af stadig voksende private opsparinger, udgør de offentlige ydelser for mange, en væsentlig del af pensionen i den tredje alder og ikke blot for lavindkomstgruppen eller personer, som ikke har fået sparet nok op til pension. Der vil i modelleringen alene blive inkluderet udbetalinger fra folkepensionens grundbeløb og folkepensionstillægget, hvorfor andre offentlige tilskud som f.eks. ældrecheck og boligydelse mv. ikke vil indgå.

Folkepensionens grundbeløb

$$\text{Folkepensionens grundbeløb, 2017} = 73.920 \text{ kr. årligt} \quad \text{Parameter 1}$$

Grundbeløbet antages at vokse med lønudviklingen defineret i afsnit 3.2.3 minus 0,3% (retsinformation.dk,1).

$$\text{Vækst i offentlige ydelser} = 2,73\% \quad \text{Parameter 6}$$

Modelleringen antager, at der ikke arbejdes under pensionering, hvorfor modregning i grundbeløbet ikke er inkluderet.

Folkepensionens pensionstillæg

$$\text{Folkepensionens pensionstillæg (enlig), 2017} = 78.612 \text{ kr.} \quad \text{Parameter 2}$$

$$\text{Folkepensionens pensionstillæg (gift eller samlevende), 2017} = 38.676 \text{ kr.}$$

For at minimere kompleksiteten vil modellen alene tage højde for førstnævnte sats, *enlig*. Tillægget lades vokse med den forventede udvikling i lønnen minus 0,3% pr. år (*Parameter 6*). Ved pensioneringstidspunktet beregnes dækningsgraden i faste priser ved det modellerede reale afkast, R_t (*Definition 3.5*), hvorfor de offentlige ydelser antages konstante i reale termer fra pensioneringstidspunktet.

Dødelighed og levetidsforbedringer

Som tal for den observerede dødelighed anvendes data for dødsintensiteten fra Finanstilsynets Levetidsmodel (Finanstilsynet, 2017.3). Tallene i (*Appendix C – Finanstilsynet Dødelighed*) repræsenterer sandsynligheden for at dø i en given alder for en kvinde hhv. en mand i år 2016. På baggrund af den fortsat stigende levealder er de observerede dødeligheder alene gældende i det år, de er observeret. For at tage højde for denne udvikling anvendes levetidsforbedringerne fra Finanstilsynet i Appendix C.

For hver periode antages det, at en given aldersgruppe vil opleve en forbedring i dødeligheden svarende til dødeligheden gange en, minus de konstante værdier i Appendix C (Finanstilsynet, 2017.2). Sandsynligheden for at dø (dødsintensiteten) i perioden for aldersgruppe x i periode t for kvinder, μ_K

$$\mu_K(x, t) = \mu_K(x, 2016) \cdot (1 - R_K(x))^{t-2016} \quad \text{Formel 3.9}$$

og for mænd, μ_M

$$\mu_M(x, t) = \mu_M(x, 2016) \cdot (1 - R_M(x))^{t-2016} \quad \text{Formel 3.10}$$

hvor $\mu(x, 2016)$ er den observerede dødsintensitet i år 2016 for aldersgruppe x og $R_M(x)$ er den konstante levetidsforbedring for mænd pr. periode for aldersgruppe x . For at få de observerede dødsintensiteter for 2017 niveau er dødeligheden for alle aldersgrupper (x) tilskrevet 1 års forbedring med den konstante levetidsforbedring for aldersgruppen $R(x)$ (*Appendix C*). Eksempler kan findes i Notat fra Finanstilsynet (Finanstilsynet, 2017.2).

Ud fra dødsintensiteterne inkl. levetidsforbedringer, kan man ved at lade tp_x betegne sandsynligheden for at være overlevet til tidspunkt t for alder x , beregne restlevetiden som (Steffensen, Ramlau-Hansen, 2016):

$$e_x = \int_0^{\infty} tp_x dt \quad \text{Formel 3.11}$$

og approksimere i diskret tid ved:

$$e_x \approx \sum_{t=1}^{\infty} p_x + 0,5 \quad \text{Formel 3.12}$$

Det antages, at dødsfaldene fordeler sig ligeligt over året, hvorfor der korrigeres med plus 0,5.

Individuelle parametre (input)

For at kunne opstille en pensionsprognose kræves, ud over de i afsnittet ovenfor beskrevne generelle parametre, at individuelle faktorer og subjektive præferencer for individet indgår i modellen. De inkluderede individuelle parametre er:

- Årlig løn i kr.
- Alder (i hele år).
- Ønsket pensionsalder (i hele år).
- Ønsket dækningsgrad af slutløn (DG*).
- Minimum dækningsgrad af slutløn (MG*)⁸.

3.3 Opstilling af model

Generelt om metodikken for modelleringen

Restriktioner, parametre mm. opstilles således, at simuleringer foretages i rækkefølge fra tidspunkt $t=0$, $t+1$, $t+2$, ..., T . Ved at lade simuleringen rulle 1 periode af gangen, undgås der problemer med look-ahead bias. Nedenstående parametre kan derfor ses, som værende begrænsninger for de enkelte perioder, τ for $\tau = 1, \dots, T$. Er der ikke angivet fodtegn, kan parameteren anses som konstant.

Indbetalinger og udtræk:

Der kan ikke foretages udtræk af opsparingen før pensioneringstidspunktet og alle indbetalinger forefalder ultimo året. En periode er svarende til et år. Derved bliver pensionsopsparingens værdi til prædiktionsperiode τ opsparingen fra sidste periode, plus afkastet i perioden, plus indbetalingen:

$$W_{\tau} = (1 - I_{OMK})I_{\tau} + (1 - PAL)R_{\tau} + W_{\tau-1} \quad \text{Definition 3.2}$$

⁸ Med 90% sikkerhed, målt som 10% fraktilen.

hvor

I_τ = Bidrag pct. af løn $\cdot$ løn $_\tau$

I_{OMK} = andelen af I hørende til forsikringsdækning

R_τ = periodens afkast før skat

PAL-skate = 15,3% (*Parameter 3*)

$W_{\tau-1}$ = sidste periodes opsparing

Således vil formuen for hver periode τ udvikle sig som

$$\Delta W_\tau = (1 - I_{OMK})I_\tau + (1 - 0,153)R_\tau \quad \text{Definition 3.3}$$

hvor periodens afkast (R) kan beregnes som

$$R_\tau = \alpha_\tau \frac{\delta S_\tau}{S_\tau} + \beta_\tau \frac{\delta B_\tau}{B_\tau} + (1 - \alpha_\tau - \beta_\tau)r_\tau \quad \text{Definition 3.4}$$

hvor α_τ, β_τ og $(1 - \alpha_\tau - \beta_\tau)$ beskriver periodens vægte. Periodens samlede afkast er givet som summen af produkterne i de respektive aktivklasser og vil således være defineret af henholdsvis vægtene, samt udviklingen i rente og fonde, hvor rebalancering over de 3 aktivklasser er muligt årligt (hver periode).

Hvis konstante vægte ønskes sælges aktivklasser, der har klaret sig bedst i perioden, og der købes tilsvarende op i aktivklasser, der har klaret sig relativt dårligere. Hvis et andet afkast/risiko forhold ønskes foretages en reallokering.

Det antages, at det ikke er muligt at geare investeringen eller at gå kort.

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 0 \\ \beta &\geq 0 \\ (1 - \alpha - \beta) &\geq 0 \end{aligned}$$

For simulationsforløbet vælges den risikoallokering, der minimerer indbetalingerne under 2 restriktioner:

- 1) at opsparingen udbetales som en livsvarig livrente og ydelsen på livrenten er på størrelse med den ønskede dækningsgrad

$$DG^* \geq E_t[DG_T] \quad \text{Restriktion 1}$$

hvor dækningsgraden beregnes som

$$DG_T = \frac{\left(\frac{W_T}{\sum_{t=T}^{\infty} e^{-R_{\tau}(t+0,5)} {}_t p_x} \right) + OY_T}{L_T} \quad \text{Definition 3.5}$$

hvor

DG^* er den ønskede dækningsgrad af slutlønnen ved pensionering.

L_T er den fremskrevne nominelle løn umiddelbart før pensionering,

R_{τ} er det kontinuerte tilskrevne reale afkast modelleret ved den introducerede 1-faktor model plus et fast risikotillæg på 2%⁹.

OY_T er folkepensionen (parameter 1 & parameter 2) fremskrevet med den nominelle lønudvikling minus 0,3% (parameter 6).

W_T er den simulerede opsparing til pensioneringstidspunktet (Definition 3.2).

$E_t[DG_T]$ er den gennemsnitlige dækningsgrad af simulationsforløbet med de valgte individuelle parametre og risikoforløb.

- 2) at der med væsentlig sikkerhed er et niveau for udbetalingerne over det valgte minimumskriterie.

$$DG(VaR_{10\%})_T \geq \text{Minimums dækningsgrad } (MG^*) \quad \text{Restriktion 2}$$

Hvor $DG(VaR_{10\%})_T$ er 10% fraktilen for simulationsforløbet foretaget i periode $t = 0$ målt i år T kr.

Den procentvise indbetaling minimeres under *Restriktion 1* og *Restriktion 2*.

$$\text{Min [Bidrag i \% af løn]} \quad \text{Restriktion 3}$$

⁹ I nominelle termer antages afkastet at følge renten til tidspunkt τ plus 2%, svarende til inflationen. I reale termer vil afkastet være svarende til $R_{\tau} = r_{\tau}$.

således, at den valgte ønskede dækningsgrad i pct. af lønnen (DG^*), samt minimum dækningsgraden (MG^*) begge er overholdt. Bidragene som pct. af lønnen er holdt konstante for hele indbetalingsperioden.

3.4 Fastsættelse af værdier for parametrene

Den korte rente tager udgangspunkt i et initialt niveau, defineret som nationalbankens diskonto (Nationalbanken, 2017).

$$r_0 = 0\% \quad \text{Parameter 7}$$

For parametrene i rentestrukturmodellen anvendes følgende værdier (Boulier et. al, 2000):

$$a = 20\% \quad \text{Parameter 8}$$

$$K = 20 \text{ år} \quad \text{Parameter 9}$$

$$\sigma_S = 20\% \quad \text{Parameter 10}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_S^2 - \sigma_2^2} = 19,08\% \quad \text{Parameter 11}$$

$$\sigma_2 = \sigma_S \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_S} \right) = 20\% \cdot 30\% = 6\% \quad \text{Parameter 12}$$

$$\text{Korrelation med renten, } -\frac{\sigma_2}{\sigma_S} = -30\% \quad \text{Udregning 3.2}$$

For b (long-term mean) og rentens volatilitet anvendes

$$b = 2\% \quad \text{Parameter 13}$$

$$\sigma_r = 0,5\% \quad \text{Parameter 14}$$

hvilket giver et estimat for volatiliteten i obligationsfonden på

$$\sigma_B = \frac{0,005 * (1 - e^{-0,2*20})}{0,20} = 2,5\% \quad \text{Parameter 15}$$

I modelleringen er anvendt en konservativ risikopræmie for aktiefonden på 4%.

Risikopræmien er udledt med udgangspunkt i Fama and French (2002), som beregner en historisk risikopræmie for aktier på 2,5% korrigeret for inflation¹⁰. Risikopræmien er

¹⁰ Fama and French anvender S&P500 dividender og indtjenings vækst til at beregne en risikopræmie på 2,5% korrigeret for inflation for perioden 1951-2000.

justeret fra et brutto- til et nettoafkast fra 4,5% til 4% under den implicitte forudsætning, at forbrugeren forventes at betale 0,5%-point i investeringsomkostninger. Den i modelleringen anvendte risikopræmie på 4% er svarende til et afkast på aktier på mellem- til langt sigt, der er 1%-point lavere end de anvendte forudsætninger fra brancheforeningen (Forsikring&Pension, 2018).

$$\theta_S = \sigma_1 \lambda + \sigma_2 \lambda_r = 4\%$$

Parameter 16

Boulier (Boulier et. al, 2000) anvender en risikopræmie for obligationsfonden på 1,5%. For at bibeholde relevansen i modelleringen fastholdes det, af brancheforeningen anvendte, spread mellem aktier og obligationer på 3% (Forsikring&Pension, 2018) svarende til en risikopræmie på obligationsfonden på 1%. Dette stemmer overens med den af Boulier fastsatte risikopræmie for obligationer fratrullet 0,5%-point til investeringsomkostninger.

$$\theta_B = \sigma_B \lambda_r = 1\%$$

Parameter 17

I afsnit 6.2 behandles følsomheden i dækningsgraden ved en ændring i risikopræmierne og resultaterne sammenlignes med de af brancheforeningen anvendte afkastforudsætninger.

4. Modellering og simulering

Dette afsnit søger at implementere de i afsnit 3 definerede parametre og det teoretiske fundament i en samlet model. Afsnittet er opbygget således at:

Afsnit 4.1 har fokus på simulering af den korte rente, obligationsfonden og aktiefonden.

Afsnit 4.2 har fokus på beregning af pensionsudbetalingen ud fra den i afsnit 3.2.4 definerede dødsintensitet inkl. levetidsforbedringer, samt indbetalingerne som funktion af lønnen inkl. lønstigninger.

Afsnit 4.3 er den samlede model, der anvendes til simulering af dækningsgrader, anbefalet opsparing og anbefalet risikoprofil under de gældende restriktioner.

4.1 Simulering af aktivpriser

Da de i afsnit 3 opstillede SDEer tager udgangspunkt i infinitesimale ændringer i aktivpriserne, kræver det en diskret opstilling for værdier af τ for at kunne simulere fremtidige værdier for den korte rente, samt aktie- og obligationsfonden.

Da hver simulering af renteniveau og aktivpris er betinget af r_t , kræver det en rullende model i diskret tid for små tidsændringer. De præsenterede diskretiseringer for de 3 aktivklasser tager udgangspunkt i en ændring i et enkelt tidsstep δt .

Renten

Vasiceks 1-faktor model kan diskretiseres ved $r_{t+\delta t}$ afhængig af r_t (Brandimarte, 2014)

$$r_{t+\delta t} = r_t e^{-a_r \delta t} + b(1 - e^{-a_r \delta t}) + \epsilon_r \cdot (-\sigma_r) \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_r \tau}}{2a}} \quad \text{Formel 3.13}$$

hvor

$$\epsilon \sim N(0,1)$$

og σ indgår med negativt fortegn for at sikre negativ korrelation mellem renteændringer og ændringer i aktie- og obligationsfonden.

Man kan da til enhver tidsperiode (τ) beregne den forventede værdi af renten som

$$E_t[r_\tau] = r_t e^{-a_r \tau} + b(1 - e^{-a_r \tau}) \quad \text{Formel 3.14}$$

hvor det fremgår, at $E_t[r_\tau] \rightarrow b$ når $\tau \rightarrow \infty$, og returhastigheden afgøres af værdien for a .

Obligations- og aktiefonden

Betinget af r_t kan nu opstilles en diskretisering for prisen af obligations- og aktiefonden.

For obligationsfonden gælder (Brandimarte, 2014)

$$B_{t+\delta t} = B_t e^{(r_t + \theta_B - 0,5\sigma_B^2)\delta t + \sigma_B \sqrt{\delta t} \epsilon_r} \quad \text{Formel 3.15}$$

hvor

$$\epsilon_r \sim N(0,1)$$

hvor der for aktiefonden indgår 2 parametre for usikkerheden, σ_1 og σ_2 .

$\sigma_2 > 0$ er ensbetydende med en positiv korrelation mellem aktie- og obligationsfonden og

$\sigma_2 = 0$ er ensbetydende med uafhængighed mellem aktiefonden og obligationsfonden

(Formel 3.4). Uanset værdier for σ_2 vil driften i S være styret af renteniveauet $r(\tau)$ og den konstante værdi for risikopræmien, θ_S .

$$S_{\tau+\delta t} = S_{\tau} e^{(r_{\tau} + \theta_S - 0,5\sigma_1^2 - 0,5\sigma_2^2)\delta t + \sigma_1\sqrt{\delta t}\epsilon + \sigma_2\sqrt{\delta t}\epsilon_r)} \quad \text{Formel 3.16}$$

hvor

$$\epsilon_r \sim N(0,1), \text{ samt } \epsilon \sim N(0,1) \text{ og uafhængige}$$

4.1.2 Simulering

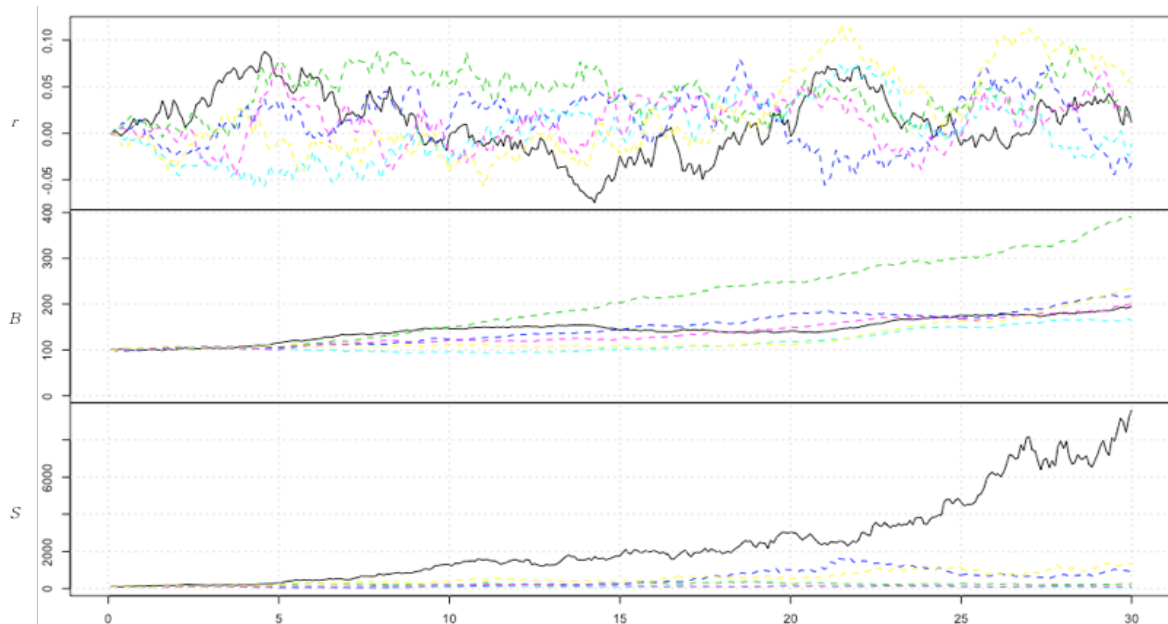
Der kan nu foretages simuleringer på de opstillede diskretiseringer. For at komme tættere på den kontinuerte proces for aktivpriserne opdeles et år i 12 tidssteps på $\delta t = \frac{1}{12}$ i

afsnittet. Simuleringerne foretages på aktie- og obligationsfonden for $S(0)$ og $B(0)$ lig 100.

Renten simuleres som renteniveauet $r(\tau)$ for $\tau = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, 30$. Kontantbeholdningen som

aktivklasse ville tilsvarende kunne laves ud fra simuleringerne i renten. Renten er valgt for at tydeliggøre betydningen af renteniveauet og renteændringerne.

Figur 4: 6 simulerede stier for $r(\tau)$, $B(\tau)$ og $S(\tau)$ over 30 år.



Kilde: Egen tilvirkning. R-kode kan findes i appendix D

4.2 Opsparing og pensionsydelse

Ved pensioneringstidspunktet, T , beregnes ydelsen for livrenten med udgangspunkt i formuen umiddelbart før pensionering, W_T (afsnit 3.3)

$$Y_T = \frac{W_T}{\sum_{t=T}^{\infty} e^{-R_t(t+0,5)} {}_t p_x} \quad \text{Formel 4.1}$$

hvor Y_T er den simulerede værdi af pensionsydelsen ud fra indbetalinger, vægte samt stokastisk forløb af aktivpriserne. R_t er det simulerede realafkast i udbetalingsperioden, målt som det simulerede renteforløb plus et antaget nominelt risikotillæg på 2% svarende til inflationen, hvorfor $R_t = r_t$ for $t=T+1, \dots, \infty$. Dækningsgraden ift. lønnen umiddelbart før pensionering kan beregnes som

$$DG_T = \frac{Y_T + OY_T}{L_T} \quad \text{Definition 4.1}$$

Beregning og visualisering

Lønudvikling

Lad L_0 betegne løn i dag, x nuværende alder og m ønsket tilbagetrækningsalder, således at $m-x = T$. Lønnen umiddelbart før pensionering er givet som

$$L_T = L_0 (1 + R(L_{nom}))^T \quad \text{Formel 4.2}$$

Eksempel: $L_0 = 350.000$ kr., $m=67$, $x=40$

$$L_{27} = 350.000(1 + 3,02\%)^{(67-40)} = 781.537 \text{ kr.} \quad \text{Udregning 4.1}$$

Ønskes en dækningsgrad af slutlønnen på $DG^* = 70\%$ skal pensionen for den pågældende opsparer inklusive offentlige ydelser mm. være på 547.076 kr. (2044-niveau).

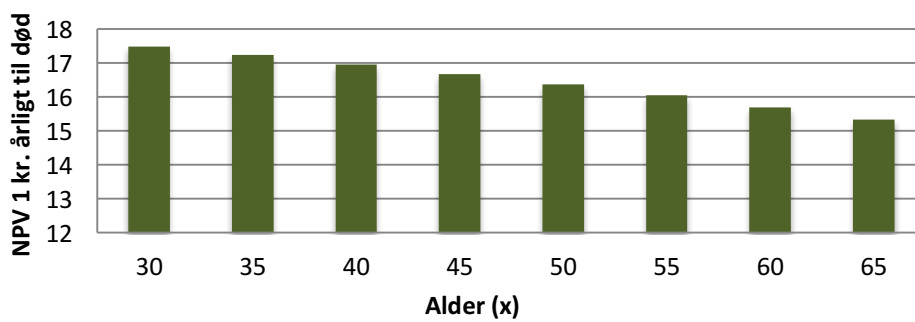
Nødvendig opsparing for ønsket livsvarig ydelse

For at få et indtryk af opsparingens tilstrækkelighed kan den stokastiske rente inklusive risikotillæg, R_t , i formel 2.5 erstattes med en konstant real rente på $R_{\text{konstant}} = 2\%$, således at

$$\sum_{t=T}^{\infty} e^{-R_{\text{konstant}}(t+0,5)} {}_t p_x \quad \text{Formel 2.5 konstant } R$$

deterministisk kan udregnes for forskellige aldre x , inklusive levetidsforbedringer, og en fast udbetalingsalder, m .

Figur 5: NPV 1. kr. årligt fra $m=67$ indtil død, $R_{\text{konstant}} = 2\%$



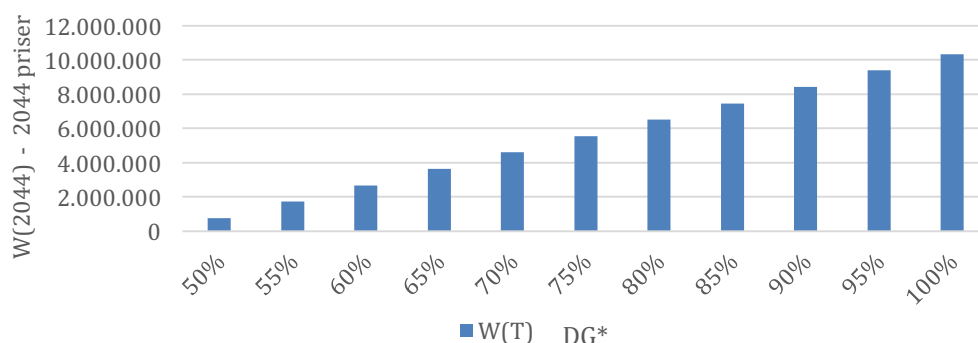
Kilde: Egen tilvirkning

Ved at isolere for formuen til pensioneringstidspunktet, W_T , kan de i figur 5 illustrerede NPV-satser relateres til opsparingens tilstrækkelighed. Ved at erstatte DG_T med den ønskede dækningsgrad af slutlønnen, DG^* , bestemt af den individuelle opsparer, kan der isoleres for formuen

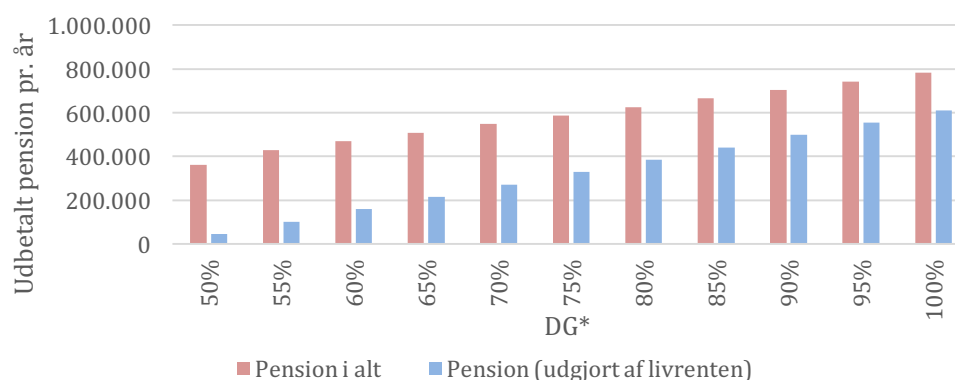
$$W_T = (DG^* \cdot L_T - OY_T) \cdot \sum_{t=T}^{\infty} e^{-R_{\text{konstant}}(t+0,5)} {}_t p_x \quad \text{Formel 4.3}$$

hvor renten i dette tilfælde er antaget konstant for statisk at kunne præsentere den nødvendige formue. Det er herved muligt at plote nødvendig formue mod forskellige ønskede dækningsgrader (DG^*) for et givent individ.

Figur 6: Nødvendig opsparing for forskellige ønskede dækningsgrader ved fast rente ($R_{\text{konstant}} = 2\%$, $x=40$, $m=67$, $L_0=350.000$ kr.) målt i år 2044-priser.



Figur 7: Pensionen fordelt over offentlige ydelser og livrente for forskellige dækningsgrader (år 2044-priser).



Kilder figur 6 & 7: Egen tilvirkning.

Med en ønsket dækningsgrad på 50% kræver det en meget lille opsparing for det givne individ, hvorimod kravet til opsparingens størrelse vokser markant med den ønskede dækningsgrad. Idet pensionsudbetalinger fra privat opsparing på over 155.861 kr.¹¹ (år 2044 kr.) modregnes med 30,9% i folkepensionstillægget¹², indsnævres forskellen mellem de to søjler i Figur 7 fra en dækningsgrad på 65%.

Simulering af nutidsværdien af 1 kr. udbetalt livsvarig livrente

I ovenstående figurer antoges renten konstant. I modelleringen af dækningsgraderne vil den korte rente være stokastisk. Med andre ord vil den enkelte opsparer være eksponeret både over for renten før pensionering og efter pensionering.

¹¹ 69.800 i 2017 (borger.dk) fremskrevet til år 2044-niveau.

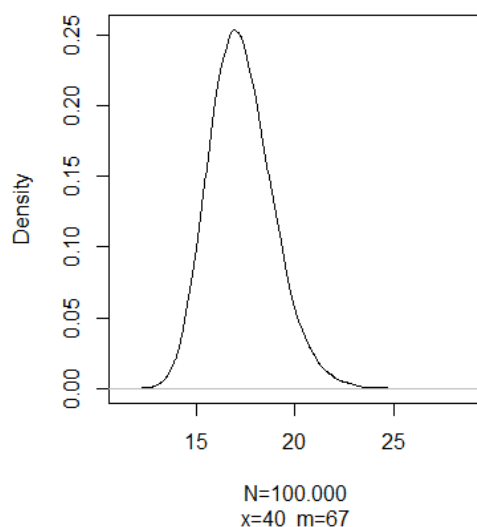
¹² Udbetalinger fra KP og AO giver ikke anledning til modregning.

Simuleringerne tager udgangspunkt i formlen for nutidsværdien af 1 kr. livsvarig udbetaling

$$\sum_{t=T}^{\infty} e^{-R_t(t+0,5)} {}_t p_x \quad \text{Formel 2.5}$$

hvor $R_t \approx r_t + \ln(1 + \text{risikopræmie} - \text{inflation}) \approx r_t$ således, at investor opnår den kontinuerte tilskrevne risikofrie rente i reale termer, da risikopræmien på 2% og den antagne konstante inflation på 2% approksimativt udligner hinanden.

Figur 8: Densitetsplot for NPV af 1. kr. livsvarig udbetaling.



Kilde: Egen tilvirkning. R kode i appendix D.1

Ved 100.000 simuleringer af rentestien kan densitetsfunktionen af $\sum_{t=T}^{\infty} e^{-R_t(t+0,5)} {}_t p_x$ illustreres som vist i figur 8 (R-kode i Appendix 5).

Et højt niveau for renten i udbetalingsfasen vil være fordelagtigt for pensionisten, da dette vil føre til højere forrentning af formuen, eller omvendt en lavere omkostning for pensionsselskabet målt i nutidskroner (en lav værdi af formel 2.5). Et lavt renteniveau og stigende levetider vil derfor, som beskrevet i afsnit 2 og illustreret i Figur 1: *Udviklingen i middellevetid og renteniveau*, sætte pres på størrelsen af pensionsydelsen. Et fald i renten vil på den anden side betyde en stigning i prisen på obligations- og aktiefonden grundet den negative korrelation og en afledt positiv effekt på pensionsformuen på kort sigt (formel 3.3).

4.3 Simulering af dækningsgrader

Nu kan de simulerede aktivpriser for indbetalings- og udbetalingsfasen samt de introducerede konstanter kombineres for at simulere dækningsgrader med forskellige risikoforløb anvendt i praksis.

Der tages i det følgende udgangspunkt i 5 risikoprofiler med forskellige forløb for vægtene i de respektive aktiv klasser (appendix E), hvoraf de 3 risikoprofiler stammer fra livscyklusproduktet Danica Balance, afbilledet i figur 2. Den fjerde risikoprofil er en konstant, årlig rebalanceret portefølje med 50% aktier og 50% obligationer. Den sidste risikoprofil tager udgangspunkt i et simpelt livscyklusforløb, hvor aktieandelen nedtrappes hver periode og beregnes som $1 - \text{alder}/100$, og den resterende del placeres i obligationsfonden.

Eksemplerne beregnes på en 40-årig mand ($x=40$) med antaget folkepensionsalder 67 ($m=67$). Et initialt indskud, dvs. opsparingens størrelse til $t=0$, på 500.000 og $L_0 = 350.000$. Der indbetales 18% af lønnen til pension, hvoraf 20% af indbetalingerne går til forsikringsdækning (appendix F).

Tabel 1: W_{27} for forskellige risikoforløb. $N=100.000$

$L_0=350.000$ kr., Indbetaling første år: $0,8 \cdot 18\% \cdot 350.000 = 50.400$, initial opsparing 500.000 kr., $x=40$ og $m=67$.

Laveste Risiko							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	3.386.017	3.519.642	3.765.189	4.063.980	4.404.369	4.748.445	4.969.832
(1 - alder/100)% Aktier							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	3.013.182	3.254.145	3.729.048	4.372.584	5.186.542	6.102.247	6.742.357
Middel Risiko							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	2.982.873	3.232.263	3.728.848	4.406.710	5.268.464	6.254.075	6.952.951
Konstant Vægte 50% aktier og 50% obligationer							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	2.849.235	3.126.192	3.678.636	4.439.973	5.413.935	6.523.611	7.305.742
Højeste Risiko							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	2.598.398	2.925.593	3.600.600	4.647.966	6.104.707	7.983.566	9.460.368

Kilde: Egen tilvirkning, R kode i appendix D.1

Simulationsforløbene resulterer i middelværdier der, for de 5 strategier ved 100.000 simuleringer for hvert risikoforløb varierer fra 4.107.256 kr. for den laveste risiko, 4.616.992 kr. for middel risiko og 5.159.008 kr. for den højeste risiko. Som forventet, giver en større risiko anledning til et højere forventet afkast.

Udbetalingsfasen

Simuleringerne kan nu udvides til at inkludere udbetalingsfasen. Dækningsgraderne af slutlønnen simuleres for det introducerede individ som

$$DG = \frac{Y_{27} + OY_{27}}{L_{27}} \quad \text{Definition 4.1}$$

hvor

$$L_{27} = 781.537 \quad \text{Udregning 4.1}$$

og

$$Y_{27} = \frac{W_{27}}{\sum_{t=27}^{\infty} e^{-R_{\tau}(t+0,5)} {}_t p_x} \quad \text{Formel 4.1}$$

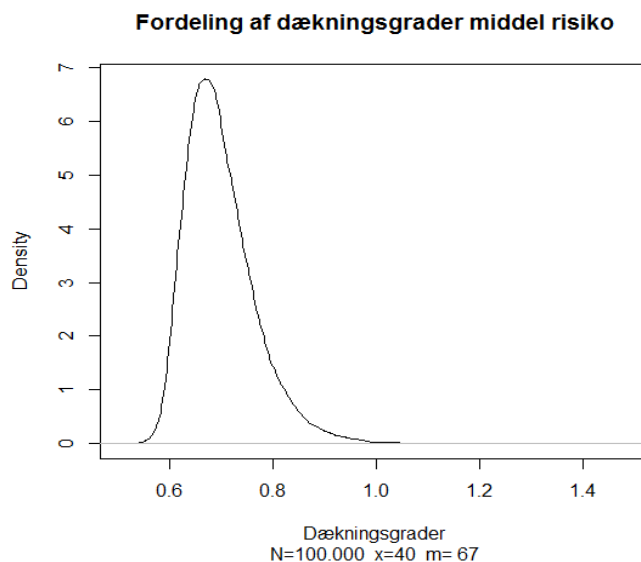
Tabel 2: Fraktilark for dækningsgrader, $N=100.000$

Laveste Risiko - Middelværdi = 0,672							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
DG	0,625	0,634	0,650	0,670	0,692	0,714	0,729
(1-alder)% aktier - Middelværdi = 0,696							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
DG	0,611	0,624	0,650	0,686	0,730	0,780	0,816
Middel Risiko - Middelværdi = 0,698							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
DG	0,609	0,623	0,650	0,687	0,734	0,787	0,826
Fast andel 50% aktier - Middelværdi = 0,702							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
DG	0,6032	0,6182	0,648	0,689	0,741	0,801	0,844
Højeste Risiko - Middelværdi = 0,728							
Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
DG	0,591	0,609	0,645	0,699	0,777	0,875	0,953

Kilde: Egen tilvirkning, R-kode i appendix D.1

I appendix G er vedlagt densitetsplots for 100.000 simuleringer ved hvert risikoforløb.

Figur 9: Fordeling af dækningsgrader ved middel risiko



Kilde: Egen tilvirkning. R-kode i appendix D.1

Det ses, at dækningsgraderne for de forskellige risikoforløb har en betydeligt mindre variation end gjaldt for formuen. Fra tabel 2 observeres det, at $VaR_{10\%}$ for dækningsgraderne varierer mellem 60,9% og 63,4% afhængig af den valgte risikoprofil. Middelværdien i fraktilerne for det valgte individ varierer mellem 67,2% for den laveste risiko og 72,8% for det højeste risikoforløb.

Af tabel 3 fremgår, at en betydelig del af det pågældende individs dækningsgrad udgøres af folkepensionens grundbeløb og folkepensionstillægget. Ved en dårlig afkast-sti (10%-fraktilen) vil livrenteydelsen alene udgøre 23,6% af slutlønnen pr. år.

Tabel 3: Fraktil ark for livrente ydelsen som pct. af L_{27}

Middel Risiko – Middelværdi = 0,345

Fraktiler	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	0,216	0,236	0,275	0,329	0,396	0,475	0,531

Kilde: Egen tilvirkning. R-kode i appendix D.1

Ved at sammenholde tabel 2 og tabel 3 fremgår, at de offentlige ydelser har en dæmpende effekt på udsvingene i ydelserne for det pågældende individ, som tidligere påvist i det statiske tilfælde i figur 7. Idet faldende folkepensionstillæg ved stigende ydelser fra livrenten giver en risikoabsorberende effekt, da en dårlig afkaststi vil resultere i et højere tillæg. Modsat vil høje afkast og en høj livrenteydelse resultere i et mindre tillæg. Denne dæmpende effekt kan visualiseres ved at observere interkvartilbredden i de to fraktilark¹³.

$$IQR_{DG} = 0,734 - 0,650 = 0,084 \quad \text{Resultat 4.1}$$

$$IQR_{Liv,DG} = 0,396 - 0,275 = 0,121 \quad \text{Resultat 4.2}$$

Opstilling af den samlede model

Indtil nu har simuleringerne omfattet en på forhånd fastsat indbetaling som procent af lønnen. Det er nu muligt at udvide simuleringerne til at omfatte et ukendt niveau for indbetalingerne. For at denne udvidelse er mulig kræves de subjektive parametre for det enkelte individ specificeret, *ønsket dækningsgrad* (DG^*) og minimum dækningsgrad (MG^*). Simulering foretages for de 5 respektive risikoforløb (vægte), således at indbetalingerne forsøges minimeret under de gældende restriktioner. Simuleringerne tager udgangspunkt i en startindbetaling på 8% af lønnen over hele indbetalingsperioden. Givet, at middelværdien eller minimum dækningsgraden *ikke* er over det ønskede niveau, stiger indbetalingerne med 0,25% af lønnen og 100.000 nye stier for aktivpriserne simuleres med et indbetalingsniveau på 8,25% af lønnen i hele indbetalingsperioden. Simuleringerne rulles med stigende indbetalinger indtil 10%-fraktilen for dækningsgraden er over den ønskede minimum dækningsgrad (MG^*) og middelværdien for dækningsgraden er over DG^* .

¹³ Bemærk, at dækningsgraderne uden og med offentlige ydelser udgør 2 forskellige simulationsforløb, hvorfor sammenligningen alene er approksimativ.

5. Resultater

Afsnittet er delt op i to dele. I første del tages i afsnit 5.1–5.4 udgangspunkt i 2 individer, for hvem, der med store simulationsforløb bestemmes den nødvendige opsparing ved forskellige grader af risikovillighed. I afsnit 5.5 laves yderligere analyser med baggrund i faste indbetalinger som pct. af lønnen, med henblik på at udlede, hvor stor en dækningsgrad, der er realistisk, samt hvor meget risiko, en lønmodtager, der kun indbetaler den af arbejdsmarkedsparterne fastsatte procentsats, vil skulle acceptere ift. den forventede dækningsgrad.

Afsnit 5.6 fokuserer på en række simulationsforløb ved alternative aldre, risikovillighed, lønniveauer og formuer for at belyse effekten på den nødvendige opsparing ved forskellige historiske afkast, samt effekten af opsparing i de første år på arbejdsmarkedet eller manglen på samme.

Nødvendig opsparing og risikoprofiler for 2 individer

I afsnit 5.1–5.5 tages der udgangspunkt i to individer, for hvilke karakteristika er opsummeret i tabel 4.

Tabel 4: *Karakteristika for valgte individer*

	Individ 1	Individ 2
Køn	Mand	Mand
Alder	40	40
Nuværende løn	350.000 kr.	700.000 kr.
Pensionsalder	67	67
Pensionsformue i dag	500.000	1.000.000
Ønsket dækningsgrad	70% af lønnen før pension.	70% af lønnen før pension.

Kilde: Egen tilvirkning.

For de introducerede fiktive individer simuleres under restriktionerne ønsket dækningsgrad på 70% af slutlønnen og 3 forskellige grader af minimum dækningsgrad (MG^*) ved hvert risikoforløb for:

- En meget risikoavers investor, der gerne vil være næsten sikker på at opnå den ønskede dækningsgrad, $MG^*=65\%$.
- En almindelig lønmodtager, der gerne vil acceptere mulige udsving i dækningsgraden for en højere forventet dækningsgrad, $MG^*=60\%$.
- En investor med en relativ stor appetit for risiko, $MG^*=50\%$.

For hvert af de 2 introducerede individer køres således 3 simulationsforløb på 5 risikoprofiler.

Initialt noteres det, at de offentlige ydelser for individ 1 vil udgøre en væsentlig del af pensionen, hvorimod det for individ 2 vil kræve en betydeligt større opsparing at opnå samme dækningsgrad, jf. tabel 2 og tabel 3. Således vil investor 2 ved "Middel risiko" og en indbetaling i pct. af lønnen på 18%, hvoraf 20% går til forsikringsdækning, have indkomst og dækningsgrader, som opsummeret i Tabel 5.

Tabel 5: W_{27} og DG for individ 2 ved Middel Risiko. $N=100.000$

Middel Risiko - Individ 2							
Fraktil	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(T)	kr. 5.981.950	kr. 6.465.248	kr. 7.443.506	kr. 8.796.262	kr. 10.530.102	kr. 12.510.139	kr. 13.870.344
DG(T)	0,380	0,393	0,420	0,457	0,504	0,572	0,627
DG Livrente	0,217	0,236	0,275	0,33	0,398	0,476	0,527
Middelværdi W(T)	kr. 9.225.165						
Middelværdi DG(T)	0,473						
Middelværdi DG(Livrente)	0,346						

Kilde: Egen tilvirkning. R kode i appendix D.2

Sammenlignes ovenstående W_T fraktiler med tabel 1, som viser fraktiler ved forskellige risikoforløb for individ 1, observeres det, at de som forventet er dobbelt så store.

Sammenlignes dækningsgraderne for livrenten med Tabel 3 er de på samme niveau.

Således udgøres det større krav til indbetalingsgraden af, at de offentlige ydelser udgør en mindre del af de samlede pensionsudbetalinger, hvor pensionstillægget bortfalder helt ved

en ydelse på livrenten over 669.127 kr. (2044-priser) svarende til en DG(Livrente) for I.2 på 42,8%.

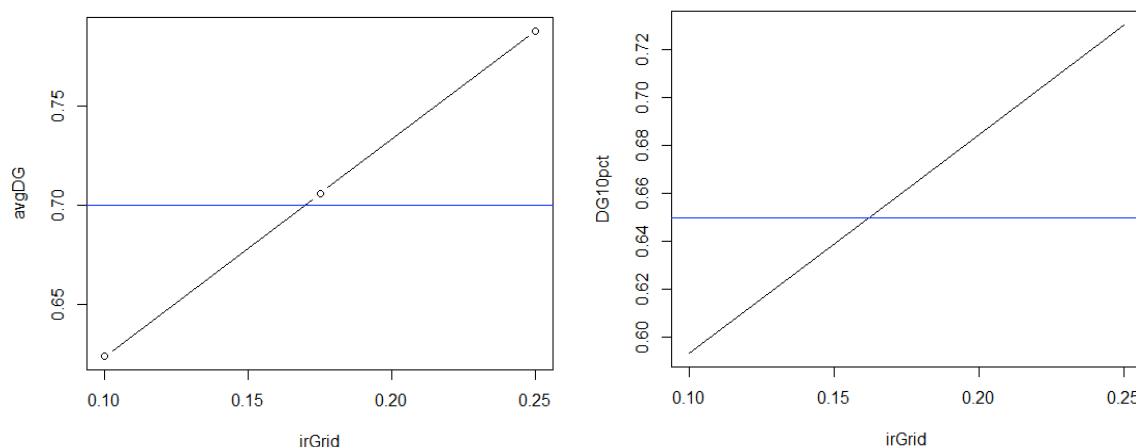
5.1 Høj grad af sikkerhed, $MG^* = 65\%$

De anvendte indbetalingsgrader i figurerne er *efter* omkostninger til forsikringsdækning. Som følger tillægges 25% (svarende til 20% af indbetalingerne til forsikringsdækning) oveni indbetalingsniveauet op til 3,6% af lønnen¹⁴. I præsentationen af resultaterne vil det fremgå, hvad kravene til indbetalingsniveauet er *inklusive* omkostninger til forsikringsdækning.

For begge individer gælder det, at den høje grænse for $VaR_{10\%}$ giver relativt lidt plads til udsving i dækningsgraderne. Den høje minimum dækningsgrad vil hurtigt blive den begrænsende restriktion ved en lav grad af risikovillighed. Som resultat heraf vil begge individer ved $MG^*=65\%$ have det laveste indbetalingsniveau ved livscyklusforløbet "Laveste Risiko".

Figur 10: Individ 1 – "Laveste Risiko"

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



Kilde: Egen tilvirkning. R kode i appendix D.2

¹⁴ Forsikringsdækninger er typisk en del af arbejdsmarkedspensionsordningerne på ml. 10-18% (svarende til ml. 2,0-3,6% i bidrag til forsikringer som pct. af lønnen). Se evt. afsnit 1.5 Afgrænsning.

Figur 10 viser kravene til indbetalingerne, hvor X-aksen repræsenterer indbetalingsgrader som pct. af lønnen, og y-aksen repræsenterer hhv. den forventede dækningsgrad og 10%-fraktilen.

Et succeskriterie for minimeringen af indbetalingerne er, at ingen af restriktionerne er særligt bindende. I tilfældet ved $MG^*=65\%$ og "Laveste Risiko" kan det i figur 10 observeres, at de to restriktioner er tætte, men at den forventede dækningsgrad udgør den bindende restriktion. Dette bekræftes af modellens resultater, hvor opsparingskravet er 17% for individ 1 ved en foretrukken høj grad af sikkerhed (herefter $I.1_{65\%}$).

$$\text{Min. Indbetalingsniveau } I.1_{65\%} = 17\% + 3,6\% = \mathbf{20,6\%} \quad \text{Resultat 5.1}$$

$$E_t[DG] = 0,70 \quad \text{Resultat 5.2}$$

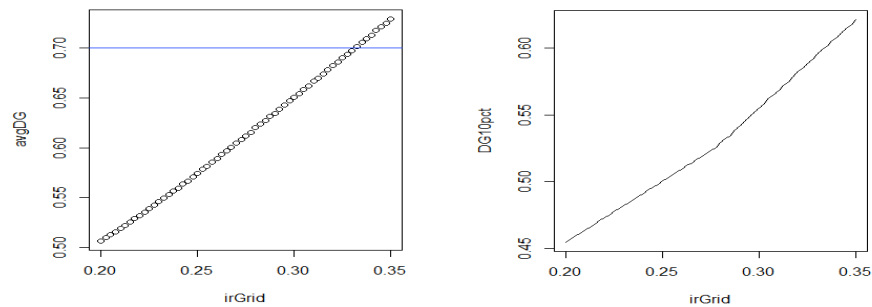
$$VaR_{10\%} = 0,6575 \quad \text{Resultat 5.3}$$

Givet, at $I.1_{65\%}$ alene vil acceptere en deviation fra den forventede DG på maksimalt 5% med 90% sikkerhed, kræves pensionsbidrag på 20,6% af lønnen om året under de givne forudsætninger, hvoraf 3,6% går til forsikringsdækninger.

Forskellen i indbetalingsgraden mellem resultaterne fra vægtene i "Laveste Risiko" og "Middel Risiko" er små. For "Middel Risiko" gælder det, at indbetalingsgraden før begge restriktioner er overholdt, er 17,5% årligt, dvs. 0,5%-point højere, hvor den dertil svarende forventede dækningsgrad er 73,23%, og $VaR_{10\%} = 0,6507$. MG^* vil ved denne højere risiko udgøre den bindende restriktion. Dette kan bekræftes ved at køre simuleringerne for en fast indbetalingsgrad på 17% for "Middel Risiko", hvor $VaR_{10\%}$ findes til 0,646 (appendix H). $I.1$ skal følgelig tage marginalt mere risiko for at få en forventet dækningsgrad, der er 2,3%-point større end ved "Laveste Risiko" (appendix H). De valgte restriktioner er værd at undersøge nærmere i forløb, hvor den ene af restriktionerne er særligt bindende, for at vurdere om en justering af værdierne giver et mere favorabelt afkast/risiko forhold set fra individets synspunkt.

Figur 11: *Individ 2 – "Laveste Risiko"*

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



Kilde: Egen tilvirkning. R kode i appendix D.2

I figur 11 fremgår det, at $VaR_{10\%}$ er den limiterende faktor for individ 2. Kriteriet for den forventede dækningsgrad opnås ved en indbetalingsgrad til opsparingen på 33,5%, hvor 10%-fraktilen først er overholdt ved en indbetalingsgrad på 37,25%.

$$\text{Min. indbetalingsniveau } I.2_{65\%} = 37,25\% + 3,6\% = 40,85\% \quad \text{Resultat 5.4}$$

$$E_t[DG] = 0,764 \quad \text{Resultat 5.5}$$

$$VaR_{10\%} = 0,65 \quad \text{Resultat 5.6}$$

Variationen i dækningsgraden for den laveste risikokategori er så stor, at den forventede dækningsgrad skal løftes til et niveau på 76,4% på trods af restriktionen på 70%, hvilket giver anledning til at simulere forløbet for et mere konservativt risikoforløb bestående af 100% obligationer. Simulationsforløbet resulterer i en højere indbetalingsgrad på 38% før forsikringsomkostninger, før restriktionerne er overholdt (appendix I). Det kan udledes, at den balancerede portefølje i "Laveste Risiko" giver *både* et højere forventet afkast, en større 10%-fraktil og giver anledning til mindre årlige indbetalinger end en tilsvarende portefølje med 100% obligationer.

Det bemærkes imidlertid, at minimum dækningsgraden stadig er den limiterende faktor. For at kunne afkræfte, at en lavere indbetalingsgrad opfylder kravene ved at holde formuen kontant, simuleres et forløb for $I.2_{65\%}$ ved 100% i kontantbeholdningen. Som forventet af simulationsforløbet er ingen af restriktionerne overholdt ved et indbetalingsniveau på 40% af lønnen (appendix J). Dette skyldes et lavere forventet afkast over en lang tidshorisont og en manglende diversifikationseffekt (*Formel 3.13*). For at

afkræfte, at diversifikationseffekten er den afgørende faktor, men nærmere det lavere forventede afkast over den lange tidshorisont, kan vises, at hverken en blanding af 50% kontanter og 50% obligationer eller en ligevægtet portefølje med 1/3 i hvert aktiv stiller individet bedre end de i Resultat 5.4–5.6 fundne output ved ”Laveste Risiko” (appendix K).

Sammenholdes resultaterne for $I.2_{65\%}$ med vægtene fra ”Middel Risiko” observeres et markant højere krav til indbetalingerne på 39,5%, mod 37,25% i ”Laveste Risiko” før $VaR_{10\%} = MG^* = 0,65$. De større indbetalinger og det højere risikoforløb giver tilsvarende anledning til en markant højere forventet dækningsgrad på 87,3%.

Det kan heraf udledes, at en investor med den givne tidshorisont, der ønsker meget små udsving i pensionsydelsen vil skulle have bidrag på over 40% af lønnen.

Denne høje indbetalingsgrad svarer til, at $I.2$ med arbejdsmarkedspensionsbidrag på 18%, hvoraf 6% er selvbetalt, ville skulle indbetale over 22% af lønnen udover hans obligatoriske ordning, hvilket ved en dækningsgrad på 70% af lønnen reelt ville være en lønnedgang på 2%-point sammenlignet med DG^* . Sammenlignes i stedet med $E_t[DG]=76,4\%$, vil individ 2 i det skitserede forløb potentielt opleve en økonomisk forbedring ved pensionering, hvilket ikke er intentionen med en pensionsopsparing.

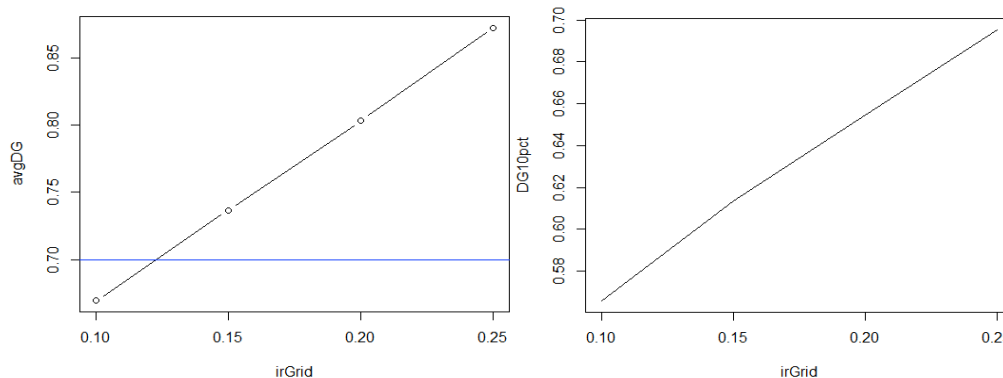
For et individ, der ønsker en høj grad af sikkerhed for de udbetalte pensionsydelser, er andelen af de offentlige ydelser afgørende for hvor meget risiko, der kan tages i investeringerne, da det faste ben samt modregningen i folkepensionstillægget giver dækningsgraderne en stabiliserende effekt. For $I.1_{65\%}$, hvor en stor del af dækningsgraden er givet fra de offentlige ydelser, vil kravet til pensionsbidragene på 20,6% inklusive forsikringsomkostninger være på et mere realistisk niveau. Hvis $I.1$ er villig til at tage marginalt mere risiko, er forskellen i 10%-fraktilen for risikoforløbene ”Laveste Risiko” og ”Mellem Risiko” alene 1,1%-point med en tilsvarende højere forventet dækningsgrad på 2,3%-point. For $I.2_{65\%}$ er andelen af de offentlige ydelser mindre, hvorfor kravene til indbetalingerne og de følgende udsving i livrenten større. Kravene til indbetalingerne for $I.2$ er af en sådan størrelse, at en mindre dækningsgrad, en senere pensionsalder eller en accept af yderligere udsving i dækningsgraderne ville være mere hensigtsmæssigt for mange.

5.2 Nogen usikkerhed, $MG^* = 60\%$

Ved at tillade en større grad af usikkerhed i dækningsgraderne kan det observeres, at den risikoprofil, der minimerer indbetalingerne for de to individer, divergerer markant.

Figur 12: Individ 1 – ”Højeste Risiko”

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



Kilde: Egen tilvirkning. R-kode i appendix D.2

Ved en justering i MG^* fra 65% til 60% kan for $I.1_{60\%}$ observeres et skifte i det risikoforløb, der minimerer indbetalingsgraden, fra livscyklusvægtene ”Laveste Risiko” til livscyklusvægtene ”Højeste Risiko”, som illustreret i figur 12. Resultater og R-output kan findes i appendix L.

$$\text{Min. indbetalingsniveau } I.1_{60\%} = 13,5\%(1,25) = \mathbf{16,88\%} \quad \text{Resultat 5.7}$$

$$E_t[DG] = 0,7165 \quad \text{Resultat 5.8}$$

$$VaR_{10\%} = 0,60 \quad \text{Resultat 5.9}$$

For $I.2_{60\%}$ er det stadig ”Laveste Risiko”, der minimerer indbetalingerne. Her er risiko restriktionen imidlertid mindre streng, hvorfor indbetalingerne er lavere. Denne observation kan udledes fra Figur 11, hvor de to restriktioner slår ind næsten simultant.

$$\text{Min. indbetalingsniveau } I.2_{60\%} = 33,5\% + 3,6\% = \mathbf{37,1\%} \quad \text{Resultat 5.10}$$

$$E_t[DG] = 0,7053 \quad \text{Resultat 5.11}$$

$$VaR_{10\%} = 0,60 \quad \text{Resultat 5.12}$$

Den større risikoappetit giver en markant forskel i indbetalingsgraderne, hvor I.2_{60%} kan spare 3,75% i pensionsbidraget som procent af lønnen, sammenlignet med I.2_{65%}.

Bidragene er imidlertid stadig af en sådan størrelse, at mere risiko, senere pension eller en lavere ønsket dækningsgrad er at foretrække for mange.

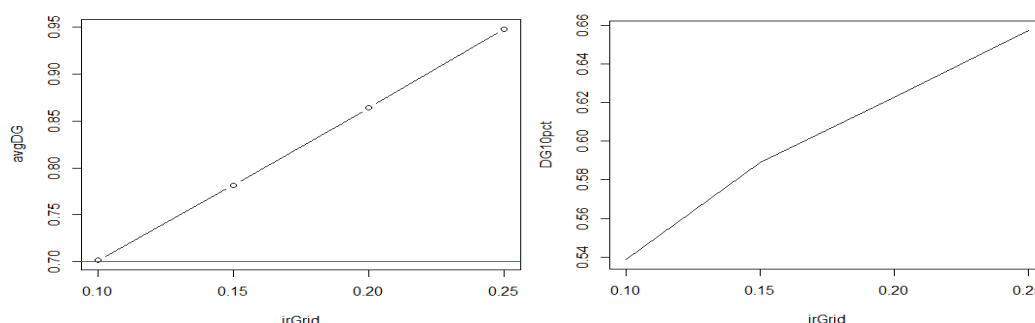
Det kan følgelig udledes, at ligheden i hvor stor en investeringsrisiko de to individer kan tage, før restriktionerne begrænser yderligere risiko, ophører allerede efter kategorien $MG^*=65\%$. Det er tydeligt, at den større andel af offentlige ydelser giver individ 1 en høj grundlæggende pensionssikring. Dette resulterer i en situation, hvor det er markant sværere for I.1 at "opbruge" det valgte niveau for MG^* , idet udsvingene udjævnes markant af folkepensionens grundbeløb og (en positiv) modregning i folkepensionstillægget ved dårlige afkaststier. Således vil cirka 35% af dækningsgraden udgøres af de offentlige ydelser for I.1. Som resultat heraf divergerer variationen i dækningsgraderne markant for individerne, hvorfor I.1 alt andet lige vil kunne vælge et højere risikoforløb under de valgte værdier for begrænsningerne sammenlignet med I.2.

5.3 Risikovillig, $MG^* = 50\%$

For I.1_{60%} gælder det, at "Højeste Risiko" minimerer indbetalingerne. Det er derfor værd at vurdere om en portefølje investeret 100% i aktier kan yderligere minimere indbetalingerne for I.1_{50%}.

Figur 13: Individ 1 – "100% aktier"

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



Kilde: Egen tilvirkning. R-kode i appendix D.2

Fra figur 13 kan det observeres, at 100% i aktier minimerer indbetalingerne for $I.1_{50\%}$, og selv ved denne portefølje bestående af 100% aktier, er det ikke muligt at "opbruge" risikorestriktionen på $VaR_{10\%}=0,50$. Knækket i hældningen for DG10pct. i figur 13 skyldes, at modregning i folkepensionstillægget starter ved en dækningsgrad på ca. 59% for I.1 (svarende til en livrente ydelse på cirka 19% af slutlønnen). Resultaterne for $I.1_{50\%}$ er givet ved (*appendix L*)

$$\text{Min. indbetalingsniveau } I.1_{50\%} = 10\%(1,25) = 12,5\%$$

Resultat 5.13

$$E_t[DG] = 0,7027$$

Resultat 5.14

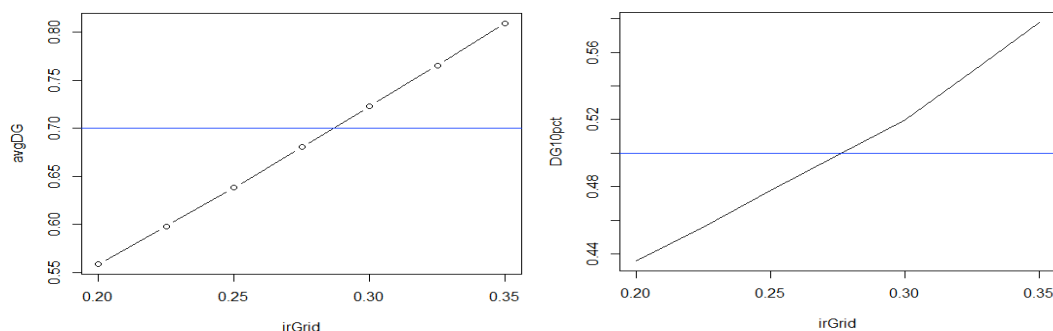
$$VaR_{10\%} = 0,5394$$

Resultat 5.15

For individ 2 er det faste ben udgjort af folkepensionen mindre og derved "opbruges" risikorestriktionen allerede i risikoprofilen "Middel Risiko" og "50% Aktier og 50% Obligationer". De to risikoprofiler giver tætte resultater (*appendix M*), men sidstnævnte risikoprofil minimerer indbetalingerne.

Figur 14: Individ 2 – "50% aktier og 50% obligationer"

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



Kilde: Egen tilvirkning. R-kode i *appendix D.2*

Knækket i $VaR_{10\%}$ i figur 14 illustrerer, at modregningen i folkepensionstillægget stopper ved en pensionsydelse fra livrenten på over 669.127 kr. (2044-niveau) svarende til en dækning af livrenten i pct. af lønnen på cirka 43% eller en dækningsgrad på cirka 52% inkl. folkepension, hvorfor hældningen er større efter knækket.

$$\text{Min. indbetalingsniveau } I.2_{50\%} = 28,75\% + 3,6\% = \mathbf{32,35\%} \quad \text{Resultat 5.16}$$

$$E_t[DG] = 0,7014 \quad \text{Resultat 5.17}$$

$$VaR_{10\%} = 0,51 \quad \text{Resultat 5.18}$$

Af resultat 5.16–5.18 fremgår det, at den laveste indbetalingsgrad, der opfylder begge restriktioner for $I.2_{50\%}$ fortsat udgør over 32% af lønnen til pension.

For både I.1 og I.2 gælder det, at der ved en højere risiko opnås en markant besparelse i indbetalingerne, men at dette ligeledes medfører en øget risiko for begge individer og særligt for I.2. For $I.1_{50\%}$ er kravene til indbetalingerne af en moderat størrelse, der ofte ville kunne baseres alene på arbejdsmarkedspensionsordningen, men det er værd at bemærke, at variationen i dækningsgraden for I.1 kan føles mere smertefuld end for I.2, der har den dobbelte indkomst, hvorfor I.1 formodentlig oftere kunne ønske en højere grad af sikkerhed end I.2.

På trods af besparelsen i indbetalingerne ved et højere risikoforløb er indbetalingsgraden for I.2 stadig af en betydelig størrelse. Mange individer med en høj løn vil spare op i forskellige regi, hvor fast ejendom historisk har fyldt meget i Danmark (dst.dk, 3). Det er derfor relevant, at vurdere, hvilke dækningsgrader og udsving i pensionen, der kan forventes ved et på forhånd fastsat indbetalingsniveau.

5.5 Faste procentvise indbetalingssatser

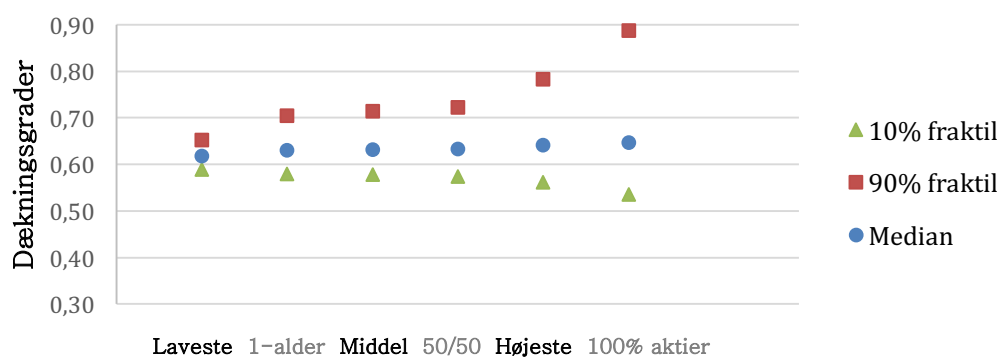
I Danmark er størstedelen af arbejdstagere gennem overenskomster dækket af solidariske ordninger, hvor medarbejdere er tvunget til at spare op igennem arbejdsgiveradministrerede ordninger. Det har vist sig svært at nudge individer til at opspare yderligere og udskyde forbrug, på trods af flere forsøg fra pensionsbranchen. Senest har Danica forsøgt at tilbyde stigende pensionsindbetalinger ved lønstigninger for at gøre overgangen til højere indbetalinger mindre smertefuld (finans.dk). Ud fra et virkelighedsnært perspektiv tages derfor i dette afsnit udgangspunkt i faste indbetalingssatser for de to introducerede individer.

Ofte vil en højt lønnet med en lang videregående uddannelse have et højere indbetalingsniveau end gennemsnittet. Der tages derfor i det følgende udgangspunkt i en indbetalingsgrad på 12%¹⁵ for I.1 og 18%¹⁶ for I.2 før forsikringsbidrag. Indbetalingerne til opsparingen er givet, som en fast pct. af lønnen, hvoraf 20% af bidragene går til forsikringsdækning. Indbetalingsraten, IR, er derfor givet som

$$IR_{I,1}^{fast} = 0,12(0,8) = 0,096 \quad \text{Individ 1 - Fast indb.}$$

$$IR_{I,2}^{fast} = 0,18(0,8) = 0,144 \quad \text{Individ 2 - Fast indb.}$$

Figur 15 – DG for I.1 ved IR=9,6% og forskellige risikoforløb



Kilde: Egen tilvirkning, R kode i Appendix D.1

figur 15 viser 10%-fraktil, Median og 90%-fraktil for de forskellige risikoforløb med en fast indbetalingsrate til pensionsopsparingen på 9,6% af lønnen for I.1 ved 100.000 simulerede dækningsgrader for hvert forløb (appendix N). Interkvartilbredden varierer fra 3,25%-point ved det laveste risikoforløb til 10,48%-point ved livscyklusforløbet "Højeste Risiko", eksklusivt interkvartilbredden for 100% aktier på 15,91%-point (appendix N). IQR kan sammenholdes med en forskel i medianen fra "Laveste" til "Højeste" risikoforløb.

$$Median(Laveste)_{I.1,IR=0,096} = 0,6173 \quad \text{Resultat 5.19}$$

$$Median(Højeste)_{I.1,IR=0,096} = 0,6411 \quad \text{Resultat 5.20}$$

¹⁵ 12% er b.l.a. den overenskomstbaserede takst for en HK ansat i det private (HK.dk)

¹⁶ I det offentlige er pensionen eksempelvis normalt 17-18 pct. af lønnen for mange ledere og akademikere (kommunikationogsprog.dk)

Det kan udledes fra figur 15 og appendix N, at ændringen i $\text{VaR}_{10\%}$ fra "Laveste" til "Middel" risiko er lille i forhold til den positive ændring i medianen. Løftet i afkastniveauet uden en tilsvarende ændring i spredningen kan som følge trække $\text{VaR}_{10\%}$ op. I.1 kan som konsekvens heraf vælge "Middel" risikoforløb og få en stigning i medianen på 1,46%-point med et fald i 10%-fraktilen på 1,09%-point ift. det laveste risikoforløb.

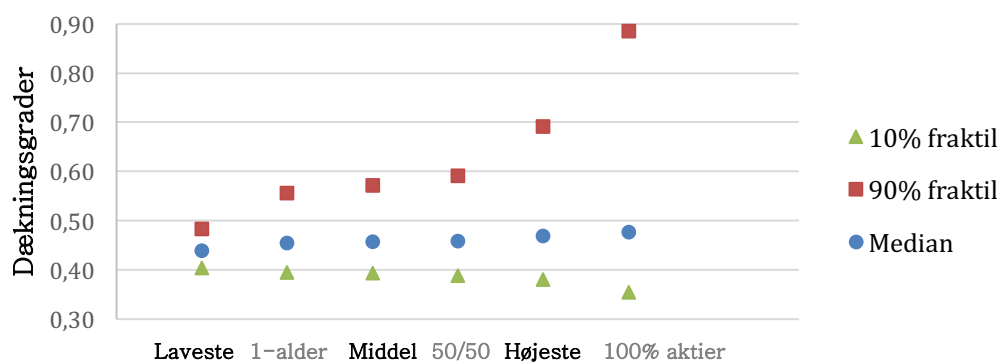
For I.2 varierer interkvartilbredden fra 4,12%-point til 13,78%-point fra risikoforløbet "Laveste Risiko" til "Højeste Risiko" eksklusivt 100% aktier med en IQR på 23,26%-point.

$$\text{Median}(\text{Laveste})_{I.2, IR=0,144} = 0,4391 \quad \text{Resultat 5.21}$$

$$\text{Median}(\text{Højeste})_{I.2, IR=0,144} = 0,4691 \quad \text{Resultat 5.22}$$

Medianen for livscyklusvægtene med det højeste risikoforløb er 3%-point højere end ved det laveste risikoforløb. Den højere median og det højere forventede afkast skal ses i lyset af den højere risiko illustreret i figur 16.

Figur 16 – DG for I.2 ved $IR=14,4\%$ og forskellige risikoforløb



Kilde: Egen tilvirkning. R kode i Appendix D.1

Det kan observeres i figur 16, at en større risiko ligeledes giver et større forventet afkast. Det bemærkes, at forskellen i 10%-fraktilen for "Middel Risiko", sammenlignet med "Laveste Risiko" også her er lille og alene 1,03%-point mindre, hvor medianen for "Middel Risiko" er 1,83%-point større (appendix O).

Opsummerende gælder det for begge individer, at den marginale gevinst er stor ift. den ekstra risiko fra "Laveste" til "Middel" risikoforløb. For risikoforløb med højere aktieandele end "Middel Risiko" øges spredningen forholdsmæssigt mere. For I.1 kan der ved "Højeste risiko" observeres en median DG ved pensionering på 64,11% af slutlønnen ved et fast indbetalingsniveau på 9,6% af lønnen efter betaling til forsikringsdækning. For I.2 med en indbetalingsrate på 14,4% er den tilsvarende median på 46,91% for "Højeste" risikoforløb, en forskel på 17,2%-point mellem I.1 og I.2.

5.6 Yderligere alder- og formueforhold

For at belyse effekten af alder og formueforhold køres der en række simulationsforløb på individer med forskellige karakteristika.

For at vurdere om de i afsnit 5.1–5.4 fundne resultater for risiko/afkast forhold er betinget af den eksakte alder introduceres Individ 3 på 30 år (I.3). Ligeledes introduceres individ 4 (I.4), et formuende individ tæt på pension, for at vurdere vægtenes effekt på udsvingene i dækningsgraden ved en kortere tidshorisont. I.4 er valgt som formuende for at tage størstedelen af effekten fra de offentlige ydelser ud af dækningsgraden, således at det faste ben udgør en så lille del af pensionsudbetalingerne, at der er et tæt forhold mellem udsvingene i livrentens dækningsgrad og den samlede dækningsgrad.

Tabel 6: Opsummerende karakteristika for valgte individer

	Individ 3	Individ 4
Køn	Mand	Mand
Alder	30	60
Nuværende løn	350.000 kr.	1.000.000 kr.
Pensionsalder	70	65
Pensionsformue i dag	0	11.000.000
Ønsket dækningsgrad	70% af lønnen før pension.	70% af lønnen før pension.
Minimum Dækningsgrad	MG* = 60%	MG* = 65%

Kilde: Egen tilvirkning

For I.3 vælges en minimum dækningsgrad på 60%. For I.4, der har en kortere tidshorisont, vælges MG* = 65%. For I.3, der deler mange af de samme karakteristika som I.1_{60%}, gælder

det, at det fortsat er "Højeste Risiko", der minimerer indbetalingerne. Porteføljen er udelukkende investeret i aktiefonden de første 18 år af opsparingsperioden, hvilket er illustreret i figur 2, som *Aggressiv aktieandel*.

Det bemærkes, at den limiterende faktor for I.3 er risikoen. For at afkræfte, at indbetalingerne ikke kan mindskes yderligere ved at tage mindre risiko, simuleres et forløb med "Middel Risiko" (appendix P).

$$\text{Min. indbetalingsniveau I.3} = 0,125(1,25) = 0,156 \quad \text{Resultat 5.23}$$

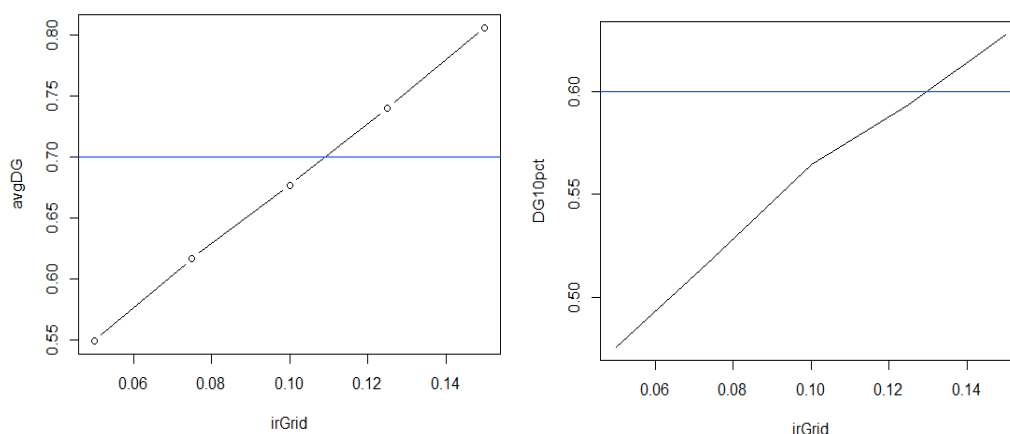
$$E_t[DG] = 0,74 \quad \text{Resultat 5.24}$$

$$VaR_{10\%} = 0,60 \quad \text{Resultat 5.25}$$

Det simulationsforløb, der giver anledning til de mindste indbetalinger, kan opsummeres i resultat 5.23–5.25 og i figur 17.

Figur 17: Individ 3 – "Højeste Risiko"

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



Kilde: Egen tilvirkning. R kode i Appendix D.2

Af figur 17 fremgår det, at ligheden mellem $I.1_{60\%}$ og I.3 er stor og det bekræftes, at det fortsat er "Højeste" risikoforløb, der minimerer indbetalingerne for et individ med en middel indkomst og en lang tidshorisont, der er villig til at acceptere et muligt fald i dækningsgraden på op mod 10% med 90% sikkerhed sammenholdt med DG^* . Hvis de

offentlige ydelser tages ud af simuleringerne kan effekten på risikoen ved den længere tidshorisont vurderes ud fra dækningsgraderne fra livrenten for hhv. I.1_{60%} og I.3 (appendix Q). Der tages udgangspunkt i "Højeste" risikoforløb og en IR på 12,5% og 13,5% for hhv. I.3 og I.1. I appendix Q er også præsenteret resultater for I.3 ved en indbetalingsgrad på 13,5%¹⁷.

For I.3 med en tidshorisont, der er 13 år længere end I.1, gælder det, at 75%-fraktilen er 82,4% større end 25%-fraktilen. For I.1_{60%} er 75%-fraktilen 70,9% større end 25%-fraktilen. I.3 må altså forvente 11,5%-point større spredning mellem kvartilerne. Den længere tidshorisont for I.3 gør følgelig dækningsgraderne mere usikre.

For I.4 kan det initialt konstateres, at dækningsgraden er relativ ufølsom overfor en ændring i indbetalingsgraden grundet den korte tidshorisont. For I.4 med "Laveste" risikoforløb gælder det, at han må acceptere væsentlige udsving på dækningsgraden med en forskel i 10%-fraktil og median på 9%-point.

Min. indbetalingsniveau I.4 "Laveste" = 19%+ 3,6%= **22,6%** *Resultat 5.26*

$E_t[DG] = 0,74$ *Resultat 5.27*

$Var_{10\%} = 0,65$ *Resultat 5.28*

Simulationsforløbet kan findes i appendix R. Givet pensionsprognosen alene afspejler formuen kan risikoen i dækningsgraden undervurderes betydeligt, idet en væsentlig del af risikoen for et individ tæt på pensionsalderen stammer fra eksponeringen mod renten i udbetalingsfasen. Formuen til pensioneringstidspunktet for I.4 varierer fra 12.196.160 kr. (10%-fraktil) til 14.330.352 kr. (90%-fraktil), svarende til en variation på 17,5% mellem de to fraktiler, sammenlignet med 28,6% for dækningsgraden.

For at vurdere i hvor høj grad variationen stammer fra udbetalingsfasen køres et simulationsforløb med deterministisk niveau for formuen, W_T , med start fra pensioneringstidspunktet, T , med den i appendix R forventede formue på 13,2 mio. kr. som input. Af output fremgår, at udbetalingsfasen har en udliggende effekt. Dette tydeliggøres

¹⁷ IR = 13,5% for I.3 er inkluderet for at påvise og udelukke, at forskellen i indbetalingsraten kan have en forklarende effekt på risikoen.

af differencen mellem fraktilerne, hvor 10% og 90%-fraktilen for I.4 er 28,6% og differencen for I.4 med en fast W er 23,3%. Der observeres således en moderat stigning i variationen på 5,3%-point ved at inkludere et stokastisk niveau for formuen til pensioneringstidspunktet i modelleringen. Samme effekt kan observeres i figur 5 for Individ 2, hvor de procentmæssige udsving er på samme niveau for formuen til pensioneringstidspunktet sammenlignet med dækningsgraderne, trods inklusionen af udbetalingsfasen og en derved markant længere tidshorisont.

Figur 18: Resultater for I.4 – "Laveste Risiko"

fraktiler	Middelværdi	10%	25%	50%	75%	90%	Procentvis diff. 10% og 90%-frak.
W(2022) - Laveste (x=60)	13.224.332	12.192.293	12.641.927	1.317.044	13.747.484	14.325.769	0,175
DG - Laveste (x=60)	0,742	0,651	0,692	0,739	0,789	0,837	0,286
DG - Laveste (x=60 - Fast	0,737	0,661	0,695	0,735	0,777	0,815	0,233

Kilde: Egen tilvirkning, R kode i Appendix D.1

Årsagen til denne udjævnende effekt skal findes i den negative korrelation i Formel 3.13, hvor et rentefald giver en stigning i aktiefonden og obligationsfonden i dag, men et lavere forventet afkast fremadrettet. Med andre ord, vil et rentefald op til pensionstidspunktet betyde en større formue for I.4 til tidspunkt T, men samtidig forringe det forventede afkast i udbetalingsfasen. Samme effekt vil mange danskere med stor sandsynlighed opleve på deres pensionsopsparinger i dag, hvor en faldende rente har betydet høje afkast på opsparingen. Modsat, vil samme gruppe opleve, at de høje afkast på opsparingen grundet rentefald, alt andet lige, betyder en lavere fremtidig forrentning af formuen. Det er derfor vigtigt at inkorporere udbetalingsfasen i rådgivningsprocessen for ikke at miste denne dynamik, samt for at tydeliggøre den betydelige risiko knyttet til udbetalingsfasen.

5.7 Opsummering af resultater

Med udgangspunkt i de to skitserede individer, I.1 og I.2 i afsnit 5.1–5.4, ses betydningen af de offentlige ydelser distinkte. Et livscyklusforløb med "Mellem Risiko" for Individ 1 med en gennemsnitlig indkomst resulterer i udsving på cirka 8%-point mellem den forventede dækningsgrad og 10%-fraktilen. De relativt små udsving i dækningsgraderne, taget investeringshorisonten i betragtning, skyldes en høj dækning fra folkepensionen på

35% af slutlønnen for Individ 1. For I.2 med den dobbelte løn og pensionsformue udgår folkepensionstillægget ved en dækningsgrad på 52%. Som følge af de højere ydelser udgør folkepensionen alene cirka 9% af dækningsgraden. Som konsekvens af et mindre fast og garanteret ben i pensionsydelse er kravene til opsparingens størrelse for individ 2 markant større. Ligeledes vil udsvingene i dækningsgraderne være større, hvor I.2 ville skulle acceptere en forskel på 17,6%-point, svarende til en over dobbelt så stor forskel mellem 10%-fraktil og forventet dækningsgrad. Den risikoprofil, der minimerer indbetalingerne for de to individer divergerer derfor, således at I.1 med en portefølje bestående af 100% aktier vil have udsving i dækningsgraden, der er mindre end I.2 ved et "Middel" risikoforløb. Denne diskrepans mellem risikoprofiler stammer fra modellens kriterier, hvor en større deviation mellem den forventede dækningsgrad og 10%-fraktilen end ønsket i input værdierne kan være et tegn på, at et andet afkast/risiko forhold vil være mere passende for individet. For I.2 udgjorde minimum dækningsgraden (MG^*) den til enhver tid bindende restriktion.

Det kan fra modellen udledes, at individer med en gennemsnitlig indkomst, afledt af det større faste ben udgjort af de offentlige ydelser, generelt kan tillade sig at tage mere risiko under samme MG^* restriktion, sammenlignet med individer med større private pensionsudbetalinger. Følgelig får individer med en gennemsnitlig indkomst både en større andel udgjort af de offentlige ydelser og fordelene ved at kunne tage mere risiko, og derved få et højere forventet afkast. Denne dynamik medfører, at andelen af lønnen, der skal indbetales til pension, er af en moderat størrelse for I.1, hvor der omvendt for I.2 er krav om høje indbetalingsrater før restriktionerne er opfyldt.

Effekten af denne dynamik er visualiseret i afsnit 5.5 figur 15 og 16. Her observeres det, at en solidarisk arbejdsgiverordning på 18% for I.2 og ved "Højeste Risiko" resulterer i en median DG på 46,11%, hvor I.1 ved en indbetalingsgrad på 12% og samme risikoprofil kan se frem til en median DG på 64,11%.

Ved faste indbetalingsrater, som andel af lønnen, er den marginale effekt på risiko for både I.1 og I.2 fra livscyklusforløbet "Laveste Risiko" til "Mellem Risiko" relativt lille (som observeret i ændringen i 10%-fraktilen) sammenlignet med effekten på den forventede dækningsgrad. Det er derfor for forbrugeren interessant at overveje om marginalt større

udsving kan accepteres for som følger, at kunne få en større forventet pension i den tredje alder. Som illustreret i figur 14 mister I.2 ved en dækningsgrad på 52% retten til folkepensionstillægget. Dette resulterer i en situation, hvor I.2 kan påtage sig mere risiko med en forsikring udgjort af en positiv modregning på 30,9% i folkepensionstillægget ved tabsgivende investeringer. Omvendt resulterer positive afkast *ikke* i modregning. Som følger kan forbrugeren tæt ved pensionering eller med en pension under udbetaling, givet et niveau for dækningsgraden tæt ved grænsen hvor folkepensionstillægget bortfalder, tage mere risiko med begrænset downside.

Yderligere simulationsforløb i afsnit 5.6 viser, at et individ med "Laveste" risikoforløb og kort tidshorisont før pensionering samt en lille andel udgjort af de offentlige ydelser stadig vil skulle acceptere væsentlige udsving i dækningsgraden grundet den fortsatte eksponering mod renten i udbetalingsfasen.

Da en væsentlig del af volatiliteten i dækningsgraderne for I.4 er udgjort af udbetalingsfasen, vil det være en undervurdering af udsvingene i pensionen, hvis alene formuen til pensioneringstidspunktet tages i betragtning. Yderligere mistes dynamikken mellem aktivklasserne, hvis alene slutformuen vurderes, idet der i praksis ofte er observeret en negativ korrelation mellem renten og obligations- og aktieprisen. Denne negative korrelation kan potentielt betyde en overvurdering af pensionen for et individ, der har oplevet høje afkast grundet rentefald og modsat en undervurdering for et individ, der har oplevet lave eller negative afkast grundet rentestigninger.

Slutteligt kan det udledes fra de anvendte risikoforløb (appendix E), at den ofte ønskede effekt, hvor individer bliver mere sikre på deres pension, jo tættere de kommer på pensionsalderen, er inkorporeret i livscyklus risikoforløbene. Modsat vil et fast vægt forhold ikke medtage dette aspekt. For individer, der ønsker at inkludere deres human kapital og gradvist mere sikkerhed omkring ydelserne og ikke ønsker at skulle tage stilling til deres pension, er livscyklusforløbet en fordel. Omvendt vil den systematiske reduktion af risiko være en ulempe for individer, der ikke umiddelbart ønsker eller har behov for mere sikkerhed omkring ydelserne, når pensionsalderen nærmer sig.

6. Sensitivitetsanalyse

Afsnittet har til formål at analysere effekten på modellens resultater af en ændring i parameterværdierne. Afsnittet er opbygget som en "alt andet lige" analyse, hvor effekten af en større volatilitet, en ændring i risikopræmierne for aktie- og obligationsfonden, øget levetid, samt ændring i lønstigningstaksten er undersøgt ift. de i modellen fundne dækningsgrader.

Sensitiviteten i dækningsgraderne ved en ændring i parameterværdierne er vigtig, da analysen ville kunne afdække, i hvor høj grad modellens resultater er betinget af parameterværdierne. En høj grad af følsomhed vil betyde, at en deviation fra de antagne forudsætninger vil svække gyldigheden af modellens resultater. Derudover indeholder sensitivitetsanalysen vigtig viden for det enkelte individ i de tilfælde, hvor dækningsgraden er følsom og negativt påvirket over for en ændring i parameterværdien. En stor følsomhed kan give anledning til et ønske om en mere konservativ strategi og evt. yderligere indbetalinger, således at sandsynligheden øges for, at det ønskede pensionsmål i den tredje alder realiseres.

Følsomhedsanalysen vil tage udgangspunkt i sensitiviteten i dækningsgraderne for I.1_{60%} og I.2_{60%} med særligt fokus på følsomheden ved ændringer i parameterværdierne med negativ effekt på dækningsgraden. Der tages udgangspunkt i og sammenholdes med resultat 5.7–5.12. Således analyseres for I.1 på effekten for risikoforløbet "Højeste Risiko" med en indbetalingsgrad på 13,5% før forsikringsomkostninger. For I.2 anvendes "Laveste Risiko" og en indbetalingsgrad på 33,5% før forsikringsomkostninger.

Ændringerne i parameterværdierne er valgt således, at de afspejler realistiske ændringer i disse og effekten heraf. Det er vigtigt at understrege, at parametrene fortsat er fremtidige ukendte størrelser, hvorfor valgene er delvist arbitrære.

6.1 Øget volatilitet

Renten og obligationsfonden

Grundet antagelserne i modelleringen om konstante parameterverdier for volatiliteten i de respektive aktivklasser er følsomhedsanalysen af en ændring i den konstante parameterverdi en undersøgelse af en ændring gældende i hele simulationsperioden. Følsomheden i dækningsgraderne undersøges ift. en stigning i rentens volatilitet på 0,5%-point. Fordoblingen af volatiliteten afspejler det lave udgangspunkt¹⁸.

$$\sigma_r = 0,5\% + 0,5\% = 1\%$$

Parameter 14 – følsomhed

Effekten på obligationsfondens volatilitet bliver følgelig

$$\sigma_B = \frac{(0,05\% + 0,05\%) \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 20})}{0,20} = 5\%$$

Parameter 15 – følsomhed

I.1, med en høj aktieandel i livscyklusforløbet "Højeste Risiko" er relativt upåvirket af den højere volatilitet i renten. Den højere volatilitet giver anledning til et fald i 10%-fraktilen på 1,3%-point.

Følsomhed 6.1-6.2 for I.1_{60%}, $\sigma_r \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,706$$

Følsomhed 6.1

$$VaR_{10\%} = 0,587$$

Følsomhed 6.2

Sammenlignet med resultat 5.8-5.9,

$$E_t[DG] = 0,7165$$

Resultat 5.8

$$VaR_{10\%} = 0,60$$

Resultat 5.9

I.2 har, med livscyklusforløbet "Laveste Risiko" og en heraf højere obligationsandel, en større eksponering mod renten.

¹⁸ (Boulier et. al, 2000) anvender f.eks. en volatilitet for renten på 2%.

Følsomhed 6.3-6.4 for $I.2_{60\%}$, $\sigma_r \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,685$$

Følsomhed 6.3

$$VaR_{10\%} = 0,52$$

Følsomhed 6.4

Sammenlignet med resultater for $I.2_{60\%}$ 5.11-5.12

$$E_t[DG] = 0,705$$

Resultat 5.11

$$VaR_{10\%} = 0,60$$

Resultat 5.12

For $I.2$ observeres en ændring i 10%-fraktilen på 8%-point svarende til en pension på 13,3% mindre end den valgte minimumsgrænse. Ændringen resulterer således i en forskel mellem DG^* og MG^* , der er 65% større end den ønskede minimum dækningsgrad. Fraktiler og R-output er opsummeret i appendix T. Mere generelt kan det udledes, at selv små stigninger i rentens volatilitet øger variationen og dermed risikoen betragteligt for alle opsparende med en lang tidshorisont.

Aktiefonden

Følsomheden i resultaterne over for en ændring i aktiefondens volatilitet undersøges ved en ændring på 5%-point svarende til 25% mere volatilitet.

$$\sigma_S = 20\% + 5\% = 25\%$$

Parameter 10 - følsomhed

Den afledte effekt på parameterværdierne og dækningsgraden af ændringen i aktiefondens volatilitet er opsummeret i appendix U¹⁹.

Følsomhed 6.5-6.6 for $I.1_{60\%}$, $\sigma_S \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,721$$

Følsomhed 6.5

$$VaR_{10\%} = 0,558$$

Følsomhed 6.6

Følsomhed 6.7-6.8 for $I.2_{60\%}$, $\sigma_S \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,706$$

Følsomhed 6.7

$$VaR_{10\%} = 0,58$$

Følsomhed 6.8

¹⁹ Det er antaget, at en ændring i volatiliteten *ikke* resulterer i en højere risikopræmie, hvilket som afledt effekt er svarende til en faldende markedspris for rente- og aktierisiko, λ_r og λ .

Her kan som forventet observeres en større følsomhed over for ændringer i aktiefondens volatilitet for I.1, der med "Højeste Risiko" holder en større aktieandel. I.1 ville i dette tilfælde skulle acceptere en 10%-fraktil på 4,2%-point mindre end det i MG* tilladte eller overveje at reducere aktieandelen i porteføljen.

Afslutningsvist undersøges effekten, hvis rente- og aktievolatiliteten øges simultant.

Følsomhed 6.9-6.10 for I.1_{60%}, $\sigma_S \uparrow$ og $\sigma_r \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,708 \quad \text{Følsomhed 6.9}$$

$$VaR_{10\%} = 0,546 \quad \text{Følsomhed 6.10}$$

Følsomhed 6.11-6.12 for I.2_{60%}, $\sigma_S \uparrow$ og $\sigma_r \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,685 \quad \text{Følsomhed 6.11}$$

$$VaR_{10\%} = 0,513 \quad \text{Følsomhed 6.12}$$

R-output for dækningsgrader og fraktiler kan findes i appendix V. I.1 og I.2s eksponering over for hhv. aktie- og obligationsfonden tydeliggøres i *Følsomhed 6.9-6.12*, hvor effekten af den simultane ændring i volatilitetsparametrene har en moderat effekt på udsvingene i dækningsgraderne sammenlignet med følsomhedsresultater 6.1-6.8. Yderligere kan den i afsnit 5 pointerede sammenhæng observeres, hvor I.1 generelt er mindre følsom over for volatiliteten i aktivklasserne, grundet den større andel af pensionen udgjort af offentlige ydelser.

6.2 Ændring i langsigtet middelværdi for rente og risikopræmier

Ved at sænke den langsigtete middelværdi for renten, b , analyseres effekten af et 1%-point mindre langsigtet forventet afkast over hele investeringshorisonten på renten, samt aktie- og obligationsfonden.

$$b = 2\% - 1\% = 1\% \quad \text{Parameter 13 - følsomhed}$$

Simulationsresultaterne kan findes i appendix X. En reduktion i den langsigtede middelværdi for den korte rente på 1%-point har stor effekt på de forventede dækningsgrader. Især I.2 er ramt med et fald i den forventede dækningsgrad på 12,7%-point eller en pensionsindkomst, der er 18% lavere end den ønskede.

Følsomhed 6.13-6.14 for I.1_{60%}, b ↓

$$E_t[DG] = 0,654 \quad \text{Følsomhed 6.13}$$

$$VaR_{10\%} = 0,565 \quad \text{Følsomhed 6.14}$$

Følsomhed 6.15-6.16 for I.2_{60%}, b ↓

$$E_t[DG] = 0,578 \quad \text{Følsomhed 6.15}$$

$$VaR_{10\%} = 0,504 \quad \text{Følsomhed 6.16}$$

Effekten af et lavere niveau for b har en markant større effekt end en reduktion i risikopræmierne, θ_S og θ_B på 1%-point, hvor den forventede dækningsgrad alene reduceres til 0,634 for I.2 (appendix Y). Således vil et fortsat lavt renteniveau potentielt have store konsekvenser for danske pensionsopsparere, hvor især individer med en stor andel af opsparingen udgjort af private pensionsydelse er følsomme over for renteniveauet.

For at belyse effekten af de lavere risikopræmier anvendt i modelleringen, sammenlignet med de i praksis anvendte forudsætninger af brancheforeningen (Forsikring&Pension, 2018), simuleres et forløb med højere risikopræmier. Parameter 16 og 17 ændres derfor, så de forventede afkast stemmer overens med de af brancheforeningen anvendte forudsætninger (Forsikring&Pension, 2018). Relationen mellem forudsætningerne fastsat af brancheforeningen og Parameter 16 og 17 – F&P i modelleringen er defineret yderligere i appendix Z.

$$\theta_B = 2\% \quad \text{Parameter 17 – F\&P}$$

$$\theta_S = 5\% \quad \text{Parameter 16 – F\&P}$$

De højere risikopræmier giver anledning til resultater opsummeret i *Følsomhed 6.17–6.20*. Simulationsforløbene er opsummeret i appendix W.

Følsomhed 6.17–6.18 for $I.1_{60\%}$, $\theta_B \uparrow$ og $\theta_S \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,759 \quad \text{Følsomhed 6.17}$$

$$VaR_{10\%} = 0,622 \quad \text{Følsomhed 6.18}$$

Følsomhed 6.19–6.20 for $I.2_{60\%}$, $\theta_B \uparrow$ og $\theta_S \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,787 \quad \text{Følsomhed 6.19}$$

$$VaR_{10\%} = 0,668 \quad \text{Følsomhed 6.20}$$

Simulationsforløbene giver anledning til forventede dækningsgrader, der er 5,4%-point og 8,1%-point højere for hhv. I.1 og I.2. Det højere niveau for risikopræmier giver anledning til markant højere dækningsgrader. Dette kan være bekymrende givet, at pensionsselskabet ikke kan realisere et gennemsnitligt afkast på 4% for obligationsporteføljen og 7% for aktieporteføljen over investeringshorisonten. I dette tilfælde vil dækningsgraderne overvurderes og de højere afkastforudsætninger skabe en falsk tryghed og mindre indbetalinger til pension, og som konsekvens give mange danskere en potentielt negativ overraskelse over indkomsten ved pensionering.

6.3 Stigende levealder

De seneste årtiers store udfordring for pensionssektoren har ikke alene været det faldende renteniveau, men kombinationen af dette og fortsatte levetidsforbedringer. For mange pensionsselskaber har udviklingen betydet store hensættelser på balancen til høje garanterede ydelser for lange liv med en blød diskonteringskurve. Det er derfor interessant at undersøge, hvor følsom dækningsgraderne er over for forbedringer i levetiden.

De i modellen anvendte årlige levetidsforbedringer (appendix C) tilskrives alle en yderligere forbedring på 40%. Den store ændring i levetidsforbedringerne er valgt således, at den forventede restlevetid for en 40-årig mand, med pensionsalder 67 er 1,5 år længere²⁰.

Ved en nuværende årlig levetidsforbedring for en given aldersgruppe på 3,5%, vil dødsintensiteten for den pågældende gruppe falde yderligere med $0,035(0,4)=1,4\%$ pr. år. Således kan dødsintensiteten justeres tilsvarende for alle aldre, x (Formel 3.10).

$$\mu_M(x, t) = \mu_M(x, 2016) \cdot (1 - R_M(x)(1 + 40\%))^t \quad \text{Formel 3.10 - Følsomhed}$$

De justerede levetidsforbedringer kan findes i appendix AA og de følgende resultater i appendix AB.

Følsomhed 6.21-6.22 for I.1_{60%}, $R_M(x) \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,70 \quad \text{Følsomhed 6.21}$$

$$VaR_{10\%} = 0,594 \quad \text{Følsomhed 6.22}$$

Følsomhed 6.23-6.24 for I.2_{60%}, $R_M(x) \uparrow$

$$E_t[DG] = 0,67 \quad \text{Følsomhed 6.23}$$

$$VaR_{10\%} = 0,572 \quad \text{Følsomhed 6.24}$$

Den store ændring i levetidsforbedringerne giver anledning til moderate ændringer for en 40-årig mand. For yngre aldersgrupper vil effekten være markant større.

Resultatet af en yderligere forbedring af levetiden er et fald på 1,65%-point og 3,5%-point i den forventede dækningsgrad for hhv. I.1 og I.2. For I.2 vil en yderligere forbedring på 40% af de gennemsnitlige levetidsforbedringer anvendt i Finanstilsynets levetidsmodel (Finanstilsynet 2017.2) følgelig give anledning til 58.615 kr. mindre i pension pr. år resten af levetiden (2044-priser).

²⁰ Den relativt lille ændring i restlevetiden skal ses under antagelsen om $b^d = V(t)$ i opsparingsfasen (Formel 2.3), dvs. restlevetid under betingelse af overlevelse til pensioneringstidspunktet.

6.4 Ændring i lønudviklingen

Da dækningsgraden er et forhold mellem størrelsen af de udbetalte ydelser og lønnen umiddelbart før pensionering, er en følsomhedsanalyse af parameterværdien for væksten i lønnen interessant ved både en negativ og en positiv ændring. Effekten af ændringen er ikke entydig, da en større vækst i lønnen vil betyde større indbetalinger, men også en højere slutløn.

Analysen foretages for ingen vækst i reallønnen,

$$R(L_{real}) = 0\% \quad \text{Parameter 5 - F.1}$$

$$R(L_{nom}) = 2\%$$

samt en større vækst i reallønnen.

$$R(L_{real}) = 2\% \quad \text{Parameter 5 - F.2}$$

$$R(L_{nom}) = 4,04\%$$

Den afledte effekt på resultaterne kan opsummeres i tabel 7. Det samlede output kan findes i appendix AC.

Tabel 7 – Følsomhed i DG og W ved ændring i $R(L_{real})$

Vækst i realløn	Individ 1			Individ 2		
	R(Lreal) = 1%	R(Lreal) = 0%	R(Lreal) = 2%	R(Lreal) = 1%	R(Lreal) = 0%	R(Lreal) = 2%
Et[DG]	0,715	0,908	0,568	0,705	0,834	0,6
VaR(10%) DG	0,6	0,768	0,477	0,6	0,712	0,514
Median DG	0,689	0,875	0,546	0,699	0,826	0,596
Et[W]	4.900.913	4.511.622	5.385.921	16.205.345	14.403.852	18.327.482
VaR(10%) W	2.793.261	2.492.240	3.158.530	14.174.330	12.512.298	16.115.573
Median W(2044)	4.419.067	4.031.088	4.882.296	16.078.231	14.280.677	18.193.724

Kilde: Egen tilvirkning. R kode i Appendix D.2

For begge individer gælder det, at en mindre vækst i reallønnen har en positiv effekt på dækningsgraden, samt en større vækst modsat giver anledning til mindre dækningsgrader. Et fokus alene på dækningsgraden vil give et unuanceret billede, hvorfor formuen er inkluderet i tabel 7. Den positive effekt fra en større løn og heraf større indskud til pension kan observeres på $E_t[W_T]$, som er positivt påvirket af en større vækst i lønnen.

Udviklingen i indbetalingerne udgør en for lille del til, at forholdet mellem pensionsydelse og løn holdes proportionalt. En "alt andet lige" analyse for sensitiviteten i dækningsgraden

ved ændring i lønstigningstaksten er som følger alene retvisende for de individer, hvor opsparing og forbrug udgør en konstant andel af lønnen. For individer, hvor ratioen mellem opsparing og forbrug ændres, vil den ønskede dækningsgrad skulle tilpasses. En ændring i væksten for lønnen kan følgelig give en vejledning for, hvor meget af lønstigningen der skal gå til opsparing, og hvor meget individet kan tillade sig at forbruge og stadig have den ønskede dækningsgrad i den tredje alder. Følsomhedsanalysen af lønstigningstaksten kan derfor i specialets ramme som pensionsprognoseværktøj yderligere hjælpe individer med konsekvensanalyse af en ændring i privatøkonomiske forhold. Analysen af parameterverdierne for væksten i lønnen kan som følger ses fra 2 vinkler: En analyse af dækningsgraden og formuen ved en påvirkning af væksten i lønnen foruden et værktøj til privatøkonomisk planlægning.

6.5 Reduktion i væksten i de offentlige ydelser

Den lange tidshorisont gør risikoen for politiske indgreb større. Derfor undersøges konsekvensen af en lavere vækst i de offentlige ydelser end den antagne. Det følgende tager udgangspunkt i en justering i parameter 6, således at væksten i de offentlige ydelser alene følger inflationen. Effekten er analyseret med udgangspunkt i $I.1_{60\%}$ og $I.2_{60\%}$.

$$\text{Årlig vækst i offentlige ydelser} = 2\%$$

Parameter 6 – Følsomhed

Ændringen giver anledning til resultaterne opsummeret i Følsomhed 6.25–6.28. Det samlede output kan findes i appendix AD.

Følsomhed 6.25–6.26 for $I.1_{60\%}$, offentlige ydelser

$$E_t[DG] = 0,636$$

Følsomhed 6.25

$$VaR_{10\%} = 0,52$$

Følsomhed 6.26

Følsomhed 6.27–6.28 for $I.2_{60\%}$, offentlige ydelser

$$E_t[DG] = 0,687$$

Følsomhed 6.27

$$VaR_{10\%} = 0,585$$

Følsomhed 6.28

I.2 er relativ ufølsom over for ændringer i væksten i de offentlige ydelser, da de offentlige ydelser udgør en lille del af den samlede pension. Omvendt er I.1 meget følsom over for ændringer i parameter 6. For I.1 gælder det, at den forventede dækningsgrad falder med 11% (7,9%-point), hvor det tilsvarende fald i dækningsgraden for I.2 alene er på 2,6%. Isoleres folkepensionen kan det observeres, at den forventede dækning fra de offentlige ydelser som pct. af slutlønnen for I.1 falder fra 0,347 til 0,269 (appendix AD).

7. Diskussion af model og resultater

Dette afsnit har til formål at diskutere eventuelle svagheder i modelleringen, samt de fundne resultaters implikationer for pensionsopsparere i Danmark.

7.1 Diskussion af modellen

Valget af den underliggende finansielle model giver analysen en række svagheder.

Der er i modelleringen anvendt konstante parameterværdier for inflationen og for reallønsstigningen. I praksis kan observeres, at disse faktorer varierer betydeligt (appendix AE). Følsomhedsanalysen har endvidere pointeret, at de har en anseelig indflydelse på dækningsgraden. En stokastisk modellering af de to faktorer vil kunne afspejle usikkerheden i dækningsgraden knyttet til dem og inkorporere eventuelle korrelationer imellem aktivpriserne.

Den anvendte Vasicek rentestrukturmodel modellerer renten ved en Ornstein-Uhlenbeck process, hvilket giver modelleringen den ufordelagtige karakteristika, at renten med en positiv sandsynlighed kan antage negative værdier. Dette er ikke i sig selv et problem ved små negative renteniveauer (som observeret i praksis), men udgør et problem, når der i simuleringerne for aktiverne (afsnit 4) kan observeres enkelte simulationsforløb, der når urealistisk lave renteniveauer på -5% for den korte rente (figur 4). Problemet er især udtalt ved en stor volatilitet i renten. I modelleringen er anvendt en relativ lav volatilitet for σ_r på 0,5%²¹, hvilket gør problemet mindre udtalt i denne model. 1-faktor rentestrukturmodellen giver muligheden for delvist at løse problemet med negative renter

²¹ (Boulier et. al, 2000) anvender f.eks. en volatilitet for renten på 2%.

ved at skrue op for hastigheden på mean-reversion parameteren a , hvilket resulterer i et strammere bånd omkring den langsigtede middelværdi b . Problemet kunne have været løst ved at introducere en alternativ 1-faktor model, eksempelvis Cox-Ingersoll-Ross modellen (CIR). Dette ville have løst problemet med mulighed for negative renter, men ville have kompliceret modelleringen yderligere.

I modelleringen af aktivpriserne og rentestrukturmodel arbejdes der med konstante parameterverdier for risikopræmier og volatilitet. Historisk har risikopræmierne ikke været konstante (Damodaran, 2017). Den lange tidshorisont og usikkerheden om den fremtidige størrelse af risikopræmierne gør imidlertid en særskilt modellering af risikopræmierne mindre attraktiv. Mere konsensus er der om, at fordelingen af afkast ikke følger en normalfordeling, som antaget i modelleringen og at volatiliteten ikke er konstant, men autokorreleret med tidligere dages volatilitet (Taylor, 2005, p. 69). Problemet ved autokorrelation i volatiliteten er mere udtalt ved en kortere tidshorisont og daglige afkastdata, mens autokorrelationen ved lange estimationsperioder udgør et mindre problem. Normalfordelingsantagelsen vil undervurdere ekstreme udfald for aktivpriserne (excess kurtosis). Den større kurtosis end af normalfordelingen tilsagt vil således undervurdere udsvingene i dækningsgraden på kort sigt. Som følger vil modelleringen ikke tage tilstrækkelig højde for ekstreme udfald, der potentielt ville kunne ændre den privatøkonomiske situation.

En model, hvori alle ovenstående kritikpunkter imødekommes, giver anledning til en utrolig kompleks modellering, der er uden for dette speciales ramme, og hvori det er tvivlsomt, at den ekstra grad af kompleksitet tilsvarende øger modellens reliabilitet. Det kunne endvidere frygtes, at den ekstra grad af kompleksitet ville øge vanskeligheden i kommunikationen af resultaterne til slutbrugeren og derfor svække brugbarheden af modellen.

Der er valgt at se bort fra skat i modelleringen, herunder arbejdsmarkedsbidrag (AM bidrag). Indbetalinger til pension er i praksis efter 8% i AM-bidrag, hvorfor pensionsudbetalingerne vil være 8% lavere og ikke blive modsvaret AM-bidrag ved udbetaling. Forholdet har ingen betydning for dækningsgraden af livrenteydelsen efter skat, men vil påvirke størrelsen af modregningen i folkepensionstillægget marginalt.

Modellens afgrænsning fra skat vil ydermere i mange tilfælde undervurdere dækningsgraden for individer, der betaler topskat ved indbetaling, da dækningsgraden som procent af den udbetalte løn efter skat vil være højere grundet den lavere gennemsnitlige beskatning ved udbetaling²². Som resultat heraf ville inklusion af skat i modellen potentielt kunne give et mere præcist og nuanceret billede, men det er uvist i hvor høj grad, dette ville styrke modellens ramme som pensionsprognose værktøj. Det er derfor vurderet, at den ekstra grad af kompleksitet ikke vil retfærdiggøres af udbyttet heraf.

Subjektive brugerinput er i modellen begrænset til 2 restriktioner. For restriktionen ønsket dækningsgrad (DG^*) er anvendt middelværdien af dækningsgraden for simulationsforløbet. Middelværdien er påvirket af skævheden i fordelingen. Da der i formuen og dækningsgraden kan observeres højreskævhed, vil $\text{Median} < E_t[DG]$, hvorfor restriktionen havde været mere streng ved medianen og kravet til indbetalingerne som afledt effekt højere. Valget giver alene anledning til små afvigelser i resultaterne. I specialets fokus på forholdet mellem indbetalinger, risiko og afkast er disse afvigelser af mindre betydning.

Valget om alene at inkludere de to restriktioner, ønsket dækningsgrad og minimum dækningsgrad, er et fravalg af nyttefunktioner i modellen. Dette resulterer i et relativt unuanceret billede, da modellen alene forsøger at mindske indbetalingerne. Som konsekvens vil en 10% VaR på marginalt under den valgte begrænsning MG^* , men med et markant højere forventet dækningsbidrag ved pensionering, blive tilsidesat for et opsparings- og risikoforløb, hvor begrænsningerne er overholdt. Den mindre grad af nuancering er ikke et problem indenfor specialets ramme, da fokus er på at udvikle et forbrugeroplysende værktøj til pensionsprognoser. Fokus er derfor ikke på at løse et komplekst optimeringsproblem, men nærmere at give en forståelse for sammenhængen mellem opsparing, risiko og afkast. Modellen, som prognoseværktøj, giver den enkelte opsparer mulighed for at ændre ved input og forudsætninger og vurdere, hvorledes output ændrer sig og derved give mulighed for at tage beslutninger på oplyst grundlag.

²² Givet, at udbetalingerne i gennemsnit er lavere end indbetalingerne.

Slutteligt kan nævnes fravalget af ATP i modelleringen. ATP indgår under den første søjle, offentlige ydelser, hvorfor de offentlige ydelser undervurderes i modellen. ATP kan nemt inkluderes ved at lade ATP indgå, som den gennemsnitlige udbetalte ATP ydelse for alle danskere. Dette er fravalgt, da det er vurderet, at et fravalg ville forårsage et mere konservativt estimat af de offentlige ydelser. Et simpelt gennemsnit af udbetalingerne ville potentielt have overvurderet ATP-ydelsen. Den gennemsnitlige pensionsudbetaling fra ATP var i 2015 på 14.219 kr. (ATP.dk), hvorfor problemet hovedsageligt er udtalt for individer i de lavere indkomstgrupper.

7.2 Diskussion af resultater

Modelleringen viser tydeligt, at den gennemsnitlige dansker med en markedsrenteordning vil kunne opleve betydelige udsving i pensionen. Mest udtalt er variationen for individer med en lang tidshorisont og en portefølje med en høj aktieandel. Modelleringen og de i afsnit 6. præsenterede resultater viser imidlertid også, at individer med kort tid til pensionering vil have en væsentlig usikkerhed i pensionen grundet den fortsatte eksponering mod renten i udbetalingsfasen. Den deterministiske ramme anvendt i pensionsprognoser i dag giver derfor et for unuanceret billede og kan i værste fald skabe en falsk tryghed, da et dårligere afkast end 4% for obligationer og 7% for aktier (Forsikring & Pension, 2018) potentielt vil have uheldige følger for forbrugeren. I resultaterne *Følsomhed 6.17–6.20* understreges dette forhold, da de højere afkastforudsætninger giver anledning til en gennemsnitlig dækningsgrad, der er 11,6% højere end den i resultaterne præsenterede for en højt lønnet forbruger.

En arbejdsgruppe fra Den danske aktuarforening har pointeret problemet med deterministiske forudsætninger tidligere og har i 2014 forelagt en anbefaling om at kommunikere usikkerheden i pensionen, med særligt fokus på depotstørrelsen ved pensioneringstidspunktet (Den danske aktuarforening, 2014). Resultater i dette speciale understreger betydningen af et større fokus på pensionsydelsen fremfor formuen ved pensioneringstidspunktet, da usikkerheden i pensionen er påvirket af andelen udgjort af folkepensionen, herunder modregning i tillægget, og den fortsatte usikkerhed i ydelsen i udbetalingsfasen udgjort af investeringsrisiko og mulige ændringer i levetider. Som følge

heraf er det ikke nok alene at fokusere på formuen, men nødvendigt, at prognosen afspejler den samlede årlige ydelse og risikoen heri, før forbrugeren kan tage veloplyste beslutninger om pensionen.

Det er alment kendt, at det er vigtigt at forholde sig til sin pension ved livsændrende begivenheder som jobskifte, skilsmisse osv. Modelleringen viser, at det herudover er vigtigt at genbesøge sin pensionsopsparing for at vurdere, hvorledes udviklingen stemmer overens med det projekterede. Givet, at udviklingen i porteføljen og renten ikke har været til fordel for kunden, kunne det give mening at udskyde pensionsalder eller skrue op for pensionsindbetalingerne, for hvem det er muligt. Det kan generelt udledes fra resultaterne, at det er vigtigt i løbet af arbejdslivet at tage stilling til den påtagne risiko, således at porteføljesammensætningen bedst muligt stemmer overens med pensionsmålene.

En ofte anvendt tommelfingerregel er, at man bør indbetale 15% af sin løn til pension. Modelleringen viser imidlertid, at hvor dette er tilstrækkeligt for visse forbrugere, vil det langt fra være nok for andre. Kravene til indbetalinger for risikoaverse forbrugere og individer med høje indkomster, der ikke ønsker en stor forskel i indkomst mellem pensionisttilværelse og arbejdsliv, er markant større. For en dansker med en middel indkomst og kontinuerlig indbetaling til pension vil de offentlige ydelser cirka udgøre en tredjedel af pensionen. For danskere, der ønsker en højere pension, kræves der markant højere indbetalinger, da de offentlige ydelser vil udgøre en mindre del, og individet vil blive modsvaret i folkepensions tillægget med 30,9% af ydelser over minimumsgrænsen og indtil tillægget bortfalder (324.208 kr. i 2017, borger.dk). Følsomhedsanalysen understreger betydningen af folkepensionens andel, hvor mange vil være særligt følsomme over for politiske indgreb, der reducerer folkepensionen. For en gennemsnitlig lønmodtager vil en reduktion i væksten i de offentlige ydelser på 0,7%-point give anledning til et dækningsbidrag, der er 11% mindre. Modsat er samme individ mindre eksponeret over for ændringer i investeringsmiljøet, sammenlignet med individer med større private pensioner. Modregningen i folkepensionstillægget giver for individer med få år til pensionering, eller med pension under udbetaling og med forventede pensionsydelse tæt på grænsen til hvor folkepensionstillægget bortfalder, mulighed for at tage en øget risiko i deres pensionsportefølje med en inkorporeret forsikring. Grundet

modregningsreglerne vil negative afkast i porteføljen dækkes med 30,9% af faldet i ydelsen, da der ved negative afkast sker en positiv modregning i folkepensionstillægget. Omvendt holdes højere pensionsydelse fri fra modregning ved positive afkaststier.

Modellen bygger på en rigid ramme, hvor alene opsparing til livrente er mulig. Dette er med til at overvurdere den nødvendige opsparing for visse individer, idet det for mange danskere gælder, at der i løbet af arbejdslivet opbygges anden opsparing i form af fast ejendom eller frie midler, om end det må forventes, at dækningsgraden vil variere med prisen af den faste ejendom eller forrentningen af de frie midler. For at gøre modellen anvendelig i praksis er det derfor nødvendigt at inkludere muligheden for at opspare i andet regi.

En forudsætning for en i praksis anvendelig model er endvidere, at de præsenterede oplysninger er forståelige for den almene dansker. De færreste ikke økonomisk-uddannede vil have glæde af diverse fordelingsplots og fraktilark. Modelleringen kan af hensyn til formidling således med fordel begrænses til alene at fokusere på 3 niveauer af risiko (lav, mellem, høj), hvor en begrænset mængde af output præsenteres visuelt med en god grafisk præsentation. Ved 3 niveauer af risiko er det lettere for forbrugeren at vurdere, hvorvidt en højere risiko, ekstra opsparing eller andre tiltag er mest passende. Af fremtidige muligheder for at videreudvikle modellen kan fremhæves muligheden for at inkorporere skat og en større grad af valgfrihed i udbetalingsfasen. Valgfriheden kunne eksempelvis inkludere hensyntagen til en større grad af fleksibilitet i risikopræmien, hvor der aktuelt i modelleringen er antaget en konstant risikopræmie over renten, samt mulighed for en større valgfrihed ift. dækningsgraden over livet, idet der hos mange er et ønske om en gradvis nedtrapning af pensionen.

7.3 Implikationer i praksis

"11 ud af 16 pensionsselskaber, der tilbyder markedsrenteprodukter, har koblet produktet sammen med mulighed for at vælge risikoprofil eller risikoniveau" (Finanstilsynet, 2015).

"Selskaberne angiver, at kunder med markedsrenteprodukter i vid udstrækning kan

påvirke forudsigelighed og stabilitet gennem valg af risikoniveau, hvor enkelte selskaber angiver, at det er op til kunden selv at sikre, at risikoen i produktet bliver aftrappet"

(Finanstilsynet, 2015). På trods af, at kunderne i "vid udstrækning" kan påvirke forudsigeligheden og risikoen, har samme kunder ikke forudsætningerne eller mulighed for at forstå konsekvenserne af deres valg og fravalg, da de deterministiske forudsætninger ikke illustrerer de potentielle forskelle ved disse valg.

Når de i praksis observerede forskelle i forventet afkast og risiko for aktivklasserne og vægtforløb inkluderes, giver valget af risikoprofil som illustreret i resultaterne anledning til markante afvigelser i sikkerhed, forventet afkast og krav til indbetalingerne størrelse. Den større valgfrihed for forbrugeren og de store forskelle betinget af forbrugerens pensionsvalg medfører et behov for en fælles branchestandard for, hvordan risiko medtages i rådgivningsprocessen for markedsrenteprodukter. Dette behov er stigende med den fortsat større andel af indbetalingerne til produktgruppen, og kan tage form af fastsatte stresstest af pensionsydelsen ud fra folkepensionsandelen og risikoprofil eller ved numeriske metoder, som undersøgt i dette speciale.

8. Konklusion

Den fortsatte stigning i markedsrenteprodukters popularitet har medført et markant behov for en opdatering af de deterministiske forudsætninger anvendt i dag. Resultaterne af specialets modellering understreger betydningen af risiko for pensionen i markedsrentepensionsordninger. Et højere risikoforløb giver anledning til markant større udsving i dækningsgraden og kan potentielt give anledning til et niveau af udbetalingerne langt under det ønskede. Det er som følger essentielt i pensionsprognosen at tage højde for denne risiko, så forbrugeren kan tage pensionsrelaterede beslutninger på et oplyst grundlag. Et individ med mange år til pension vil således opleve en markant forskel i kravene til indbetalingerne, alt efter hvor meget variation i dækningsgraden til pensioneringstidspunktet, der tillades.

Modellens resultater viser, at folkepensionens faste ben og den yderligere risikoabsorbering, hvori tab og gevinster delvist dækkes af en modregning i

folkepensionstillægget, gør udsvingene og kravet til indbetalingssatsen betinget af folkepensionens andel af den samlede pension. For individer med et ønske om større pensioner kræves der, som resultat heraf, markant større indbetalingssatser, og der vil opleves betydeligt større udsving i dækningsgraderne ved samme risikoforløb. Af denne årsag afviger valget af risikoforløb, der minimerer indbetalingerne, markant med pensionens størrelse, alt andet lige. Betydningen af folkepensionen tydeliggøres yderligere ved følsomhedsanalysen af modellens parametre, hvori individer i de højere indkomstlag ses særligt sensitive over for ændringer i investeringsmiljøet, hvorimod individer med store andele af pensionen udgjort af offentlige ydelser er relativt ufølsomme. Den omvendte sammenhæng gør sig gældende for politiske indgreb vedrørende folkepensionen.

Endeligt kan det konkluderes, at en stokastisk pensionsmodel med lavere afkastforudsætninger end de i dag anvendte, belyser betydelige krav til de danske pensionsopsparere, hvor alene indbetalinger fra en arbejdsmarkedspensionsordning for mange vil give et potentielt stort skel i indkomst mellem arbejdsliv og pensionering. En stokastisk prognosemodel illustrerer ligeledes den betydelige usikkerhed i dækningsgraden til pensioneringstidspunktet. En usikkerhed der på trods af en gradvis reduktion af aktieandelen i porteføljen stadig er udtalt ved pensioneringstidspunktet. Den deterministiske ramme anvendt i pensionsprognoser i dag er følgelig ikke tilstrækkelig i situationer, hvor individet har et markedsrenteprodukt. Udviklingen kræver en ændring af branchestandard og de anvendte forudsætninger i pensionsprognoser, således at mulige konsekvenser af individets valg afspejles. En sådan udvidelse ville kunne hjælpe forbrugeren til en løbende styring og stillingtagen til risiko og indbetalinger.

Referencer

Artikler:

AE.dk, Arbejderbevægelsens Erhvervsråd om tilbagetrækningsalder, https://www.ae.dk/files/dokumenter/analyse/ae_kender-du-din-pensionsalder.pdf (1/9-17)

Astrup Jensen, Bjarne., Sørensen, Carsten (2001). *Paying for minimum interest rate guarantees: who should compensate who?* European Financial Management, Vol. 7, No. 2, p. 29.

Bajeux-Besnainou, I., Jordan, J. V. And Portait, R. (2003), Dynamic Asset Allocation for Stocks, Bonds and Cash, The Journal of Business, Vol. 76, No. 2, p. 263-287.

Boulier, Jean Francois. Huang, ShaoJuan. Taillard, Grégory (2000), Insurance Mathematics & Economics, *Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund*.

Beskæftigelsesministeriet (2015), <http://bm.dk/da/Aktuelt/Nyheder/Arkiv/2015/12/Folkepensionsalderen%20er%20forhojet.aspx> (15/9-17)

Brandimarte, Paolo (2014), *Handbook in Monte Carlo Simulation*, Wiley.

Danske Bank (2017), Danskernes økonomiske tryghed 2017.

Damodaran, Aswath, Equity Risk Premiums (ERP): Determinants, Estimation and Implications – The 2017 Edition (March 27, 2017).

Den danske aktuarforening (2014), Anbefalinger til retningslinjer for beregning af pensionsprognoser.

dst (2001), Danmarks statistik: 50-års oversigten, 2. Udgave.

dst.dk,1., <http://www.statistikbanken.dk/10015>, (5/9-17)

dst.dk,2., <http://www.dst.dk/da/Statistik/emner/befolkning-og-valg/doedsfald-og-middellevetid/middellevetid> (5/9-17)

dst.dk, 3., <https://www.dst.dk/da/Statistik/emner/arbejde-indkomst-og-formue/formue-og-gæld/fast-ejendom> (14/12-17)

Duffie, Darrell (2001), Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press.

EU (2012) http://europa.eu/rapid/press-release_MEMO-12-1012_da.htm (10/12-17)

Fiig Jarner, Søren., Preisel, Michael., ATP (2017), *Long guarantees with short duration: The rolling annuity*.

Fama, E. F. and French, K. R. (2002), The Equity Premium. *The Journal of Finance*, 57: 637–659.

Finans.dk, <https://finans.dk/finans2/ECE9728877/danske-bank-i-stor-satsning-danskerne-skal-spare-mere-op-i-pension-uden-at-miste-penge-her-og-nu/?ctxref=ext>, (12/12-2017).

Finanstilsynet (1997), <https://finanstilsynet.dk/upload/Finanstilsynet/publik/publikationer/aktuar/kap03001.html> (24/9-17)

Finanstilsynet (2005), Vejledning om udarbejdelse af pensionsfremskrivninger.

Finanstilsynet (2017), *Pension når garantierne forsvinder. Hvad er implikationerne for produktegenskaber og forbrugerbeskyttelse?*

Finanstilsynet (2017.2) <https://www.finanstilsynet.dk/da/Tal-og-Fakta/Oplysninger-for-virksomheder/Oplysningstal-om-forsikring-og-pension/Levetidsmodel> (13/10-17)

Finanstilsynet (2017.3) https://www.finanstilsynet.dk/~media/Tal-og-fakta/2017/Levetidsmodel/Beskrivelse_benchmark_2016_1-pdf.pdf?la=da (13/10-17)

fm.dk (2017) <https://www.fm.dk/~media/files/nyheder/pressemeddelelser/2017/06/aftale-om-flere-aar-paa-arbejdsmarkedet.ashx> (28/10-17)

Forsikring&Pension, 2015.1 http://www.forsikringogpension.dk/presse/Statistik_og_Analyse/Sider/Statistik_og_Analyse.aspx (22/9-17)

Forsikring&Pension, 2018 <http://www.forsikringogpension.dk/medlemmer/branchesamarbejde/pension/Documents/Samfundsforuds%C3%A6tninger%202018.pdf> (13/10-17)

HK.dk <https://www.hk.dk/raadogstoette/pension/din-pension-som-ansat-i-en-privat-virksomhed> (12/12-2017)

Kommunikationogsprog.dk, <https://kommunikationogsprog.dk/pension-offentligt-ansatte>, (12/12-2017)

Linnemann, Bruhn & Steffensen (2011), *Finansinvest 2011*, 6., *Sæt fokus på din udbetalingsprofil*.

Lovforslag L16, ft.dk, <http://www.ft.dk/samling/20171/lovforslag/l16/index.htm> (7/10-17)

Mercer (2016), Melbourne Mercer Global Pension Index.

Mercer (2017), Melbourne Mercer Global Pension Index.

Nationalbanken.dk, http://www.nationalbanken.dk/da/om_nationalbanken/ofte_stillede_sporgsmaal/Sider/Danmarks-fastkurspolitik.aspx (5/10-17).

Nationalbanken (2017)

<http://www.nationalbanken.dk/da/markedsinfo/officiellerentesatser/Sider/Default.aspx> (8.11.17).

OECD (2017), *Pension Markets in Focus 2017*.

Pensionskommissionen (2015), *Det danske pensionssystem – internationalt anerkendt, men ikke problemfrit*.

Produktivitetskommissionen (2013), *Det handler om velstand og velfærd – opdateret version*.

Rangvid, Bechmann Danø & Gosvig (2005), Finansinvest 2005, 1., *Investeringsforeningers omkostninger*.

Rangvid (2016), <https://www.business.dk/pension/oekonomien-bliver-stram-naar-du-bliver-pensionist> (27/8-17).

retsinformation.dk, 1 <https://www.retsinformation.dk/forms/r0710.aspx?id=5441> (16/10-17)

Skm.dk, 1 (2004): <http://www.skm.dk/skattetal/analyser-og-rapporter/ska%CF%84/2004/december/ska%CF%84-december-2004/nedsaettelse-af-folkepensionsalderen> (20/10-17)

skm.dk, 2 (2018)

<http://www.skm.dk/skattetal/beregning/skatteberegning/beloebsgraenser-i-skattelovgivningen-der-reguleres-efter-personskattelovens-%C2%A7-20-2017-2018> (5/1-18)

skm.dk, 3 (2017) <http://www.skm.dk/skattetal/statistik/generel-skattestatistik/pensionsformuen-1984-2015> (10/9-17)

Steffensen, Mogens. Ramlau-Hansen, Henrik (2016), *The mathematics of Life Insurance and Pensions*.

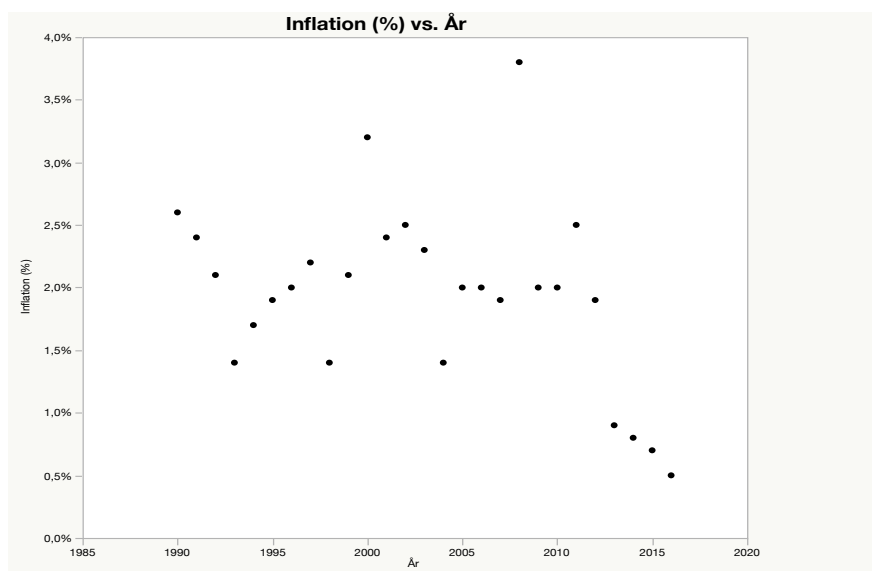
Taylor J., Stephen (2005) *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*. Princeton University Press.

Vasicek (1977) An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics* 5, p. 177-188.

Virk.dk, https://indberet.virk.dk/sites/default/files/atp-satser_2016_-_offentlig_virksomhed_0.pdf , (1/10-17).

Appendix

Appendix A – Inflation



År	Inflation (%)	År	Inflation (%)
1990	2,60%	2003	2,30%
1990	2,60%	2003	2,30%
1991	2,40%	2004	1,40%
1992	2,10%	2005	2,00%
1993	1,40%	2006	2,00%
1994	1,70%	2007	1,90%
1995	1,90%	2008	3,80%
1996	2,00%	2009	2,00%
1997	2,20%	2010	2,00%
1998	1,40%	2011	2,50%
1999	2,10%	2012	1,90%
2000	3,20%	2013	0,90%
2001	2,40%	2014	0,80%
2002	2,50%	2015	0,70%
		2016	0,50%

Kilde: dst.dk

Appendix B – Realvækst i BNP (%)

År	Realvækst i BNP (%)
1997	3,3
1998	2,2
1999	2,9
2000	3,7
2001	0,8
2002	0,5
2003	0,4
2004	2,7
2005	2,3
2006	3,9
2007	0,9
2008	-0,5
2009	-4,9
2010	1,9
2011	1,3
2012	0,2
2013	0,9
2014	1,6
2015	1,6
2016	2
Middelværdi	1,385

Appendix C – Observeret dødelighed og levetidsforbedringer

DATA, FINANSTILSYNET - BENCHMARK DØDELIGHED						Data, Finanstilsynet - Levetidsforbedringer					
Alder	Kvinder.2016	Mænd.2016	Alder	Kvinder.2016	Mænd.2016	Alder	Kvinder	Mænd	Alder	Kvinder	Mænd
0	0,0031	0,0040	55	0,0025	0,0032	0	0,0277	0,0333	55	0,02281	0,01991
1	0,0002	0,0002	56	0,0027	0,0036	1	0,0505	0,0474	56	0,02285	0,02031
2	0,0001	0,0001	57	0,0030	0,0041	2	0,0460	0,0516	57	0,02309	0,02084
3	0,0001	0,0001	58	0,0034	0,0046	3	0,0532	0,0518	58	0,02334	0,02155
4	0,0001	0,0001	59	0,0038	0,0052	4	0,0555	0,0534	59	0,02331	0,02218
5	0,0001	0,0001	60	0,0042	0,0058	5	0,0500	0,0619	60	0,02312	0,02281
6	0,0001	0,0001	61	0,0047	0,0065	6	0,0465	0,0684	61	0,02282	0,02340
7	0,0001	0,0001	62	0,0051	0,0073	7	0,0447	0,0732	62	0,02250	0,02386
8	0,0001	0,0001	63	0,0055	0,0081	8	0,0434	0,0749	63	0,02236	0,02429
9	0,0001	0,0001	64	0,0059	0,0089	9	0,0443	0,0746	64	0,02246	0,02480
10	0,0001	0,0001	65	0,0063	0,0097	10	0,0476	0,0713	65	0,02257	0,02528
11	0,0001	0,0001	66	0,0068	0,0104	11	0,0479	0,0698	66	0,02257	0,02582
12	0,0001	0,0001	67	0,0073	0,0112	12	0,0446	0,0694	67	0,02248	0,02624
13	0,0001	0,0001	68	0,0081	0,0121	13	0,0412	0,0675	68	0,02211	0,02651
14	0,0001	0,0001	69	0,0089	0,0132	14	0,0346	0,0663	69	0,02147	0,02664
15	0,0001	0,0001	70	0,0098	0,0145	15	0,0294	0,0621	70	0,02069	0,02650
16	0,0001	0,0001	71	0,0108	0,0161	16	0,0278	0,0548	71	0,01982	0,02620
17	0,0001	0,0002	72	0,0118	0,0179	17	0,0280	0,0484	72	0,01884	0,02578
18	0,0002	0,0002	73	0,0130	0,0197	18	0,0285	0,0437	73	0,01786	0,02535
19	0,0002	0,0002	74	0,0145	0,0218	19	0,0302	0,0385	74	0,01693	0,02479
20	0,0002	0,0003	75	0,0164	0,0241	20	0,0305	0,0364	75	0,01598	0,02427
21	0,0002	0,0003	76	0,0187	0,0267	21	0,0289	0,0348	76	0,01504	0,02358
22	0,0002	0,0004	77	0,0214	0,0301	22	0,0278	0,0326	77	0,01414	0,02275
23	0,0002	0,0004	78	0,0244	0,0345	23	0,0269	0,0312	78	0,01332	0,02177
24	0,0002	0,0004	79	0,0278	0,0394	24	0,0275	0,0303	79	0,01258	0,02071
25	0,0002	0,0004	80	0,0319	0,0454	25	0,0287	0,0303	80	0,01198	0,01955
26	0,0002	0,0004	81	0,0370	0,0522	26	0,0303	0,0311	81	0,01159	0,01831
27	0,0001	0,0004	82	0,0427	0,0596	27	0,0310	0,0320	82	0,01144	0,01705
28	0,0001	0,0003	83	0,0497	0,0684	28	0,0309	0,0331	83	0,01145	0,01569
29	0,0001	0,0004	84	0,0573	0,0783	29	0,0302	0,0343	84	0,01150	0,01430
30	0,0001	0,0004	85	0,0655	0,0902	30	0,0301	0,0353	85	0,01159	0,01296
31	0,0002	0,0004	86	0,0744	0,1041	31	0,0301	0,0364	86	0,01153	0,01176
32	0,0002	0,0004	87	0,0846	0,1197	32	0,0306	0,0373	87	0,01131	0,01072
33	0,0002	0,0004	88	0,0959	0,1370	33	0,0323	0,0372	88	0,01095	0,00975
34	0,0002	0,0004	89	0,1092	0,1555	34	0,0335	0,0363	89	0,01049	0,00881
35	0,0002	0,0004	90	0,1246	0,1749	35	0,0347	0,0355	90	0,00996	0,00789
36	0,0003	0,0004	91	0,1417	0,1958	36	0,0356	0,0342	91	0,00941	0,00685
37	0,0003	0,0005	92	0,1610	0,2187	37	0,0358	0,0334	92	0,00886	0,00588
38	0,0003	0,0005	93	0,1819	0,2434	38	0,0357	0,0334	93	0,00826	0,00513
39	0,0004	0,0006	94	0,2049	0,2707	39	0,0352	0,0331	94	0,00765	0,00454
40	0,0004	0,0006	95	0,2297	0,3003	40	0,0342	0,0328	95	0,00705	0,00422
41	0,0004	0,0007	96	0,2564	0,3316	41	0,0334	0,0323	96	0,00645	0,00376
42	0,0005	0,0007	97	0,2850	0,3644	42	0,0323	0,0311	97	0,00586	0,00320
43	0,0006	0,0008	98	0,3155	0,3985	43	0,0316	0,0293	98	0,00529	0,00256
44	0,0006	0,0010	99	0,3476	0,4337	44	0,0311	0,0275	99	0,00476	0,00178
45	0,0007	0,0011	100	0,3812	0,4695	45	0,0304	0,0256	100	0,00427	0,00119
46	0,0008	0,0013	101	0,4159	0,5056	46	0,0294	0,0239	101	0,00382	0,00094
47	0,0009	0,0015	102	0,4514	0,5416	47	0,0285	0,0228	102	0,00340	0,00076
48	0,0010	0,0017	103	0,4874	0,5773	48	0,0273	0,0220	103	0,00300	0,00068
49	0,0012	0,0018	104	0,5236	0,6121	49	0,0264	0,0214	104	0,00262	0,00070
50	0,0013	0,0020	105	0,5595	0,6459	50	0,0256	0,0207	105	0,00224	0,00046
51	0,0015	0,0022	106	0,5948	0,6783	51	0,0248	0,0202	106	0,00189	0,00026
52	0,0018	0,0024	107	0,6292	0,7091	52	0,0242	0,0197	107	0,00157	0,00008
53	0,0020	0,0026	108	0,6633	0,7395	53	0,0236	0,0195	108	0,00127	0,00000
54	0,0022	0,0029	109	0,6960	0,7676	54	0,0230	0,0196	109	0,00100	0,00000
			110	0,7267	0,7935				110	0,00077	0,00000

Appendix D – R kode

Appendix D.1 R-kode for faste vægte

```
path2weights <- "sp-data/users$/jore12ab/Desktop/simulations/"

npx <- read.table(paste0(path2weights, "npx.csv"), sep = ";", header = TRUE, dec = ",")
npx <- npx[npx$t > 0, 1]

simulations <- replicate(100000, {

  # initiale værdier
  S0 <- 100
  B0 <- 100
  r0 <- 0.0

  ## drift og Vasicek parametre
  a <- 0.20
  b <- 0.02
  theta_s <- 0.04
  theta_b <- 0.01
  pal <- 0.153

  ## volatilitet
  sigma_r <- 0.005
  sigma_1 <- 0.1908
  sigma_2 <- 0.06
  sigmaB <- sigma_r*(1- exp(-a * 20))/a

  ## Simulering af aktivpriser
  Nyear <- 85
  stepsPerYear <- 1

  ##
  Nsteps <- Nyear*stepsPerYear
  stepSize <- 1/stepsPerYear

  tid <- seq(stepSize, Nyear, length.out = Nsteps)
  steps <- rep(stepSize, Nsteps)

  rt <- rep(NA_real_, Nsteps)
  S <- rep(NA_real_, Nsteps)
  B <- rep(NA_real_, Nsteps)

  Nsim <- 1
  lst <- list()
  ##
  for(sim_i in 1:(Nsim + 1)){
    ## rente
    Wr <- rnorm(length(tid))
```

```

Ws <- rnorm(length(tid))
if(sim_i == 1){
  Wr <- rep(0, length(tid))
  Ws <- rep(0, length(tid))
}
for(tm in 1:Nsteps){
  r_vol <- sigma_r*sqrt((1 - exp(-2*a*tid[tm]))/(2*a))
  r_mu <- exp(-a*stepSize)
  if(tm == 1){
    rt[tm] <- r0*r_mu + b*(1 - exp(-a*stepSize)) - r_vol * Wr[tm]
    S[tm] <- S0*exp(
      (rt[tm] + theta_s - 0.5*sigma_1^2)*stepSize
      + sigma_1 * sqrt(stepSize)*Ws[tm] + sigma_2*sqrt(stepSize)*Wr[tm]
    )
    B[tm] <- B0*exp(
      (rt[tm] + theta_b - 0.5*sigmaB^2)*stepSize
      + sigmaB * sqrt(stepSize)*Wr[tm]
    )
  } else{
    rt[tm] <- rt[tm - 1]*r_mu + b*(1 - exp(-a*stepSize)) - r_vol * Wr[tm]

    S[tm] <- S[tm - 1]*exp(
      (rt[tm] + theta_s - 0.5*sigma_1^2)*stepSize
      + sigma_1 * sqrt(stepSize)*Ws[tm] + sigma_2*sqrt(stepSize)*Wr[tm]
    )

    B[tm] <- B[tm - 1]*exp(
      (rt[tm] + theta_b - 0.5*sigmaB^2)*stepSize
      + sigmaB * sqrt(stepSize)*Wr[tm]
    )
  }
}
lst[[sim_i]] <- data.frame(tid, S, rt, B)
# if(i == 1) {
#   plot(tid, S, type = "l")
# } else lines(tid, S, col = i)
}

gran <- data.frame(tid, S, rt, B)
yearly <- gran[c(seq(12, Nyear*stepsPerYear, 12)), ]

allSim <- Reduce(rbind, lst)

#### Mere modelling ####
library(dplyr)
returns <- gran[, c("S", "B", "rt")]
returns$S <- gran$S / lag(gran$S, default = S0) - 1
returns$B <- gran$B / lag(gran$B, default = B0) - 1
returns$rt <- exp(gran$rt) - 1
returns <- as.matrix(returns)

```

```
# Løn, indbetalinger og offentlige ydelser 2017
```

```
l0 <- 35e4
```

```
Og <- 73920
```

```
Of <- 78612
```

```
Fg <- 69800
```

```
O <- 5e4
```

```
lr <- 0.0302
```

```
Or <- 0.0272
```

```
Ir <- 0.144
```

```
indskud <- 5e5
```

```
m <- 27
```

```
#Fremskrivning af pensionsopsparing, samt løn og offentlige ydelser
```

```
W <- numeric(nrow(returns))
```

```
aum <- indskud
```

```
for(tid in 1:m){
```

```
  aum <- aum*(1 + (returns[tid, ] %*% weights[tid, ]*(1 - pal))
```

```
  l0 <- (1+lr)*l0
```

```
  aum <- aum + l0*lr
```

```
  W[tid] <- aum
```

```
  Og <- (1+Or)*Og
```

```
  Of <- (1+Or)*Of
```

```
  Fg <- (1+Or)*Fg
```

```
}
```

```
#Beregning af dækningsgrader
```

```
mintidD <- length(npx)
```

```
NPV1r <- sum(exp(-log(1 + returns[m + 1:tidD, "rt"])*(1:tidD + 0.5))*npx[1:tidD])
```

```
c(Wm = W[m], dg = (W[m] / NPV1r + Og + Of - max(min(0.309*(W[m] / NPV1r - Fg), Of),0)) / l0)
```

```
#Plots og fraktilark
```

```
par(mfrow = c(1,1))
```

```
plot(density(simulations[1, ]))
```

```
quantile(simulations[1, ], probs = c(0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95))
```

```
mean(simulations[1, ])
```

```
par(mfrow = c(1,1))
```

```
plot(density(simulations[2, ]), main="Fordeling af dækningsgrader middel",
```

```
  xlab="Dækningsgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")
```

```
quantile(simulations[2, ], probs = c(0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95))
```

```
mean(simulations[2, ])
```

Appendix D.2 – R code for fuld model

```
rm(list = ls())

path2weights <- "sp-data/users$/jore12ab/Desktop/simulations/"

dgMin <- 0.65
dgMiddel <- 0.70
irGrid <- seq(0.08, 0.30, 0.0025)

weights <- read.table(paste0(path2weights, "weights.csv"), sep = ",", dec = ".", header = TRUE)
weights <- as.matrix(weights)
npx <- read.table(paste0(path2weights, "npx.csv"), sep = ";", header = TRUE, dec = ",")
npx <- npx[npx$t > 0, 1]

# initiale værdier
S0 <- 100
B0 <- 100
r0 <- 0.0

## drift og Vasicek parametre
a <- 0.20
b <- 0.02
theta_s <- 0.04
theta_b <- 0.01
pal <- 0.153

## volatilitet
sigma_r <- 0.005
sigma_1 <- 0.1908
sigma_2 <- 0.06
sigmaB <- sigma_r*(1- exp(-a * 20))/a

## Simulering af aktivpriser
Nyear <- 85
stepsPerYear <- 1

library(dplyr)

output <- list()
iter <- 0
for(ir in irGrid){
  iter <- iter + 1
  simulations <- replicate(100000, {
    ##
    Nsteps <- Nyear*stepsPerYear
    stepSize <- 1/stepsPerYear

    tid <- seq(stepSize, Nyear, length.out = Nsteps)
    steps <- rep(stepSize, Nsteps)
```

```

rt <- rep(NA_real_, Nsteps)
S <- rep(NA_real_, Nsteps)
B <- rep(NA_real_, Nsteps)

Nsim <- 1
lst <- list()
##
for(sim_i in 1:(Nsim + 1)){
  ## rente
  Wr <- rnorm(length(tid))
  Ws <- rnorm(length(tid))
  if(sim_i == 1){
    Wr <- rep(0, length(tid))
    Ws <- rep(0, length(tid))
  }
  for(tm in 1:Nsteps){
    r_vol <- sigma_r*sqrt((1 - exp(-2*a*tid[tm]))/(2*a))
    r_mu <- exp(-a*stepSize)
    if(tm == 1){
      rt[tm] <- r0*r_mu + b*(1 - exp(-a*stepSize)) - r_vol * Wr[tm]
      S[tm] <- S0*exp(
        (rt[tm] + theta_s - 0.5*sigma_1^2)*stepSize
        + sigma_1 * sqrt(stepSize)*Ws[tm] + sigma_2*sqrt(stepSize)*Wr[tm]
      )
      B[tm] <- B0*exp(
        (rt[tm] + theta_b - 0.5*sigmaB^2)*stepSize
        + sigmaB * sqrt(stepSize)*Wr[tm]
      )
    } else{
      rt[tm] <- rt[tm - 1]*r_mu + b*(1 - exp(-a*stepSize)) - r_vol * Wr[tm]

      S[tm] <- S[tm - 1]*exp(
        (rt[tm] + theta_s - 0.5*sigma_1^2)*stepSize
        + sigma_1 * sqrt(stepSize)*Ws[tm] + sigma_2*sqrt(stepSize)*Wr[tm]
      )

      B[tm] <- B[tm - 1]*exp(
        (rt[tm] + theta_b - 0.5*sigmaB^2)*stepSize
        + sigmaB * sqrt(stepSize)*Wr[tm]
      )
    }
  }
  lst[[sim_i]] <- data.frame(tid, S, rt, B)
  # if(i == 1) {
  #   plot(tid, S, type = "l")
  # } else lines(tid, S, col = i)
}

gran <- data.frame(tid, S, rt, B)
yearly <- gran[c(seq(12, Nyear*stepsPerYear, 12)), ]

```

```

allSim <- Reduce(rbind, lst)

#### Udvidelse af model ####
returns <- gran[, c("S", "B", "rt")]
returns$S <- gran$S / lag(gran$S, default = S0) - 1
returns$B <- gran$B / lag(gran$B, default = B0) - 1
returns$rt <- exp(gran$rt) - 1
returns <- as.matrix(returns)

# Løn, indbetalinger og offentlige ydelser 2017
l0 <- 35e4
Og <- 73920
Of <- 78612
Fg <- 69800
O <- 5e4
lr <- 0.0302
Or <- 0.0272

indskud <- 5e5
m <- 27

#Fremskrivning af pensionsopsparing, samt løn og offentlige ydelser
W <- numeric(nrow(returns))
aum <- indskud
for(tid in 1:m){
  aum <- aum*(1 + (returns[tid, ] %*% weights[tid, ])*(1 - pal))
  l0 <- (1+lr)*l0
  aum <- aum + l0*lr
  W[tid] <- aum
  Og <- (1+Or)*Og
  Of <- (1+Or)*Of
  Fg <- (1+Or)*Fg
}

#Beregning af dækningsgrader
tidD <- length(npx)
NPV1r <- sum(exp(-log(1 + returns[m + 1:tidD, "rt"])*(1:tidD + 0.5))*npx[1:tidD])

c(
  Wm = W[m],
  dg = (W[m] / NPV1r + Og + Of - max(min(0.309*(W[m] / NPV1r - Fg), Of),0)) / l0
  , NPV1r = NPV1r
)
})

output[[iter]] <- list(
  quant = quantile(simulations[2, ], probs = c(0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95))
  , avg = mean(simulations[2, ])
  , ir = ir
  , NPV = simulations[3, ]
)

```

```

}

avgDG <- sapply(output, function(x) x[[2]])
quantDG <- sapply(output, function(x) x[[1]])
DG10pct <- quantDG[2, ]

plot(irGrid, avgDG, type = "b")
abline(h = dgMiddel, col = 4)
plot(irGrid, DG10pct, type = "l")
abline(h = dgMin, col = 4)

cbind(irGrid, avgDG, DG10pct)[avgDG >= dgMiddel & DG10pct >= dgMin,]

```

Appendix E – Risikoprofiler og vægte

Risikoprofil Tid til pension	Danica Livscyklus			[1-alders/100]% aktier (start alder = 40)			Danica Livscyklus			50% aktier og 50% obl.			Danica Livscyklus		
	Laveste Risiko			Mellem Risiko									Højeste risiko		
	w1	w2	w3	w1	w2	w3	w1	w2	w3	w1	w2	w3	w1	w2	w3
27	38,37%	61,63%	0,00%	60%	40%	0%	85,88%	14,12%	0,00%	50%	50%	0%	100,00%	0,00%	0,00%
26	35,90%	64,10%	0,00%	59%	41%	100%	80,28%	19,72%	0,00%	50%	50%	0%	100,00%	0,00%	0,00%
25	33,76%	66,24%	0,00%	58%	42%	200%	75,45%	24,55%	0,00%	50%	50%	0%	100,00%	0,00%	0,00%
24	31,87%	68,13%	0,00%	57%	43%	300%	71,24%	28,76%	0,00%	50%	50%	0%	100,00%	0,00%	0,00%
23	30,20%	69,80%	0,00%	56%	44%	400%	67,54%	32,46%	0,00%	50%	50%	0%	100,00%	0,00%	0,00%
22	28,72%	71,28%	0,00%	55%	45%	500%	64,27%	35,73%	0,00%	50%	50%	0%	99,98%	0,02%	0,00%
21	27,39%	72,61%	0,00%	54%	46%	600%	61,34%	38,66%	0,00%	50%	50%	0%	95,25%	4,75%	0,00%
20	26,18%	73,82%	0,00%	53%	47%	700%	58,72%	41,28%	0,00%	50%	50%	0%	91,04%	8,96%	0,00%
19	25,10%	74,90%	0,00%	52%	48%	800%	56,35%	43,65%	0,00%	50%	50%	0%	87,28%	12,72%	0,00%
18	24,10%	75,90%	0,00%	51%	49%	900%	54,21%	45,79%	0,00%	50%	50%	0%	83,91%	16,09%	0,00%
17	23,20%	76,80%	0,00%	50%	50%	1000%	52,26%	47,74%	0,00%	50%	50%	0%	80,85%	19,15%	0,00%
16	22,37%	77,63%	0,00%	49%	51%	1100%	50,47%	49,53%	0,00%	50%	50%	0%	78,09%	21,91%	0,00%
15	21,60%	78,40%	0,00%	48%	52%	1200%	48,83%	51,17%	0,00%	50%	50%	0%	75,56%	24,44%	0,00%
14	20,90%	79,10%	0,00%	47%	53%	1300%	47,33%	52,67%	0,00%	50%	50%	0%	73,26%	26,74%	0,00%
13	20,24%	79,76%	0,00%	46%	54%	1400%	45,94%	54,06%	0,00%	50%	50%	0%	71,14%	28,86%	0,00%
12	19,63%	80,37%	0,00%	45%	55%	1500%	44,65%	55,35%	0,00%	50%	50%	0%	69,19%	30,81%	0,00%
11	19,07%	80,93%	0,00%	44%	56%	1600%	43,45%	56,55%	0,00%	50%	50%	0%	67,39%	32,61%	0,00%
10	18,54%	81,46%	0,00%	43%	57%	1700%	42,34%	57,66%	0,00%	50%	50%	0%	65,73%	34,27%	0,00%
9	18,04%	81,96%	0,00%	42%	58%	1800%	41,30%	58,70%	0,00%	50%	50%	0%	64,18%	35,82%	0,00%
8	17,58%	82,42%	0,00%	41%	59%	1900%	40,33%	59,67%	0,00%	50%	50%	0%	62,75%	37,25%	0,00%
7	17,14%	82,86%	0,00%	40%	60%	2000%	39,42%	60,58%	0,00%	50%	50%	0%	61,41%	38,59%	0,00%
6	16,73%	83,27%	0,00%	39%	61%	2100%	38,57%	61,43%	0,00%	50%	50%	0%	60,16%	39,84%	0,00%
5	16,35%	83,65%	0,00%	38%	62%	2200%	37,77%	62,23%	0,00%	50%	50%	0%	58,99%	41,01%	0,00%
4	15,98%	84,02%	0,00%	37%	63%	2300%	37,02%	62,98%	0,00%	50%	50%	0%	57,90%	42,10%	0,00%
3	15,64%	84,36%	0,00%	36%	64%	2400%	36,31%	63,69%	0,00%	50%	50%	0%	56,87%	43,13%	0,00%
2	15,31%	84,69%	0,00%	35%	65%	2500%	35,63%	64,37%	0,00%	50%	50%	0%	55,91%	44,09%	0,00%
1	15,00%	85,00%	0,00%	34%	66%	2600%	35,00%	65,00%	0,00%	50%	50%	0%	55,00%	45,00%	0,00%
0	15,00%	85,00%	0,00%	33%	67%	2700%	35,00%	65,00%	0,00%	50%	50%	0%	55,00%	45,00%	0,00%

Kilde: Bo Søndergaard fra Danica Pension.

Appendix F – W_{27} for forskellige risikoforløb, N=100.000

"Laveste Risiko"

5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
3386017	3519642	3765189	4063980	4404369	4748445	4969832

```
> mean(simulations[1, ])
[1] 4107256
```

"1-alder/100"

5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
3013182	3254145	3729048	4372584	5186542	6102247	6742357

```
> mean(simulations[1, ])
[1] 4562571
```

"Mellem Risiko"

5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
2982873	3232263	3728848	4406710	5268464	6254075	6952951

```
> mean(simulations[1, ])
[1] 4616992
```

"50% Aktier & 50% Obligationer"

5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
2849235	3126192	3678636	4439973	5413935	6523611	7305742

```
> mean(simulations[1, ])
[1] 4681324
```

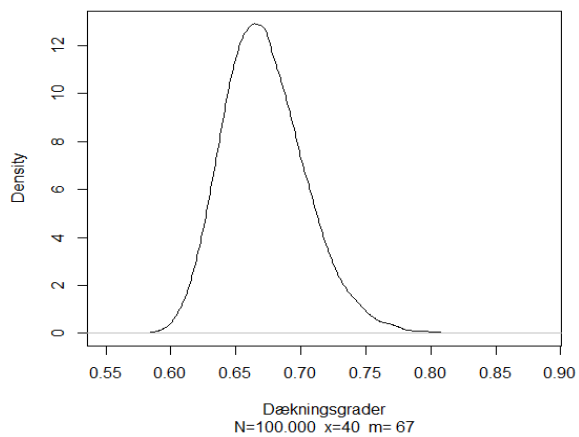
"Højeste Risiko"

5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
2598398	2925593	3600600	4647966	6104707	7983566	9460368

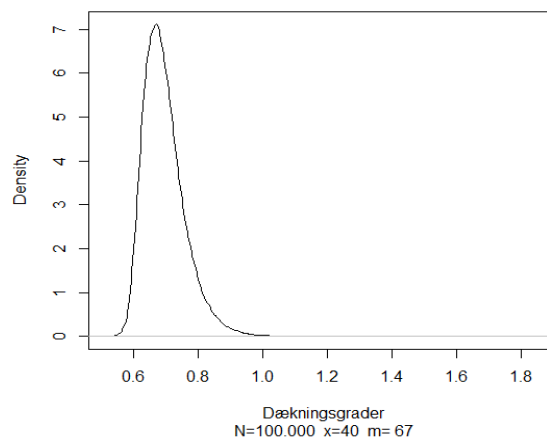
```
> mean(simulations[1, ])
[1] 5159008
```

Appendix G – Densitetsplot for forskellige risikoforløb

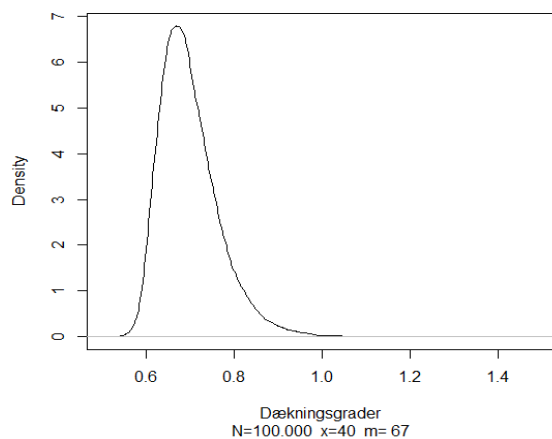
Fordeling af dækningsgrader lav risiko



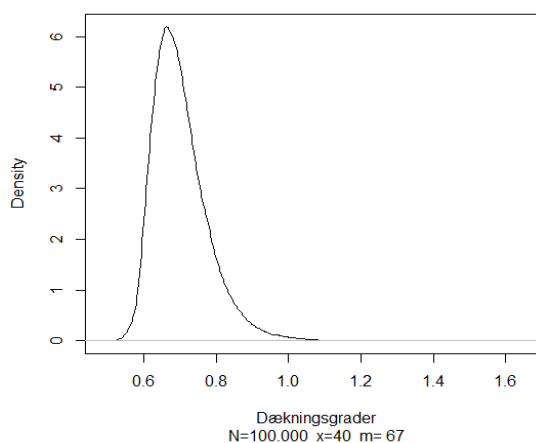
Fordeling af dækningsgrader (1-alder)% aktier



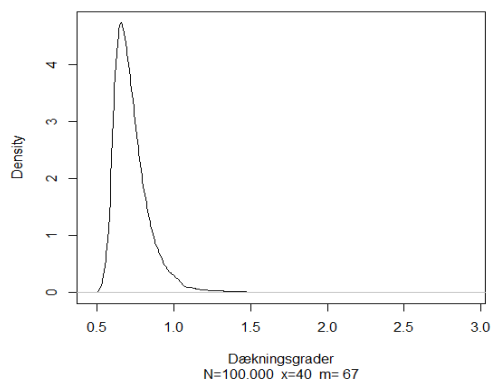
Fordeling af dækningsgrader middel risiko



Fordeling af dækningsgrader 50/50



Fordeling af dækningsgrader høj risiko



Appendix H – I.1_{65%} ”Middel Risiko”

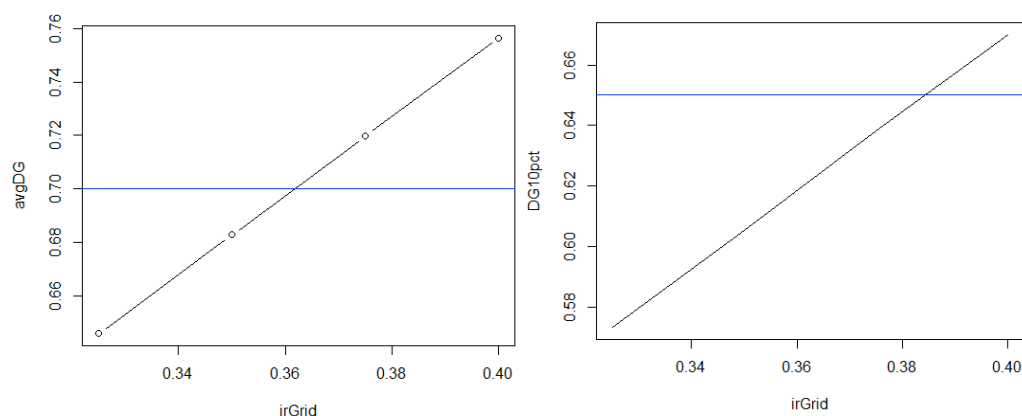
	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.5358175	0.6305743	0.6461051	0.6763924	0.7172188	0.7687268	0.8274040	
95%	100%						
0.8702699	1.6167170						

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7295579
```

Appendix I – I.2_{65%} ”100% obligationer”

Individ 2 – ”100% obligationer”

Gnms. DG og VaR_{10%} ved forskellige indbetalingsniveauer



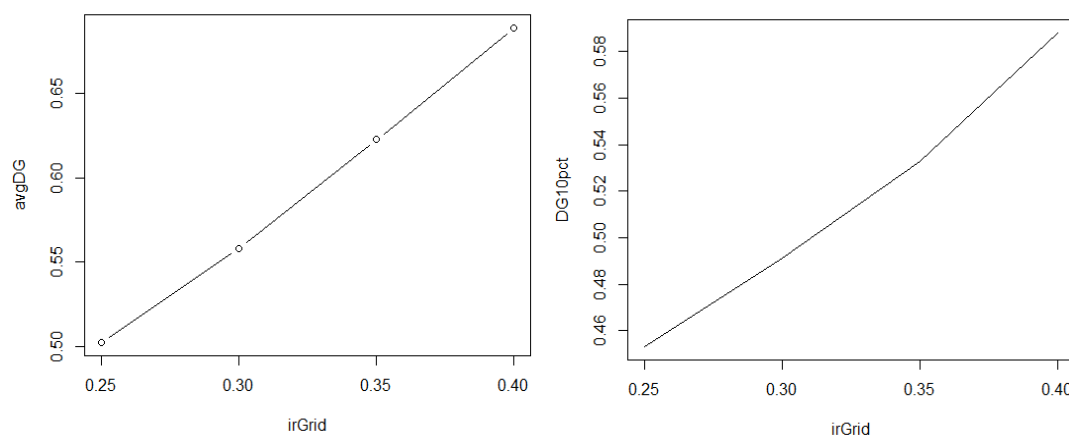
R-output for minimeringen af indbetalingsraten

irGrid	avgDG	DG10pct
0.3850000	0.7344129	0.6505934

Appendix J – I.2 ”100% kontant”

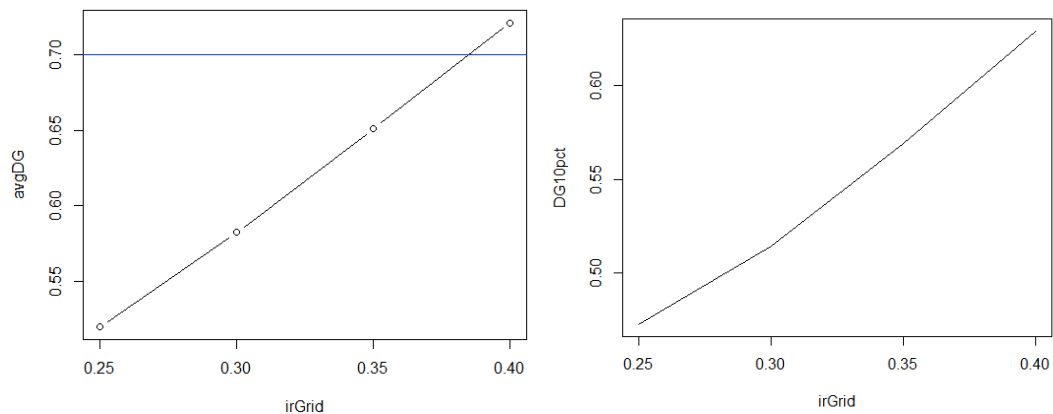
Individ 2 – ”100% kontant”

Gnms. DG og VaR_{10%} ved forskellige indbetalingsniveauer



Appendix K – Output for ligevægtede porteføljer I.2

Individ 2 – ”50% obligationer og 50% kontant”
 Gnms. DG og $Var_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



I.2 – IR=37,25% – Ligevægtet portefølje 50% aktier og 50% obligationer, R output

```
> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
      0%      5%     10%     25%     50%     75%     90%     95%
0.2926371 0.4800262 0.5140468 0.5781467 0.6603875 0.7562754 0.8586804 0.9279472
100%
1.6992650

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6763493
```

Appendix L – I.1_{60%} ”Højeste Risiko” og I.1_{50%} ”100% aktier”

Individ 1 – Højeste Risiko – $MG^* = 60\%$ & $DG^* = 70\%$ (Resultat 5.7–5.9)

```
      irGrid      avgDG      DG10pct
[1,] 0.1350 0.7165430 0.6011560
[2,] 0.1375 0.7195803 0.6033669
```

Individ 1 – 100% Aktier – $MG^* = 50\%$ & $DG^* = 70\%$ (Resultat 5.13–5.15)

```
      irGrid      avgDG      DG10pct
0.1000000 0.7026962 0.5394425
```

Appendix M – I.2_{50%}

Individ 1 – Sammenligning af ”Middel Risiko” og ”50%/50%” Opsummering

	Middel Risiko	50%/50%
Indbetaling	0,295	0,2875
DG*	0,703	0,7014
Min DG	0,5267	0,51

I.2_{50%} – ”Mellem Risiko”

	irGrid	avgDG	DG10pct
[1,]	0.2950	0.702944	0.5266795
[2,]	0.2975	0.707481	0.5290107
[3,]	0.3000	0.711578	0.5323114

Appendix N – I.1 fast indbetalingssats

Individ 1 – Fastsat indbetalingsgrad på, IR=9,6% ved forskellige risikoforløb

fraktiler	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	100%	IQR
Laveste	0,5262	0,5809	0,5897	0,6020	0,6173	0,6344	0,6518	0,6633	0,7545	0,0324
1-alder	0,4905	0,5645	0,5797	0,6023	0,6301	0,6652	0,7047	0,7330	1,1113	0,0630
Middel	0,4931	0,5626	0,5781	0,6018	0,6319	0,6702	0,7148	0,7479	1,5610	0,0685
50/50	0,4674	0,5566	0,5734	0,6004	0,6329	0,6746	0,7228	0,7578	1,5027	0,0742
Højeste	0,4693	0,5432	0,5623	0,5978	0,6411	0,7026	0,7829	0,8474	3,0692	0,1048
100% aktier	0,4403	0,5132	0,5353	0,5859	0,6471	0,7450	0,8879	1,0096	6,9002	0,1591

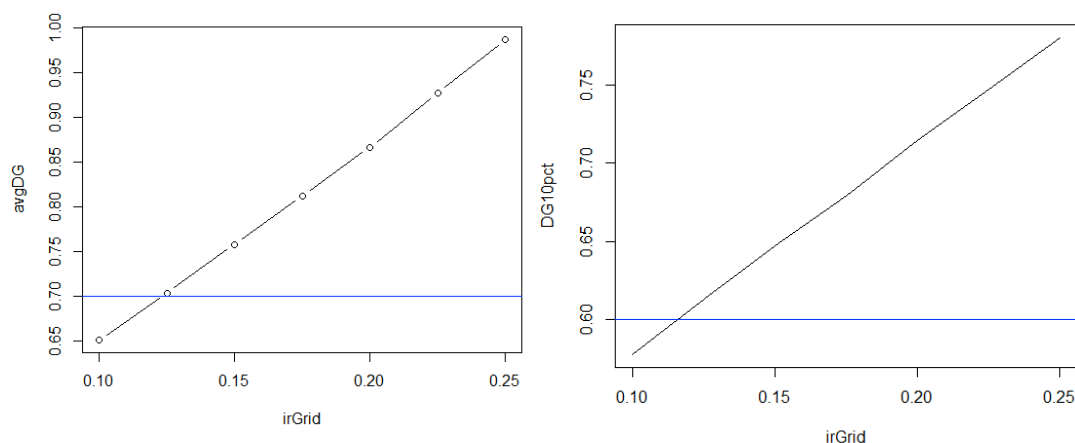
Appendix O – I.2 fast indbetalingssats

Individ 2 – Fastsat indbetalingsgrad på, IR=14,4% ved forskellige risikoforløb

fraktiler	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	100%	IQR
Laveste	0,3441	0,3950	0,4038	0,4196	0,4391	0,4608	0,4826	0,4969	0,6483	0,0412
1-alder	0,3153	0,3812	0,3945	0,4203	0,4550	0,4986	0,5564	0,6065	1,2257	0,0783
Middel	0,3176	0,3800	0,3935	0,4200	0,4574	0,5040	0,5720	0,6289	1,6868	0,0840
50/50	0,2923	0,3737	0,3885	0,4176	0,4588	0,5112	0,5918	0,6536	1,6421	0,0936
Højeste	0,2956	0,3631	0,3799	0,4151	0,4691	0,5529	0,6915	0,8034	3,3957	0,1378
100% aktier	0,2523	0,3348	0,3547	0,3999	0,4769	0,6325	0,8857	1,0988	8,1049	0,2326

Appendix P – Individ 3 ”Middel Risiko”

Gnms. DG og VaR_{10%} ved forskellige indbetalingsniveauer



Appendix Q – Simulationsresultater for I.3 og I.1_{60%}

Middel Risiko - Individ 3

Fraktil	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(2057)	kr. 3.596.507	kr. 4.092.486	kr. 5.165.539	kr. 6.819.761	kr. 9.297.050	kr. 12.597.215	kr. 15.307.042
DG	0,58	0,60	0,64	0,70	0,80	0,92	1,03
DG Livrente	0,195	0,223	0,281	0,374	0,513	0,696	0,849
DG Livrente (IR=13,5%)	0,209	0,240	0,304	0,404	0,552	0,753	0,920
Middelværdi W(2057)	kr. 7.817.539 År 2057 kr.						
Middelværdi DG	0,743						
Middelværdi DG(Livrente)	0,430						

Middel Risiko - Individ 1

Fraktil	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
W(2044)	kr. 2.474.495	kr. 2.791.956	kr. 3.439.348	kr. 4.410.429	kr. 5.798.971	kr. 7.540.594	kr. 8.919.727
DG	0,58	0,60	0,64	0,69	0,76	0,85	0,92
DG Livrente	0,182	0,206	0,255	0,331	0,436	0,569	0,673
Middelværdi W(2044)	kr. 4.894.766 År 2044 kr.						
Middelværdi DG	0,713						
Middelværdi DG(Livrente)	0,367						

Appendix R – Fraktiler og R-output for I.4

R-output for I.4 – "Laveste Risiko"

Formue til pensioneringstidspunktet (W)

```

0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%
10416351 11945474 12192293 12641927 13170144 13747484 14325769 14694405
100%
17666581

```

```

> mean(simulations[1, ])
[1] 13224332

```

Dækningsgrad (DG)

```

0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%
0.4870107 0.6285414 0.6509578 0.6919689 0.7394029 0.7894339 0.8371393 0.8668400
100%
1.0914487

```

```

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7423752

```

R-output for I.4 – "Laveste Risiko" v. Fast W

```

0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%
0.5103528 0.6402861 0.6607514 0.6953096 0.7351775 0.7765536 0.8143735 0.8373848
100%
0.9999848

```

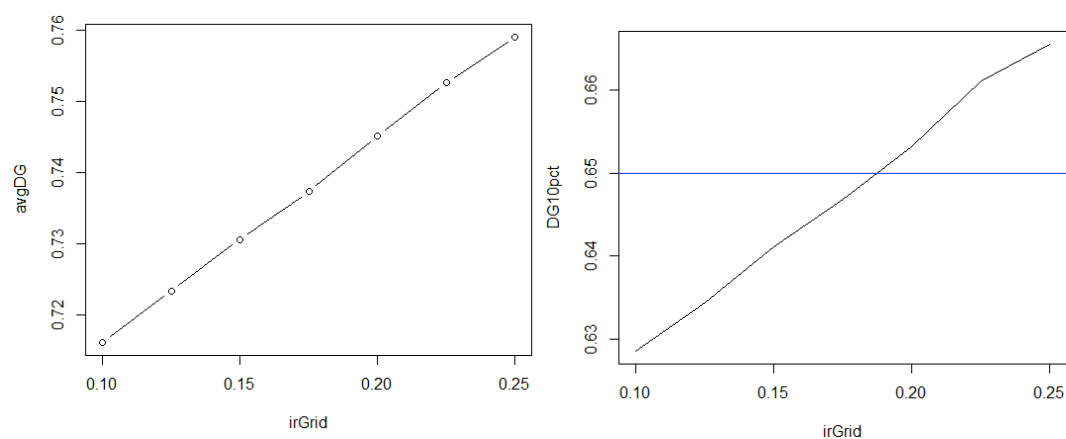
```

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7365451

```

Appendix S – Individ 4 ”Laveste Risiko”

Gnms. DG og $VaR_{10\%}$ ved forskellige indbetalingsniveauer



R-output:

	irGrid	avgDG	DG10pct
[1,]	0.1900	0.7419848	0.6513882
[2,]	0.1925	0.7424542	0.6522504
[3,]	0.1950	0.7432887	0.6520159
[4,]	0.1975	0.7439409	0.6527793
[5,]	0.2000	0.7447429	0.6536802

Appendix T – Følsomhed i DG ved en højere rente vol.

I.1_{60%}

	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4452416	0.5629055	0.5872990	0.6233989	0.6782463	0.7560633	0.8543720	
95%	100%						
0.9317097	2.9010561						

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7057652
```

I.2_{60%}

	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.3548910	0.4947151	0.5205851	0.5857961	0.6710183	0.7666069	0.8632245	
95%	100%						
0.9271250	1.4831987						

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6847973
```

Appendix U – Højere aktie volatilitet

$$\sigma_S = 25\%$$

Parameter 10 – følsomhed

$$\sigma_1 = \sqrt{0,25^2 - 0,075^2} = 23,85\%$$

Parameter 11 – følsomhed

$$\sigma_2 = \sigma_S \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_S} \right) = 25\% \cdot 30\% = 7,5\%$$

Parameter 12 – følsomhed

Følsomheden i DG ved en højere aktie vol.

I.1_{60%}

	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4552138	0.5363646	0.5584129	0.6024973	0.6632528	0.7634651	0.9167259	
95%	100%						
1.0531973	7.4346225						

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7208919
```

I.2_{60%}

	0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4156557	0.5519060	0.5792701	0.6298117	0.6938161	0.7687029	0.8466380	
95%	100%						
0.8995000	1.6683759						

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7059412
```


Appendix V – Højere rente og aktie volatilitet

Følsomheden i DG ved en højere rente og aktie vol.

Individ 1

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4331923	0.5241547	0.5463621	0.5942993	0.6552314	0.7550378	0.8996022
95%	100%					
1.0322633	10.6662816					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.7087281
```

Individ 2

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.3428786	0.4874670	0.5131594	0.5771223	0.6673101	0.7698970	0.8796376
95%	100%					
0.9541072	2.0214924					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.6852453
```

Appendix X – Følsomhedsanalyse, b ned

Individ 1

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4732635	0.5461433	0.5645083	0.5978939	0.6366984	0.6917748	0.7619550
95%	100%					
0.8161273	2.1499782					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.6543691
```

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4068647	0.4907212	0.5043140	0.5291541	0.5717384	0.6173180	0.6630600
95%	100%					
0.6917973	1.0754892					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.5782293
```

Individ 2

Appendix Y – Højere risikopræmier

Individ 1

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4789884	0.5641314	0.5839324	0.6138482	0.6568941	0.7175558	0.7941439
95%	100%					
0.8536001	4.0694958					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.6772015
```

Individ 2

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4196464	0.5240617	0.5449919	0.5824854	0.6281733	0.6786876	0.7285888
95%	100%					
0.7607904	1.1093010					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.6337778
```

Appendix Z – Relation mellem risikopræmier og F&P

Dette giver anledning til et kortsigtet årligt forventet afkast på obligationsfonden og aktiefonden på

$$E_t[R_B]_{kort\ sigt} = 0\% + 2\% = 2\%$$

$$E_t[R_A]_{kort\ sigt} = 0\% + 5\% = 5\%$$

og langsigtet

$$E_t[R_B] = 2\% + 2\% = 4\%$$

$$E_t[R_A] = 2\% + 5\% = 7\%$$

svarende til samfundsforudsætningerne dikteret af brancheforeningen.

Appendix W – Lavere risikopræmier

I.1_{60%} – ”Højeste Risiko”

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4758756	0.6026279	0.6216270	0.6625511	0.7247411	0.8138052	0.9264324
95%	100%					
1.0167354	3.1365578					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.7588978
```

I.2_{60%} – ”Laveste Risiko”

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4829754	0.6404610	0.6678078	0.7187478	0.7802865	0.8475368	0.9154120
95%	100%					
0.9591501	1.4332169					

```
> mean(simulations[2, ])  
[1] 0.7872395
```

Appendix AA – Justerede levetidsforbedringer

Alder	Mænd (Inkl. Forb.)	Alder	Mænd (Inkl. Forb.)	Følsomhedsanalyse forbedring
0	0,046681037	56	0,028429014	40%
1	0,066370078	57	0,029177267	Ændring ift. tidligere anvendte forbedring ($x=58-x=110$)
2	0,07224639	58	0,030170829	0,86%
3	0,072517992	59	0,031046917	0,89%
4	0,074721324	60	0,031928869	0,91%
5	0,086651953	61	0,032763824	0,94%
6	0,095749621	62	0,033406695	0,95%
7	0,102497161	63	0,034011105	0,97%
8	0,104891594	64	0,034726135	0,99%
9	0,104470534	65	0,035395017	1,01%
10	0,099823915	66	0,036145556	1,03%
11	0,097744115	67	0,036733288	1,05%
12	0,097170632	68	0,037108647	1,06%
13	0,094431756	69	0,037289214	1,07%
14	0,092852361	70	0,037096568	1,06%
15	0,086927536	71	0,036685878	1,05%
16	0,076726755	72	0,036091274	1,03%
17	0,06772536	73	0,035491762	1,01%
18	0,061244035	74	0,034711656	0,99%
19	0,053881929	75	0,033979266	0,97%
20	0,050945461	76	0,033015255	0,94%
21	0,048677793	77	0,031851205	0,91%
22	0,045680116	78	0,030476901	0,87%
23	0,043655746	79	0,02898935	0,83%
24	0,042455593	80	0,027364126	0,78%
25	0,04238149	81	0,025629766	0,73%
26	0,043493946	82	0,023873163	0,68%
27	0,0447899	83	0,021968539	0,63%
28	0,046276786	84	0,020026883	0,57%
29	0,048083156	85	0,018146892	0,52%
30	0,049459676	86	0,016458544	0,47%
31	0,050929412	87	0,015007565	0,43%
32	0,05216103	88	0,013648844	0,39%
33	0,052014629	89	0,012330681	0,35%
34	0,050802265	90	0,011048017	0,32%
35	0,049757493	91	0,009585817	0,27%
36	0,047941675	92	0,008228454	0,24%
37	0,046785634	93	0,007180092	0,21%
38	0,046727661	94	0,006360097	0,18%
39	0,04636238	95	0,005904794	0,17%
40	0,045942111	96	0,005263773	0,15%
41	0,045265653	97	0,004483805	0,13%
42	0,043567382	98	0,003580975	0,10%
43	0,041008737	99	0,002495444	0,07%
44	0,038439425	100	0,00166839	0,05%
45	0,035900873	101	0,001319695	0,04%
46	0,033473932	102	0,00106289	0,03%
47	0,031921777	103	0,000952545	0,03%
48	0,030828096	104	0,000984598	0,03%
49	0,029957128	105	0,000649914	0,02%
50	0,028972883	106	0,000360068	0,01%
51	0,028246161	107	0,000112765	0,00%
52	0,02762928	108	0	0,00%
53	0,027241851	109	0	0,00%
54	0,027483944	110	0	0,00%
55	0,027876649			

Appendix AB – Følsomhedsanalyse $R_M(X)$

I.1_{60%} – ”Højeste Risiko”

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%
0.4794707	0.5750845	0.5943041	0.6265213	0.6756020	0.7447094	0.8317609	0.9011485
100%							
3.4714763							

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6999617
```

I.2_{60%} – ”Laveste Risiko”

0%	5%	10%	25%	50%	75%	90%
0.4502313	0.5485289	0.5723064	0.6142720	0.6653173	0.7212978	0.7759566
95%	100%					
0.8117454	1.1318074					

```
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6709864
```

Appendix AC – Ændring i lønstigningstaksten

I.1 – ”Laveste Risiko” – *simulationsforløb for W og DG uden parameterændring (N=100.000)*

```
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%      100%
1176296 2487782 2793261 3442191 4419067 5806952 7561861 8936319 49954602

> mean(simulations[1, ])
[1] 4900913

> par(mfrow = c(1,1))

> plot(density(simulations[2, ]), main="Fordeling af dækningsgrader middel", xlab="Dæknin
sgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")

> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%      100%
0.4829184 0.5862752 0.6034695 0.6373401 0.6888284 0.7615455 0.8548534 0.9281701 3.9689813

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7149686
```

I.1 – ”Laveste Risiko” – *simulationsforløb for W og DG løn ned (N=100.000)*

```
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%      100%
1121155 2202862 2492240 3096674 4031088 5368004 7063199 8418465 66537735

> mean(simulations[1, ])
[1] 4511622

> par(mfrow = c(1,1))

> plot(density(simulations[2, ]), main="Fordeling af dækningsgrader middel", xlab="Dæknin
sgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")

> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%      100%
0.6125511 0.7394206 0.7683145 0.8108536 0.8747604 0.9676017 1.0838565 1.1758823 6.0785856

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.9079256
```

I.1 – ”Højeste Risiko” – *simulationsforløb for W og DG løn op (N=100.000)*

```
> quantile(simulations[1, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%      100%
1459221 2825168 3158530 3850385 4882296 6339667 8177050 9631029 35789950

> mean(simulations[1, ])
[1] 5385921

> par(mfrow = c(1,1))

> plot(density(simulations[2, ]), main="Fordeling af dækningsgrader middel", xlab="Dækning
sgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")

> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%      100%
0.3881395 0.4628777 0.4765516 0.5044446 0.5463399 0.6057532 0.6801159 0.7386118 2.4578989

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.5676532
```

I.2 – ”Laveste Risiko” – *simulationsforløb for W og DG uden parameterændring (N=100.000)*

```
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%
11047303 13689974 14174330 15028427 16078231 17237636 18402263 19156314
100%
26489911

> mean(simulations[1, ])
[1] 16205345

> par(mfrow = c(1,1))

> plot(density(simulations[2, ]), main="Fordeling af dækningsgrader mid
=Dækningsgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")

> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.
))
0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%
0.4439472 0.5773583 0.6018497 0.6456759 0.6985118 0.7569082 0.8144453
95%      100%
0.8516271 1.1891069

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.7044919
```

I.2 – "Laveste Risiko" – *simulationsforløb for W og DG løn ned (N=100.000)*

```

      0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%
9643501 12060341 12512298 13304378 14280677 15367809 16451828 17168648
      100%
23521021

```

```

> mean(simulations[1, ])
[1] 14403852

```

```

> par(mfrow = c(1,1))

```

```

> plot(density(simulations[2, ]) , main="Fordeling af dækningsgrader mi
="Dækningsgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")

```

```

> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0
))

```

```

      0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%
0.5765544 0.6848250 0.7119096 0.7630715 0.8259119 0.8962482 0.9655609
      95%      100%
1.0090939 1.4383206

```

```

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.8340741

```

I.2 – "Laveste Risiko" – *simulationsforløb for W og DG løn op (N=100.000)*

```

      0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%      95%
12702025 15605183 16115573 17050800 18193724 19451743 20716246 21516826
      100%
31469656

```

```

> mean(simulations[1, ])
[1] 18327482

```

```

> par(mfrow = c(1,1))

```

```

> plot(density(simulations[2, ]) , main="Fordeling af dækningsgrader middel", xlab
="Dækningsgrader", sub="N=100.000 x=40 m= 67")

```

```

> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1
))

```

```

      0%      5%      10%      25%      50%      75%      90%
0.3745118 0.4928084 0.5137861 0.5511012 0.5963495 0.6458101 0.6944224
      95%      100%
0.7249991 1.2227251

```

```

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6010834

```

Appendix AD – Ændring i væksten i de offentlige ydelser

Individ 1 – "Højeste Risiko" – Årlig vækst i offentlige ydelser på 2,72%

```
> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
      0%      5%     10%     25%     50%     75%     90%     95%
0.4202097 0.5063120 0.5227528 0.5570940 0.6086411 0.6813382 0.7743027 0.8468490
      100%
3.1468949

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6362331
```

Individ 2 – "Laveste Risiko" – Årlig vækst i offentlige ydelser på 2%

```
      0%      5%     10%     25%     50%     75%     90%
0.4182387 0.5608490 0.5852122 0.6288444 0.6813993 0.7392908 0.7969036
      95%     100%
0.8340089 1.1597688

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.6873668
```

Offentlige ydelser som pct. af slutlønnen

Individ 1 – "Højeste Risiko" – Årlig vækst i offentlige ydelser på 2,72%

```
      0%      5%     10%     25%     50%     75%     90%     95%
0.1952079 0.2504434 0.2828867 0.3247625 0.3574218 0.3805952 0.3958459 0.4028065
      100%
0.4028065

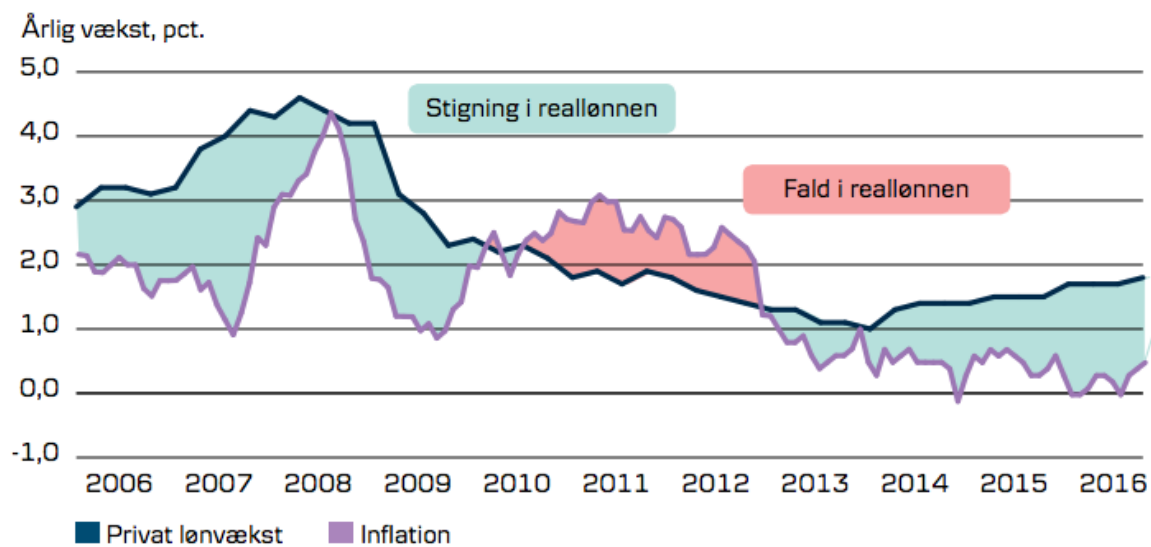
> mean(simulations[2, ])
[1] 0.3466396
```

Individ 1 – "Højeste Risiko" – Årlig vækst i offentlige ydelser på 2%

```
> quantile(simulations[2, ], probs = c(0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 1))
      0%      5%     10%     25%     50%     75%     90%     95%
0.1614421 0.1714200 0.2034231 0.2451971 0.2782528 0.3014643 0.3167559 0.3240994
      100%
0.3331316

> mean(simulations[2, ])
[1] 0.2689192
```

Appendix AE – Udvikling i løn og inflation siden 2006



Kilde: Danske bank, 2017 & dst.dk