

COPENHAGEN BUSINESS SCHOOL

KANDIDATAFHANDLING

Finansielle modeller med
Lévy-processer

Forfatter:

Mikael Oskar Engelund
91696

Vejleder:

Anders Rønn-Nielsen

67153 tegn uden mellemrum

15-05-2019

Abstract

In this paper I will cover the exponential Lévy model. The paper starts off by introducing the Lévy process and some of its most important properties and how it can be characterized. The focus will be on the difference between Lévy processes with finite versus infinite activity, as infinite activity gives rise to numerical problems, and hard characteristics. Thereafter I will introduce the exponential Lévy model, where I will derive ways to price call options with numerical methods. The first way to calculate prices will be with Fourier transforms where I show that prices can be calculated as an integral. The second way is where I show how to derive a partial integro differential equation for the pricing function, and then explaining how to solve it numerically. I then compare it to the Black Scholes model from which the exponential Lévy model is an expansion off. I look at which is most realistic and which is better to use as a financial institution as both precision and time is a valuable factor. Then I look at the implied volatility when the true prices are generated from the exponential Lévy model, to see if the model could fit real world data. Then I make a hedging experiment to see how bad it would be if the Black Scholes delta hedging method was used when the true price process is as described in the exponential Lévy model. Here I derive a stochastic variable for the profit and loss and simulate the experiment to see how bad the distribution looks when the Lévy process is of infinite activity. It seems like it does not go as bad as you could fear, so you can find empirical densities to calculate risk measures as Value at Risk and expected shortfall. Lastly, I discuss what you could use this model for in practice, when selling call options, and I relate to another way off expanding the Black Scholes model called Hestons Stochastic volatility model.

Indholdsfortegnelse

Abstract	i
Introduktion	1
1.1 Problemformulering	1
1.2 Indledning	2
Lévy-processer	6
2.1 Lévy-processer	6
2.1.1 Uendelig delbar	7
2.1.2 Lévy-processens opbygning	9
2.2 Subordinerede processer	14
2.3 Stokastisk funktionsanalyse	17
2.4 Opsummering	18
Den finansielle model	20
3.1 Model	20
3.1.1 Hovedsætninger for prisfastsættelse	20
3.1.2 Målskift	21
3.2 Optioner	23
3.2.1 Europæiske optioner	23
3.3 Prisfastsættelse	23
3.3.1 Fouriertransformationsmetoden	24
3.3.2 Partielle integro differentialligninger	26
3.4 Monte Carlo	32
3.5 Implicit volatilitet og greeks	33

3.5.1	Greeks	34
	Greeks i eksponentiel Lévy-modellen	34
3.5.2	Implicit volatilitet	34
3.6	Opsummering	35
Populære modeller - med anvendelse		37
4.1	Populære modeller	37
4.1.1	Springdiffusion	38
	Merton	39
	Kou	41
4.1.2	Modeller med uendelig aktivitet	43
	NIG	43
	Fourier	44
	PIDE	46
4.2	Metodernes fordele og ulemper	48
Delta hedging		50
5.1	Delta hedge	50
5.2	Fundamentalsætningen for derivat handel	50
5.3	Simulationseksperiment	56
5.3.1	Kou	56
5.3.2	NIG	58
Valg af model		61
6.1	Fordele og ulemper	61
6.2	Perspektivering	63
Konklusion		67
7.1	Samlet konklusion	67
Bilag		71
I.1	Kode	71
I.1.1	R - PIDE for Merton	71

I.1.2	Mathematica - Fourier for Kou	75
I.1.3	R - PIDE for NIG	77
I.1.4	Mathematica - Fourier for NIG	81
I.1.5	R - Simulationskode	83

Introduktion

1.1 Problemformulering

Hvordan udvider man Black-Scholes-modellen til en eksponentiel Lévy-model? Hvordan kan man benytte en eksponentiel Lévy-model for call optioner til prisfastsættelse ved brug af de numeriske metoder PIDE og Fourier? Hvordan kan man kvantificere sin risiko gennem en tab-/gevinstfordeling, hvis man benytter delta hedging?

Problemstillinger

- Hvad er en Lévy-proces, og hvilke vigtige egenskaber har den?
- Hvilke væsentlige forskelle er der ved at benytte processer med uendelig aktivitet sammenlignet med endelig aktivitet?
- Hvordan kan man prisfastsætte call optioner i en eksponentiel Lévy-model?
- Hvilke fordele og ulemper er der ved at benytte de forskellige numeriske metoder?
- Hvilke strukturer for implicit volatilitet kan en eksponentiel Lévy-model give?
- Hvor galt går det, hvis man benytter delta hedging fra Black-Scholes, når det underliggende aktiv er som i en eksponentiel Lévy-model?
- Diskuter, hvorvidt en eksponentiel Lévy-model er bedre end Black-Scholes-model.
- Perspektiver til Hestons model, som giver nogle af de samme resultater.

1.2 Indledning

Når man som en finansiel institution skal sælge et finansielt produkt, er det vigtigt at vide, hvordan man skal opstille sin model for virkeligheden, så man kan replikere produktet og finde ud af hvilke risici, der ligger i denne handling. Uanset hvilken betalingsstruktur, der ligger i produktet, bliver man nødt til at opstille en model, som bygger på en række antagelser.

Som sælger af produktet har man ofte brug for at kunne replikere det, så det kan sælges videre uden risiko. Hvis replikationen ikke er sat op korrekt, kan det betyde, at man udsætter sig selv for unødige risici, eller at man taber penge på at sælge produktet - enten igennem en fejltagtig *hedging* eller ved uforudsete relationer, som ikke ligger i modellen. Disse antagelser, der er i modellen, er selvfølgelig op til diskussion. I Black-Scholes-modellen antager man, 1) at agenter kan handle i kontinuert tid, 2) at det er et friktionsfrit marked med et risikofrit aktiv, 3) at man kan holde en hver andel, både positiv og negativ, af et givet aktiv, 4) at der ikke er arbitrage muligheder. Disse antagelser vil også være gældende i denne opgave.

Denne opgave vil til gengæld ændre antagelserne om udviklingen for det underliggende aktiv skrevet på en *call option*. I Black-Scholes-modellen antager man, at prisprocessen for det underliggende aktiv er Markov. I matematisk forstand formuleres det ved at opstille et filtreret sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$, som opfylder, at prisprocessen $S_t = S(t, \omega)$ er målelig med hensyn til \mathcal{F}_t for alle t . Det antages da, at processens fremtidige værdier kun afhænger af fortiden gennem nutidsværdien. Som konsekvens af Markov-egenskaben gælder det, at $E[S_T | \mathcal{F}_t] = E[S_T | S_t]$ for $t \leq T$.

Black-Scholes benytter en geometrisk brownsk bevægelse (GBM) til at beskrive udviklingen for prisprocessen, hvor dynamikken under P -målet er givet som $dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t$, hvor α kaldes driften, σ er volatiliteten, og W_t er en standard brownsk bevægelse, hvilket giver, at $S_t = e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$. Antagelsen, om at det underliggende aktiv følger en GBM, giver at logaritmen til afkastet er normalfordelt. Derudover bliver prisprocessen kontinuert.

Black-Scholes-modellen giver anledning til en samling af pæne resultater og lukket-form løsninger for prisfastsættelse af blandt andet call optioner. Det giver et udtryk, der kan differentieres for at finde afledede, hvilket kan bruges til blandt andet delta hedging for at replikere call optionen og derved eliminere den risiko, der er i at sælge call optionen.

Hvis man ser på data fra virkeligheden, tyder det på, at logaritmen til afkast har tungere haler end en normalfordeling og tilmed ikke er symmetriske. Desuden kan aktiekursen bevæge sig meget kraftigt inden for et meget kort tidsinterval, hvilket kan ses som spring. For praktikere er et spring for eksempel, hvis prisen går fra 100 til 110, og man ikke har haft mulighed for at eksekvere en ordre på 105. Det resulterer i, at delta hedging bryder sammen, da delta hedging kræver, at man kan hedge enhver infinitesimal ændring i det underliggende aktiv.

Derudover kan man tage observerede markedspriser på call optioner og finde den volatilitet, der svarer til, hvad volatiliteten havde været, hvis prisen var genereret fra Black-Scholes-model. I så fald får man ikke en konstant volatilitet. Dette er hvad, man kalder implicit volatilitet, som også vil blive beskrevet i denne opgave. Meget litteratur har beskrevet dette, se blandt andet Gatheral (2006) og Cont and Tankov (2004).

I Black-Scholes er der en antagelse om, at det underliggende aktiv følger en GBM. Denne antagelse vil denne opgave modificere. Prisprocessen vil så blive udvidet til en større klasse af processer. Der vil blive opstillet en model, hvor det underliggende aktiv kan have spring. Denne introduceres gennem Lévy-processer. Den model, der vil blive brugt, er det, man kalder en eksponentiel Lévy-model. Første trin i udviklingen af denne model ses i afsnit 2, hvor der vil blive beskrevet, hvad en Lévy-proces er, samt hvordan den kan opføre sig. Herfra vil der i afsnit 3 blive set på, hvordan den eksponensielle Lévy-model ser ud for senere at kunne benytte den til modellering.

Der vil blive klarlagt forskellige måder, som springene kan blive tilføjet i modellen, hvor begreber som uendelig og endelig aktivitet vil blive introduceret, samt hvilken forskel springene gør. Herfra i afsnit 3.3 vil der blive set på metoder til

at finde prisen for en call option skrevet på det underliggende aktiv.

Der vil blive set på, hvordan man håndterer uendelig aktivitet i forhold til endelig aktivitet, da processer med uendelig aktivitet er mere komplekse.

Helt konkret vil det blive studeret, hvordan man kan prisfastsætte ved hjælp af *Partial-Integro-Differential-Equations* (PIDE), og hvordan man kan prisfastsætte med Fouriertransformationer. I afsnit 4 vil der blive set på konkrete modeller, hvor der vil blive udregnet priser. Dernæst vil metodernes fordele og ulemper i forhold til beregningskompleksitet blive vurderet sammen med hvilke greeks/afledede, man kan få ud af dem. Der vil også blive set på, hvilke restriktioner disse metoder giver anledning til, og hvordan man kan se, om de er opfyldt. Alt dette sker med fokus på, hvordan man håndterer forskellen mellem endelig og uendelig aktivitet, og hvilke fordele og ulemper eksponentiel Lévy-modellen har i forhold til Black-Scholes-modellen.

Dernæst vil der i afsnit 5 blive lavet et hedgingeksperiment, hvor det antages, at den virkelige udvikling for aktivet forløber som i en eksponentiel Lévy-model - men hvor man samtidigt benytter Black-Scholes delta hedging til at hedge call optionen for at se, hvor galt det går. Udfaldsstierne vil blive simuleret med Monte Carlo-simulation. Der vil også blive udledt et udtryk for hedgefejlen, så man får et indtryk af, hvor meget man taber eller vinder ved at antage, at man kan hedge som i Black-Scholes. Som eksempel for en uendelig aktivitetsmodel vil der blive benyttet en normal invers gaussisk (NIG) proces, og der vil blive benyttet Merton- og Kou-modeller for endelig aktivitetsmodeller. NIG er valgt, da dens springaktivitet kan blive relativt ekstrem, men den er samtidigt pæn nok til, at man kan håndtere den i de forskellige metoder. Mertons model benyttes som et benchmark, da man med den kan finde prisen på en call option ret præcist. Kou er valgt for at kunne styre springenes fordeling på en nem måde til at illustrere, hvilken betydning springene har for blandt andet implicit volatilitet.

Alt dette vil så blive benyttet til at vise, hvordan den introducerede modeludvidelse kan løse nogle af de problemstillinger, man har i Black-Scholes, med hensyn til fordelingen af aktivet og den implicite volatilitet samt til at vurdere i

hvilken grad modeludvidelsen kan hjælpe en finansiel institution med at forstå og mindske sin risiko.

I en fremtidig undersøgelse kunne det være interessant at se på, hvordan man i så fald kunne minimere eller hedge denne springrisiko, samt hvordan man kunne estimere sin model og teste hvilken model, der passer bedst med data. Det vil dog ikke blive undersøgt i denne opgave. Til sidst vil jeg perspektivere til Hestons model, som er en anden tilgang, man kunne benytte for at rette op på disse problemer fra Black-Scholes-modellen. Denne tilgang handler i korte træk om at introducere en stokastisk volatilitet.

Lévy-processer

2.1 Lévy-processer

For at opstille en model for prisudviklingen af det underliggende aktiv er der brug for en stokastisk proces. Den proces, der benyttes i indledende finansieringskurser er, den browniske bevægelse. Dog har den browniske bevægelse den egenskab, at udfaldsstierne er kontinuerte, hvilket ikke er den mest realistiske antagelse i forhold til prisudviklingen. Hvis man ikke vil påtvinge kontinuiteten, kan man udvide processerne til den større klasse kaldet Lévy-processer. En Lévy-proces defineres ud fra følgende fem kriterier.

Definition 2.1.1. *En stokastisk proces $(X_t)_{t \geq 0}$ hvor $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ er en Lévy-proces, hvis følgende betingelser er opfyldt:*

- (i) For en hver opdeling hvor $n \in \mathbb{N}$ og $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ er $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ indbyrdes uafhængige.*
- (ii) $X_0 = 0$ n.s*
- (iii) fordelingen af $X_{t+s} - X_s$ afhænger ikke af s .*
- (iv) for alle $\epsilon > 0$ er $\lim_{s \rightarrow t} P(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0$*
- (v) Der findes en mængde A , så $P(A) = 1$, hvor det for alle $\omega \in A$ gælder, at $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ er CADLAG.*

Betingelse (i) kaldes uafhængige tilvækster, hvilket betyder, at hvis man ser på processens tilvækster i disjunkte tidsintervaller, er de uafhængige. Betingelse (iii) kaldes stationære tilvækster, hvilket betyder, at fordelingen af tilvæksterne over en fast tidsintervallængde er den samme - uanset hvilket tidspunkt intervallet starter fra. Betingelse (iv) kaldes stokastisk kontinuitet og sikrer, at man ikke

forventer et spring på et given tidspunkt. Betingelse (v) svarer til, at en Lévy-proces' udfaldsstier er CADLAG.

2.1.1 Uendelig delbar

En af de vigtige egenskaber ved Lévy-processer er det, som man kalder uendelig delbarhed. Det viser sig, at man kan beskrive en Lévy-proces ud fra en uendelig delbar fordeling, hvor foldningen af to sandsynlighedsmål defineres som:

Definition 2.1.2. *Lad μ og ν være to sandsynlighedsmål på (\mathbb{R}, \mathbb{B}) . Foldningen af μ og ν , $\mu * \nu$ er sandsynlighedsmålet $h(\mu \otimes \nu)$ på (\mathbb{R}, \mathbb{B}) , hvor $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved $h(x, y) = x + y$.*

For at definere uendelig delbarhed får man brug for den n 'te foldning af et mål med sig selv. Den n 'te foldning med sig selv skrives som $\mu^n = \mu * \dots * \mu$,

Definition 2.1.3. *Et sandsynlighedsmål μ på (\mathbb{R}, \mathbb{B}) er uendelig delbart, hvis der for alle $n \in \mathbb{N}$ findes et sandsynlighedsmål μ_n på (\mathbb{R}, \mathbb{B}) , så $\mu = \mu_n^n$*

En ækvivalent beskrivelse kan gives ved den karakteristiske funktion ϕ for μ : Den n 'te rod af ϕ skal igen være en karakteristisk funktion for sandsynlighedsmålet μ_n . Altså skal der findes et sandsynlighedsmål μ_n for alle n , så

$$(\phi_\mu(\theta))^{1/n} = \left(\int e^{i\theta x} d\mu(x) \right)^{1/n} = \int e^{i\theta x} d\mu_n(x) = \phi_{\mu_n}(\theta).$$

Det viser sig at være nemmere at beskrive den karakteristiske funktion for en Lévy-proces end at beskrive selve sandsynlighedsmålet.

To vigtige byggesten i Lévy-processen er normalfordelingen og poissonfordelingen. Begge disse er uendelige delbare. Det specielle ved disse er, at μ_n kommer til at være henholdsvis en normalfordeling og en poissonfordeling igen.

Eksempel. Lad X være $N(\xi, \sigma^2)$, så er $\phi_X(z) = e^{i\xi z - \frac{\sigma^2}{2} z^2}$. Hvis man tager den n 'te rod, får man: $(\phi_X(z))^{1/n} = e^{i\frac{\xi}{n} z - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 z^2}$, hvilket er den karakteristiske funktion for en $N\left(\frac{\xi}{n}, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ fordeling

Eksempel. Lad X være poissonfordelt med parameter λ , så er $\phi_X(z) = e^{\lambda(e^{iz}-1)}$. Hvis man dernæst tager den n 'te rod, får man $(\phi_X(z))^{1/n} = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{iz}-1)}$, hvilket er den karakteristiske funktion for en poissonfordeling med parameter $\frac{\lambda}{n}$.

Når man har to uendeligt delbare fordelinger, kan man tage foldningen af de to og få en ny uendelig delbar fordeling.

Sætning 2.1.1. *Hvis μ_1 og μ_2 er uendelig delbare, så er $\mu_1 * \mu_2$ uendelig delbar.*

Proof. (Sato, 1999, s. 32) □

Grunden til at uendelig delbarhed er vigtigt for Lévy-processen er, at der findes en entydig korrespondance mellem et uendelig delbart sandsynligheds mål og en Lévy-proces. Den er entydig i den forstand, at hvis man låser sig fast på et tidsinterval og beskriver fordelingen over dette interval, så er der kun én uendelig delbar fordeling, der har samme fordeling som Lévy-processen over dette tidsinterval. I sætning 2.1.2 ser man på fordelingen af tilvæksten over tidsintervallet $[0, 1]$. Det betyder, at Lévy-processen kan beskrives ud fra en enkelt uendelig delbar fordeling, og derfra parametriseres hele processen.

Sætning 2.1.2. (i) *Hvis $(X_t)_{t \geq 0}$ er en Lévy-proces på \mathbb{R} , så vil det for alle $t \geq 0$ gælde, at fordelingen for X_t er uendelig delbar.*

(ii) *Hvis μ er uendelig delbar på \mathbb{R} , så findes der en Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$, så $X_1(P) = \mu$.*

(iii) *Hvis $(X_t)_{t \geq 0}$ og $(X'_t)_{t \geq 0}$ er Lévy-processer med $X_1(P) = X'_1(P)$, så har $(X_t)_{t \geq 0}$ og $(X'_t)_{t \geq 0}$ samme fordeling.*

Proof. (Sato, 1999, s. 35) □

Bemærk, at hvis man vælger, hvilken uendelig delbar fordeling X_1 har, så kan man finde den karakteristiske funktion for X_t ud fra den karakteristiske funktion af X_1 , da det vil gælde, at $\phi_{X_t}(z) = (\phi_{X_1}(z))^t$. Dette vil være nyttigt i forhold til Lévy-Khintchine-repræsentationen, der beskrives senere, og som giver en let måde at karakterisere en Lévy-proces på.

2.1.2 Lévy-processens opbygning

Et af hovedresultaterne for Lévy-processer er, hvordan man kan repræsentere enhver given Lévy-proces. Til det har vi brug for en definition:

Definition 2.1.4. *En (genererende) triplet (γ, σ^2, ν) består af $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, hvor σ^2 kaldes den gaussiske varians, og ν er et Lévy-mål, der opfylder at $\nu(\{0\}) = 0$ og $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\nu(x) < \infty$*

Denne triplet er, hvad der benyttes for at beskrive en Lévy-proces entydigt. Hvordan den benyttes ses i Lévy-Khintchine-repræsentationen.

Sætning 2.1.3 (Lévy - Khintchine). *Der gælder, at μ er en uendelig delbar fordeling, hvis og kun hvis der findes en triplet (γ, σ^2, ν) , så μ har den karakteristiske funktion*

$$\phi(\theta) = \exp[i\theta\gamma - \theta^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x 1_{(|x| \leq 1)}) d\nu(x)].$$

Tripletten er desuden entydigt bestemt.

Proof. (Sato, 1999, s. 37 -41) □

For en Lévy-proces med triplet (γ, σ^2, ν) menes en Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$, hvor X_1 har samme fordeling som en uendelig delbar fordeling med triplet (γ, σ^2, ν) . Derudover kaldes $\psi(\theta) = i\theta\gamma - \theta^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\theta x} - 1 - i\theta x 1_{(|x| \leq 1)}) d\nu(x)$ for den karakteristiske eksponent, og det ses, at $\phi_{X_t}(\theta) = e^{t\psi(\theta)}$.

Eksempel. Lad $(W_t)_{t \geq 0}$ være en brownisk bevægelse med drift $\gamma \in \mathbb{R}$ og volatilitet $\sigma^2 > 0$. Ud fra definitionen for en brownisk bevægelse, (Lawler, 2006, s. 174) har den uafhængige og stationære tilvækster, og $X_0 = 0$ n.s. Og da den browniske bevægelse har kontinuerte udfaldsstier, opfylder den specielt også at være stokastisk kontinuert og at være CADLAG. Så den browniske bevægelse er en Lévy-proces. Da er $\phi_{X_1}(\theta) = E[e^{i\theta X_1}] = e^{i\theta\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$, som svarer til den karakteristiske funktion for normalfordelingen med middelværdi γ og varians σ^2 , som er uendelig delbar. Herfra kan man så bruge sætning 2.1.3 til at slutte, at $(\gamma, \sigma^2, 0)$ er tripletten for denne browniske bevægelse.

Eksempel. Lad $(N_t)_{t \geq 0}$ være en poissonproces med parameter $\lambda > 0$, og lad $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med fælles fordeling μ , og $(N_t)_{t \geq 0}$ er uafhængig af $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. En compound-poissonproces er nu defineret som $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$. Herfra kan det bemærkes, at $N_0 = 0$ n.s., så $S_0 = 0$ n.s. Det skal så vises, at det gælder, at processen har uafhængige og stationære tilvækster. For $0 \leq t_1 < t_2, \dots, t_n$, vil $S_{t_i} - S_{t_{i-1}} = \sum_{k=N_{t_{i-1}}}^{N_{t_i}} X_k$. Der ses så på parrene $(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}, N_{t_i} - N_{t_{i-1}})$. Så lad $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathbb{B}$ og $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. I så fald er

$$\begin{aligned} & P \left(\bigcap_{i=1}^n (S_{t_i} - S_{t_{i-1}} \in B_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \in k_i) \right) \\ &= P \left(\bigcap_{i=1}^n \left(\sum_{j=k_1+\dots+k_{i-1}+1}^{k_1+\dots+k_i} X_j \in A_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \in k_i \right) \right) \end{aligned}$$

Så bruges, at $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ er uafhængig af $(N_t)_{t \geq 0}$, $(N_t)_{t \geq 0}$ er en poissonproces, der har uafhængige og stationære tilvækster, samt at $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ er identisk fordelt til at få

$$\begin{aligned} & P \left(\bigcap_{i=1}^n \left(\sum_{j=k_1+\dots+k_{i-1}+1}^{k_1+\dots+k_i} X_j \in A_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \in k_i \right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^n P \left(\sum_{j=k_1+\dots+k_{i-1}+1}^{k_1+\dots+k_i} X_j \in A_i \right) P(N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \in k_i) \\ &= \prod_{i=1}^n P \left(\sum_{j=1}^{k_i} X_j \in A_i \right) P(N_{t_i - t_{i-1}} \in k_i) \\ &= \prod_{i=1}^n P \left(\sum_{j=1}^{N_{t_i - t_{i-1}}} X_j \in A_i, N_{t_i - t_{i-1}} \in k_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(S_{t_i - t_{i-1}} \in A_i, N_{t_i - t_{i-1}} \in k_i) \end{aligned}$$

For at vise stationaritet for compound-poissonprocessen, ses det at for alle $t, s \geq 0$, $B \in \mathbb{B}$ og $k \in \mathbb{N}$ gælder det, at

$$P(S_{t+s} - S_t \in B, N_{t+s} - N_t \in k) = P(S_t \in B, N_t \in k)$$

hvilket giver, at tilvæksterne er stationære. Derudover følger det, hvis man ikke skriver om på processerne, at

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n (S_{t_i} - S_{t_{i-1}} \in A_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \in k_i)\right) \\ = \prod_{i=1}^n P(S_{t_i} - S_{t_{i-1}} \in A_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \in k_i) \end{aligned}$$

hvilket giver uafhængige tilvækster. Hvis man ser på $t > s$, så er $P(|S_t - S_s| > \varepsilon) = P(|\sum_{i=N_s}^{N_t} X_i| > \varepsilon) \leq P(N_t - N_s \geq 1) = \lambda(t - s) + o((t - s)) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow s$, hvor den sidste lighed kommer fra egenskaben af en poissonproces (Lawler, 2006, s. 65). Det vil sige, at stokastisk kontinuitet også er opfyldt. Det skal desuden bemærkes, at udfaldsstierne for S_t er stykvis konstante, og summen er defineret ved at tage $X_{N_{t_n}}$ med på springtidspunktet t_n . Så S_t har CADLAG udfaldsstier. Alt i alt er en compound-poissonproces en Lévy-proces.

Den karakteristiske funktion for S_1 vil da være

$$\begin{aligned} \phi_{S_1}(z) &= E[e^{izS_1}] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{izS_1} 1_{(N_1=n)}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{iz\sum_{i=1}^n X_i} 1_{(N_1=n)}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iz\sum_{i=1}^n X_i} 1_{(N_1=n)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n E[e^{izX_i}]\right) P(N_1 = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \phi_{X_1}(z)^n = e^{\lambda(\phi_{X_1}(z)-1)} = e^{\int_{\mathbb{R}} (e^{izx}-1)d(\lambda\mu)(x)} \\ &= e^{iz\lambda \int 1_{(|x|\leq 1)} x d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx}-1-izx1_{(|x|\leq 1)}) d(\lambda\mu)(x)} \end{aligned}$$

Ved igen at benytte sætning 2.1.3 fås, at en compound-poissonproces har triplet $(\lambda \int_{(|x|\leq 1)} x d\mu(x), 0, \lambda\mu)$.

Som det ses fra eksemplerne, er både en brownisk bevægelse og en compound-poissonproces eksempler på Lévy-processer. Det viser sig, at en Lévy-proces altid kan splittes op i tre dele, hvor den ene del er en brownisk bevægelse, den anden del er en compound-poissonproces og den tredje er en ren springproces med begrænsede spring. Før at det kan ses, må man definere et poisson random-mål. Dette poisson random-mål bruges dernæst til at definere to af delene i Lévy-processen, som er de dele, der tager sig af springene.

Definition 2.1.5. *Lad $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$ være et sigma endeligt målrum. En familie af stokastiske variable $\{N(B) : B \in \mathcal{B}\}$, der antager værdier i $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, er et poisson random mål på Θ med intensitet ρ , hvis følgende er opfyldt:*

- (i) *For alle $B \in \mathcal{B}$, er $N(B)$ poisson fordelt med middelværdi $\rho(B)$*
- (ii) *Hvis B_1, \dots, B_n er disjunkte, så er $N(B_1), \dots, N(B_n)$ uafhængige*
- (iii) *For alle ω er $N(\cdot, \omega)$ et mål på Θ*

Det poisson random-mål, der er brug for i Lévy-processen, er på $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B})$, hvor $\mathcal{B} = \mathbb{B}([0, \infty) \times \mathbb{R})$, og $N(B, \omega) = \#\{s : (s, \Delta X_s(\omega)) \in B\}$ for $B \in \mathcal{B}$.

Dette er et mål, der for et specifikt ω tæller antallet af spring i en bestemt mængde. Så for en mængde $A = (a, b) \times (c, d) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, vil $N(A, \omega)$ være antallet af spring med springstørrelse mellem c og b i tidsintervallet fra a til b for udfaldstien, der kommer for ω .

Fra dette poisson random-mål kan man så danne et kompenseret poissonmål:

$$\tilde{N}(B) = \int_B dN(x, t) - \int_B d(\mu \otimes \nu)$$

hvor ν er Lévy-målet, og μ er Lebuege-målet på $[0, \infty)$. Dette bliver nyttigt senere.

Sætning 2.1.4 (Lévy-Ito dekomposition). *Lad (γ, σ^2, ν) være tripleten for en Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$. Da findes et filtreret sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, hvorpå der findes tre uafhængige Lévy-processer $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ og $X^{(3)}$ med følgende egenskaber.*

- (i) $X_t^{(1)} = \gamma t + \sigma W_t$, er en brownisk bevægelse med drift γ og volatilitet σ^2 , således

$$\text{at } \phi_{X_t^{(1)}}(\theta) = e^{t(i\theta\gamma - \frac{\theta^2\sigma^2}{2})}$$

$$(ii) X_t^{(2)} = \int 1_{(|x|\geq 1) \times [0,t]} x dN(x, s) \text{ er en compound poissonproces, hvor } \phi_{X_t^{(2)}}(z) = e^{t(\int 1_{(|x|\geq 1)}(e^{izx}-1)d\nu(x))}$$

$$(iii) X_t^{(3)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{([0,t] \times [\epsilon,1])} x d\tilde{N}(s, x) \text{ er en kvadratisk integrabel, martingal med hensyn til } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \text{ med tælleligt mange spring i begrænsede tidsintervaller n.s og springstørrelser mindre end 1, hvor } \phi_{X_t^{(3)}}(z) = e^{t(\int_{(|x|<1)}(e^{izx}-1-izx)d\nu(x))}$$

$$\text{Da gælder, at } X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$$

Proof. (Sato, 1999, kap. 4) □

I denne Lévy-Ito dekomposition får man 1) en kontinuert del, som er den brownske bevægelse, 2) en endelig variationsdel, som er stykvis konstant - det er med andre ord en compound-poissonproces, samt 3) en martingal del, som kan have uendeligt mange små spring, som er begrænset.

Det kan ses, at en fortolkning af elementerne fra den karakteristiske triplet er: γ er driften i den brownske bevægelse, σ er volatiliteten for den brownske bevægelse, og for $B \in \mathbb{B}$ er $\nu(B)$ det forventede antal spring, der har en størrelse på B i enhedstidsintervallet.

Proposition 2.1.1. *Hvis $0 < \nu(\mathbb{R}) < \infty$, er der kun endeligt mange spring for et hvert endeligt interval i alle udfaldsstier, og det første springtidspunkt T er eksponentialfordelt med middelværdi $\frac{1}{\nu(\mathbb{R})}$. Dette kaldes endelig aktivitet.*

Hvis $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, er der tællelig uendeligt mange spring for endelige intervaller i alle udfaldsstier, hvilket kaldes uendelig aktivitet.

Proof. (Sato, 1999, s. 136) □

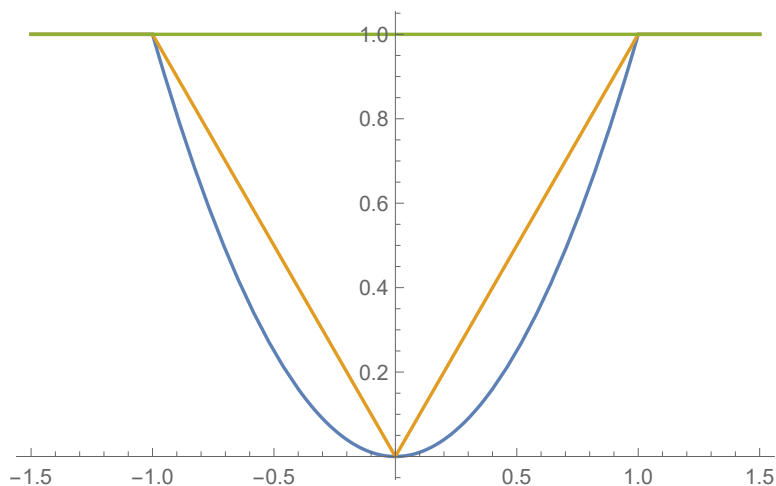
Denne viden vil blive benyttet i de følgende afsnit, da der er forskel på, hvordan man skal håndtere henholdsvis en proces med uendelig aktivitet og en proces med endelig aktivitet. Dem med endelig aktivitet er ofte meget nemmere at håndtere.

Proposition 2.1.2. *Hvis $\sigma = 0$ og $\int 1_{(|x|\leq 1)}|x|d\nu(x) < \infty$, har alle udfaldsstier endelig variation i et hvert interval $(0, t]$ hvor $t \in (0, \infty)$.*

Hvis $\sigma \neq 0$ eller $\int 1_{(|x| \leq 1)} |x| d\nu(x) = \infty$, har alle udfaldsstier uendelig variation, i et hvert interval $(0, t]$, hvor $t \in (0, \infty)$.

Proof. (Papapantoleon, 2008, s.15) og (Sato, 1999, s.140) □

I følgende afsnit er det ikke nødvendigvis endelig og uendelig variation, der er vigtigt, men det, der er brug for, er noget der minder om uendelig variation, som skal bruges for at opstille en PIDE. I figur 2.1 ses de funktioner, der skal kunne



FIGUR 2.1: Den blå funktion, $\min(x^2, 1)$ kan altid integreres med hensyn til Lévy-målet. Hvis den gule funktion, $\min(|x|, 1)$, kan integreres med hensyn til Lévy-målet har springdelen endelig variation. Hvis den grønne funktion, 1 , kan integreres med hensyn til Lévy-målet har processen endelig aktivitet.

integreres med hensyn til Lévy-målet alt efter, hvordan springprocessen opfører sig. Den blå funktion, $\min(x^2, 1)$, kan altid integreres med hensyn til Lévy-målet. Hvis den gule funktion, $\min(|x|, 1)$, kan integreres med hensyn til Lévy-målet har springdelen endelig variation. Hvis den grønne funktion, 1 , kan integreres med hensyn til Lévy-målet, har processen endelig aktivitet.

2.2 Subordinerede processer

Til at simulere Lévy-processer med uendelig aktivitet er det nyttigt at benytte en subordinator. Dette kommer af, at fordelingen af Lévy-processen kan være

svær at beskrive, men ved at sammensætte en Lévy-proces af simple Lévy-processer, som er nemmere at simulere, gør man det nemmere at simulere fra den Lévy-proces, man er interesseret i. Til dette bruges en subordinator Y_t , som er en Lévy-proces, hvor alle udfaldsstier er næsten sikkert voksende. Helt konkret skal den opfylde kravet om at have karakteristisk triplet $(\xi, 0, \rho)$, hvor $\xi \geq 0$, $\rho(-\infty, 0) = 0$ og $\int_0^\infty (x \wedge 1) d\rho(x) < \infty$. Den momentgenererende funktion for Y_t er $E[e^{uY_t}] = e^{tl(\theta)}$, hvor $l(\theta) = u\xi + \int_0^\infty (e^{\theta x} - 1) d\rho(x)$, $l(\theta)$ kaldes Laplace-eksponenten. Subordinatoren benyttes som tidsindeks for en anden Lévy-proces.

Sætning 2.2.1. *Lad $(X_t)_{t \geq 0}$ være en Lévy-proces med karakteristisk eksponent $\psi(\theta)$ og triplet (γ, σ^2, ν) , og lad $(Y_t)_{t \geq 0}$ være en subordinator med triplet $(\xi, 0, \rho)$ og laplace eksponent $l(\theta)$. Dernæst er processen $(Z_t)_{t \geq 0}$, hvor det for alle $\omega \in \Omega$ gælder, at $Z(t, \omega) = X(Y(t, \omega), \omega)$ er en Lévy-proces med karakteristisk funktion $\phi_{Z_t}(\theta) = e^{tl(\psi(\theta))}$, og dens triplet er $(\gamma^Z, \sigma^Z, \nu^Z)$ hvor*

$$\begin{aligned}\gamma^Z &= \xi\gamma + \int_0^\infty \int 1_{(|x| \leq 1)} x dX_s(P)(x) d\rho(s) \\ \sigma^Z &= \xi\sigma^2 \\ \nu^Z(B) &= \xi\nu(B) + \int_0^\infty X_s(P)(B) d\rho(s)\end{aligned}$$

Proof. (Cont and Tankov, 2004, side 108) □

En helt bestemt form af subordination er, hvor man subordinerer en brownisk bevægelse med drift. Denne beskrivelse af subordinerede processer kan hjælpe med at beskrive en proces med uendelig aktivitet. Som eksempel herpå vil der blive brugt en normal inverse gaussisk (NIG) fordeling. I dette afsnit vil der ikke blive forklaret yderligere om NIG, blot at man kan se det som en subordination af en brownisk bevægelse. Der vil blive forklaret yderligere om NIG-processen i afsnit 4.1.2. NIG-processen er en proces, hvor subordinatoren Y_t er invers gaussisk fordelt. Der vil blive brugt en udgave af den invers gaussiske proces, hvor den invers gaussiske fordeling har én parameter, så $E[Y_1] = 1, V[Y_1] = \frac{1}{\kappa}$. Tætheden

er i så fald:

$$f(x|\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}x^{3/2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2x\kappa}}$$

Hvor den momentgenererende funktion er

$$M(u) = e^{\frac{1}{\kappa}(1-\sqrt{1-2\kappa u})}$$

så laplace eksponenten er $l(u) = \frac{1}{\kappa}(1-\sqrt{1-2\kappa u})$. Før sætning 2.2.1 giver, at den ønskede proces er en Lévy-proces, skal det først vises, at den inverse gaussiske process Y_t er en Lévy-proces, hvor fordelingen $Y_1 \sim IG(\kappa)$. Dog vil jeg tage dette for givet og lade det være op til læseren at vise det. I så fald er Y_t en Lévy-proces med triplet $(0, 0, \rho)$, hvor $d\rho(x) = 1_{(x>0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}x^{3/2}} e^{-\frac{x}{2\kappa}} dx$.

X_t er en brownisk bevægelse med drift θ og volatilitet σ . NIG-processen er defineret som:

$$Z_t(\omega) = X(Y(t, \omega), \omega) = X_{Y_t}(\omega)$$

Herfra benyttes sætning 2.2.1 til at sige, at Z_t er en Lévy-proces, og dens karakteristiske funktion er:

$$\phi_{Z_t}(u) = e^{t\psi(u)} = e^{t\left(\frac{1}{\kappa}(1-\sqrt{1-2\kappa(iu\theta-\sigma^2 u/2)})\right)} = e^{t\left(\frac{1}{\kappa}(1-\sqrt{1-2iu\theta\kappa+\sigma^2 u\kappa})\right)}$$

Så Z_t er en Lévy-proces med triplet (γ, β, ν) , hvor $\beta = 0$, da Y_t har triplet $(0, 0, \rho)$. Der kommer ikke til at være brug for et udtryk for gamma, så det er op til læseren at finde ud af, hvad den er. Derimod vil jeg vise, hvad Lévy-målet er for NIG-processen. Her bruges sætning 2.2.1

$$\begin{aligned} d\nu(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s}} e^{-\frac{(x-\theta s)^2}{2\sigma^2 s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}s^{3/2}} e^{-\frac{s}{2\kappa}} ds dx \\ &= \frac{e^{x\frac{\theta}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma\sqrt{\kappa}} \int_0^\infty s^{-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 s} - \frac{\theta^2 s}{2\sigma^2} - \frac{s}{2\kappa}} ds dx \\ &= \frac{e^{x\frac{\theta}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma\sqrt{\kappa}} \int_0^\infty s^{-2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 s^{-1} - (\theta^2 - \frac{\sigma^2}{\kappa})s)} ds dx \end{aligned}$$

Man kan benytte substitutionen $s = \frac{|x|}{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}} u^{-1}$, så er $ds = -\frac{|x|}{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}} u^{-2} du$.
 Deraf fås

$$d\nu(x) = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa} e^{x \frac{\theta}{2\sigma^2}}}{|x| 2\pi\sigma\sqrt{\kappa}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{\sigma^2} |x|(u+u^{-1})} du dx$$

Lad $A = \frac{\theta}{\sigma^2}$, $B = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}$ og $C = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{2\pi\sigma\sqrt{\kappa}}$, så er

$$\begin{aligned} d\nu(x) &= \frac{C e^{xA}}{|x|} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} B|x|(u+u^{-1})} du dx \\ &= \frac{C e^{xA}}{|x|} K_1(B|x|) dx \end{aligned}$$

Hvor K_1 er Besselfunktionen givet ved $K_1(X) = \int_0^\infty e^{-1/2x(u+u^{-1})} du$. $K_1(B|x|)$ kan ikke integreres i en omegn af 0, og derfor er både $\int 1_{(|x|\leq 1)} d\nu(x)$ og $\int |x| 1_{(|x|\leq 1)} d\nu(x)$ uendelige. Så NIG-processen har både uendelig aktivitet og uendelig variation, selvom den ikke indeholder nogen Brownsk bevægelse. NIG-processen vil blive benyttet i afsnit 4.1.2 i den model, der bærer samme navn. Denne beskrivelse af subordination vil blive benyttet, når NIG-processen bliver simuleret i afsnit 5.3.2. Hvordan simulationen benytter subordinationen, beskrives i afsnit 3.4.

2.3 Stokastisk funktionsanalyse

Da det ikke er Lévy-processen per se, der er modellen for priserne, men derimod en funktion af Lévy-processen, ses der nu på, hvad der sker ved at transformere Lévy-processen med en funktion. Dette giver anledning til stokastisk funktionsanalyse. En af de mere brugte formler i finansieringskurser er Itô's formel, som også kan udvides til funktioner af Lévy-processer. Denne vil også blive benyttet i de senere afsnit.

Proposition 2.3.1 (Itô's formel). Lad $(X_t)_{t \geq 0}$ være en Lévy-proces med triplet (γ, σ^2, ν) , og lad $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en $C^{1,2}$ funktion. Så er

$$f(t, X_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_s) ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_s) ds \\ + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) dX_s + \sum_{(s \in [0, t]) \cap (\Delta X_s \neq 0)} (\Delta f(s, X_s) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}))$$

hvor $\Delta X_t = \lim_{s \rightarrow t-} X_t - X_s$.

Proof. (Cont and Tankov, 2004, s. 276) □

Itô's formel er allerede relevant, når modellen skal sættes op, da man skal se på $f(t, X_t) = e^{X_t}$, hvor X_t er en Lévy-proces. Tilsvarende kommer optionernes prisprocesser $C(t, S_t)$ til at være funktioner af t og S_t , hvor S_t er en funktion af en Lévy-proces.

2.4 Opsummering

En Lévy-proces er en proces, der har egenskaber, som 1) uafhængige og stationære tilvækster, 2) stokastisk kontinuitet, og 3) at være CADLAG. Man kan beskrive sin Lévy-proces ud fra en uendelig delbar fordeling ved at sige, at X_1 skal have en bestemt fordeling. Man kan også vælge at beskrive Lévy-processen entydigt ud fra en triplet (γ, σ^2, ν) , hvor Lévy-Khintchine-representationen beskriver, hvordan den karakteristiske funktion i så fald ser ud. Derudover blev det set, at en Lévy-proces altid kan blive dekomponeret i tre uafhængige Lévy-processer, hvor den ene er en brownsk bevægelse med drift, den anden er en compound-poissonproces, og den tredje er en springproces, der er en martingal, hvor alle springstørrelser er mindre end en. Der blev også set på, hvordan udfaldsstierne opførte sig alt efter, hvordan processen så ud. Her blev der set, at processen kunne have endelig eller uendelig aktivitet - alt efter om $\nu(\mathbb{R})$ var endelig eller uendelig. Processen kunne have endelig eller uendelig variation, hvor den brownske bevægelse eller de små spring kunne give processen uendelig variation.

Derefter blev der set på, hvad der sker, hvis man bruger en funktion på en Lévy-proces. Her blev der set på Itô's formel. I næste afsnit vil den finansielle model blive opbygget, hvor teorien fra dette afsnit vil blive brugt. Der vil blive set på, hvordan man kan prisfastsætte finansielle instrumenter ud fra numeriske metoder, og hvordan man kan finde interessante strukturer ud fra den model, der bliver opbygget.

Den finansielle model

I dette afsnit vil den finansielle model for markedet blive konstrueret. Det meste af teorien i dette afsnit vil være inspireret af Cont and Tankov (2004).

3.1 Model

Den model, der bliver brugt til at beskrive prisen på aktiver, vil være af typen eksponentiel Lévy-model. Dette betyder, at udviklingen beskrives som:

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

Hvor $(X_t)_{t \geq 0}$ er en Lévy-proces. Ved at benytte Itô's formel fås

$$S_t - S_0 = S_0 \left(\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_s ds + \int_0^t S_{s-} dX_s + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} S_{s-} (e^x - 1 - x) dN(s, x) \right),$$

hvor N er det tilhørende poisson random-mål.

Således får man, at $(S_t)_{t \geq 0}$ er løsningen til den stokastiske differentialligning:

$$dS_t = S_{t-} \left(dX_t + \frac{\sigma^2}{2} dt + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x) d\nu(x) dt \right)$$

Derudover antages det, at der findes et risikofrit aktiv B_t , hvor man får en konstant risikofri rente r , sådan at $dB_t = rB_t dt$.

3.1.1 Hovedsætninger for prisfastsættelse

For at kunne prisfastsætte finansielle kontrakter skal man bruge en prisningsregel, der opfylder, at der ikke er arbitrage muligheder. Derfor benyttes første arbitrage

hovedsætning, som siger:

Sætning 3.1.1 (Første arbitrage hovedsætning). *Lad $(X_t)_{t \geq 0}$ være en Lévy-proces på rummet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, hvor $S_t = S_0 e^{X_t}$, så findes der en arbitragefri pris, hvis og kun hvis der findes et sandsynlighedsmål $Q \sim P$, så $(e^{-rt} S_t)_{t \geq 0}$ er en martingal med hensyn til Q Cont and Tankov (2004, s. 298)*

Det betyder altså, at under Q -målet skal den tilbagediskonterede værdiprocess være en martingal. Derfor kaldes Q -målet også det ækvivalente martingalmål.

Det, der afgør om prisen er entydig er, om der findes et entydigt martingalmål. Dette er, hvad anden arbitrage sætning siger.

Sætning 3.1.2 (Anden arbitrage hovedsætning). *Lad $(X_t)_{t \geq 0}$ være en Lévy-proces på rummet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, hvor $S_t = S_0 e^{X_t}$, så findes der en entydig arbitragefri pris, hvis og kun hvis der findes et entydigt martingalmål $Q \sim P$. Cont and Tankov (2004, s. 300)*

Hvis Q -målet er entydigt, kaldes modellen komplet. Så et finansielt produkt har en bestemt pris, der ikke giver arbitrage muligheder. Hvis modellen er ukomplet, findes der et helt interval af priser, som ikke giver arbitrage muligheder. I så fald skal man have en måde at vælge sit Q -mål på, så man får en entydig pris. Denne opgave vil ikke undersøge nærmere, hvordan Q -målet bør vælges, selvom modellerne generelt er ukomplette.

3.1.2 Målskift

For at finde ud af, hvad der gælder for at finde et ækvivalent martingalmål Q antages det, at både under Q - og P -målet skal processen, der tages forventning til, være eksponentialfunktionen af en Lévy-proces. Det betyder, at der skal findes en radon-nikodym afledet $\frac{dQ}{dP}$, så $E^P[\frac{dQ}{dP} \cdot e^{X_t} | \mathcal{F}_t] = E^Q[e^{X_t} | \mathcal{F}_t]$, hvor det, vi tager forventningen til, er en eksponentiel Lévy-proces. Hvornår denne radon-nikodym afledede findes, og hvordan den ser ud, kan ses i Sato (1999, s. 219). Den giver i så fald, at det der kan ændre sig fra P - til Q -målet er driften og/eller Lévy-målet, der hvor Lévy-målet ikke er 0. Det betyder altså, at i den virkelige

verden under P -målet er det en Lévy-proces med triplet $(\gamma^P, \sigma^2, \nu^P)$, der styrer det underliggende aktivs prisproces. Under Q -målet er det så en Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$, med triplet (γ, σ^2, ν) , der gør, at $S_0 e^{X_t}$ er en martingal.

Proposition 3.1.1. *Lad $(X_t)_{t \geq 0}$ være en Lévy-proces. Hvis udfaldsstierne er hverken voksende eller aftagende n.s., så er modellen, hvor $S_t = S_0 e^{X_t}$, arbitrærfri. Dernæst findes et Q -mål, der gør $(e^{-rt} S_t)$ til en martingal, hvor r er den risikofrie rente.*

Proof. Cont and Tankov (2004, s. 310) □

Som man også kan se i Cont and Tankov (2004), betyder det, at én af følgende betingelser skal være opfyldt for processen: (i) $\sigma > 0$; (ii) $\int 1_{(|x| \leq 1)} |x| d\nu(x) = \infty$; (iii) $(X_t)_{t \geq 0}$ har både positive og negative spring; (iv) $(X_t)_{t \geq 0}$ har positiv drift og negative spring eller negativ drift og positive spring. Fra proposition 2.1.2 gør (i) eller (ii) at processen har uendelig variation i et hvert interval, hvilket vil gøre, at processen ikke kan være næsten sikkert voksende eller næsten sikkert aftagende. Hvor (iii) og (iv) giver sig selv, med hensyn til at processen ikke er voksende eller aftagende n.s.

Derfor kan man for de fleste modeller hurtigt afgøre, om der findes et Q -mål. En model, hvor S_t er voksende eller aftagende n.s., ville også være urealistisk, da det er klart, at finansielle produkter både stiger og falder i værdi.

For at finde ud af, hvad der må gælde om martingalen, kan proposition 3.1.2 benyttes:

Proposition 3.1.2. *Lad $(X_t)_{t \geq 0}$ være en Lévy-proces med triplet (γ, σ^2, ν) , hvor $E|e^{X_t}| < \infty$. Så kan man dekomponere $S_t = e^{X_t}$ i en martingal M_t og et driftled A_t , hvor*

$$M_t = 1 + \int_0^t S_{s-} \sigma dW_s + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} S_{s-} (e^z - 1) d\tilde{N}_X(s, t)$$

$$A_t = \int_0^t S_{s-} \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1 - z 1_{(|z| \leq 1)}) d\nu(z) \right) ds$$

Hvor $\tilde{N}_X(s, t)$ er det kompenserede poissonmål for X_t .

således er $S_t = M_t + A_t$, hvorfra det specielt ses, at S_t er en martingal, hvis og

kun hvis

$$\left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1 - z1_{(|z| \leq 1)}) d\nu(z) \right) = 0$$

Proof. Cont and Tankov (2004, s. 283)

□

3.2 Optioner

3.2.1 Europæiske optioner

En europæisk option er et finansielt produkt, som udløber på et fast tidspunkt, T . Værdien til udløbstidspunktet er kun en funktion af S_T . Derved vil værdien af optionen på udløbstidspunktet kunne skrives som $\Pi_T = H(S_T)$, hvor $H(S)$ kaldes pay off-funktionen.

Den europæiske call option vil specielt blive benyttet i det følgende. Call optionens pay off-funktion er så: $H(S) = (S - K)^+ = (S - K)1_{(S \geq K)}$, hvor K er en konstant, der kaldes *strike*, og S_t kaldes *spot*. Der skal dernæst findes en metode til at finde Π_t på. Det er, hvad der kaldes prisfastsættelse.

3.3 Prisfastsættelse

Når man skal prisfastsætte et finansielt produkt, benytter man det ækvivalente martingalmål Q . I så fald er prisprocessen for en europæisk option med pay off-funktion H givet ved

$$\Pi_t = E^Q[e^{-r(T-t)} H(S_T)]$$

Det betyder, at der kun arbejdes under Q -målet. Så hvis man har en Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$, der har en triplet $(\gamma^P, \sigma^2, \nu^P)$, skal man finde et Q -mål, hvor processen har triplet (γ, σ^2, ν) og benytte den til at prisfastsætte optioner. Så γ^P og ν^P er irrelevante for prisfastsættelsen, men ofte vil man beholde egenskaberne fra ν^P

og blot lave en driftændring. Derfor vil der i de følgende afsnit blive set bort fra P -målet.

3.3.1 Fouriertransformationsmetoden

Da man oftest ikke kender tætheden for en Lévy-proces, men i stedet kender den karakteristiske funktion, kan det være besværligt at udregne middelværdier. Det, man i stedet kan bruge, er Fouriertransformationer. Det skyldes, at de karakteristiske funktioner er Fouriertransformationen af en stokastisk variables tæthed. Mere generelt defineres Fouriertransformationen af en passende integrabel funktion f som

$$Ff(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\theta} f(x) dx$$

Man kan også finde den inverse Fouriertransformation

$$F^{-1}f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\theta} f(x) dx$$

For \mathcal{L}^2 -funktioner vil det gælde, at $F^{-1}Ff(\theta) = f(\theta)$. Det vil i det følgende blive antaget, at der for Lévy-processen under Q -målet med triplet (γ, σ^2, ν) findes et $\alpha > 0$, så

$$\int 1_{(|x| \geq 1)} e^{(1+\alpha)x} d\nu(x) < \infty \quad (3.1)$$

I de følgende afsnit vil der blive set på en call option med strike $K > 0$, $K = e^k$, hvor $k \in \mathbb{R}$, og udløbstidspunkt T . For at gøre notationen mere enkel og uden tab af generalitet, antages det, at prisen udregnes i forhold til tidspunkt 0, og $S_0 = 1$, svarende til, at prisen regnes med et generelt S_0 som enhed. Call optionens værdi er så

$$C(k) = e^{-rT} E^Q[(e^{rT+X_T} - e^k)^+] = e^{-rT} E^Q[(e^{rT+X_T} - e^k)1_{(rT+X_T \geq k)}]$$

Der er det problem, at $k \mapsto C(k)$ ikke er integrabel med hensyn til Lebesgue-målet, da $\lim_{k \rightarrow -\infty} C(k) = S_0 = 1 > 0$. Da der egentlig er behov for at udføre en

Fouriertransformation, giver dette anledning til vanskeligheder, men dette problem kan man løse ved at definere en ny funktion:

$$Z(k) = C(k) - (1 - e^{k-rT})^+ = C(k) - (1 - e^{k-rT})1_{(k \leq rT)}$$

som kan Fouriertransformeres til $\xi(\theta) = FZ(\theta)$.

Da $(e^{X_t})_{t \geq 0}$ er en martingal, er $E^Q[e^{X_T}] = 1$, hvilket betyder, at

$$E^Q[(e^{X_T} - 1)1_{(k \leq rT)}] = 0$$

I så fald er

$$\xi(\theta) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta k} (e^{rT+x} - e^k) (1_{(k \leq x+rT)} - 1_{(k \leq rT)}) dX_T(Q)(x) dk$$

Herfra kan der byttes om på integralerne, da betingelsen 3.1 giver, at $e^{i\theta k} (e^{rT+x} - e^k) (1_{(k \leq x+rT)} - 1_{(k \leq rT)})$ er integrabelt i forhold til $X_T(Q)$, og $(1_{(k \leq x+rT)} - 1_{(k \leq rT)})$ giver, at der bliver integreret over en begrænset mængde i forhold til k . Da fås

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \int_{rT}^{x+rT} e^{i\theta k} (e^{rT+x} - e^k) dk dX_T(Q)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\theta rT} (i\theta) (1 - e^x) - e^{x+i\theta rT} + e^{(i\theta+1)x+i\theta rT}}{(i\theta)(i\theta+1)} \right) dX_T(Q)(x) \\ &= \frac{e^{i\theta rT}}{(i\theta)(i\theta+1)} \int_{\mathbb{R}} ((i\theta)(1 - e^x) - e^x + e^{(i\theta+1)x}) dX_T(Q)(x) \\ &= \frac{e^{i\theta rT}}{(i\theta)(i\theta+1)} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{(i\theta+1)x} dX_T(Q)(x) - 1 \right) \\ &= \frac{e^{i\theta rT}}{(i\theta)(i\theta+1)} (\phi_{X_T}(\theta - i) - 1), \end{aligned}$$

hvor den næstsidste lighed kommer fra martingalegenskaben, så $\int_{\mathbb{R}} e^x dX_T(Q)(x) = 1$, og den sidste lighed kommer af, at $i(\theta - i) = i\theta + 1$.

Fra betingelse 3.1 kan det vises, at $\xi(\theta)$ har en grænseværdi for $\theta \rightarrow 0$.

Nu kan $Z(\theta)$ findes ved at invertere Fouriertransformationen, sådan at:

$$Z(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta k} \frac{e^{i\theta rT}}{(i\theta)(i\theta+1)} (\phi_{X_T}(\theta - i) - 1) d\theta$$

Derfra er prisen på call optionen:

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta k} \frac{e^{i\theta r T}}{(i\theta)(i\theta + 1)} (\phi_{X_T}(\theta - i) - 1) d\theta + (1 - e^{k-rT})^+.$$

Hovedsagen er derved, at man kan udregne prisen for en call option ved at benytte den karakteristiske funktion - i stedet for at benytte tætheden for X_T .

Alt dette vil blive benyttet i konkrete eksempler i afsnit 3.6, og implementeringen kan ses i bilag I.1.4 og I.1.2.

3.3.2 Partielle integro differentiaalligninger

Måden at vise Black-Scholes-formlen på er ved at opstille en partiel differential-ligning, hvor der findes en lukket formel for løsningen. Ved samme fremgangsmåde kan man opstille en partiel integro differentiaalligning (PIDE), når der er tale om eksponentiel-Lévy-modellen. Så er $S_t = S_0 e^{rt+X_t}$, hvor $(X_t)_{t \geq 0}$ er en Lévy-proces med triplet (γ, σ^2, ν) under et ækvivalent martingalmål Q , hvor e^{X_t} er en martingal.

Der er brug for at antage, at

$$\int 1_{(|y| \geq 1)} e^{2y} d\nu(y) < \infty \quad (3.2)$$

Herfra startes der med at opskrive S_t på integralform under Q -målet. Her fås

$$S_t = S_0 + \int_0^t r S_{u-} du + \sigma \int_0^t S_{u-} dW_u + \int_{[0, T] \times \mathbb{R}} (e^x - 1) S_{u-} d\tilde{N}_X(u, x)$$

Prisen på en europæisk option kan findes ved brug af følgende teorem.

Sætning 3.3.1. *For en eksponentiel Lévy-model, hvor $(X_t)_{t \geq 0}$ er Lévy-processen, der opfylder antagelse 3.2, samt en af følgende betingelse*

Enten $\sigma > 0$

$$\text{Eller der findes et } \beta \in (0, 2), \text{ så } \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\beta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 d\nu(x) > 0 \quad (3.3)$$

Som sammen vil blive refereret til som betingelse 3.3. Så er prismetrisfunktionen $\Pi : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, for en europæisk option med pay off-funktion H , givet ved $\Pi(t, S) = E^Q[H(S_T)|S_t = S]$. Hvor H opfylder, følgende betingelse

$$\text{Der findes et } c > 0, \text{ så } H(x) - H(y) \leq c|x - y| \quad (3.4)$$

Det underliggende aktiv har værdi på $S > 0$. Π er $C^{1,2}$ og løsning til PIDE'en:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S) + rS \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}(t, S) \\ & + \int (\Pi(t, Se^y) - \Pi(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S)) d\nu(y) = r\Pi(t, S) \end{aligned}$$

Med randbetingelsen $\Pi(T, S) = H(S)$

Proof. Beviset her følger fra Cont and Tankov (2004, s. 384-386). At $\Pi(t, S)$ er $C^{1,2}$ kommer af antagelse 3.3, som i følge Cont and Tankov (2004, s. 385) giver, at $\Pi(t, S)$ er $C^{1,2}$. Ved at bruge Itô's formel på martingalen $\hat{\Pi}_t = e^{-rt}\Pi(t, S_t)$ fås:

$$\begin{aligned} d\hat{\Pi}_t &= e^{-rt} \left(-r\Pi(t, S_{t-}) dt + \frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, S_{t-}) dt \right. \\ & \quad + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}(t, S_{t-}) dt + \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-}) dS_t \\ & \quad \left. + \Pi(t, S_{t-}e^{\Delta X_t}) - \Pi(t, S_{t-}) - S_{t-}(e^{\Delta X_t} - 1) \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-}) \right) \\ &= a(t) dt + dM_t \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-rt} \left(\left(-r\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} + rS_{t-} \frac{\partial \Pi}{\partial S} \right) (t, S_{t-}) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \left(\Pi(t, S_{t-}e^x) - \Pi(t, S_{t-}) - S_{t-}(e^x - 1) \frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-}) \right) d\nu(x) \right) \\ dM_t &= e^{-rt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-}) \sigma S_{t-} dW_t + \int_{\mathbb{R}} (\Pi(t, S_{t-}e^x) - \Pi(t, S_{t-})) d\tilde{N}_X(t, x) \right) \end{aligned}$$

For at få PIDE'en skal det vises, at M_t er en martingal. Det gøres ved at

se på de to led i M_t . Det første led er en forudsigelig proces integreret med hensyn til en brownisk bevægelse, hvor der fra 3.4 findes et $c > 0$, således at $|\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-})| \leq c$, hvilket giver $E[\int_0^T |\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-})|^2 \sigma^2 S_{t-}^2 dt] \leq c^2 \sigma^2 E[\int_0^T S_{t-}^2 dt] < \infty$. Så $\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-})\sigma S_{t-}$ er forudsigelig og kvadratisk integrabel. Ifølge Cont and Tankov (2004, prop. 8.6) er $\frac{\partial \Pi}{\partial S}(t, S_{t-})\sigma S_{t-}dW_t$ derfor en martingal.

Det andet led er også forudsigeligt, men det skal yderligere være kvadratisk integrabel for at kunne bruge Cont and Tankov (2004, prop. 8.8).

Det ses dog, at:

$$\begin{aligned} & E \left[\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} (\Pi(t, S_{t-}e^x) - \Pi(t, S_{t-}))^2 d\nu(x) dt \right] \\ &= E \left[\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} (e^{r(T-t)}(E(H(S_{t-}e^x e^{r(T-t)+X_T-X_t}) - H(S_{t-}e^{r(T-t)+X_T-X_t})))^2 d\nu(x) dt \right] \\ &\stackrel{\text{fra 3.4}}{\leq} E \left[\int_0^T \int 1_{(|x|>1)} (c^2(e^{2x} + 1)S_{t-}^2) d\nu(x) dt \right] + E \left[\int_0^T \int 1_{(|x|<1)} (4c^2 S_{t-}^2 x^2) d\nu(x) dt \right] \\ &\leq c^2 \left(\int 1_{(|x|>1)} (e^{2x} + 1) d\nu(x) + \int 1_{(|x|<1)} 4x^2 d\nu(x) \right) E \left[\int_0^T S_{t-}^2 dt \right] < \infty \end{aligned}$$

hvor det er brugt, at $e^x - 1 \leq 2|x|$ for $|x| \leq 1$.

Derfor er $\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} (\Pi(t, S_{t-}e^x) - \Pi(t, S_{t-})) d\tilde{N}_X(t, x)$ en martingal. Tilsammen giver det at M_t er en martingal, hvilket gør $\hat{\Pi} - M_t = \int_0^T a(t) dt$ til en martingal, da $\hat{\Pi}$ selv er en martingal. Derudover er $\int_0^T a(t) dt$ kontinuert med endelig variation, og derfor må den opfylde $a(t) = 0$ n.s., hvilket giver PIDE'en. \square

For en call option kan man lave en yderligere simplificering ved at sætte $\tau = T - t$, $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $u(\tau, x) = e^{r\tau} \Pi(T - \tau, S_0 e^x)$, $h(x) = H(S_0 e^x)$. Dernæst kan $u(\tau, x)$ skrives som $u(\tau, x) = E[h(X_\tau + x)]$, hvor $u(t, x)$ er løsning til problemet:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.5}$$

$$+ \int \left(u(t, x + y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\nu(y) \text{ på } (0, T] \times \mathbb{R}$$

$$u(0, x) = h(x) \text{ for } x \in \mathbb{R}$$

For at bruge PIDE'en er der brug for, at 3.4 er opfyldt. Der skal derfor findes et $c > 0$ så $|H(x) - H(y)| \leq c|x - y|$. Dette er opfyldt for call optioner, da

$$|(x - K)^+ - (y - K)^+| \leq |x - y|$$

Numerisk løsning

Med PIDE'en af formen 3.5 er det ikke altid muligt at finde en eksplicit formel for løsningen. Derfor kan man i stedet benytte sig af numeriske metoder. Den metode, jeg vil benytte, er *finite difference* (FD) metoden. Samlet set vil FD-metoden benyttet på PIDE'en blive kaldt PIDE-metoden. For at kunne gøre dette skal man diskretisere både tid og rum. Diskretisering af tidsintervallet er relativt simpelt, da man ser på et begrænset interval $[0, T]$. Når rummet skal diskretiseres, bliver man nødt til at indsnævre det til et begrænset område, hvilket kaldes lokalisering. Det betyder, at i stedet for at kunne antage værdier i \mathbb{R} lokaliseres det til intervallet $(-A, A)$. Dette kommer naturligvis til at give en fejlkilde, som kaldes lokaliseringsfejl. Uden for intervallet $(-A, A)$ påtvinges en randbetingelse, men siden europæiske optioner oftest følger pay off-funktionen, når værdien af det underliggende aktiv enten er meget stor eller meget lille, kan det antages, at værdien af call optionen uden for intervallet er lig med pay off-funktionen. Herfra kan problemet opskrives som:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & r \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \int \left(u(t, x + y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\nu(y) \text{ på } (0, T] \times (-A, A) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$u(0, x) = h(x) \text{ for } x \in (-A, A)$$

$$u(t, x) = h(x) \text{ for } x \notin (-A, A)$$

Dette er dog ikke nok: Man må også lave en restriktion på Lévy-målet. I stedet for at se på en Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$ med triplet (γ, σ, ν) , benyttes en ny version $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ med triplet $(\tilde{\gamma}, \sigma, \nu_{1_{[B_l, B_u]}})$, hvor $\nu_{1_{[B_l, B_u]}}(A) = \nu(A \cap [B_l, B_u])$, og $\tilde{\gamma}$ er

valgt, så $e^{\tilde{X}_t}$ er en martingal. Altså må det gælde, at

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\sigma^2}{2} - \int_{b_l}^{b_u} (e^y - 1 - y1_{(|y|\leq 1)})d\nu(y)$$

$B_l < B_u$ er konstanter, som kan vælges forskelligt alt efter, hvordan Lévy-målet ser ud: Des mere af massen fra Lévy-målet, der er i intervallet $[B_l, B_u]$, jo mindre er lokaliseringsfejlen. Man kan dernæst vise, at fejlen, som fremkommer ved at benytte denne nye proces, er begrænset, hvis der findes $\alpha_l, \alpha_u > 0$, så $\int_1^\infty e^{(1+\alpha_u)y}d\nu(y) < \infty$ og $\int_{-\infty}^{-1} |y|e^{\alpha_l|y|}d\nu(y) < \infty$. Begrænsningen kommer selvfølgelig til at afhænge af α_l, α_u, B_l og B_u . Jo større α_l og α_u kan vælges, jo mindre er fejlen (se Cont and Voltchkova 2005).

For at løse problem 3.6 kan differentialligningen omskrives til:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Du + Ju$$

hvor D er differentialdelen, og J er integraldelen. Der benyttes et uniformt gitter på $(0, T] \times (-A, A)$, hvor:

$$\begin{array}{lll} \tau_n = n\Delta t; & n = 0, \dots, M; & \Delta t = \frac{T}{M} \\ x_i = -A + i\Delta x; & i = 0, \dots, N; & \Delta x = \frac{2A}{N} \end{array}$$

Man kan vælge mellem at lave implicit, eksplicit eller eksplicit-implicit FD-metode. Jeg vælger at benytte den eksplicit-implicitte metode, da de andre vil give yderligere begrænsninger. FD-approximationen med en eksplicit-implicit metode giver, at der benyttes:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = D_\Delta u^{n+1} + J_\Delta u^n$$

D_Δ og J_Δ er FD-approximationer af PIDE'en. I begyndelsen antages det, at Lévy-processen har endelig aktivitet, så lad $\nu(\mathbb{R}) = \lambda < \infty$. I så fald kan det omskrives ved at trække $\alpha = \int_{B_l}^{B_u} (e^y - 1)d\nu(y)$ og $\lambda u = \int_{B_l}^{B_u} u(\tau, x)d\nu(y)$ ud af

integralet, sådan at:

$$Du = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u$$

$$Ju = \int_{B_l}^{B_u} u(\tau, x + y) d\nu(y)$$

Herfra laves så en approksimation af integralerne ved at finde K_l og K_u , så $[B_l, B_u] \subset [(K_l - 1/2)\Delta x, (K_u - 1/2)\Delta x]$ og sætte:

$$\nu_j = \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} d\nu(y), \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \sum_{j=K_l}^{K_u} \nu_j$$

$$\alpha \approx \hat{\alpha} = \sum_{j=K_l}^{K_u} (e^j - 1)\nu_j, \quad \int_{B_l}^{B_u} u(\tau, x_i + y) d\nu(y) \approx \sum_{j=K_l}^{K_u} \nu_j u_{i+j}$$

D_Δ er så opbygget som en tridiagonal matrix ved at bruge FD-approksimationen:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \approx \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & \text{hvis } \frac{\sigma^2}{2} - r + \hat{\alpha} < 0 \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & \text{hvis } \frac{\sigma^2}{2} - r + \hat{\alpha} \geq 0 \end{cases}$$

Nu kan problemet løses ved at opsætte en algoritme som:

$$\text{For alle } i \text{ sæt } u_i^0 = h(x_i)$$

$$\text{For } n = 0, \dots, M - 1 \text{ løs } (I - \Delta t D_\Delta) u^{n+1} = (I + \Delta t J_\Delta) u^n$$

$$\text{Sæt } u_i^{n+1} = h(x_i), \text{ hvis } i \notin 0, \dots, N$$

I tilfældet, hvor Lévy-processen har uendelig aktivitet, bliver man nødt til at lave yderligere en approksimation. I givet fald approksimeres alle spring, der har en springstørrelse mindre end ε med en brownsk bevægelse. Da det i praksis ikke er muligt at se forskel på meget små spring og en brownsk bevægelse, er det ikke en dårlig approksimation. Problemet er, at Lévy-målet tæt ved 0 ikke kan integreres. Det resulterer i, at man ikke kan splitte integralet op.

Man må derfor vælge et $\varepsilon > 0$ og finde en ny Lévy-proces $(X_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ med triplet $(\gamma(\varepsilon), \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}, \nu_{1_{\{(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)\}}})$, hvor $\sigma^2(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2 d\nu(y)$. Igen skal $e^{X_t^\varepsilon}$ være en martingal, hvilket betyder, at $\gamma(\varepsilon) = -\frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - \int 1_{(|y| \geq \varepsilon)} (e^y - 1 - y1_{(|y| \leq 1)})$. Det kan så vises, at fejlkilden på denne approksimation er proportional med ε , hvis der findes et $0 < \beta < 2$ så $\lim_{x \rightarrow 0} \nu(x)|x|^{1+\beta} > 0$ (se Cont and Voltchkova 2005, Remark 5). I så fald er det nye problem et endeligt aktivitetsproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - r + \alpha(\varepsilon) \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \lambda(\varepsilon)u + \int 1_{(|y| \geq \varepsilon)} u(t, x + y) d\nu(y) \text{ på } (0, T] \times \mathbb{R}$$

$$u(0, x) = h(x) \text{ for } x \in \mathbb{R}$$

hvor $\alpha(\varepsilon) = \int 1_{(|y| \geq \varepsilon)} (e^y - 1) d\nu(y)$ og $\lambda(\varepsilon) = \int 1_{(|y| \geq \varepsilon)} d\nu(y)$. Herfra kan man benytte samme metode som i tilfældet, hvor Lévy-processen har endelig aktivitet. Alt dette vil blive benyttet på konkrete eksempler i afsnit 3.6, og implementeringen kan ses i bilag I.1.1 og I.1.3.

3.4 Monte Carlo

Senere vil der blive udført et simulationseksperiment. Til det er der brug for at simulere udfaldsstier for det underliggende aktiv. Der er to typer af processer, der vil blive simuleret: en springdiffusion og en NIG-proces. Til begge processer benyttes Monte Carlo-simulation. Så det er processen $(S_{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$, hvor $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Oftest vil man vælge $\Delta t_i = (t_i - t_{i-1})$ til at være konstant. Det betyder, at til hvert simulationstidspunkt bliver Lévy-processens tilvækst ΔX_{t_i} simuleret, og så bliver $S_{t_i} = S_0 e^{X_{t_i}}$ udregnet ved at sætte $S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{\Delta X_{t_i}}$. En springdiffusion på formen:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{3.7}$$

hvor $(W_t)_{t \geq 0}$ er en standard brownsk bevægelse, $(N_t)_{t \geq 0}$ er en poissonproces med parameter λ , og $(Y_i)_{i \geq 1}$ er en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med fordeling μ . I så fald bliver processen simuleret ved $\Delta X_{t_i} = \gamma(t_i - t_{i-1}) + N_i \sqrt{\sigma^2(t_i - t_{i-1})} + J_i \cdot Y_i$, hvor N_i er standard normalfordelt, J_i er en Bernoulli-fordeling, hvor der er $\lambda \cdot (t_i - t_{i-1})$ sandsynlighed for, at den er 1, og Y_i har fordeling μ .

For NIG-processen benyttes afsnit 2.2 til at opnå den ønskede proces. Derfra vides det, at NIG-processen kan fås ved at subordinere en brownsk bevægelse med volatilitet σ og drift θ med en invers gaussisk proces med varians κ . I så fald er $\Delta X_{t_i} = \sigma N_i \sqrt{\kappa Z_i} + \theta Z_i$, hvor N_i er standard normalfordelt, og Z_i er invers gaussisk fordelt med middelværdi $t_i - t_{i-1}$ og skalaparameter $\frac{(t_i - t_{i-1})^2}{\kappa}$. Implementeringen af disse kan ses i bilag 3.4. Man kan også benytte Monte Carlo-simulation til at prisfastsætte call optioner direkte. I så fald skal man simulere N udfaldsstier for processen under Q -målet og udregne $C_0 = e^{-rT} \sum_{i=1}^N (S_T^i - K)^+ \frac{1}{N}$. Implementeringen af dette kan ses i bilag I.1.5.

3.5 Implicit volatilitet og greeks

Hvis man sætter $\nu = 0$, kommer man selvfølgelig tilbage til Black-Scholes-modellen. Denne model kan fungere godt som et benchmark, fordi der i Black-Scholes-modellen findes en entydig pris til call optionen. Denne pris er givet ud fra udtrykket

$$C^{BS}(S, K, T, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + T\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

hvor N er fordelingsfunktionen for standard normalfordelingen.

3.5.1 Greeks

Ud fra Black-Scholes kan man finde de første afledede med hensyn til de forskellige parameter og variable. Dette er, hvad man kalder greeks. De mest almindelige er

$$\begin{aligned} \text{(Delta)} \quad \Delta &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial S} = N(d_1), 0 < \Delta < 1 \\ \text{(Gamma)} \quad \Gamma &= \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} > 0 \\ \text{(Vega)} \quad \mathcal{V} &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} = SN'(d_1)\sqrt{T} > 0 \\ \text{(Theta)} \quad \Theta &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial T} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) < 0 \end{aligned}$$

men der findes mange flere. Dette er en af fordelene ved Black-Scholes-modellen, da et lukket udtryk giver mulighed for at differentiere, og ud fra det kan man analysere på parameterens indvirkning. For eksponentiel Lévy-modellen må man gøre noget lidt andet.

Greeks i eksponentiel Lévy-modellen

Da der ikke findes en formel for call optionsprisen i en eksponentiel Lévy-model, kan man heller ikke finde en formel for greeks. Derfor må man også benytte numeriske metoder til dette. Det er derfor, at MC-simulation ikke er favorabel at bruge. Det vil nemlig betyde, at man skal simulere processen til forskellige værdier for dernæst at tage en numerisk hældningskvotient mellem de priser, man får ud. Her har PIDE-metoden en fordel, idet man får call optionsprisen som funktion af både spot og udløbstid. Derfor kan man udregne hældningskvotienten, således at man kan regne delta, gamma og theta, som et biprodukt af metoden.

3.5.2 Implicit volatilitet

Selv om Black-Scholes-modellen antager, at volatiliteten er konstant, kan man fra denne model se prisen C^{BS} som en funktion af σ . Dette vil give en funktion fra $(0, \infty)$ over i intervallet $((S - Ke^{-rT})^+, S)$. Derudover er $C^{BS}(\sigma)$ voksende og kontinuert, hvilket kan ses, da den første afledede, vega, er strengt positiv.

Det betyder, at man kan invertere prisen for at finde det, som kaldes implicit volatilitet. Det vil sige den volatilitet, det underliggende aktiv skulle have, hvis Black-Scholes-formlen var den, der genererede markedsprisen. Man kan lave en funktion $\Sigma : (T, K) \rightarrow \Sigma(T, K)$, som er den implicite volatilitet for en strike K og udløbstidspunkt T . Tilsvarende kan man have spot S som input i stedet for strike. Dette er, hvad man kalder implicit volatilitetsflader (IVF). Man kan i så fald lave IVF ud fra markededata, og generelt observerer man ikke i praksis konstant volatilitet, som ellers antages i Black-Scholes-modellen. Ofte fås det, der kaldes smile eller skew. Det er, når det hhv. ligner enten et smil eller et halvt smil. For nærmere beskrivelse af disse volatilitetsstrukturer kan man se Gatheral (2006).

Hvis den eksponentiel Lévy-model kunne give samme typer af strukturer, som dem man observerer i markedet, ville den være realistisk. Senere vil der blive set på nogle konkrete eksempler, hvor det også vil blive vist, at man kan få disse implicite volatilitetsstrukturer.

3.6 Opsummering

I dette afsnit blev der set på eksponentiel Lévy-modellen for prisudviklingen. Der blev set på, hvornår man kan finde en arbitragefri pris, og hvornår denne pris er entydig. Derudover blev der set på, hvad der må gælde, når en eksponentiel Lévy-proces er en martingal. Der blev også set, hvordan man kunne finde et ækvivalent martingalmål. Metoderne for prisfastsættelse blev også gennemgået. Her blev det blandt andet vist, hvordan man kan benytte Fouriertransformationer til at finde prisen på en call option. Det blev også vist, hvordan man kunne benytte partiale integro differentialligninger til at finde prisen. Til sidst blev der set på Black-Scholes-modellen, greeks og implicit volatilitet, som kan bruges til at vurdere, om eksponentiel Lévy-modellen kan beskrive de priser, der er observeret i markedet, samt hvor galt det går, hvis Black-Scholes-model benyttes, når den sande model er en eksponentiel Lévy-model. I de næste afsnit vil der så blive udregnet en pris

på konkrete optioner ved brug af de metoder, der er blevet gennemgået i dette afsnit. Derefter vil der blive set på delta-hedging for at finde ud af, hvor galt det går ved at benytte delta-hedging. Her vil der både blive udledt en formel og lavet et lille simulationsstudie.

Populære modeller - med anvendelse

4.1 Populære modeller

Når man skal opstille sin model, kan den drivende Lévy-proces vælges ud fra en bred vifte af processer. Her vil der grundlæggende blive skelnet mellem to vigtige former: endelig aktivitet-/springdiffusionsprocesser og Lévy-processer med uendelig aktivitet. Begge former har deres fordele og ulemper.

En springdiffusion består udelukkende af en Brownsk bevægelse og en compund-poissonproces. Dette giver egenskaben, at spring ikke sker ofte, samt at springenes fordeling som regel er konkret specificeret med en kendt fordeling. Derudover er de lette at simulere og helt generelt lette at regne med.

I de uendelig aktivitetsmodeller er der ikke brug for en brownsk bevægelse, da man kan lade de små spring styre processen. Man kunne selvfølgelig tillægge en brownsk bevægelse. I denne opgave vil der blive set bort fra denne mulighed, da det i praksis også vil være svært at se forskel på en Brownsk bevægelse og uendeligt mange små spring, idet man ikke kan observere data kontinuert.

Blandt de mere brugte modeller findes Black-Scholes, Merton, Kou, variance gamma (VG), normal inverse gaussian (NIG), CGMY, Meixner m.fl., som man kan bruge flere værker på at beskrive udtømmende. Selvfølgelig kan jeg ikke gennemgå alle modeller her, men jeg vil vise, hvordan man kan benytte nogle af modellerne, hvordan man kan se, hvad der skal gælde, for de opfylder forskellige betingelser, samt hvordan man udregner prisen for en call option.

Jeg vælger at se på to springdiffusionsmodeller for at vise, hvordan der kan opstå

implicit volatilitetsskew/-smiles og se på, hvor godt PIDE-metoden lader til at approksimere den "sande" call optionspris. Derefter ser jeg på en NIG-model, hvor Lévy-processen er en NIG-proces, som har uendelig aktivitet. Det gøres for først at undersøge, hvordan man kan afgøre, om de numeriske metoder kan benyttes og for derefter at forsøge at afgøre, hvor stor forskel, der er på de forskellige metoder, når det handler om at udregne priser. Til sidst vil der være en kort diskussion af fordele og ulemper ved de benyttede numeriske metoder.

4.1.1 Springdiffusion

En springdiffusionsmodel vil blive defineret som en Lévy-proces givet på formen

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (4.8)$$

hvor $(W_t)_{t \geq 0}$ er en standard Brownsk bevægelse, $(N_t)_{t \geq 0}$ er en poissonproces med parameter λ , og $(Y_i)_{i \geq 1}$ er en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med fordeling μ . Desuden antages det, at processerne er uafhængige af hinanden. Dette giver tripletten $(\gamma + \lambda \int 1_{(|x| \leq 1)} x d\mu, \sigma^2, \lambda\mu)$.

Hvis Y_i antages at være normalfordelt, fås hvad der kaldes Merton-modellen. Merton-modellen er relativ simpel, da man kan benytte sig af tårnegenskaben til at komme frem til et udtryk, der benytter en vægtet sum af Black-Scholes-priser. Dette vil blive vist i det følgende afsnit.

Hvis Y_i antages at være en dobbelt eksponentiel fordeling, kaldes det en Kou-model. Kou-modellen vil blive benyttet til at se på implicit volatilitet for at få en intuition om, hvad der gælder for springene, når de henholdsvis giver smiles eller skews. Begge modeller er relativt simple og giver ikke de store vanskeligheder og er derfor gode til at illustrere pointer. Det er blandt andet nemt at se, at de opfylder betingelsen for PIDE-metoden, da springdiffusionsmodeller har en brownsk bevægelsesdel.

Grundet ukomplethed er der ikke et entydigt Q -mål, men ved at påtvinge, at der skal være den samme type springdiffusion under P - og Q -målet, vil der være en

entydig driftændring fra P -målet til Q -målet i springdiffusionsmodellerne. Hvis $(X_t)_{t \geq 0}$ er en springdiffusion med triplet $(\gamma + \lambda \int 1_{(|x| \leq 1)} x d\mu, \sigma^2, \lambda\mu)$, kan man udtrykke driften under Q -målet ved at se på proposition 3.1.2. Der fås

$$\gamma + \lambda \int 1_{(|x| \leq 1)} x d\mu(x) + \frac{\sigma^2}{2} + \lambda \int (e^x - 1 - x 1_{(|x| \leq 1)}) d\mu(x) = 0.$$

Hvilket er ækvivalent med

$$\gamma = -\frac{\sigma^2}{2} - \lambda \int (e^x - 1) d\mu(x)$$

Dette gælder både under Merton- og Kou-modellen.

Merton

I Merton-modellen har man, at X_t er en springdiffusion med normalfordelte spring. Det vil sige $Y_i \sim N(m, \delta^2)$, hvorfor $\sum_{i=1}^n Y_i \sim N(nm, n\delta^2)$. Så bliver $\int (e^x - 1) d\mu(x) = e^{m+\delta^2/2} - 1$. For at have et benchmark skal det bemærkes, at der let kan udledes en simpel formel for prisfastsættelse af en call option i denne model.

$$\begin{aligned} call &= E^Q [e^{-rT} (S_T - K)^+] = E^Q \left[e^{-rT} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2-\lambda(e^{m+\delta^2/2}-1))T+\sigma W_T+\sum_{i=1}^{N_T} Y_i} - K)^+ \right] \\ &= \int E^Q \left[e^{-rT} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2-\lambda(e^{m+\delta^2/2}-1))T+\sigma W_T+\sum_{i=1}^n Y_i} - K)^+ \right] 1_{(N_t=n)} dN_t(Q)(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(N_T = n) E^Q \left[e^{-rT} (S_0 e^{(r-\sigma^2/2-\lambda(e^{m+\delta^2/2}-1))T+\sigma W_T+\sum_{i=1}^n Y_i} - K)^+ \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(N_T = n) E^Q \left[e^{-rT} (S_0 e^{n(m-\frac{\delta^2}{2})-\lambda(e^{m+\delta^2/2}-1)T} e^{(r-\sigma^2/2)T+\sqrt{\sigma^2+\frac{n\delta^2}{T}}\sqrt{T}Z} - K)^+ \right] \end{aligned}$$

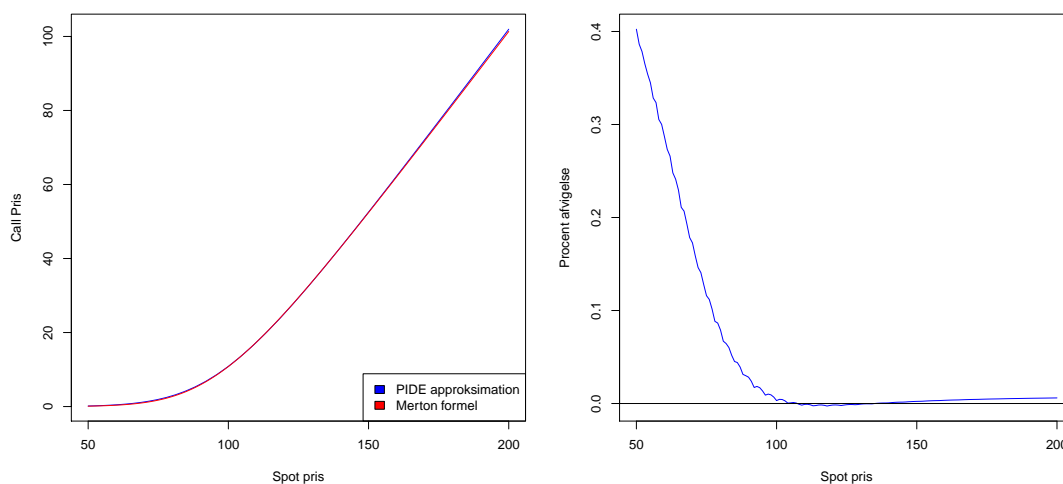
Ovenfor er Z standard normalfordelt. Det ses, at det netop svarer til Black-Scholes-modellen, hvor $S_0^n = S_0 e^{n(m-\frac{\delta^2}{2})-\lambda(e^{m+\delta^2/2}-1)T}$ og $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}$. Derfor kan resultatet opskrives ud fra en sum af Black-Scholes-modellens call optionspriser

på følgende måde

$$call^{merton} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} C^{BS}(S_0^n, r, \sigma_n^2, K, T)$$

Ovennævnte betyder, at det er muligt at udregne en "korrekt" pris, som de approksimative call optionspriser fra de numeriske metoder kan holdes op imod. Jeg har implementeret PIDE-metoden ud fra beskrivelsen i afsnit 3.3.2, hvor $N = 481$, $M = 73$, $B_u = -B_l = 4$ og $A = 10$. Koden til implementering ligger i bilag I.1.1.

Det ses i figur 4.2a, at PIDE-metoden rammer relativt tæt på den korrekte værdi. Jo finere man gør tidsskridtene og rumopdelingen, des tættere kommer man på den sande værdi. Derudover kan man se på den procentvise afvigelse i figur



(A) Call pris i Merton-modellen

(B) Procentafvigelse for call optionsprisen

FIGUR 4.2: Merton-model med PIDE-metoden. Parameter: $r = 0.01$, $K = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 0.4$, $\delta = 0.3$, $\mu = -0.05$

4.2b. Afvigelsen er selvfølgelig meget stor, når call prisen er tæt på 0 - men det ser ud til, at den stabiliserer sig til en afvigelse på ca. 0.01 ved spot priser over 100. PIDE-metoden giver selvfølgelig ikke de rigtige værdier, da der er en del approksimationer. Dog skal det nævnes, at det, der her antages for den "korrekte"

værdi, også er en approksimation, da det numerisk ikke er muligt at summere til uendelig. Approksimationen af summen vil altid være negativt biased, da den kun indeholder positive led. Ud fra dette ser det ud til, at PIDE-metoden virker relativt godt til at prisfastsætte i Merton-modellen, hvilket man kunne formode også ville gælde for springdiffusionsmodeller generelt.

Kou

Kou-modellen er en springdiffusionsmodel, og dermed har den formen 4.8, hvor $Y_i \sim DbExp(p, \alpha_1, \alpha_2)$. DbExp står for dobbelt eksponentialfordelt, så tætheden er givet som:

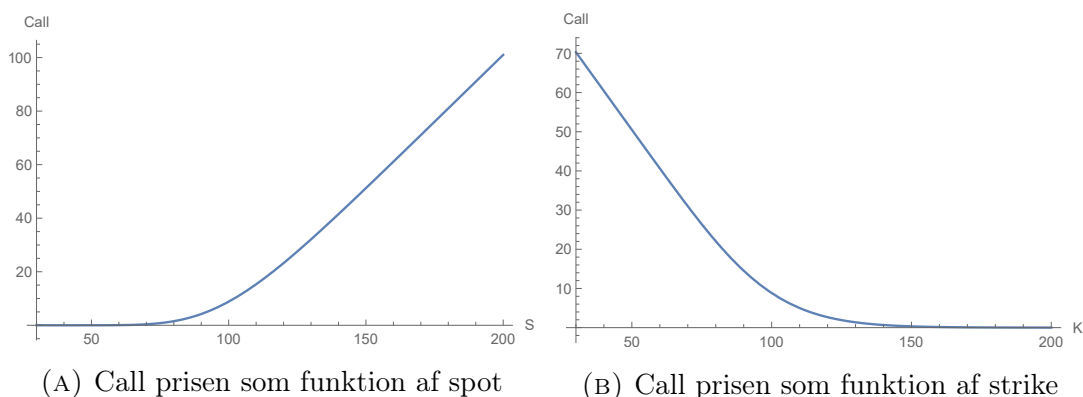
$$f(y) = p\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} 1_{(x>0)} + (1-p)\alpha_2 e^{\alpha_2 x} 1_{(x<0)}$$

Den kan ses som, at der er p sandsynlighed for et positivt spring og $(1-p)$ for et negativt spring. Det betyder for eksempel, at hvis man betinger med, at et positivt spring fremkommer, bliver springet eksponentialfordelt. For at kunne benytte Fourier-metoden skal ligning 3.1 være opfyldt. Derfor skal der findes et $\alpha > 0$, således at følgende er endeligt:

$$\begin{aligned} I &= \lambda \int 1_{(|x| \geq 1)} e^{(1+\alpha)x} d(\mu)(x) \leq \lambda \int e^{(1+\alpha)x} (p\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} 1_{(x>0)} + (1-p)\alpha_2 e^{\alpha_2 x} 1_{(x<0)}) dx \\ &= \lambda \left(\int_{-\infty}^0 (1-p)\alpha_2 e^{(1+\alpha+\alpha_2)x} dx + \int_0^{\infty} p\alpha_1 e^{(1+\alpha-\alpha_1)x} dx \right) \end{aligned}$$

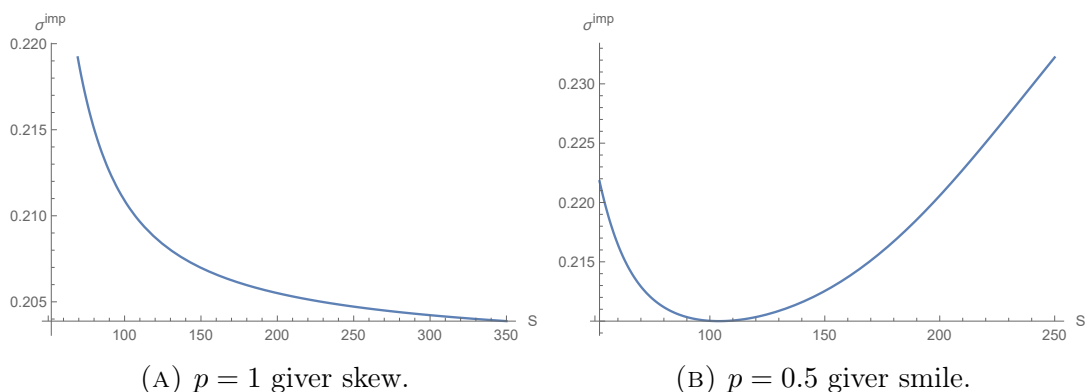
Hvis $1 < \alpha_1$, kan $\alpha > 0$ vælges, så $I < \infty$. I så fald giver ligning 3.1, at man kan benytte Fourier-metoden til at prisfastsætte en call option i denne model. Fra Fourier-metoden fås call prisfunktionen som en funktion af strike, og man kan benytte numeriske metoder, som splines, til at få prisfunktionen som funktion af spot. Begge dele kan ses i figur 4.3. Koden til udregningerne er i bilag I.1.2 og følger afsnit 3.3.1. Udfra denne prisfunktion kan man dernæst se på, hvilke implicite volatilitetsstrukturer man kan få.

Først kan man se på den implicite volatilitet i en Kou-model, hvor der er størst sandsynlighed for positive spring. Dette ses i figur 4.4a, som giver anledning til det, der kaldes volatilitesskew. Her kan det ses, at den implicite volatilitet



FIGUR 4.3: Call prisen i Kou-model med Fourier-metoden. Parameter $r = 0.01, \sigma = 0.2, \lambda = 0.5, K = 100, T = 1, p = 0.5, \alpha_1 = \alpha_2 = 15$

er monotont aftagende helt op til en spotkurs, der er meget større end strike. Figur 4.4b viser derimod en Kou-model, hvor der er et balanceret forhold mellem positive og negative spring. Dette giver volatilitetssmile, hvor det kan ses, at den implicitte volatilitet er aftagende indtil omkring det punkt, hvor strike er lig med spot, hvorefter den implicitte volatilitet stiger. Man kan derfor formode,



FIGUR 4.4: Implicit volatilitet i en Kou-model. Parameter $r = 0.01, \sigma = 0.2, \lambda = 0.5, K = 100, T = 1, p = 0.5, \alpha_1 = \alpha_2 = 15$.

at hvis der er stor sandsynlighed for positive spring, vil der blive observeret volatilitetsskews i markedet, og hvis der er mere balancerede eller positive spring, vil der blive observeret volatilitetssmiles. Det betyder dog, at det generelt bør være mere normalt med volatilitetssmiles. Kou-modellen kan herfra kalibreres til de volatilitetsstrukturerer, man observerer i markedet. Derved kan den være mere virkelighedsnær end Black-Scholes-modellen. Koden for implementering og

hvordan disse grafer er fremkommet findes i bilag I.1.2. I koden udregner Mathematica numerisk roden for $\text{call}^{Kou}(S) - \text{call}^{BS}(S, \sigma^{imp})$ for forskellige værdier af spot, hvor der benyttes splines til at lave en funktion ud af de udregnede punkter.

4.1.2 Modeller med uendelig aktivitet

Som skrevet tidligere er det essentielt overflødigt at have en brownsk bevægelse. Derfor har jeg valgt at se på en model uden en brownsk bevægelse. En sådan model er for eksempel en NIG-model, hvor NIG-processen benyttes som Lévy-proces $(X_t)_{t \geq 0}$. En begrundelse for at benytte processer med uendelig aktivitet fremfor en springdiffusion er, at uanset hvad markedet gør, kan det ikke få prisen til blive kontinuert; uanset hvor ofte der handles, vil der altid være en difference i prisen fra den forgående handel til den næste, så længe den har ændret sig. I så fald er prisfunktionen ingen steder kontinuert, hvilket er et resultat uendelig aktivitetsprocesser kan frembringe.

NIG

Grunden til at benytte en NIG-model i stedet for en springdiffusionsmodel er, at den kan have uendeligt mange spring i ethvert interval, men samtidig er den relativt nem at arbejde med i forhold til helt generelle uendelig aktivitetsprocesser. Det gør altså, at man kan få nogle resultater og lave grafer for dem, selv om processen virker voldsom ved første øjekast. Den NIG-proces, der benyttes i denne opgave, har tre parametre. Så hvis $(X_t)_{t \geq 0}$ er en NIG-proces er det i afsnit 2.2 vist, at Lévy-målet er givet ved

$$\begin{aligned} d\nu(x) &= \frac{C}{|x|} e^{Ax} K_1(B|x|) dx \\ A &= \frac{\gamma}{\sigma^2} \\ B &= \frac{\sqrt{\gamma^2 + \sigma^2/\kappa}}{\sigma^2} \\ C &= \frac{\sqrt{\gamma^2 + \sigma^2/\kappa}}{2\pi\sigma\sqrt{\kappa}} \end{aligned}$$

og den karakteristiske funktion er:

$$\phi_{X_t}(\theta) = e^{t \frac{1}{\kappa} (1 - \sqrt{1 + \theta^2 \sigma^2 \kappa - 2i\theta\gamma\kappa})}$$

I det følgende vil der være restriktioner på parametrene, for at man kan benytte de forskellige metoder.

Fourier

For at benytte Fourier-metoden skal betingelsen 4.9 være opfyldt. Det vil sige, at der skal findes et $\alpha > 0$, således at følgende gælder:

$$I = \int 1_{(|x| \geq 1)} e^{x(1+\alpha)} d\nu(x) < \infty \quad (4.9)$$

Her er der brug for at kontrollere Besselfunktionen, når x går mod uendelig. Til det benyttes formel (2.10) fra Rønn-Nielsen and Jensen (2014, s. 4), hvorfra det ses, at $K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-1/2} e^{-x}$. Dette benyttes til at sige, at for η stor nok findes en konstant D , så for $x > \eta$ er

$$K_1(Bx) \leq D(x)^{-1/2} e^{-Bx} \quad (4.10)$$

Til at starte med splittes integralet op i forskellige dele:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\eta}^{\eta} 1_{(|x| \geq 1)} e^{x(1+\alpha)} d\nu(x) < \infty \\ I_2 &= \int_{\eta}^{\infty} e^{x(1+\alpha)} d\nu(x) \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{-\eta} e^{x(1+\alpha)} d\nu(x) \\ I &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

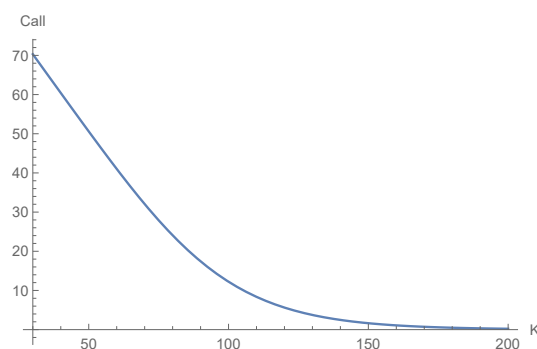
Hvor η er stor nok til at kunne benytte 4.10 til at begrænse I_2 og I_3 . For I_2 fås:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\eta}^{\infty} e^{x(1+\alpha)} \frac{C}{|x|} e^{Ax} K_1(|x|B) dx \leq K \int_{\eta}^{\infty} e^{x(1+\alpha)} \frac{1}{x^{3/2}} e^{Ax} e^{-Bx} dx \\ &= K \int_{\eta}^{\infty} e^{x(1+\alpha+A-B)} \frac{1}{x^{3/2}} dx \end{aligned}$$

hvor K er en passende konstant. Det ses, at for at få $I_2 < \infty$ skal $(1 + A - B) < 0$. Tilsvarende kan man gøre for I_3 , hvorom det gælder, at $(1 - A - B) < 0$. Dette giver en restriktion på parameterene, men i så fald er betingelse 4.9 opfyldt. Det gør, at man kan benytte Fourier-metoden til at udregne værdien af en call option. Man skal være påpasselig, når man laver målskift, som gør at processen er eksponentialfunktionen af en NIG-proces under både P - og Q -målet. Det skal man, da det er ikke blot er en driftændring, der skal til. For at bevare NIG-processen på den form, der benyttes, kan man derfor vælge at ændre γ , som både indgår i driften og i Lévy-målet - hvilket er de to dele, der må ændres på. Så for at få en martingal skal det gælde:

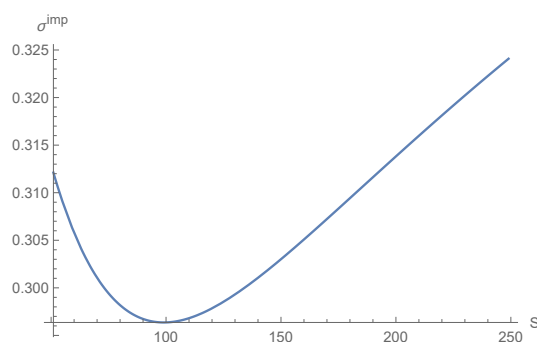
$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(-i) &= E^Q[e^{X_t}] = 1 \Leftrightarrow \\ e^{\frac{1}{\kappa}(1 - \sqrt{1 - \sigma^2\kappa - 2\gamma\kappa})t} &= 1 \Leftrightarrow \\ 1 - \sqrt{1 - \sigma^2\kappa - 2\gamma\kappa} &= 0 \Leftrightarrow \\ \gamma &= -\frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

Det skal selvfølgelig understreges, at σ^2 ikke har noget med en brownisk bevægelsesdel i selve NIG-processen at gøre - men at NIG-processen kan opnås ved at subordinere en brownisk bevægelse med en invers gaussisk subordinator som beskrevet i afsnit 2.2. I bilag I.1.4 ses det, hvordan man kan beregne værdien i Mathematica. Beregningen giver en prisfunktion som funktion af strike, der kan ses i figur 4.5. I figur 4.7 kan man se, hvordan prisen afhænger af spotkursen. Man kan tydeligt se, at funktionen er en prisfunktion, der opfylder de fundamentale egenskaber ved call optionsprisen, som altid skal være til stede: Den er 1) strengt konveks, 2) strengt positiv, 3) konvergerer mod 0, når spotkursen går mod 0, og



FIGUR 4.5: Call optionsprisen som funktion af strike. Parametre: $r = 0.01, K = 100, T = 1, \sigma = 0.3, \kappa = 0.1$

4) konvergerer mod $S - K$, når spotkursen går mod uendelig. Denne prisfunktion kan man benytte til at finde implicit volatilitet. Det vises i figur 4.6. Her



FIGUR 4.6: Implicit volatilitet som funktion af spot

kan der genereres forskellige typer af implicit volatilitet. Ligesom i Kou-modellen har det noget med fordelingen af springene at gøre. I dette tilfælde er det et volatilitetssmile, man får.

PIDE

For at benytte PIDE-metoden skal det sikres, at betingelse 3.3 er opfyldt. Dog antages det, at der ikke er nogen brownsk bevægelse, så $\sigma_X = 0$ i tripletten. I så fald skal der eksistere et $\beta \in (0, 2)$, så:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x^2 d\nu(x) > 0$$

For at vise at dette gælder, får man brug for at kontrollere besselfunktionen. Til det benyttes Rønn-Nielsen and Jensen (2014, s. 6), hvor man kan få, at $K_1(x) \sim x^{-1}$, når $x \rightarrow 0$, hvorefter det følger, at $K_1(x)x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Det betyder:

$$\begin{aligned} \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x^2 d\nu(x) &= \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x^2 \frac{C}{|x|} e^{Ax} K_1(|x|B) dx \\ &\geq \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x^2 \frac{C}{|x|} e^{Ax} \frac{0.9}{|x|B} dx \end{aligned}$$

hvor uligheden gælder for ϵ lille nok - men da vi har brug for lim inf, er det fint. Herfra defineres en konstant $K = \frac{0.9C}{B}$ for at få:

$$K \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{Ax} dx = \frac{K}{A} \epsilon^{-\beta} (e^{A\epsilon} - e^{-A\epsilon})$$

Når man lader ϵ gå mod 0, får man brug for L'Hôpital, hvilket giver: $\frac{d}{dx} x^\beta = \beta x^{\beta-1}$ og $\frac{d}{dx} (e^{Ax} - e^{-Ax}) = A(e^{Ax} + e^{-Ax})$.

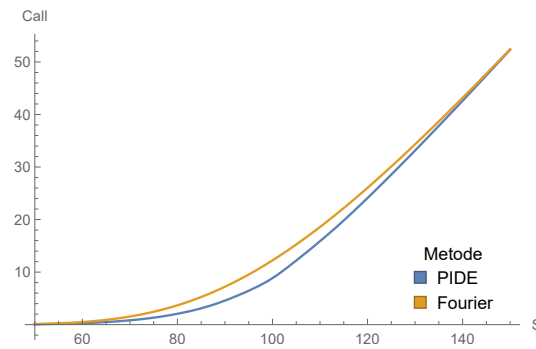
Hvis man vælger $\beta = 1$, fås $A(e^{Ax} + e^{-Ax}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2A$, så

$$\frac{K}{A} \epsilon^{-1} (e^{A\epsilon} - e^{-A\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2K > 0.$$

Betingelse 3.3 er dermed opfyldt, med $\beta = 1$.

Når dette er vist, kan PIDE-metoden for modeller med uendelig aktivitet benyttes. I bilag I.1.3 kan man se R-kode for programmet, der udregner call optionsværdien som funktion af spotkursen. Denne prisfunktion kan man se i figur 4.7. Der er dog lavet en del approksimationer for at komme frem til løsningen under PIDE-metoden. Alle beregninger kan ses i bilag I.1.3, hvor $N = 481$, $M = 73$, $B_u = -B_l = 4$, $A = 10$ og $\epsilon = 0.1$. Man kan se, at de to grafer ikke ligger helt oven i hinanden. Jeg har lavet denne graf ved at udregne værdien for nogle bestemte værdier af spotkursen. Dernæst har jeg benyttet Mathematica til at lave splines imellem disse punkter. Det er de samme punkter, der er lavet splines for i PIDE-metoden som i Fourier-metoden.

Man må formode, at PIDE-metoden er den, der er længst fra den sande værdi,



FIGUR 4.7: Call optionsværdien som funktion af spot. Parameter:
 $r = 0.01, K = 100, T = 1, \sigma = 0.3, \kappa = 0.1$

og Fourier-metoden er den, der kommer tættest. Grunden til dette er, at PIDE-metoden laver sine approksimationer for Lévy-målet tæt ved nul, hvor der er meget masse, mens Fourier-metoden laver sine approksimationer i Lévy-målet ved store absolutte værdier. Derudover laver PIDE-metoden diskretiseringer af Lévy-målet og af tid og rum. Dog er det lettest at få sine greeks (dvs. delta, gamma og theta) fra PIDE-metoden. Det er imidlertid ikke til megen nytte, hvis prisfunktionen alligevel er forkert. Derfor kunne man benytte prisfunktionen under Fourier-metoden til at få en bedre approksimation af delta og gamma, hvis man skulle hedge sin call option. Dette kræver dog, at man udregner sin prisfunktion utrolig mange gange og til hvert tidspunkt, hvor man har brug for at opdatere sit hedge. Hvorimod ved PIDE-metoden får man strukturen hele vejen frem til udløbstidspunktet.

4.2 Metodernes fordele og ulemper

Hvis man skal benytte disse eksponentiel Lévy-modeller, skal man have for øje, hvor lang tid det tager at udregne en pris. For en standard Black-Scholes-model kan dette gøres i konstant tid, da der er et lukket udtryk for, hvad prisen skal være som funktion af både strike og spot. Derudover kan man beregne sine greeks i konstant tid, da de også beregnes ud fra en formel.

Men når man går over i disse numeriske metoder, skal man begynde at tænke over

beregningstiden. I PIDE-metoden skal man lave et matrix produkt M gange. Med en god algoritme (som fx Strassens algoritme) kan man regne et $N \times N$ matrixprodukt ud i $O(N^{2.81})$ tid (se Cormen 2009, s. 76) og med en dårlig $O(N^4)$. Det betyder, at køretiden som funktion af M og N bliver $O(M \cdot N^{2.81})$, hvilket bliver lang tid, hvis man gerne vil have en høj præcision. Denne beregningstid er, når man kun har et enkelt underliggende aktiv. Hvis man begynder at have flere dimensioner, bliver det først rigtig besværligt. Dog findes der bedre metoder end finite difference, men de er mere komplicerede og kan kræve en del algoritme-forståelse, før man kan se, at det virker - hvorimod finite difference er meget lige til. Derudover får man kun prisen for en call option som funktion af tid til udløb og spotkursen. Så hvis man vil finde prisen for call optioner med forskellige strike, bliver man nød til at køre algoritmen for hver strike. Heldigvis kan man så relativt nemt få fat i de vigtigste greeks, både delta, gamma og theta, som er en del af outputtet, hvilket er en stor hjælp, hvis man vil hedge det givende aktiv. Så alt i alt er PIDE-metoden ikke den optimale metode til at finde priser på, hvis man ønsker høj præcision, da den laver mange approksimationer og tager lang tid at køre. Hvis man derimod vil have prisen som funktion af strike, kan man nemt få det i forhold til Fourier-metoden. Denne giver dog ikke nogen nem måde at få greeks på, men den finder prisen meget præcist, kræver ikke de store approksimationer og kører relativt hurtigt, da det blot er et integral, der skal udregnes numerisk, så køretiden er lineær med præcisionen. Så for et enkelt aktiv vil det være hurtigere og mere præcist at benytte Fourier-metoden. Men Fourier-metoden bliver svær at generalisere i flere dimensioner, så på det punkt har den sin svaghed. Til sammen giver disse to metoder et godt billede af, hvordan den samlede struktur for call optionen er.

Delta hedging

5.1 Delta hedge

Et delta hedge er et forsøg på at gøre sin call option lokalt risikofri. Dette gøres ved at holde en portefølje bestående af en call option og sælge $\Delta_t^{\hat{\sigma}}$ af det underliggende aktiv og gøre porteføljen selvfinansierende med bankbogen, hvor $\Delta_t^{\hat{\sigma}}$ er delta fra Black-Scholes-modellen, hvor volatiliteten er $\hat{\sigma}$, og den mængde man har af bankbogen på tidspunkt t noteres h_t . I så fald vil portefølgeværdien på tidspunkt t være:

$$V_t = C_t + h_t B_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t$$

hvor C_t er værdien af call optionen. Da den er en selvfinansierende, vil:

$$dV_t = dC_t + h_t dB_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t$$

Hvis man var i Black-Scholes-modellen, ville man fra Itô's formel få, at denne værdi var risikofri. Det er derfor, man kan benytte delta hedging, hvis man vil sælge en call option uden at påtage nogen risiko.

5.2 Fundamentalsætningen for derivat handel

I dette afsnit ses på, hvad der sker, hvis man benytter delta hedge til at hedge en call option. En af de vigtige resultater fra finansiering er fundamentalsætningen for derivat handel. Den giver en præcis formel for, hvor meget man taber eller

vinder ved at hedge med den forkerte volatilitet. Denne formel er:

$$P\&L = \int_0^T e^{-rt} \Gamma_t S_t (\sigma_r^2 - \sigma_h^2) dt + C_0^{BS} - C_0$$

hvor σ_r er den sande volatilitet, og σ_h er den volatilitet man benytter til at hedge med. På samme måde kan man se, hvad der sker, når man delta hedger, hvis virkelighedens processer fulgte en springdiffusion. Dette er der også et udtryk for, som kan ses i Ellersgaard et al. (2017, s. 8).

Efter samme tankegang kan det så udvides til Lévy-processer. Her vil der blot være en enkelt call option (eller anden europæisk option) på et underliggende aktiv.

Sætning 5.2.1. Fundamentalsætningen for derivat handel - for call optioner med spring

Lad $C_t = C(t, S_t) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ være prisprocessen for en call option, der udløber til tidspunkt T med strike K . Hvor det underliggende aktiv S_t følger processen fra en eksponentiel-Lévy-model, hvor X_t er en Lévy-proces med triplet $(\alpha, \sigma^2, \nu^P)$. Antag, at man på tidspunkt 0 køber en call option til prisen C_0 og delta-hedger den, hvor delta-hedget bliver lavet med en prisproces C_t^{BS} , der ikke giver arbitragemuligheder. Der findes derfor et Q -mål, der giver den prisproces, hvor Lévy-målet under Q -målet er ν . Så vil hedge-fejlen af at holde denne portefølje fra tidspunkt 0 til tidspunkt T være givet ved:

$$P\&L = C_0^{BS} - C_0 + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} \Gamma_t^{\hat{\sigma}} S_t^2 (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt \quad (5.11)$$

$$+ \int_{[0, T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) - S_{t-} (e^x - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) d\hat{N}(t, x) \quad (5.12)$$

Hvor $\Delta_t^{\hat{\sigma}} = \frac{\partial C^{BS}}{\partial S}(t, S_t)$, $\Gamma_t^{\hat{\sigma}} = \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2}(t, S_t)$ og $\hat{N}(t, x)$ er det pseudokompenseret poissonmål $\hat{N}(t, x) = N^P(t, x) - d\nu(x)dt$.

Proof. Porteføljen består af en call option, som til tidspunkt t har værdien C_t , et salg på $\Delta_t^{\hat{\sigma}}$ af det underliggende aktiv S_t og en beholdning h_t i bankbogen B_t . Denne er valgt, så porteføljen er selvfinansierende og har en værdi på 0. Derfor

er værdien af beholdningen på tidspunkt t , Π_t , givet ved:

$$\Pi_t = C_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t + h_t B_t = 0$$

og da den er selvfinansierende, er dynamikken:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dC_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t + h_t dB_t \\ &= dC_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t - (C_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t) r dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

Hvor det er brugt, at:

$$\begin{aligned} C_t &= \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t - h_t B_t \\ h_t &= - \frac{C_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t}{B_t} \\ dB_t &= r B_t dt \end{aligned}$$

Man kan benytte Itô's formel på call optionsfunktionen fra Black-Scholes-modellen til at få følgende dynamik, når S_t indsættes:

$$\begin{aligned} dC_t^{BS} &= \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial t} dt + \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t^{BS}}{\partial S^2} dt \\ &\quad + C_t^{BS}(S_{t-} e^{\Delta X_t}) - C_t^{BS}(S_{t-}) - S_{t-} (e^{\Delta X_t} - 1) \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S}(S_{t-}) \end{aligned}$$

Og dermed:

$$\begin{aligned} 0 &= - dC_t^{BS} + \Theta_t^{\hat{\sigma}} dt + \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} dt \\ &\quad + \Delta C_t^{BS}(\Delta X_t) + S_{t-} (e^{\Delta X_t} - 1) \Delta_t^{\hat{\sigma}}(S_{t-}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

hvor notationen fra greeks i Black-Scholes-modellen er benyttet, og $\Delta C_t^{BS}(\Delta X_t) = C_t^{BS}(S_{t-} e^{\Delta X_t}) - C_t^{BS}(S_{t-})$.

Derudover har vi fra sætning 3.3.1, at hvis $\sigma > 0$, eller

hvis der findes et β i intervallet $(0, 2)$, så $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\beta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 d\nu(x) > 0$, så må prisen på tidspunkt t opfylde PIDE'en, hvor det er ν under Q -målet, der integreres med hensyn til.

$$\begin{aligned} rC_t^{BS} &= \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial t} + rS_t \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t^{BS}}{\partial S^2} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(C_t^{BS}(S_t e^y) - C_t^{BS}(S_t) - S_{t-}(e^y - 1) \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} \right) d\nu(y) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Hvilket giver:

$$\begin{aligned} 0 &= -rC_t^{BS} dt + \Theta_t^{\hat{\sigma}} dt + rS_t \Delta_t^{\hat{\sigma}} dt + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(\Delta C_t^{BS}(y) - S_{t-}(e^y - 1) \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} \right) d\nu(y) dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

I så fald kan de to ligninger 5.14 og 5.16 trækkes fra hinanden til at få:

$$\begin{aligned} 0 &= -dC_t^{BS} + rC_t^{BS} dt + \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t - rS_t \Delta_t^{\hat{\sigma}} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} S_t^2 dt - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} dt \\ &\quad + \Delta C_t^{BS}(\Delta X_t) + S_{t-}(e^{\Delta X_t} - 1) \Delta_t^{\hat{\sigma}}(S_{t-}) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\Delta C_t^{BS}(y) - S_{t-}(e^y - 1) \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} \right) d\nu(y) dt \end{aligned} \quad (5.17)$$

Så ligning 5.17 sammen med ligning 5.13 giver:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= dC_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t - (C_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t) r dt - dC_t^{BS}(t, S_t) + rC_t^{BS} dt + \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t - rS_t \Delta_t^{\hat{\sigma}} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} S_t^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt + \Delta C_t^{BS}(\Delta X_t) + S_{t-}(e^{\Delta X_t} - 1) \Delta_t^{\hat{\sigma}}(S_{t-}) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\Delta C_t^{BS}(y) - S_{t-}(e^y - 1) \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} \right) d\nu(y) dt \end{aligned}$$

Værdien af at holde denne portefølje på tidspunkt 0 vil være integralet af den tilbagediskonteret værdi af Π_t :

$$\begin{aligned}
P\&L &= \int_0^T e^{-rt} d\Pi_t = \int_0^T e^{-rt} dC_t - \int_0^T e^{-rt} \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t - \int_0^T e^{-rt} (C_t - \Delta_t^{\hat{\sigma}} S_t) r dt \\
&- \int_0^T e^{-rt} dC_t^{BS} + \int_0^T e^{-rt} r C_t^{BS} dt + \int_0^T e^{-rt} \Delta_t^{\hat{\sigma}} dS_t - \int_0^T e^{-rt} r S_t \Delta_t^{\hat{\sigma}} dt \\
&+ \int_0^T e^{-rt} \frac{1}{2} S_t^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt \\
&+ \int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) + S_{t-}(e^x - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}(t, S_{t-})) dN^P(t, x) \\
&\int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} \left(\Delta C_t^{BS}(y) - S_{t-}(e^y - 1) \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S} \right) d\nu(y) dt
\end{aligned}$$

Hvor der er benyttet det poisson random-mål N^P , som giver hvornår og hvor store springene er under det virkelige mål P .

Hvis der reduceres, bliver det:

$$\begin{aligned}
P\&L &= \int_0^T d(e^{-rt} (C_t - C_t^{BS})) \\
&+ \int_0^T e^{-rt} \frac{1}{2} S_t^2 \Gamma_t^{\hat{\sigma}} (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt \\
&+ \int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) + S_{t-}(e^x - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) dN^P(t, x) \\
&\int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(y) - S_{t-}(e^y - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) d\nu(y) dt
\end{aligned}$$

Og da $C_T = C_T^{BS} = (S_T - K)^+$, bliver udtrykket reduceret til:

$$\begin{aligned}
P\&L &= C_0^{BS} - C_0 + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} \Gamma_t^{\hat{\sigma}} S_t^2 (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt \\
&+ \int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) - S_{t-}(e^x - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) dN^P(t, x) \\
&- \int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(y) - S_{t-}(e^y - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) d\nu(y) dt
\end{aligned}$$

Man kan dernæst definere et pseudokompenseret poissonmål $\hat{N}(t, x) = N^P(t, x) - d\nu(x)dt$, hvor N^P - den virkelige udvikling af S_t 's spring - kompenseres af ν , der

er Lévy-målet under Q -målet. I så fald kan det skrives som:

$$P\&L = C_0^{BS} - C_0 + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} \Gamma_t^{\hat{\sigma}} S_t^2 (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt \\ + \int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) - S_{t-}(e^x - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) d\hat{N}(t, x)$$

□

Man kan se ud fra $P\&L$ -ligningen, at hvis man benytter den implicitte volatilitet til at hedge, bliver $C_0^{BS} = C_0$, og dermed reduceres udtrykket yderligere. Hvis man i stedet kendte den korrekte volatilitet og hedgede med den, ville det andet led $\frac{1}{2} \int_0^T e^{-rt} \Gamma_t^{\hat{\sigma}} S_t^2 (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) dt$ være 0.

Problemet ligger i det sidste led $\int_{[0,T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) - S_{t-}(e^x - 1) \Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) d\hat{N}(t, x)$. Dette er en stokastisk variable, og det er umuligt at vælge hedge volatiliteten med det formål at sikre sig, at den er 0. Det kunne være interessant at se, om der fandtes en hedgevolatilitet, der minimerer variansen i udtrykket. Det vil dog ikke blive undersøgt her, men det kunne undersøges i en fremtidig undersøgelse. Dog kan man se, at hvis Q -målet er konstrueret, så man benytter det samme Lévy-mål under P - og Q -målet, så er \hat{N} et kompenseret poissonmål, og dermed har det sidste led middelværdi 0.

Sætning 5.2.1 er dog medtaget for at få en forståelse af, hvor galt det går, hvis virkelighedens marked opfører sig som en eksponentiel Lévy-model, men man i stedet hedger som om Black-Scholes-modellen var korrekt, således at man tror, man kan delta hedge sin call option perfekt. Man kan tage forventningen og se, hvad man kan forvente at tabe/vinde, men at finde udfaldsstien kræver i praksis, at man ved hvilke ændringer i prisen, der kommer fra spring, samt hvilke der kommer fra den Brownske bevægelse. I stedet vil jeg udføre et simulationseksperiment, hvor jeg undersøger denne $P\&L$ -fordeling.

5.3 Simulationseksperiment

I dette afsnit bliver der undersøgt ved hjælp af simulationer, hvad der sker, hvis man prøver at delta hedge sin call option, både hvor det underliggende aktiv følger Kou-modellen, og hvor den følger NIG-modellen. Ved at se på afvigelsen fra call optionens pay off-funktion, vil det blive undersøgt, hvordan hedgefejlsfordeling ser ud.

Eksperimentet er derfor opbygget ved, at man hedger N gange med tidslængde på $\Delta t = \frac{T}{N}$ mellem hvert hedgetidspunkt. Til tidspunkt 0 vælges en hedgingvolatilitet $\hat{\sigma}$, og man har dermed en porteføljeværdi på $C^{BS}(S_0, \hat{\sigma})$. Til hvert hedgingtidspunkt udregnes $\Delta_t^{\hat{\sigma}}$, som er delta under Black-Scholes-modellen, hvilket er en funktion af S_t , og det er så den andel, man holder af S_t . Resten af ens beholdning holdes i bankbogen, som forrentes med r .

5.3.1 Kou

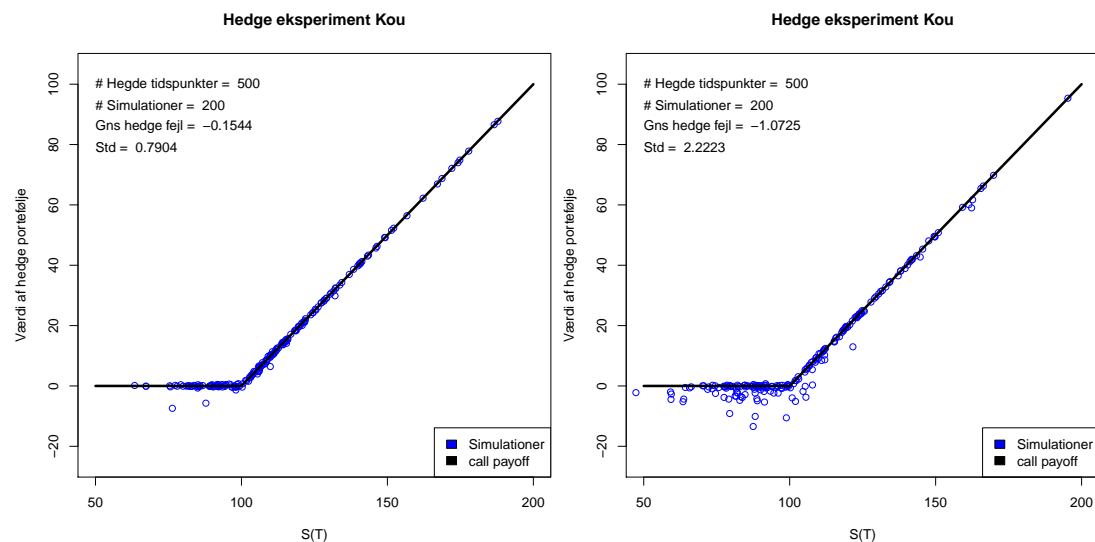
For en springdiffusionsmodel vil det kun være de udfaldsstier, hvor der er spring i, som giver anledning til noget andet end i Black-Scholes-modellen. Derfor vil intensiteten for springene blive sat lidt højt for at vise, hvordan springene påvirker hedgefejlen. Det vil være

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} e^{-rt} (\Delta C_t^{BS}(x) - S_{t-}(e^x - 1)\Delta_{t-}^{\hat{\sigma}}) d\hat{N}(t, x)$$

fra $P\&L$ -ligningen i sætning 5.2.1 som giver denne forskel. Koden, som er brugt til at lave simulationerne, ligger i bilag I.1.5.

I figur 5.8 kan man se forskellen på en lav 5.8a og høj 5.8b intensitet. Figuren er konstrueret med 200 simulationer. Her er der simuleret en udfaldssti for det underliggende aktiv. Til hvert simulationstidspunkt er der lavet et delta hedge. Figuren viser den simulerede hedgeporteføljes værdi, som funktion af det underliggende aktiv til udløbstidspunktet. Dette er de blå punkter. Den sorte linje er så pay off-funktionen for call optionen, som er den, man prøver at ramme. Så afstanden fra de blå punkter til den sorte linje er hedgefejlen. Man kan tydeligt

se, at simulationerne rammer mere forkert der, hvor der er en høj intensitet - hvilket altså giver mere usikkerhed på ens hedgefejl.



(A) Lav intensitet: $\lambda = 0.1$

(B) Høj intensitet: $\lambda = 1$

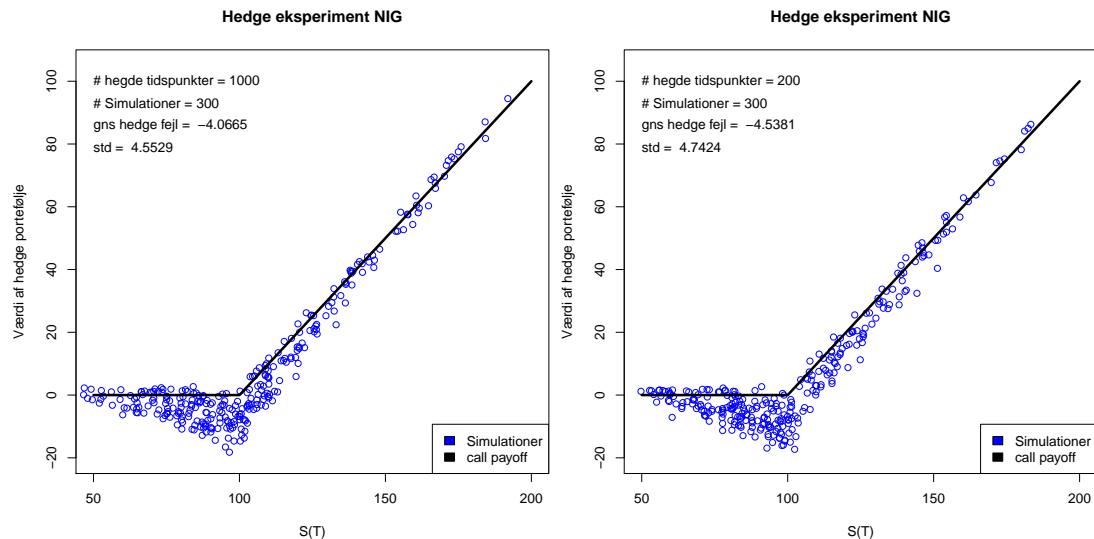
FIGUR 5.8: Delta hedge af en call option i en Kou-model. Param-
eter: $r = 0.05$, $S_0 = 100$, $\hat{\sigma} = 0.2$, $\sigma = 0.2$, $p = 0.3$, $\theta_1 = 15$, $\theta_2 = 10$

Man kan se på standardafvigelsen for hedgeforskellen for at få en ide om, hvor meget mere hedgefejlen i tilfældet med høj intensitet rammer ved siden af i forhold til tilfældet med lav intensitet. For den med lav intensitet med 200 simulationer er standardafvigelsen 0.79, og den gennemsnitlige hedgefejl er -0.15. Det er meget bedre end for den med høj intensitet, hvor gennemsnittet er -1.07 med en standardafvigelse på 2.22. Det er altså springene, der giver anledning til større hedgefejl. Derfor er det interessant, hvis der er uendeligt mange spring i et hvert interval for alle udfaldstier. Sætning 5.2.1 sørger for, at hedgefejlen ikke eksploderer, og at hedgefejlen konvergerer til $P\&L$ -ligningen, når man lader antallet af hedgetidspunkter gå imod uendelig. For at undersøge denne fordeling er det dog lettere at lave et simulationseksperiment end at regne direkte på $P\&L$ -ligningen.

5.3.2 NIG

Når man nu kommer til NIG-modellen, kan intuitionen om, hvad der sker for springdiffusioner, stadig bruges. Derfor kan man ikke hedge sin call option perfekt. Det interessante er, hvordan hedgefejls fordeling ser ud, og om det er muligt at benytte simulationer til at beregne sin risiko.

Her vil der blot blive set på et simulationsstudie, hvilket giver en indikation om, hvordan fordelingen ser ud. I figur 5.9 kan man se, hvordan de ser ud for forskellige antal hedgetidspunkter. Det kan ses, at værdien for hedgeporteføljen ligger



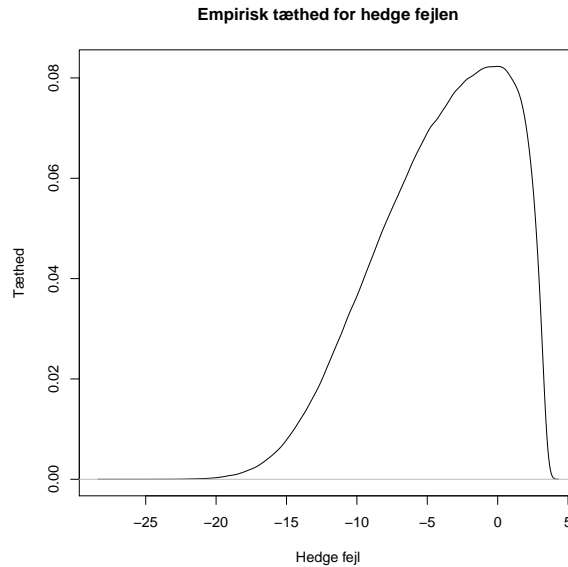
(A) #Hedgetidspunkter = 1000

(B) #Hedgetidspunkter = 200

FIGUR 5.9: Delta hedge af en call option i en NIG-model med forskellige antal hedgetidspunkter. Parameter: $r = 0.05$, $S_0 = 100$, $\hat{\sigma} = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $\kappa = 0.1$, $\Theta^P = 0.02$

langt mere spredt end i Kou-modellen. Det skyldes, at der er uendelig aktivitet. Derfor vil alle udfaldsstier have spring, som afviger fra en brownsk bevægelse. Dog ligner det ikke, at der er den store forskel på at have 200 hedgetidspunkter og 1000 hedgetidspunkter. I begge tilfælde er den gennemsnitlige hedgefejl omkring -4, og en standardafvigelse på omkring 4.6.

For at finde finansielle risikomål er der brug for at estimerer 5%-percentilen og middelværdien til tab, der overstiger 5%-percentilen. Når man benytter 1638400 simulationer ser den empiriske fordeling ud til at være pæn og glat. Derfor virker



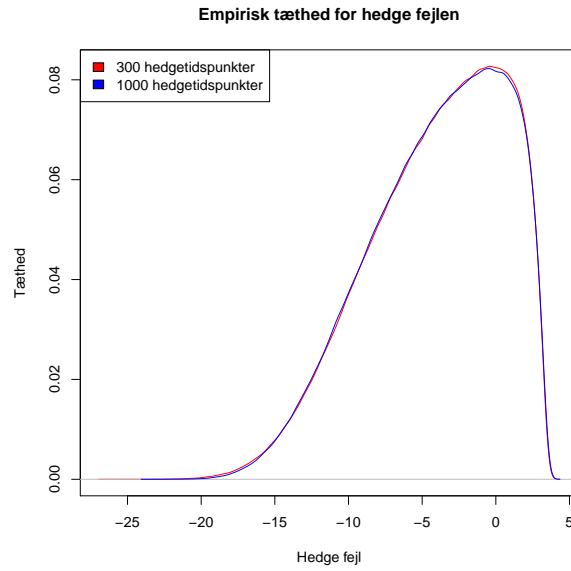
FIGUR 5.10: Empirisk fordeling for hedgefejlen:
 $\#Simulationer = 1638400$, $\#Hedgetidspunkter = 300$

det til, at 1638400 simulationer er nok til at estimere disse risikomål.

Hvis man ser på den empiriske fordeling af hedgeforskellen, ser den stort set ens ud for hver kørsel, når man har 1638400 simulationer.

Figur 5.10 viser den empiriske tæthed, når der er 1638400 simulationer og 300 hedgetidspunkter. Når man ser på grafen, ser det også ud som en relativt pæn fordeling, som kan benyttes til at lave risikoberegninger som *Value at Risk* (VaR) og *expected shortfall*, hvilket er vigtigt for en finansiell institution, der sælger call optioner.

Derudover kan man øge antallet af hedgetidspunkter til 1000. Det er, hvad man kan se i figur 5.11. Her kan man se, at den empiriske tæthed ser identisk ud med den empiriske tæthed for 300 hedgetidspunkter. Det kan ses, at de to empiriske tætheder ligger stort set oven i hinanden. Det kunne også tyde på, at der var en form for konvergens, når man øger antallet af hedgetidspunkter - og denne konvergens er relativt hurtig, da den allerede ved 300 hedgetidspunkter ser ud til at have den samme fordeling som ved 10000. Når man lader antallet af hedgetidspunkter gå imod uendelig, bør den netop konvergere til *P&L*-ligningen fra sætning 5.2.1. Dette kan benyttes til at finde tabsfordelinger relativt simpelt



FIGUR 5.11: Sammenligning af empiriske fordelinger for hedgefejlen: $\#Simulationer = 1638400$

ved hjælp af simulationer, i forhold til at skulle finde en fordeling ud fra sætning 5.2.1, som er relativt kompleks at lave beregninger med.

Valg af model

6.1 Fordele og ulemper

For en finansiel institution, der sælger call optioner, er det vigtigt at kende sin risikoeksponering. Derfor er det vigtigt, at man ved hvilken model, man skal bruge til at modellere aktiver og, hvilke antagelser man gør sig ved at benytte den model, samt hvilke implikationer det har, hvis ens antagelser viser sig at være forkerte. Dertil er det vigtigt at forstå, hvilke antagelser der er åbenlyst fejlagtige, og hvad det betyder for risikoen, man påtager sig, af at benytte en model med dårlige antagelser. Derfor er der i denne opgave set på, hvilken betydning det har at udvide Black-Scholes-modellen til eksponentiel Lévy-modellen.

Man kan med det samme se, at en eksponentiel Lévy-model altid vil være en bedre model for finansielle produkter, da den eneste forskel er, at det underliggende aktiv har muligheden for at have spring i sin udfaldssti. Derfor indeholder eksponentiel Lévy-modellen Black-Scholes-modellen, når Lévy-målet sættes til 0-målet. Problemet er, at en eksponentiel Lévy-model kan komplicere modellen mere, end den gavner.

Der er klare fordele ved Black-Scholes-model: at den har en lukket formel, der giver prisen, som betyder, at man kan finde greeks og priser i konstant tid, samt at man ikke behøver at approksimere processen eller beregningerne. Dertil giver Black-Scholes den fordel, at modellen er komplet. Det vil sige, at man kan hedge en hver risiko væk ved blot at handle det underliggende aktiv og bankbogen ved at lave delta hedging. Men ser man på den virkelige verden, ved man, at Black-Scholes-model ikke passer. Fra volatilitetssmiles/-skews ved man, at Black-Scholes-formel ikke kan give de korrekte priser, og det er ikke muligt at replikere

et hvert finansielt produkt perfekt. Der vil derfor komme en tab-/gevinstfordeling ved at delta hedge. Derfor vil man have forkerte antagelser i sin model, hvis man benytter Black-Scholes-modellen, som man i det mindste bør være i stand til at vurdere.

En af de forkerte antagelser, man gør sig, er at prisprocessen er kontinuert. Derfor bør man udvide til eksponentiel Lévy-modellen. Men eksponentiel Lévy-modellen er heller ikke perfekt.

Udvidelsen gør, at modellen ikke længere er komplet - hvilket betyder, at man bliver nødt til at påtvinge andre antagelser for, hvilken proces, der så passer bedst på data, samt hvordan man vil vælge sit ækvivalente Q -mål for at prisfastsætte sine call optioner. Det betyder altså, at man bliver nødt til at træffe flere valg, hvor der ikke nødvendigvis er en korrekt løsning.

Dertil bliver man nødt til at benytte sig af numeriske metoder - som PIDE-metoden, Fourier-metoden og Monte Carlo-simulation - for at finde frem til de priser og afledede, man har brug for. Disse numeriske metoder er beregningsmæssigt langt mere komplekse end Black-Scholes-formel og tager længere tid, jo mere præcision man ønsker. Dette er problematisk: For på den tid det tager at udregne prisen, har prisen allerede ændret sig, og så giver den ekstra præcision ikke nogen fordel.

Heldigvis giver de numeriske metoder tilsammen en meget god fornemmelse af, hvordan call optionens værdi og det underliggende aktivs værdi udvikler sig over tid. Men for en finansiel institution, som sælger call optioner, nytter det ikke, at man bliver nødt til at køre sine beregninger i flere minutter, før man kan sælge dem.

Man bliver derfor nødt til at lave en vurdering af præcision kontra hastighed. Når man laver denne vurdering, må det blive gjort på baggrund af en form for risikoanalyse, hvor man finder ud af, hvor galt det kan gå, hvis den hurtige metode benyttes. Til dette kan man lave et simulationsstudie, hvor man finder ud af, hvordan ens tabsfordeling ser ud. Ud fra tabsfordelingen kan man så påkræve et gebyr på sit salg, der kan dække det forventede tab, ved at sælge call optionen.

Da modellen alligevel er ukomplet, ved man jo, at der ikke findes en entydig pris, men et helt prisinterval. Så hvilken pris, man benytter, er nok mindre vigtig - blot man kan sikre sig ikke at tabe penge på salget. Som det blev set i opgaven, ser det ud til, at tabet er kontrollerbart i den forstand, at der findes en tabsfordeling, hvorpå der kan beregnes risikomål. Man kan derfor udregne risikomål som Value at Risk og expected shortfall til at vurdere hvor galt, det kan gå, hvis man sælger en call option.

Så derfor kan man benytte sine Black-Scholes-beregninger til at få en intuition om, hvor prisen ligger, og hvad man skal gøre for at hedge sig delvist. Dernæst kan man bruge eksponentiel Lévy-modellen til få en fornemmelse for, hvilken risiko man løber ved at benytte Black-Scholes' resultater, når prisprocessen faktisk er som beskrevet i eksponentiel Lévy-modellen.

6.2 Perspektivering

Dog er eksponentiel Lévy-modellen ikke den eneste måde at udvide Black-Scholes-modellen. Der findes et hav af modeller at vælge fra. I praksis er springmodeller ikke de mest anvendte. Det, som man i stedet har valgt at gøre for at imødekomme problematikkerne i Black-Scholes-modellen, er at ændre volatilitetsstrukturen - enten igennem en deterministisk eller stokastisk volatilitet (se Gatheral 2006). Men generelt åbner man op for, at volatiliteten ikke er konstant over tid. Hvis man ønsker en komplet model, skal man benytte sig af en deterministisk volatilitetsmodel, som for eksempel Dupire. Men ønsker man, at volatiliteten er stokastisk, løber man også ind i en ukomplet model og derfor flere ækvivalente martingalmål. En stokastisk volatilitetsmodel er opbygget, så det underliggende aktiv ser ud som i Black-Scholes-modellen, så

$$dS_t = \mu_S S dt + \sqrt{V_t} S dW_t^{(1)}$$

Det nye i forhold til Black-Scholes-modellen er, at V_t er stokastisk. V_t har så formen

$$dV_t = \mu_V(V_t, t)dt + \sigma_V(V_t, t)dW_t^{(2)}$$

Hvor μ_V og σ_V er deterministiske funktioner, og $W_t^{(1)}$ og $W_t^{(2)}$ er browniske bevægelser med korrelation ρ . En af de mest populære stokastiske volatilitetsmodeller er Hestons model. I Hestons model (Heston, 1993) er V_t givet som

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)}$$

Det man får ud af denne udvidelse er, at call optionsprisen nu afhænger af både det underliggende aktivs værdi og volatilitetsstørrelse - altså er værdien givet ved $C(t, S_t, V_t) = e^{-r(T-t)}E^Q[H(S_T)|S_t, V_t]$. Det betyder, at man får en partialledifferentielligning ved at benytte Itô's formel og påtvinge, at driften under Q -målet skal være den risikofrie rente r . Man må tillægge en markedspris for volatilitetsrisiko på λ , som ikke er entydig, så

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \rho\sigma VS\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2V\frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + (\kappa(\theta - V) - \lambda)\frac{\partial C}{\partial V} = rC \quad (6.18)$$

Hvor randbetingelserne for call optionen er

$$C(T, S, V) = (S - K)^+$$

$$C(t, 0, V) = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial S}(t, \infty, V) = 1$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S, 0) + rS\frac{\partial C}{\partial S}(t, S, 0) + \kappa\theta\frac{\partial C}{\partial V}(t, S, 0) = rC(t, S, 0)$$

$$C(t, S, \infty) = S$$

Måden, Heston kommer frem til en løsning, er ved at gætte på en løsningsform, der minder om Black-Scholes-formel

$$C(t, S, V) = SP_1 - e^{-r(T-t)}KP_2$$

Hvor han laver en omskrivning, så $x = \ln(S)$, og sætter løsningen ind i 6.18 for at finde frem til, at P_1 og P_2 kan skrives som betingede sandsynligheder, hvor

$$P_j(T, x, v) = P(x_T \geq \ln(K) | x_t = x, V_t = v)$$

og x_t har dynamikken

$$\begin{aligned} dx_t &= (r - u_j V_t)dt + \sqrt{v_t}dW_t^{(1)} \\ dv_t &= (\kappa\theta - b_j V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

Hvor $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, $b_2 = \kappa + \lambda$, $u_1 = 1/2$ og $u_2 = -1/2$, som kommer fra den partialle differentiaalligning. Man kan dog ikke finde et eksplicit udtryk for disse sandsynligheder, men man kan finde deres karakteristiske funktioner, som er givet på formen

$$\phi_i(t, x, v, \xi) = e^{C_i(T-t, \xi) + D_i(T-t, \xi)v + i\xi x}$$

hvor

$$\begin{aligned} C_i(\tau, \xi) &= r\xi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left((b_j - \rho\sigma\xi i + d_j)\tau - 2\ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right) \\ D_i(\tau, \xi) &= \frac{b_j - \rho\sigma\xi i + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \\ g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\xi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\xi i - d_j} \\ d_j &= \sqrt{(\rho\sigma\xi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\xi i - \xi^2)} \end{aligned}$$

Sandsynlighederne kan findes ved at invertere den karakteristiske funktion:

$$P_j(T, x, V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\xi \ln(K)} \phi_i(t, x, v, \xi)}{i\xi} \right) d\xi$$

Det kan i så fald benyttes til at finde call optionspriser. Så ligesom i eksponentiel Lévy-modellen kan prisen udregnes ved at lave Fouriertransformationer. Hestons model genererer også implicite volatilitetssmiles/-skews. Derudover er Hestons model ukomplet, da der nu er flere risikokilder. Hvis man prøver at delta hedge, vil man heller ikke kunne lave et perfekt hedge. Det skyldes, at man kan hedge risikoen fra det underliggende aktiv, men man kan ikke hedge risikoen fra volatiliteten. Dette svarer til eksponentiel Lévy-modellen, hvor man ikke kan hedge springrisikoen. Der findes flere artikler om dette, blandt andet Poulsen et al. (2009), hvor det undersøges, hvordan man kan minimere risikoen ved at hedge i Hestons model. Alt i alt er der altså mange modeller. Det er derfor en sand kunst at udvælge sin model og vide hvilke betydninger, det har, at man vælger en bestemt model - og fravælger noget andet.

Konklusion

7.1 Samlet konklusion

En Lévy-proces er en proces, som opfylder, at den har uafhængige og stationære tilvækster, at den er stokastisk kontinuert, samt at udfaldstierne er CADLAG. Lévy-processens vigtigste egenskaber er, 1) at den kan repræsenteres ud fra dens triplet, som har en bestemt sammenhængen med en uendelig delbar fordeling, og Lévy-Khintchine repræsentationen, 2) at udfaldstierne kan have endelig og uendelig variation samt endelig og uendelig aktivitet, samt 3) at den kan dekomponeres i tre uafhængige dele ved hjælp af Lévy-Itô.

Den væsentligste forskel ved at benytte processer med uendelig aktivitet sammenlignet med endelig aktivitet er, at der er uendelig mange spring i et hvert begrænset tidsinterval, samt integralet af Lévy-målet er uendeligt, når der er uendelig aktivitet. Dette resulterer i ekstra problemer, når man skal benytte numeriske metoder.

Til at modellere aktiekurser benyttes eksponentiel Lévy-modellen.

Man kan prisfastsætte call optioner i en eksponentiel Lévy-model ved at benytte FD-metoden på PIDE'en, hvilket resulterer i, at man skal løse ligningssystemer. Eller man kan i stedet benytte Fourier-metoden, hvilket resulterer i, at man skal udregne et integrale.

Fordelene ved at benytte PIDE-metoden er, at den giver greeks, samt at man får prisen som funktion af spot og tid til udløb. Ulemperne er, at metoden er langsom, hvis man ønsker høj præcision, samt at den kræver mange approksimationer. Derimod er fordelene ved Fourier-metoden, at den er hurtigere end PIDE-metoden og kræver ikke ligeså mange approksimationer som PIDE-metoden. Ulemperne

ved Fourier-metoden er til gengæld, at den er svær at generalisere og ikke let giver greeks.

En eksponentiel Lévy-model kan give volatilitetssmiles og -skews. Udfaldet afhænger af, hvordan springenes fordeling ser ud.

Hvis man benytter delta hedging fra Black-Scholes-modellen, når det underliggende aktiv er som i en eksponentiel Lévy-model, rammer man naturligvis ikke pay off-funktionen perfekt. Til gengæld kommer hedge-fejlen til at have en fordeling, som man kan finde et udtryk for – selv ved uendelig aktivitet. Ved simulation kan fordelingen findes til at udregne risikomål, som kan bruges til at vurdere, hvor galt det går.

En fordel ved den eksponentiel Lévy-model er, at der er en større klasse af processer at vælge fra. Det grunder sig i, at Black-Scholes-modellen er en del af eksponentiel-Lévy-modellen. Dog har det den konsekvens, at det beregningsmæssigt bliver sværere at finde priser samt at hedge sin call option. Derfor kan man benytte Black-Scholes til at finde priser og hedge, mens man kan bruge viden om den eksponentiel Lévy-model til at sige noget om ens tabsfordeling, hvis den eksponentiel Lévy-model generer de sande priser.

Den eksponentiel Lévy-model er naturligvis ikke den eneste måde at udvide Black-Scholes-model. Der findes blandt andet Hestons model, som også kan genere volatilitetsskews og -smiles. Hestons model er ligeledes ikke komplet, og man kan derved ikke hedge sin call option perfekt – hvilket giver en tabsfordeling.

Litteratur

- Cont, R. and Tankov, P. (2004), *Financial modelling with jump processes*, Chapman and Hall/CRC financial mathematics series, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Fla.
- Cont, R. and Voltchkova, E. (2005), ‘A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential lvy models’, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **43**(4), 1596–1626.
- Cormen, T. H. (2009), *Introduction to algorithms*, 3. ed. edn, The MIT Press, Cambridge, MA.
- Ellersgaard, S., Jönsson, M. and Poulsen, R. (2017), ‘The fundamental theorem of derivative trading - exposition, extensions and experiments’, *Quantitative Finance* **17**(4), 515–529.
- Gatheral, J. (2006), *The volatility surface, a practitioner’s guide*, Wiley finance series, John Wiley Sons, Hoboken, N.J.
- Heston, S. (1993), ‘A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options’, *The Review of Financial Studies (1986-1998)* **6**(2).
URL: <http://search.proquest.com/docview/207668844/>
- Lawler, G. F. (2006), *Introduction to stochastic processes*, 2. ed. edn, Chapman hall/crc, Boca Raton, Fla.
- Papapantoleon, A. (2008), ‘An introduction to lévy processes with applications in finance’.

Poulsen, R., Schenk-Hoppé, K. R. and Ewald, C.-O. (2009), ‘Risk minimization in stochastic volatility models: model risk and empirical performance’, *Quantitative Finance* **9**(6), 693–704.

Rønn-Nielsen, A. and Jensen, E. (2014), ‘Tail asymptotics for the supremum of an infinitely divisible field with convolution equivalent lévy measure’, *CSGB Research Reports* **No 09**.

Sato, K.-I. (1999), *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge studies in advanced mathematics 68, Cambridge University Press, Cambridge.

Bilag

I.1 Kode

I.1.1 R - PIDE for Merton

```
ntridiag <- function(x,nrow,ncol){rbind(rep(0,ncol),cbind(diag(
  x,ncol-1,nrow-1),rep(0,nrow-1)))}
utridiag <- function(x,nrow,ncol){rbind(cbind(rep(0,nrow-1),diag(
  x,ncol-1,nrow-1)),rep(0,ncol))}

###Merton
#Model parameter
K <- 100
T <- 1
r <- 0.01
S0 <- 100
sigma <-0.2
l <- 0.4
d = 0.3
mu <- -0.05
nu <- function(x){ l*dnorm(x,mu,d) }
#PIDE aprox parameter
N <- 481
M <- 73
A <- 10
Bø <- 4
Bn <- -4
```

```

delt <- T/(M-1)
delx <- 2*A/(N-1)
x <- seq(-A,A,delx)
y <- seq(Bn,Bø,delx)
Kø <- ceiling(Bø/delx-1/2)
Kn <- floor(Bn/delx+1/2)

#aprox model parameter
al <- function(x){(exp(x)-1)*nu(x)}
alpha <- integrate(al,Kn,Kø)[1]$value
nuprox <- Kn:Kø
for(i in Kn:Kø){
  u <- (i+1/2)*delx
  n <- (i-1/2)*delx
  nuprox[i-Kn+1]<- integrate(nu,n,u)[1]$value
}
lambda <- sum(nuprox)
chrc <- sigma^2/2-r+alpha

#D matrix
if(chrc >= 0){
D <- diag(-chrc/delx-sigma^2/delx^2-lambda,N+2*Kø,N+2*Kø)+utridiag(
  (sigma^2/2)/delx^2,N+2*Kø,N+2*Kø)+ntridiag((sigma^2/2)/delx^2+chrc/
  delx,N+2*Kø,N+2*Kø)
}else{
D <- diag(chrc/delx-sigma^2/delx^2-lambda,N+2*Kø,N+2*Kø)+utridiag(
  (sigma^2/2)/delx^2-chrc/delx,N+2*Kø,N+2*Kø)+ntridiag((sigma^2/2)/
  delx^2,N+2*Kø,N+2*Kø)
}

```

```

j <- K $\phi$ -Kn+1
J <- diag(0,N+2*K $\phi$ ,N+2*K $\phi$ )
for(i in 1:((j-1)/2)){
J[(i),] <- c(nuprox[((j-1)/2+2-i):j],rep(0,N + 2*K $\phi$  - (j-1)/2 - i))
}
for(i in 1:(N+2*K $\phi$ -j+1)){
J[(i+(j-1)/2),] <- c(rep(0,i-1),nuprox[1:j],rep(0,N+2*K $\phi$ -j-i+1))
}
for(i in 1:((j-1)/2)){
J[(i+(j-1)/2+(N+2*K $\phi$ -j)+1),] <- c(rep(0,N+2*K $\phi$ -j+i),nuprox[1:(j-i)])
}

#L $\phi$ s PIDE
payoff <- function(y) { ((y-K)>=0)*(y-K)}
h <- function(y) {payoff(S0*exp(y))}
xx <- seq(-A+Bn,A+B $\phi$ ,delx)
u <- h(xx)

Mat1 <- solve((diag(1,N+2*K $\phi$ ,N+2*K $\phi$ )-delt*D))
Mat2 <- (diag(1,N+2*K $\phi$ ,N+2*K $\phi$ )+delt*J)

for(i in 1:M){
u <- Mat1%%Mat2%%u
#randbetingelser
u[1:(length(xx)-N-K $\phi$ )] <- h(xx[1:(length(xx)-N-K $\phi$ )])
u[(length(xx)-K $\phi$ +1):length(xx)] <- h(xx[(length(xx)-K $\phi$ +1):length(xx)])
}

#Black scholes for sammenligning

```

```

d1 <- function(y) {1/(sigma*sqrt(T))*(log(y/K)+(r+sigma^2/2)*T)}
BScall <- function(y) {pnorm(d1(y))*y-K*pnorm(d1(y)-sigma*sqrt(T))*
  exp(-r*T)}

#lave function ud af approximationer ved splines
call <- approxfun(S0*exp(xx), u)

#korrekt merton (Næsten)
d1 <- function(y,s,rr) {1/(s*sqrt(T))*(log(y/K)+(rr+s^2/2)*T)}
BScall <- function(y,s,rr) {pnorm(d1(y,s,rr))*y-K*pnorm(d1(y,s,rr)-s*
  sqrt(T))*exp(-rr*T)}
n <- 0:100
k <- exp(mu)-1
lnu <- l*(1+k)
ra <- function(x) {r+x*mu/T-l*k}
sig <- function(x) {sqrt(sigma^2+x*d^2/T)}
Merton <- function(x) {
q <- 0
for(i in 0:100){
  q <- q + dpois(i,lnu*T)*BScall(x,sig(i),ra(i))
}
return(q)
}

# udregn funktions værdier og sammenlign med Merton eksPLICIT.
xxx <- seq(50,200,1)
setwd("C:/Users/Mikael Oskar Engelun/Desktop/udregninger")
pdf('MERTONCALLPLOT.pdf')
plot(xxx,call(xxx),type = 'l',col = 'blue',xlab = 'Spot pris',ylab =
  'Call Pris')

```

```

###Dette plot er 4.3
lines(xxx,Merton(xxx),type = 'l',col = 'red')
legend("bottomright",
c("PIDE approksimation","Merton formel"),
fill=c("blue","red")
)
dev.off()

pdf('MERTONCALLafvigelse.pdf')
plot(xxx,(call(xxx)-Merton(xxx))/Merton(xxx),type = 'l',col = 'blue',
      xlab = 'Spot pris', ylab = 'Procent afvigelse') ###Dette plot er 4.4
abline(h=0)
dev.off()

```

I.1.2 Mathematica - Fourier for Kou

Parameter:

$r = 0.01;$

$\sigma = 0.2;$

$\lambda = 0.5;$

$T = 1;$

$S = 100;$

$K = 100;$

$p = 1;$

$\theta_1 = 15;$

$\theta_2 = 15;$

Black-Scholes:

$$BS[k_]:=CDF\left[NormalDistribution[0,1],\left(1/\left(\sigma\sqrt{T}\right)\right)\right. \\
\left.(\text{Log}[S/k] + (r + \sigma^2/2)(T))\right]S-$$

$$K \text{Exp}[-rT] \text{CDF} \left[\text{NormalDistribution}[0, 1], (1/(\sigma T)) \right. \\ \left. (\text{Log}[S/k] + (r + \sigma^2/2)(T)) - \sigma\sqrt{T} \right]$$

Tæthed:

$$\text{na}[x_]:=p\theta_1 \text{Exp}[-\theta_1 x] \text{Boole}[x > 0] + (1 - p)\theta_2 \text{Exp}[\theta_2 x] \text{Boole}[x < 0]$$

Fourier - skal være endelig:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp}[1.1y] * \text{na}[y] dy$$

Martingale betingelse:

$$\gamma = -\sigma^2/2 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} ((\text{Exp}[y] - 1)\text{na}[y]) dy$$

Karakteristiske funktion til udløbstidspunktet:

$$f[x_]:= \text{Exp} [(i\gamma x - (\sigma^2/2)(x^2 + ix\lambda(p/(\theta_1 - ix) - (1 - p)/(\theta_2 + ix)))) T]$$

skal være 1:

$$f[0 - i]$$

$$g[x_]:= \text{Exp} [-\sigma^2 T/2 (x^2 + ix)]$$

$$g[0 - i]$$

$$\text{xi}[x_]:= \text{Exp}[ixrT] (f[x - i] - g[x - i]) / (i(1 + ix)x)$$

skal konvergere

$$\text{Limit}[\text{xi}[y], y \rightarrow 0]$$

$$\text{Plot} \left[\sqrt{(\text{Re}[\text{xi}[y]]^2 + \text{Im}[\text{xi}[y]]^2)}, \{y, -20, 20\} \right]$$

$$\text{CC}[\text{qt}_, \text{S}_] := (1/(2\pi)) \text{NIntegrate} [((\text{Exp}[-iv \text{Log}[\text{qt}/\text{S}])) \text{xi}[v]), \{v, -1000, 1000\}] * \text{S}$$

$$\text{CC}[K, S] + \text{BSC}[S, K, T, \sigma, r]$$

$$\text{Kou}[S_]:= \text{Re}[\text{CC}[K, S]] + \text{BSC}[S, K, T, \sigma, r]$$

$$\text{Plot}[\text{Kou}[k], \{k, 30, 200\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{S, \text{"Call"}\}]$$

$$\text{Kou}[K_]:= \text{Re}[\text{CC}[K, S]] + \text{BSC}[S, K, T, \sigma, r]$$

$$\text{Plot}[\text{Kou}[k], \{k, 30, 200\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{K, \text{"Call"}\}]$$

Implied vol

```
e = Table[i + 50, {i, 300}];
F[s_, S_] := Kou[S] - BSC[S, K, T, s, r]
ImpVol[F_, S_] := FindRoot[F[s, S], {s, 0.4}][[1, 2]]
ImpVol[F, 100]
e2 = Map[ImpVol[F, #] &, e];
dat = Transpose[Join[{e, e2}]];
IMP = Interpolation[dat];
Plot [IMP[s], {s, 52, 350}, AxesLabel -> {S, " $\sigma^{\text{imp}}$ "}]
```

I.1.3 R - PIDE for NIG

```
ntridiag <- function(x,nrow,ncol){
  rbind(rep(0,ncol),cbind(diag(x,ncol-1,nrow-1),rep(0,nrow-1)))
}
utridiag <- function(x,nrow,ncol){
  rbind(cbind(rep(0,nrow-1),diag(x,ncol-1,nrow-1)),rep(0,ncol))
}
###NIG
#Model parameter
K <- 100
T <- 1
r <- 0.01
S0 <- 100
sigmaSub <- 0.3
kappa <- 0.1
theta <- -(sigmaSub^2)/2
besse <- function(x) {besselK(x,1)}
```

```

CC <- sqrt(theta^2+sigmaSub^2/kappa)/(sigmaSub*2*pi*sqrt(kappa))
AA <- theta/(sigmaSub^2)
BB <- sqrt(theta^2+sigmaSub^2/kappa)/(sigmaSub^2)
nu <- function(x){ CC/abs(x)*exp(AA*x)*besselK(BB*abs(x),1) }

#PIDE aprox parameter
eps <- 0.1
N <- 481
M <- 73
A <- 10
Bø <- 4
Bn <- -4
delt <- T/(M-1)
delx <- 2*A/(N-1)
x <- seq(-A,A,delx)
y <- seq(Bn,Bø,delx)
Kø <- ceiling(Bø/delx-1/2)
Kn <- floor(Bn/delx+1/2)

#aprox model parameter
fkt <- function(u) {u*CC*(exp(AA*u)+exp(-AA*u))*(besselK(BB*u,1))}
sigma <- integrate(fkt,0,eps)$value; sigma

al <- function(x){(exp(x)-1)*nu(x)}
alpha <- integrate(al,Kn,-eps)[1]$value+integrate(al,eps,Kø)[1]$value
nuprox <- Kn:Kø
for(i in Kn:Kø){
  u <- (i+1/2)*delx
  n <- (i-1/2)*delx
  if( u >= -eps && u <= eps && n <= (-eps)){

```

```

    nuprox[i-Kn+1]<- integrate(nu,n,-eps)[1]$value
  }
  if( u >= -eps && u <= eps && n >= -eps){
    nuprox[i-Kn+1]<- 0
  }
  if(u >= eps && n >= -eps && n <= eps){
    nuprox[i-Kn+1]<- integrate(nu,eps,u)[1]$value
  }
  if((u >= eps && n >= eps) || (u <= -eps && n <= -eps)){
    nuprox[i-Kn+1]<- integrate(nu,n,u)[1]$value
  }
}
}
lambda <- sum(nuprox)
chrc <- sigma^2/2-r+alpha

#D matrix
if(chrc >= 0){
  D <- diag(-chrc/delx-sigma^2/delx^2-lambda,N+2*Kø,N+2*Kø)+utridiag(
    (sigma^2/2)/delx^2,N+2*Kø,N+2*Kø)+ntridiag((sigma^2/2)/delx^2+chrc/
    delx,N+2*Kø,N+2*Kø)
}else{
  D <- diag(chrc/delx-sigma^2/delx^2-lambda,N+2*Kø,N+2*Kø)+utridiag(
    (sigma^2/2)/delx^2-chrc/delx,N+2*Kø,N+2*Kø)+ntridiag(
    (sigma^2/2)/delx^2,N+2*Kø,N+2*Kø)
}

#J matrix
j <- Kø-Kn+1
J <- diag(0,N+2*Kø,N+2*Kø)
for(i in 1:((j-1)/2)){
  J[(i),] <- c(nuprox[((j-1)/2+2-i):j],rep(0,N + 2*Kø - (j-1)/2 - i))
}

```

```

}
for(i in 1:(N+2*Kø-j+1)){
J[(i+(j-1)/2),] <- c(rep(0,i-1),nuprox[1:j],rep(0,N+2*Kø-j-i+1))
}
for(i in 1:((j-1)/2)){
J[(i+(j-1)/2+(N+2*Kø-j)+1),] <- c(rep(0,N+2*Kø-j+i),nuprox[1:(j-i)])
}

#Løs PIDE
payoff <- function(y) { ((y-K)>=0)*(y-K)}
h <- function(y) {payoff(S0*exp(y))}
xx <- seq(-A+Bn,A+Bø,delx)
u <- h(xx)

Mat1 <- solve((diag(1,N+2*Kø,N+2*Kø)-delt*D))
Mat2 <- (diag(1,N+2*Kø,N+2*Kø)+delt*J)

for(i in 1:M){
u <- Mat1%*%Mat2%*%u
#randbetingelser
u[1:(length(xx)-N-Kø)] <- h(xx[1:(length(xx)-N-Kø)])
u[(length(xx)-Kø+1):length(xx)] <- h(xx[(length(xx)-Kø+1):length(xx)])
}

#lave funktion ud af approksimationer ved splines
call <- approxfun(S0*exp(xx), u)

#export til Mathematica
write.table(c(u,xx), "C:/Users/Mikael Oskar Engelun/Desktop/udregninger/

```

```
mydata.txt",row.names=FALSE, sep=",")
```

I.1.4 Mathematica - Fourier for NIG

parameter:

```
r = 0.01;
```

```
T = 1;
```

```
S = 100;
```

```
K = 100;
```

```
σ = 0.3;
```

```
κ = 0.1;
```

Martingale betingelse:

```
γ = -σ2/2
```

```
B[z_]:=1/2 ∫0∞ Exp[-1/2z(u + 1/u)] du
```

```
Clear[CC, A, BB]
```

```
CC = √(γ2 + σ2/κ) / (2πσ√κ)
```

```
A = γ/σ2
```

```
BB = √(γ2 + σ2/κ) / (σ2)
```

Fourier betingelse - skal være mindre end 0

```
1 + A - BB
```

Black-Scholes

```
BS[k_]:=CDF[NormalDistribution[0, 1], (1 / (σ√T))]
```

```
(Log[S/k] + (r + σ2/2) (T)) ] S - K Exp[-rT] CDF[NormalDistribution[0, 1], (1/(σT))
```

```
(Log[S/k] + (r + σ2/2) (T)) - σ√T]
```

Levy-mål:

```
nu[x_]:=CC/Abs[x]Exp[Ax]BesselK[1, BBAbs[x]]
```

Fourier betingelse - skal være endelig:

```
NIntegrate[Exp[1.01y] * nu[y], {y, 1, ∞}] + NIntegrate[Exp[1.01y] * nu[y], {y, -1, -∞}]
```

Karakteristiske funktion til udløbstidspunktet:

```

f[x_]:=Exp[(1/κ - 1/κ√(1 + x²σ²κ - 2iγxκ)) T]
g[x_]:=Exp[-σ²T/2(x² + ix)]
xi[x_]:=Exp[ixrT](f[x - i] - g[x - i])/(i(1 + ix)x)
Plot[√(Re[xi[x]]² + Im[xi[x]]²), {x, -20, 20}]
Clear[CC]
CC[qt_, S_]:= (1/(2π))NIntegrate[(Exp[-ivLog[qt/S]])xi[v], {v, -1000, 1000}] * S
CC[K, S] + BSC[S, K, T, σ, r]
VK[K_]:=Re[CC[K, S]] + BSC[S, K, T, σ, r]
Plot[VK[k], {k, 30, 200}, AxesLabel -> {K, "Call"}]
ak[S_]:=Re[CC[K, S]] + BSC[S, K, T, σ, r]

```

Import fra R

```

data = Import["C:/Users/Mikael Oskar Engelun/Desktop/udregninger/mydata.txt",
"Table"];
data = Delete[data, 1];
u = data[[1;;Length[data]/2]];
x = data[[1 + Length[data]/2;;Length[data]]];
u2 = Map[ak[S * Exp[#]]&, x];
newdat2 = Transpose[Join[{100 * Exp[x[[All, 1]]], u2[[All, 1]]}]];
newdat = Transpose[Join[{100 * Exp[x[[All, 1]]], u[[All, 1]]}]];
q2 = Interpolation[newdat2]
q = Interpolation[newdat]
Plot[{q[x], q2[x]}, {x, 50, 150},
PlotLegends -> Placed[SwatchLegend[{"PIDE", "Fourier"}, LegendLabel -> "Metode"]

```

```
, LegendMargins → 15], {Right, Bottom}],  
AxesLabel → {S, "Call"}]
```

I.1.5 R - Simulationskode

```
#####Siumlationer  
##Kou  
#Model parameter  
K <- 100  
T <- 5  
r <- 0.05  
mu <- 0.1  
S0 <- 100  
sigma <-0.2  
l <- 0.5  
p <- 0.3  
th1 <- 15  
th2 <- 10  
nu <- function(x){ l*(p*dexp(-x,th1)+(1-p)*dexp(x,th2)) }  
  
Nsim <- 100  
Nsteps <- 1000  
Ssim <- matrix(S0,ncol = Nsteps,nrow = Nsim)  
dt <- T/Nsteps  
  
for(i in 2:Nsteps){  
  is.jump <- rbinom(Nsim,1,l*dt)  
  Ssim[,i]<- Ssim[,i-1]*exp((mu- 1/2 * sigma^2)*dt +sigma*sqrt(dt)*  
    rnorm(Nsim))  
  for(j in 1:Nsim){
```



```

if(is.jump[j] == 1){
  sign <- rbinom(1,1,p)
  Z <- sign*rexp(1,th1)+(sign-1)*rexp(1,th2)
  Ssim[j,i]<- Ssim[j,i]*exp(Z)
}
}
}

plot((1:Nsteps)*dt,Ssim[1,],type= 'l',ylim =c(min(Ssim[1:10,]),
      max(Ssim[1:10,])))
for(i in 2:min(Nsim,10)){
  lines((1:Nsteps)*dt,Ssim[i,],col = i)
}

##NIG
#library(mgcv)
#Model parameter
K <- 100
T <- 1
r <- 0.1
S0 <- 100
sigmaSub <-0.3
kappa <- 0.1
thetaQ <- -(sigmaSub^2)/2 # til MC simulation for Call pris
thetaP <- 0.02

Nsim <- 10000
Nsteps <- 500
Ssim <- matrix(S0,ncol = Nsteps,nrow = Nsim)
dt <- T/Nsteps
for(i in 2:Nsteps){

```

```

delS <- rig(Nsim,mean = dt ,scale = dt^2/kappa )
delX <- sigmaSub*rnorm(Nsim)*sqrt(delS)+thetaP*delS
Ssim[,i]<- Ssim[,i-1]*exp(-sigmaSub^2/2*delS+delX)
}
plot((1:Nsteps)*dt,Ssim[1,],type= 'l',
      ylim =c(min(Ssim[1:min(Nsim,10),]),
              max(Ssim[1:min(Nsim,10),])))
for(i in 2:min(Nsim,10)){
lines((1:Nsteps)*dt,Ssim[i,],col = i)
}

MCpris <- sum(pmax(Ssim[,Nsteps]-K,0))/Nsim

##### HEDGE eksperiment
BlackScholesFormula <- function (spot,timetomat,strike,r, q=0,
      sigma, opttype=1, greekttype=1)
{

d1<-(log(spot/strike)+ ((r-q)+0.5*sigma^2)*timetomat)/(sigma*
      sqrt(timetomat))
d2<-d1-sigma*sqrt(timetomat)

if (opttype==1 && greekttype==1) result<-spot*exp(-q*timetomat)*
      pnorm(d1)-strike*exp(-r*timetomat)*pnorm(d2)

if (opttype==2 && greekttype==1) result<-spot*exp(-q*timetomat)*
      pnorm(d1)-strike*exp(-r*timetomat)*pnorm(d2)-spot*exp(-q*

```

```

    timetomat)+strike*exp(-r*timetomat)

if (opttype==1 && greektpe==2) result<-exp(-q*timetomat)*
    pnorm(d1)

if (opttype==2 && greektpe==2) result<-exp(-q*timetomat)*
    (pnorm(d1)-1)

if (greektpe==3) result<-exp(-q*timetomat)*dnorm(d1)/(spot*sigma*
    sqrt(timetomat))

if (greektpe==4) result<-exp(-q*timetomat)*spot*dnorm(d1)*
    sqrt(timetomat)

BlackScholesFormula<-result

}

## init ##### KOU - model

r <- 0.05
mu <- 0.1
S0 <- 100
sigma <-0.2
sigma.hedge <- 0.2
impvol <- 0.2
l <- 0.1 #Lav
#l <- 1   # Høj
p <- 0.3

```

```

th1 <- 15
th2 <- 10

capT<-1
strike<-100

Nhedge<- 500
Nsim<- 200

# HEDGE

###variable
Ssim <- matrix(c(S0), ncol=Nhedge+1, nrow=Nsim)

dt<-capT/Nhedge

# start værdi med impvol
initialoutlay <- BlackScholesFormula(S0,capT,strike, r,0,
    impvol,1,1)

Vpf<-rep(initialoutlay,length=Nsim)

# delta hedge
a<-BlackScholesFormula(Ssim[,1],capT,strike, r,0,sigma.hedge,1,2)
b<-Vpf-a*Ssim[,1]

#simulationer
for(i in 2:Nhedge){
is.jump <- rbinom(Nsim,1,1*dt)
Ssim[,i]<- Ssim[,i-1]*exp((mu- 1/2 * sigma^2)*dt +sigma*

```

```

sqrt(dt)*rnorm(Nsim))
for(j in 1:Nsim){
  if(is.jump[j] == 1){
    sign <- rbinom(1,1,p)
    Z <- sign*rexp(1,th1)+(sign-1)*rexp(1,th2)
    Ssim[j,i]<- Ssim[j,i]*exp(Z)
  }
}
Vpf<-a*Ssim[,i]+b*exp(dt*r)
a<- BlackScholesFormula(Ssim[,i],(capT-(i-1)*dt),strike, r,
0,sigma.hedge,1,2)
b<-(Vpf-a*Ssim[,i])
}
is.jump <- rbinom(Nsim,1,1*dt)
Ssim[,Nhedge+1]<- Ssim[,Nhedge]*exp((mu- 1/2 * sigma^2)*dt +sigma*
sqrt(dt)*rnorm(Nsim))
for(j in 1:Nsim){
  if(is.jump[j] == 1){
    sign <- rbinom(1,1,p)
    Z <- sign*rexp(1,th1)+(sign-1)*rexp(1,th2)
    Ssim[j,Nhedge+1]<- Ssim[j,Nhedge+1]*exp(Z)
  }
}

Vpf<-a*Ssim[,Nhedge+1]+b*exp(dt*r)
hedgeerror<-(Vpf-pmax(Ssim[,Nhedge+1]-strike,0))
optionpayoff<-pmax(Ssim[,Nhedge+1]-strike,0)
sd.hedge.error <- sd(hedgeerror)

```

```

#Grafer
plot(Ssim[,Nhedge+1],Vpf,col="blue",xlab="S(T)",
ylab="Værdi af hedge portefølje",ylim=c(-25,105),
xlim=c(50,200),main="Hedge eksperiment Kou")
text(50,100,paste("# Hegde tidspunkter = ",Nhedge),adj=0)
text(50,100-7,paste("# Simulationer = ", Nsim),adj=0)
text(50,100-7*2,paste("Gns hedge fejl = ", round(mean(hedgeerror),
digits = 4)), adj=0)
text(50,100-7*3,paste("Std = ", round(sd.hedge.error, digits = 4))
,adj=0)
legend("bottomright",
c("Simulationer","call payoff"),
fill=c("blue","black")
)
points(50:200,pmax(50:200 - strike,0),type='l',lwd=3)

```

```
#####slut på KOU
```

```
##### NIG
```

```
## init ##### NIG- model
```

```
r <- 0.05
```

```
S0 <- 100
```

```
sigma.hedge <- 0.1
```

```
impvol <- 0.2
```

```
S0 <- 100
```

```
sigmaSub <-0.3
```

```
kappa <- 0.1
```

```

thetaQ <- -(sigmaSub^2)/2
thetaP <- 0.02

capT<-1
strike<-100

Nhedge<- 300
Nsim<- 300

# HEDGE

###variable
Ssim <- matrix(c(S0), ncol=Nhedge+1, nrow=Nsim)

dt<-capT/Nhedge

# start værdi med impvol
initialoutlay <- BlackScholesFormula(S0,capT,strike, r,0,
    impvol,1,1)
#initialoutlay <- MCpris #startværdi med MCpris
Vpf<-rep(initialoutlay,length=Nsim)

# delta hedge
a<-BlackScholesFormula(Ssim[,1],capT,strike, r,0,sigma.hedge,1,2)
b<-Vpf-a*Ssim[,1]

#simulationer.
for(i in 2:Nhedge){

```

```

delS <- rig(Nsim,mean = dt ,scale = dt^2/kappa )
delX <- sigmaSub*rnorm(Nsim)*sqrt(delS)+thetaP*delS
Ssim[,i]<- Ssim[,i-1]*exp(-sigmaSub^2/2*delS+delX)
Vpf<-a*Ssim[,i]+b*exp(dt*r)
a<- BlackScholesFormula(Ssim[,i] ,(capT-(i-1)*dt),strike, r,0,
sigma.hedge,1,2)
b<-(Vpf-a*Ssim[,i])
}

delS <- rig(Nsim,mean = dt ,scale = dt^2/kappa )
delX <- sigmaSub*rnorm(Nsim)*sqrt(delS)+thetaP*delS
Ssim[,Nhedge+1]<- Ssim[,Nhedge]*exp(-sigmaSub^2/2*delS+delX)

Vpf<-a*Ssim[,Nhedge+1]+b*exp(dt*r)
hedgeerror<-(Vpf-pmax(Ssim[,Nhedge+1]-strike,0))
optionpayoff<-pmax(Ssim[,Nhedge+1]-strike,0)
std.hedge.error <- sd(hedgeerror)
mean.hedge.error <- mean(hedgeerror)

#graf

plot(Ssim[,Nhedge+1],Vpf,col="blue",
xlab="S(T)",ylab="Værdi af hedge portefølje",ylim=c(-20,105),
xlim=c(50,200),main="Hedge eksperiment NIG")
text(50,100,paste("# hegde tidspunkter =",Nhedge),adj=0)
text(50,100-7,paste("# Simulationer =", Nsim),adj=0)
text(50,100-7*2,paste("gns hedge fejl = ", round(mean(hedgeerror),
digits = 4)),adj=0)
text(50,100-7*3,paste("std = ", round(std.hedge.error, digits = 4)),
adj=0)
legend("bottomright",

```



```
c("Simulationer", "call payoff"),  
fill=c("blue", "black")  
)  
points(50:200, pmax(50:200 - strike, 0), type='l', lwd=3)
```