

"EN VURDERING AF CAPM OG FFM3 MED SÆRLIGT HENBLIK PÅ VIRKSOMHEDERS REALINVESTERINGER"

VEJLEDER
C. Rix-Nielsen

FORFATTERE:
A. P. Jacobi
53512
A. Koc
94025

AFLEVERINGSdato:
16/09/2019

PROGRAM:
MSc.FIR

EKSAMENSType:
Kandidatafhandling

ANSLAG:
193.000

ANTAL SIDER:
95



CBS

Executive Summary

It is often argued that companies should accept projects with positive net present value as it increases shareholder value. The net present value is typically calculated by discounting expected cash flows with a risk-adjusted cost of capital that reflects the project's systematic risk. In financial textbooks, usually the Capital Asset Pricing Model (CAPM) or the Fama-French 3-Factor Model (FFM3) is recommended to calculate the cost of equity, and studies show that they are the most widely used models in practice (Bruner et al, 1998), (Graham and Harvey, 2001) and (PWC, 2016).

The purpose of this thesis is to investigate whether it is useful for companies to use CAPM and FFM3 for investment decisions or whether the models are too imprecise. The analysis is based on US stocks returns and financial data from the Center for Research in Security Prices (CRSP), NYSE, AMEX and NASDAQ for the period 1963-2019.

The thesis concludes that estimates of cost of equity are extremely imprecise when based on historical data. For industries, standard errors of more than 2% per year are typical for both CAPM and FFM3. These large standard errors are the result of i) uncertainty about true factor risk premiums and ii) imprecise estimates of factor loadings. For companies and projects, uncertainty will only be greater. Based on these findings, the thesis argues that precision should not be the ultimate success criterion for companies' choice of decision method. Companies should not choose projects blindly, but neither should they write off the payback method or the more subjective fundamental analysis or forward-looking methods.

However, the decision-making method is of great importance for companies' investment policies, and on a par with the distribution policy, it should be relevant information for shareholders. It is hardly detrimental for the companies to state in the annual report whether they use CAPM based on few years of data or a completely different approach. In this way, the individual investor will be able to get an idea of the size of the cost of equity used by the company and decide whether he agrees with the methods used.

Indholdsfortegnelse

Executive Summary.....	2
1. Indledning.....	5
1.1. Problemformulering.....	6
1.2. Afgrænsning.....	6
1.3. Videnskabsteori og metode.....	7
1.4. Opgavens metodiske overvejelser.....	8
1.5. Metode og teknik.....	8
2. Introduktion til teorien.....	9
2.1. Beviset for CAPM: Markowitz' "Portfolio Selection".....	10
2.2. Beviset for CAPM: Nytteteorien kobling til porteføljeteorien.....	11
2.3. Beviset på CAPM: Sharpes ligevægt.....	13
2.4. Beviset for CAPM: Lintners vej til ligevægt.....	18
3. Modellernes popularitet blandt virksomheder.....	21
3.1. Den risikofrie rente.....	22
3.1.1. En til tider upræcis tommelfingerregel.....	23
3.1.2. Estimering af rentestrukturen for nul kupon-obligationer.....	23
3.2. Markedsrisikopræmien.....	25
3.2.1. Det historiske merafkast.....	25
3.2.2. Den surveybaserede opgørelse.....	30
3.2.3. Den implicitte markedsrisikopræmie.....	31
3.2.4. Realinvesteringer på tværs af landegrænser – behovet for en 'country risk premium'.....	33
3.3. Beta.....	35
3.3.1. Regressionsbeta.....	35
3.3.2. Bottom-up beta.....	37
3.3.3. Fundamentalanalyser.....	38
3.3.4. Konsekvensen af de mange estimationsmetoder af beta i praksis.....	41
4. Modeltest – Introduktion.....	42
4.1. Traditionelle modeltest af CAPM og FFM3.....	42
4.1.1. Andre anvendte teknikker i forbindelse med modeltest.....	44
4.2. Beslutningtagerens problem og out of sample forecast.....	45
4.3. Den samlede usikkerhed på afkastkravet.....	46
5. Analyse – Introduktion.....	48
5.1. De historiske risikopræmier.....	48
5.2. Faktorloadings for industrier.....	50

5.3.	Tidsvarierende faktorloadings for industrier	54
5.4.	Optimal estimering af CAPM- og FFM3-faktorloadings.....	63
5.4.1.	Modellernes evne 1 måned frem i tiden.....	64
5.4.2.	Modellernes evne flere år frem i tiden.....	70
5.4.3.	Robusthedsanalyse med Blume, Vasicek, Dimson og daglige afkastobservationer	75
5.5.	Afkastkravets størrelse.....	82
5.6.	Den samlede usikkerhed på afkastkravet	86
6.	Konklusion	94
	Litteraturliste	96
	Appendiks.....	101
	Appendiks 1 – R kode til output til tabel 5 (Historiske risikopræmier)	101
	Appendiks 2 – R kode til output til tabel 6 (Regressioner på industriniveau for fulde periode)	102
	Appendiks 3 – R kode til output til tabel 7 (Implicitte standardafvigelse).....	103
	Appendiks 4 – R kode til output til figur 12-14 (tidsvarierende faktorloadings).....	104
	Appendiks 5 – R kode til output til tabel 8-11 (Rullende regressioner).....	104
	Appendiks 6 – R kode til output til tabel 8-11 (Fuld-periode regressioner).....	106
	Appendiks 7 – R kode til output til tabel 12 (Blume)	108
	Appendiks 8 – R kode til output til tabel 13 (Daglige regressioner + Dimson)	108
	Appendiks 10 – R kode til output til tabel 15 (Den samlede usikkerhed på afkastkravet).....	111
	Appendiks 11 – Industrioversigt	112
	Appendiks 12 – Markedsoversigt.....	141

1. Indledning

Det fremføres ofte, at virksomheder bør acceptere projekter med positiv nutidsværdi, fordi det skaber værdi for ejerne. Nutidsværdien beregnes typisk ved at tilbagediskontere forventede betalingsstrømme med et risikojusteret afkastkrav, der afspejler projektets systematiske risiko. I finansielle lærebøger er det som regel Capital Asset Pricing Model (CAPM) eller Fama-French 3-Factor Model (FFM3), der anbefales til at modellere afkastkravet på egenkapitalen, og undersøgelser viser, at de er de mest anvendte modeller i praksis (Bruner et al, 1998), (Graham og Harvey, 2001) og (PWC, 2016). I den virkelige verden er modellerne dog langt fra uproblematisk, og usikkerhed om risikopræmier og faktorloadings gør dem upræcise.

Formålet med denne opgave er at undersøge, om det er meningsfuldt for virksomheder at anvende CAPM og FFM3 til at træffe beslutninger om realinvesteringer, eller om modellerne er for upræcise. Det vil blive gjort ved at analysere amerikanske kurs- og regnskabsdata fra Center for Research in Security Prices (CRSP), NYSE, AMEX og NASDAQ for perioden 1963-2019.

Resultatet af opgavens analyse er i overensstemmelse med Fama og French (1997). For industrier er standardfejlene på CAPM- og FFM3-afkastkravene typisk mere end 2% om året, og for virksomheder og projekter vil usikkerheden kun være større. På den baggrund argumenterer opgaven for, at præcision ikke bør være noget ultimativt succeskriterie for virksomheders valg af beslutningsmetode. De skal ikke vælge realinvesteringer i blinde, men de bør heller ikke afskrive hverken payback-metoden eller de mere eksotiske fundamentalanalyser og fremadskuende metoder.

Valget af beslutningsmetode har stor dog betydning for selskabernes realinvesteringspolitikker, og på lige fod med udlodningspolitikken *bør* det være relevant information for aktionærene. Det er næppe til skade for selskaberne at oplyse i årsrapporten, om de benytter CAPM baseret på få års data eller en helt anden fremgangsmåde. På den måde vil den enkelte investor selv kunne danne sig et indtryk af afkastkravets størrelsesorden, og om han kan stå inde for processen.

I det følgende afsnit præsenteres opgavens problemformulering og videnskabsteoretiske overvejelser. Herefter vil der blive gjort rede for, hvordan modellerne er kommet til verden, og hvordan de bliver anvendt i praksis. I opgavens anden del foretages den empiriske analyse.

1.1. Problemformulering

Vores speciale tager sigte på at besvare følgende problemformulering:

I hvilken grad er det meningsfuldt for virksomheder at anvende CAPM og FFM3 til at træffe beslutninger om realinvesteringer?

For at svare på problemformuleringen vil vi besvare følgende underspørgsmål:

1. Hvordan anvendes CAPM og FFM3 i praksis?
2. I hvilken grad kan man med historiske afkast- og regnskabsdata estimere CAPM- og FFM3-afkastkravet præcist?

1.2. Afgrænsning

Til fastlæggelse af egenkapitalomkostningen er der mange alternativer til CAPM og FFM3. Når denne opgave har valgt at fokusere på CAPM og FFM3, skyldes det to forhold. For det første rapporteres det ofte, at modellerne er de mest anvendte modeller blandt virksomheder, og det er derfor interessant at undersøge modellernes præcision. For det andet bygger mange af alternativerne på en eller flere af de samme risikofaktorer som CAPM og FFM3, og mange af de generelle udfordringer vil derfor være de samme.

I forhold til en afgrænsning af ”praksis” fokuserer opgaven på de estimationsmetoder, som man kan finde i finansielle lærebøger som Armitage’s (2005) ”The Cost of Capital – Intermediate Theory”, Brealey et al.’s (2017) ”Principle of Corporate Finance”, Damodarans (2014) ”Applied Corporate Finance”, og Petersen et al.’s (2017) ”Financial Statement Analysis. I opgaven vil ”virksomhedernes realinvesteringer” anvendes synonymt med ”virksomhedernes projekter”. Analysen tager desuden udgangspunkt i noterede selskaber, og opgavens konklusioner kan ikke overføres 1:1 til unoterede selskaber, hvor de periodiske oplysningsforpligtelser og ejerstrukturen er en anden.

1.3. Videnskabsteori og metode

I videnskabsteorien sondres der mellem vidensudviklingen i de anvendelsesorienterede videnskaber og i de grundvidenskabelige fag. I grundvidenskaber, som f.eks. økonomisk makroteori, er målet at øge vores viden om fænomener inden for et bestemt fagområde, mens det i de anvendelsesorienterede videnskaber, som f.eks. erhvervsøkonomien, er at løse praktiske problemer (Nielsen, 1990). I den økonomiske makroteori må ens arbejde vurderes i forhold til fagets metoderegler og *"(...) om resultaterne "passer" ind i det etablerede begrebs- og teoriapparat, samt om resultaterne har empirisk gyldighed(...)"* (Ibid, s. 23). Om noget optages som ny viden, afhænger i sidste ende af fagfælledommen.

I de anvendelsesorienterede videnskaber er det afgørende, om de mennesker, man forsøger at løse et problem for, finder løsningen praktisk anvendelig. Problemerne vil ofte være komplekse og kan sjældent idealiseres. Forskningen vil derfor i mindre grad være styret af metoderegler og etablerede begrebs- og teoriapparater, men i stedet tage udgangspunkt i problemets karakter. Løsninger vil som regel trække på viden fra flere fagdiscipliner: *"(...) til konstruktion af en moderne markedsføringsplan f.eks. indgår videnselementer fra sociologi (til fastlæggelse af markedssegmenter), psykologi (til udformning af markedskommunikation) og økonomi (til fastlæggelse af prispolitikken)"* (ibid, s. 24).

I forhold til teorierne om afkastkravet er det bemærkelsesværdigt, at de er skabt i nyere tid, men forsøger at løse et gammelt praktisk problem, nemlig hvordan risiko bør inddrages i formueforvaltningen. Handelsfolk har altid måttet tage stilling til risikospørgsmål, mens de i den økonomiske litteratur er blevet behandlet i en idealiseret verden i overensstemmelse med det økonomiske fagområdes metoderegler. Det er derfor ikke givet, at modellerne er praktisk anvendelige for virksomheder, da dette aldrig har været det suveræne succeskriterium.

Økonomen Milton Friedman sagde meget populært, at det vigtige ikke er, om en models antagelser er realistiske, hvis bare dens forudsigelser er korrekte. Og hvis forudsigelserne så ikke er korrekte, kan økonomen blot henvise det til, at *"(...) det ikke er teorien, der noget i vejen med, men at det blot er de forudsætninger, som forudsigelserne er opstillet under, der ikke har været opfyldt"* (Ibid, s. 21). Så er man helgarderet. Modeltest inden for samfundsvidenskaben risikerer i det hele taget at blive et utaknemmeligt arbejde. Om man så finder 'perfekt' empirisk belæg for en model, er det ikke sikkert, at modellens forudsigelser vil gælde i fremtiden. Menneskelig aktivitet er sjældent underlagt gennemskuelige naturlove, og nye teorier kan i sig selv påvirke vores handlemåde, jf. f.eks. Black Scholes-teoriens påvirkning af prisfastsættelsen af optioner (Rubinstein, 1994).

1.4. Opgavens metodiske overvejelser

Opgaven forsøger at finde en løsning på et praktisk problem – nemlig om virksomheder bør anvende CAPM og FFM3 til at træffe investeringsbeslutninger. Den opererer derfor inden for de anvendelsesorienterede videnskaber, og det er derfor afgørende, at vores løsning i sidste ende er praktisk anvendelig. I forhold til den metodiske tilgang tages der udgangspunkt i det neopositivistisk paradigme, fordi det antages, at virkeligheden er objektiv, men at vi aldrig vil kunne afdække den fuldstændigt. Ontologien er dermed begrænset realistisk. Det betyder, at vi må være bevidste om, at vores subjektive holdninger kan påvirke analyserne og være kritiske over for objektiviteten i vores resultater, da objektivitet er idealet. Epistemologien er dermed modificeret objektiv. Da paradigmet antager, at vi som mennesker er påvirket af vores følelser og holdninger har vi set det som vigtigt at analysere, hvordan investeringsbeslutninger ikke altid er styret af streng logik.

1.5. Metode og teknik

I opgaven gøres der brug af kvantitative data til at behandle problemstillingen. Der er i opgaven både indsamlet og genereret data på egen hånd. Den indsamlede data er aktie- og obligationskurser, videnskabelige artikler og økonomiske rapporter. Derudover er der genereret data om afkastkravet ved hjælp af regressionsanalyser. Datagrundlaget samt modeltestene vil blive udførligt beskrevet i opgavens anden del.

2. Introduktion til teorien

Ifølge CAPM er afkastkravet på en egenkapitalinvestering i givet ved det forventede afkast af i :

$$E(R_i) = R_f + \beta_i[E(R_m) - R_f], \quad (1)$$

Hvor R_f er den risikofrie rente, $E(R_m)$ er det forventede afkast på markedsporteføljen, mens β_i angiver hældningskoefficienten i regressionen:

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i[R_m - R_f] + e_i, \quad (2)$$

Siden slutningen af 1960'erne er modellen blevet klandret for ikke at forklare realiserede afkast tilfredsstillende. F.eks. rapporterer Pratt (1967), at amerikanske højrisiko-aktier i perioden 1926-1960 ikke opnåede det højere afkast, som teorien forventer, mens Black et al (1972) finder, at porteføljer med lav (høj) beta opnåede højere (lavere) afkast end forventet. I stedet finder de, at de realiserede afkast er bedre i overensstemmelse med en to-faktor model, hvor faktorerne er uafhængige af hinanden (Zero-beta CAPM).

Varianter af Mertons (1973) Intertemporal Capital Asset Pricing Model (ICAMP), Ross' (1976) Arbitrage Pricing Theory (APT) og Rubinsteins (1976), Lucas' (1978) og Breedens (1979) Consumption-based CAPM (CCAPM) har tilsvarende vist sig bedre til at forklare realiserede afkast (Chen et al, 1986). Fama og French (1993) foreslog med FFM3, at det forventede afkast afhænger af β_i og samvariationen med to porteføljer, der afspejler yderligere risikofaktorer:

$$E(R_i) - R_f = \beta_i[E(R_m) - R_f] + s_i E(SMB) + h_i E(HML) \quad (3)$$

Hvor SMB (small minus big) er merafkastet på en portefølje af små aktier (målt på markedsværdien af egenkapitalen) ift. en portefølje af store aktier, og HML (high minus low) er merafkastet på en portefølje af aktier med høje BE/ME (ratioen mellem den bogførte værdi af egenkapitalen og markedsværdien af egenkapitalen) ift. en portefølje af aktier med lave BE/ME, mens β_i , s_i og h_i er hældningskoefficienterne i regressionen:

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i[R_m - R_f] + s_i SMB + h_i HML + e_i \quad (4)$$

Efter Huberman og Kandel (1987) betyder størrelsen noget, som ikke opfanges af samvariationen med markedsporteføljen: Mindre aktiver har generelt klarer sig bedre end større aktiver. Chan og Chen (1991) viser, at BE/ME fungerer som en proxy for relativ distress, som ikke opfanges af samvariationen med markedsporteføljen, men som har betydning for investorerne prisfastsættelse.

CAPMs omfattende anvendelse skal derfor muligvis ses i lyset af, at den er nem at forstå og anvende, mens dens antagelser næppe er mere tvivlsomme end så mange andre ligevægtsmodeller (Parum et al., 2016). Med udgangspunkt i Markowitz (1952) kan man få klarhed over modellen ved at bevæge sig frem mod Sharpe (1964) og Lintner (1965)

2.1 Beviset for CAPM: Markowitz' "Portfolio Selection"

I 1952 fremsætter Markowitz et beslutningskriterium til aktivallokering, der skal vise sig at blive meget populær. På det tidspunkt er der særligt to tanker om porteføljevalg, der er udbredt i den finansielle litteratur: 1) Man bør maksimere det tilbagediskonterede forventede afkast. 2) På grund af de store tals lov vil man opnå næsten fuld afdækning, når man spreder sin formue (Williams, 1938). Markowitz anfægter begge tanker. For det første er der ingen teorier for ligevægtspriser, og de tilbagediskonterede afkast er derfor aldrig ens. For at maksimere afkastet bør man derfor placere hele sin formue i et enkelt aktiv, og det strider mod sund fornuft såvel som den observerede adfærd blandt markedsdeltagerne. For det andet er der heller ingen grund til at tro, at spredning kan føre til næsten fuld afdækning: *"This presumption, that the law of large numbers applies to a portfolio of securities, cannot be accepted. The returns from securities are too intercorrelated. Diversification cannot eliminate all variance."* (Markowitz, 1952, s. 79).

Markowitz foreslår i stedet en anden vej, der tager hensyn til samvariationen mellem aktiverne. Han viser for henholdsvis 3 og 4 aktiver, hvordan man vha. elementær statistik kan beregne forventningen til forskellige porteføljesammensætningers afkast og standardafvigelser. Det kræver bare, at man på forhånd har dannet sig forventninger til enkeltaktivernes indbyrdes korrelationer, deres varians og afkast. Og det tager Markowitz for givet. Han gør dog kort rede for, hvordan det kan finde sted: *"These procedures, I believe, should combine statistical techniques and the judgment of practical men. My feeling is that the statistical computations should be used to arrive at tentative set of μ_i and σ_{ij} . Judgment should then be used in increasing or decreasing some these μ_i and σ_{ij} on the basis of factors or nuances not taken into account by formal computations."* (Markowitz, 1952, s. 91). Givet forventningerne, vil man vha. samme statistik kunne beregne afkastet og standardafvigelsen af porteføljer sammensat ud fra N aktiver. I et standardafvigelse-afkast-diagram får man følgende:

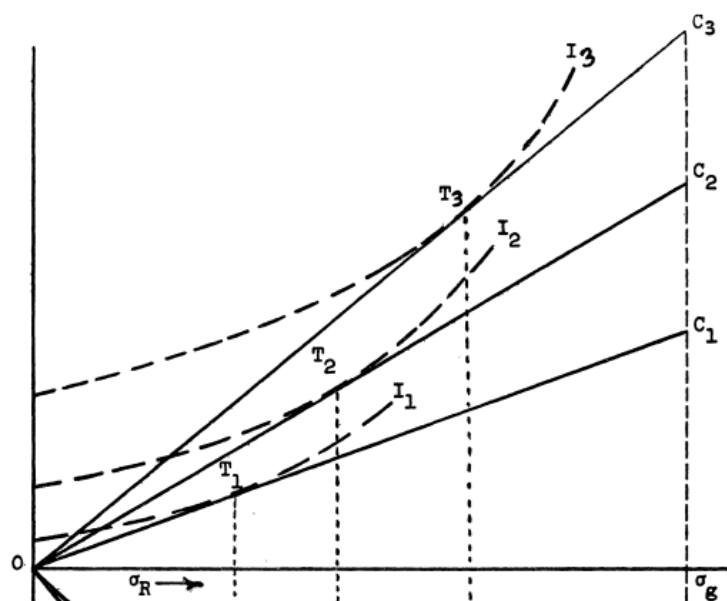


Figur 1: Den efficiente rand
Kilde: Markowitz (1952)

Heraf fremgår, hvad Markowitz døber den 'efficiente rand'. Den angiver porteføljerne med det højeste forventede afkast for en given varians – eller den laveste varians for et givet afkast. Det er på den efficiente rand, investor bør placere sig. Markowitz konkluderer, at et sådant beslutningskriterium synes at harmonere bedre med sund fornuft og den adfærd, man allerede kan observere blandt markedsdeltagere. Diversificering er godt, men særligt når korrelationen mellem aktiverne er lav. Og jo højere variansen er, jo mere afkast vil man kræve i kompensation. Markowitz foreslår, at en investor vil kunne udvælge et punkt på den efficiente rand og derefter investere i porteføljen, der sikrer det.

2.2. Beviset for CAPM: Nytteteorien kobling til porteføljeteorien

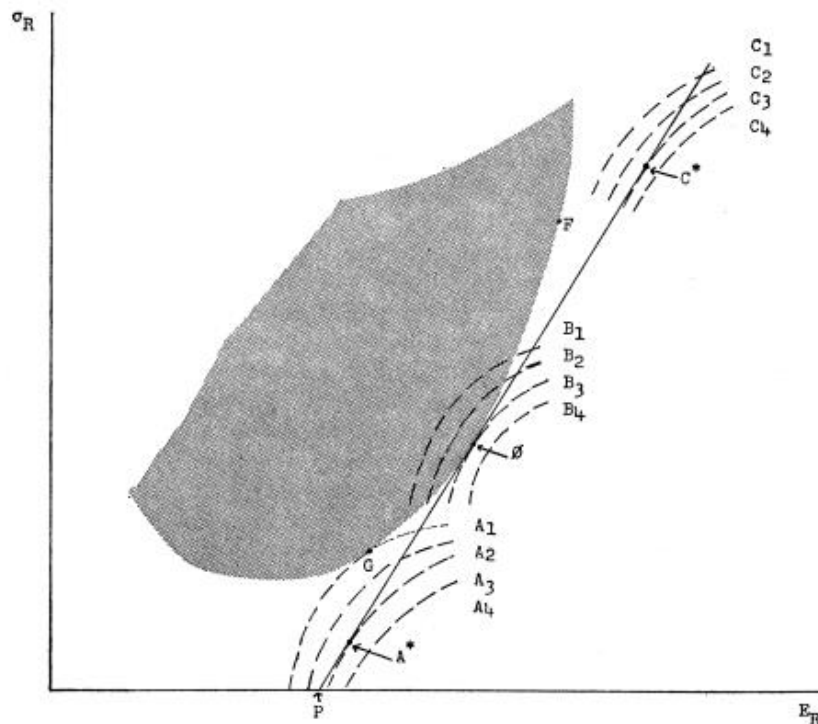
I 1950'erne udgives en række artikler, der forbinder nytteteorien til Markowitz' arbejde ved at antage, at nytten er bestemmende for al adfærd og kun afhænger af forventet afkast og varians. I princippet kan man derfor beregne, hvordan den enkelte investor vil bære sig ad. Det kræver bare, at man kender hans eksakte nytteafvejning mellem afkast og varians. Og det gør man generelt ikke. I stedet kan man indskrænke det optimale porteføljevalg ved at sige noget generelt om nytteafvejningen. For hvis nyttefunktionen er transitiv, fuldstændig og kontinuerlig (opfylder Von Neumann-Morgenstern-sætningerne) og desuden er kvadratisk og konkav, så vil isonyttekurverne altid bøje indad i et afkast-standardafvigelse-diagram. Dette er bl.a. illustreret i J. Tobin's artikel "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk" I 1958, hvor han forsøger at forklare det inverse forhold mellem pengeefterspørgslen og renteniveauet:



Figur 2: Nytteteoriens kobling til afkast og varians
Kilde: Tobin (1958)

De tre isonyttekurver, I_1 - I_3 , angiver hver en fast mængde nytte. Jo mere 'nordvest', man kommer, jo højere nytte. For at blive på en isonyttekurve skal højere standardafvigelse kompenseres med højere forventet afkast. Men kompensationen sker ikke proportionalt. Jo mere standardafvigelse, man allerede er udsat for, jo mere skal der til, før man udsætter sig for yderligere. Af grafen fremgår desuden linjerne OC_1 - OC_3 . De angiver de mulige porteføljer, der kan dannes, når hele eller dele af formuen placeres i et rentebærende instrument. Er renteniveauet f.eks. C_3 , opnår investor den højeste nytte ved at placere sig i punktet T_3 . Her tangerer hans isonyttekurve linjen OC_3 . Alle andre punkter på OC_3 er forbundet med lavereliggende isonyttekurver og er derfor suboptimale for investoren.

Har man nu i stedet mulighed for at vægte formuen i et risikofrit aktiv og i Markowitz' efficiente rand, opnår investor den højeste nytte ved at placere sig et sted på linjen, der udspringer fra det risikofrie aktiv og tangerer den efficiente rand i punktet $\emptyset$:



Figur 3: Nytteteoriens kobling til den efficiente rand
Kilde: Sharpe (1964)

Her er der blot byttet rundt på akserne ift. Tobin. Jo mere 'sydøst', man kommer, jo højere nytte. Linjen bliver i folkemunde kendt som markedskapitallinjen. Den enkelte investors nyttefunktion bliver nu kun afgørende for, hvor på markedskapitallinjen vedkommende ender. F.eks. har person A nyttekurverne A1-A4, mens person C har nyttekurverne C1-C4. Da markedskapitallinjen tangerer kurven A2 i punktet A*, bør A vægte en del af sin formue i den efficiente portefølje Ø og en del i det risikofrie aktiv. Person C vil foretrække at belåne Ø, mens B vil placere hele sin formue i Ø.

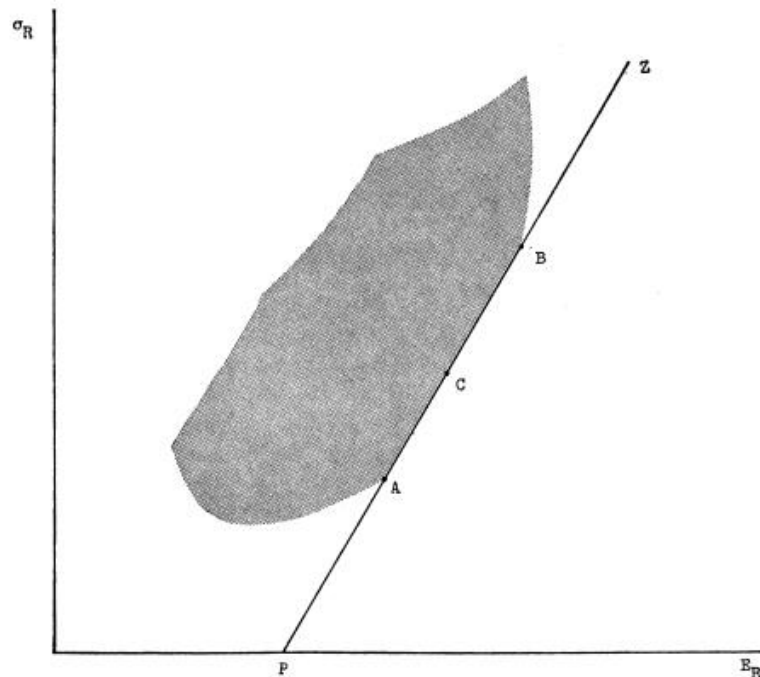
2.3. Beviset på CAPM: Sharpes ligevægt

I 1964 udgiver W. Sharpe artiklen "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under conditions of Risk". På dette tidspunkt er der klare idéer om mekanismerne bag ligevægtsdannelsen på rentemarkedet. Realrenten er f.eks. i ligevægt, når opsparingsvilligheden er lig statens finansieringsbehov. Derimod er der ingen ligevægtsteori for risikobehæftede aktiver. Sharpe beskriver, hvordan det som regel blot antages, at der er en generel risikopræmie, som enkeltaktiverne justerer sig efter: "(...) somehow a market risk-premium is also determined, with the prices of assets adjusting accordingly to account for differences in their risk." (Sharpe, 1964, s. 425). Men uden en konkret opskrift på, hvordan og hvor meget et enkeltaktiv skal justere sig, aner man ikke, om det er i ligevægt eller ej. Det er det problem, som Sharpe forsøger at løse.

Udgangspunktet for Sharpes analyse består af det forudgående arbejde af Markowitz samt den efterfølgende kobling til nytteteorien. Markowitz' generelle matematiske redegørelse for den efficiente rand er udkommet i 1958, men vel at mærke stadig under antagelse af, at forventningerne til aktiverne er kendt på forhånd. Porteføjteoriens hidtidige anbefalinger er derfor følgende: Først dannes den efficiente rand. Dernæst tegnes markedskapitallinjen som en linje, der går fra et risikofrit aktiv og tangerer den efficiente rand. Ved at placere sig på linjen nyttemaksimeres de to-parametriske, konkave nyttefunktioner.

Sharpe udvider nu dette grundlag med to antagelser. For det første: Der eksisterer én fælles rente, som alle kan låne og udlåne til. For det andet: Alle markedsdeltagere har homogene forventninger til aktivernes forventede afkast, varianser og indbyrdes korrelationer. De kommer derfor altid frem til samme efficiente rand. Det kan synes groft, men Sharpe forklarer, at der er tale om forudsætninger, der muligvis er urealistiske, men at det ikke er det rette succeskriterium, foruden at forudsætningerne ligger til grund for meget andet finansiel ligevægtsteori: *"Needless to say, these are highly restrictive and undoubtedly unrealistic assumptions. However, since the proper test of a theory is not the realism of its assumptions but the acceptability of its implications, and since these assumptions imply equilibrium conditions which form a major part of classical financial doctrine, it is far from clear that this formulation should be rejected(...)"* (Sharpe, 1964, s. 434).

Forudsætningerne medfører en klar vej til markedsligevægt. For når det i udgangspunktet er porteføljen $\emptyset$ (figur 3), som markedskapitallinjen tangerer, så vil efterspørgslen på aktiver, der indgår i $\emptyset$, stige. Det vil få deres kurs til at stige, så deres forventede afkast falder. Porteføljen $\emptyset$ vil derfor rykke mere mod venstre i standardafvigelse-afkast-diagrammet. Samtidigt vil aktiver, der ikke indgår i $\emptyset$, falde i kurs, fordi der ikke er efterspørgsel på dem. Det vil få deres forventede afkast til at stige, og de vil derfor blive mere attraktive. Den proces vil så fortsætte, indtil alle aktiver har en kurs, der gør, at de indgår i en kombination, der ligger på markedskapitallinjen:



Figur 4: Markedskapitallinjen
Kilde: Sharpe (1964)

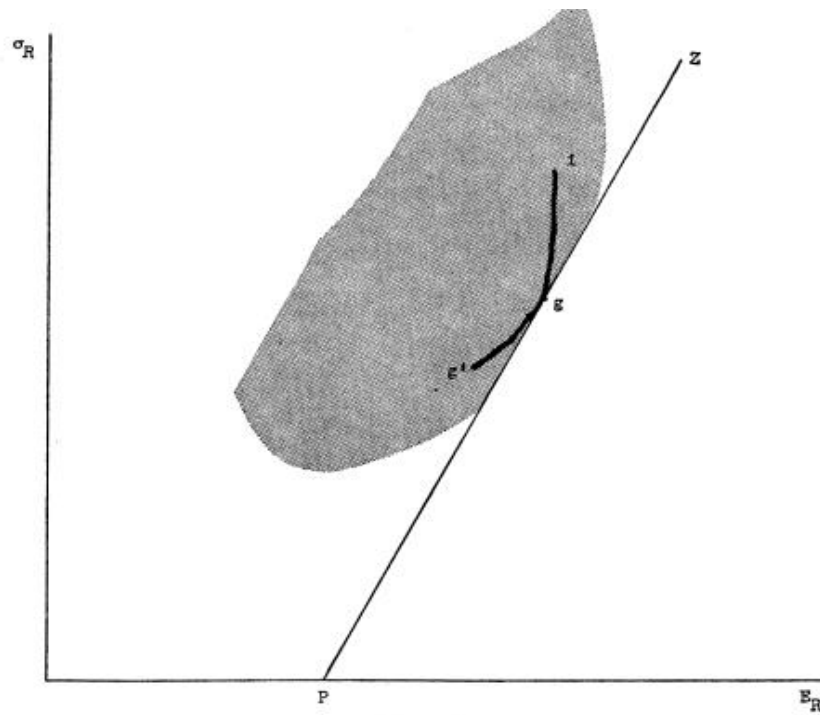
Det betyder så samtidigt, at det ikke er nødvendigt for ligevægten, at alle holder den samme portefølje. F.eks. ligger både portefølje A, B og C på markedskapitallinjen – men de er til gengæld perfekt korrelerede. I realiteten er det derfor en samlet portefølje, som ligevægtspriserne bliver udledt fra.

Når alle aktiver indgår i en kombination på markedskapitallinjen, medfører det en konsistent lineær sammenhæng mellem aktivers forventede afkast og den del af deres risiko, som Sharpe kalder ”systematisk”. Det viser han ved at tage udgangspunkt i et enkelt aktiv, der indgår i en kombination på markedskapitallinjen. Aktivet benævnes ”i”, kombinationen ”g” og formueandelen i aktivet ” α ”. Standardafvigelsen på en portefølje af i og g er:

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{Ri}^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_{Rg}^2 + 2r_{ig}\alpha(1 - \alpha)\sigma_{Ri}\sigma_{Rg}}$$

Hvor r_{ig} angiver korrelationen mellem i og g.

I ligevægt tangerer porteføljen af i og g markedskapitallinjen, mens i kun bliver holdt indirekte gennem dets bestanddel i g. Derfor må α være lig 0 i ligevægt:



Figur 5: Sammenhængen mellem et enkeltaktiv og en kombination på markedskapitallinjen
Kilde: Sharpe (1964)

Desuden vil σ_p kunne differentieres mht. α for $\alpha = 0$:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -\frac{1}{\sigma}(\sigma_{Rg}^2 - r_{ig}\sigma_{Ri}\sigma_{Rg}) = -(\sigma_{Rg} - r_{ig}\sigma_{Ri})$$

Mens det forventede afkast af porteføljen, E_p , ligeledes vil kunne differentieres mht. α :

$$E_p = \alpha E_{Ri} + (1 - \alpha)E_{Rg}$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = -(E_{Rg} - E_{Ri})$$

I ligevægt har vi:

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{(\sigma_{Rg} - r_{ig}\sigma_{Ri})}{(E_{Rg} - E_{Ri})}$$

Derudover ved vi, at markedskapitallinjen er en ret linje, som kan beskrives ved:

$$\sigma = s(E_r - R_f)$$

Og når g er placeret på markedskapitallinjen, mens markedskapitallinjen skærer X-aksen i det risikofrie aktive, kan hældningskoefficienten beregnes ved:

$$\frac{\sigma_g - 0}{E_{Rg} - R_f}$$

I ligevægt vil hældningen på porteføljen af i og g være identisk med hældningen på markedskapitallinjen:

$$\frac{(\sigma_{Rg} - r_{ig}\sigma_{Ri})}{(E_{Rg} - E_{Ri})} = \frac{\sigma_g}{E_{Rg} - R_f}$$

Som igen kan omskrives til:

$$E_{Ri} = R_f + \frac{r_{ig}\sigma_{Ri}}{\sigma_{Rg}}(E_{Rg} - R_f)$$

Og

$$\frac{E_{Ri} - R_f}{\frac{r_{ig}\sigma_{Ri}}{\sigma_{Rg}}} = (E_{Rg} - R_f)$$

Dette er Sharpes udtryk, der beskriver ligevægtsforholdet mellem et aktivs forventede afkast og dets samvariation med en portefølje på markedskapitallinjen. Forholdet $\frac{r_{ig}\sigma_{Ri}}{\sigma_{Rg}}$ betegner Sharpe ” β_i ”, som et mål for den systematiske risiko. I ligevægt vil forholdet mellem det forventede merafkast og β_i være ens for alle aktiver. Jo større β_i – og dermed jo højere grad af samvariation – desto større bliver det forventede merafkast. Sharpe beskriver, at samvariationen kan skyldes ”(...) *common dependence on the over-all level of economic activity. If so, diversification enables the investor to escape all but the risk resulting from swings in economic activity...*” (Ibid, s. 441). I ligevægt er det derfor kun den systematiske risiko, der betyder noget for prisdannelsen. Den del af risikoen, der kan bortspredes, er uden betydning. Sharpe konkluderer, at et sådan resultat synes at være i fin overensstemmelse med praksis: ”*It is common practice for investment counselors to accept a lower expected return from defensive securities (those which respond little to changes in the economy) than they require from aggressive securities (which exhibit significant response)*” (Ibid, s. 442).

2.4. Beviset for CAPM: Lintners vej til ligevægt

John Lintner kommer uafhængigt af Sharpe frem til, hvad der senere bliver anerkendt som samme ligevægtsmodel. Lintners fremgangsmåde er mere matematisk, og han starter med at udvide antagelsesgrundlaget. Det er ikke nok, at markedsdeltagere har homogene forventninger – de skal kun tænke afkast én periode frem, mens markederne skal være friktionsløse uden transaktionsomkostninger og skatter.

Når man har mulighed for at vægte et aktiv negativt (shorte), og det antages, at beløbet, der anvendes til at shorte altid placeres i det risikofrie aktiv, kan det forventede afkast af enhver position skrives som:

$$\alpha_i E_{ri} = \alpha_i (E_{ri} - R_f) + |\alpha_i| R_f$$

Mens afkastet af en portefølje sammensat af N aktiver, hvor man har haft mulighed for at shorte, kan skrives som:

$$E_{rp} = \sum_{i=1}^N [\alpha_i (E_{ri} - R_f) + |\alpha_i| R_f] = R_f + \sum_{i=1}^N \alpha_i (E_{ri} - R_f)$$

Hvor $\sum_{i=1}^N |\alpha_i| R_f = R_f$

Når $(E_{ri} - R_f)$ skrives som $\bar{E}_{ri}$, kan afkastet og variansen skrives som:

$$E_{rp} = R_f + \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{E}_{ri}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \text{Cov}_{ij}$$

Sharpe-ratio af en portefølje vil kunne skrives som:

$$\theta_p = \frac{E_{rp} - R_f}{\sigma_p} = \frac{\bar{E}_{rp}}{\sigma_p} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{E}_{ri}}{\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \text{Cov}_{ij}}$$

For den enkelte investor er den optimale portefølje den, som maksimerer θ_p under hensyn til

$$\sum_{i=1}^N |\alpha_i| = 1$$

En ændring i α_i fører til en ændring i θ_p på:

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial \alpha_i} = (\sigma_p)^{-1} \left[\bar{E}_{ri} - \lambda \left(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} \right) \right]$$

Hvor

$$\lambda = \frac{\bar{E}_{rp}}{\sigma_p^2}$$

For at maksimere θ_p må de enkelte vægte opfylde $\frac{\partial \theta_p}{\partial \alpha_i} = 0$ samtidigt. For N aktiver fører det til ligningssystemet

$$z_1 \sigma_1^2 + z_2 \text{Cov}_{12} + z_3 \text{Cov}_{13} + \dots + z_N \text{Cov}_{1N} = \bar{E}_{r1}$$

$$z_2 \text{Cov}_{12} + z_2 \sigma_2^2 + z_3 \text{Cov}_{23} + \dots + z_N \text{Cov}_{2N} = \bar{E}_{r2}$$

$$z_3 \text{Cov}_{13} + z_2 \text{Cov}_{23} + z_3 \sigma_3^2 + \dots + z_N \text{Cov}_{3N} = \bar{E}_{r3}$$

$$z_N \text{Cov}_{1N} + z_2 \text{Cov}_{2N} + z_3 \text{Cov}_{3N} + \dots + z_N \sigma_N^2 = \bar{E}_{rN}$$

Hvor $z_i = \lambda \alpha_i$

Et aktiv med et højere merafkast vil alt andet lige have en højere vægtning, mens højere kovarians alt andet lige leder til lavere vægtning.

Kovariansmatricen har den unikke løsning:

$$z_i^0 = \sum_{j=1}^N \text{Cov}^{ij} \bar{E}_{rj}$$

Hvor Cov^{ij} angiver det ij 'te element af den inverse kovariansmatrix.

Vægtene, der maksimerer θ_p under hensyn til $\sum_{i=1}^N |\alpha_i| = 1$, vil kunne skrives som:

$$\alpha_i^0 = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda^0} \right) - \sum_{j \neq i}^N \alpha_j^0 \text{Cov}_{ij} / \text{Cov}_{ii}$$

Hvor $\lambda^0 = \frac{\bar{E}_{rp}}{\sigma_p^2}$ i maksimum

Negativ λ_i er ikke ensbetydende med at gå kort i α_i . Er E_{ri} tilstrækkeligt negativt korreleret med andre aktiver, kan en positiv position i α_i være en fordel.

Med homogene forventninger vil alle investorer holde den samme portefølje. Vi får derfor, at

$$\lambda = \frac{\bar{E}_{rp}}{\sigma_p^2} = \frac{E_{rm} - R_f}{\sigma_m^2}$$

Når θ_p differentieres mht. α_i , fås:

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial \alpha_i} = (\sigma_p)^{-1} \left[\bar{E}_{ri} - \left(\frac{E_{rm} - R_f}{\sigma_m^2} \right) \left(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} \right) \right]$$

For maksimum af θ_p vil den enkelte vægt skulle opfylde $\frac{\partial \theta_p}{\partial \alpha_i} = 0$:

$$(\sigma_p)^{-1} \left[\bar{E}_{ri} - \left(\frac{E_{rm} - R_f}{\sigma_m^2} \right) \left(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} \right) \right] = 0$$

Hvor blot udtrykket i [] skal give 0, før ligningen er opfyldt. Derfor fås:

$$\left[\bar{E}_{ri} - \left(\frac{E_{rm} - R_f}{\sigma_m^2} \right) \left(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} \right) \right] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{E}_{ri} = \left(\frac{E_{rm} - R_f}{\sigma_m^2} \right) \left(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} \right)$$

Hvor $(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij})$ vil kunne skrives som:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} \right) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \text{Cov}_{ij} = E \left[\sum_{j=1}^N \alpha_j [R_j - E(R_j)] [R_i - E(R_i)] \right] \\ &= E[(r_m - E_{rm})(r_i - E_{ri})] = \text{Cov}_{im} \end{aligned}$$

Derfor fås:

$$\bar{E}_{ri} = \left(\frac{E_{rm} - R_f}{\sigma_m^2} \right) Cov_{im}$$

$\Leftrightarrow$

$$(E_{ri} - R_f) = \left(\frac{Cov_{im}}{\sigma_{\bar{r}_m}^2} \right) (E_{rm} - R_f) = \left(\frac{r_{im} \sigma_{\bar{r}_i}}{\sigma_{\bar{r}_m}} \right) (E_{rm} - R_f)$$

$\Leftrightarrow$

$$(E_{ri} - R_f) / \left(\frac{r_{im} \sigma_{\bar{r}_i}}{\sigma_{\bar{r}_m}} \right) = (E_{rm} - R_f)$$

og

$$E_{ri} = R_f + \left(\frac{r_{im} \sigma_{\bar{r}_i}}{\sigma_{\bar{r}_m}} \right) (E_{rm} - R_f) = R_f + \beta_i (E_{rm} - R_f)$$

Som nøjagtig svarer til Sharpes ligevægt – bortset fra at Lintner taler om én markedsportefølje i stedet for perfekt-korrelerede porteføljer på markedskapitalinjen. Sharpe-Lintner-modellen udgør CAPM som udtrykt i (1) og (2). For den enkelte investor kræver det blot et mål for β_i at udregne, hvordan den generelle risikopræmie på markedet bør differentieres mellem aktiver.

3. Modellernes popularitet blandt virksomheder

Sharpe kaldte ligevægtsantagelserne *"highly restrictive and undoubtedly unrealistic"* (Sharpe, 1964, s. 434), men forklarede, at de udgør ligevægtsbetingelser for andre finansielle doktriner, og at succeskriteriet ikke er, om antagelserne er realistiske, men om teoriens implikationer kan accepteres. Og accepteres måtte de jo kunne. For Markowitz, Sharpe og Lintner kunne alle konstatere, at porteføljeforvaltere udmærket var klar over, at nogle aktier er mere følsomme over for den generelle økonomiske aktivitet, og at det bør påvirke deres prisfastsættelse. På den baggrund er det næppe en særlig kontroversiel påstand, at teoriens oprindelige formål ikke var at være praktisk anvendelig for virksomheders realinvesteringer. I det hele taget har virksomheder vel næppe noget naturligt incitament til at anvende teorien, da kun er investorerne, der har gavn af diversifikationsfordelen. Det er i virkeligheden ganske uklart, hvad der menes, når Bruner et al. (1998), Graham & Harvey (2001), og PWC (2016) rapporterer, at CAPM og FFM3 er de mest anvendte modeller blandt virksomheder. For i den finansielle litteratur er der mange varianter af CAPM, som alle hævder, at deres måde at

estimere modellen på er den rigtige. De forskellige tilgange kommer ofte frem til meget forskellige resultater, og det bliver derfor et temmelig løst udsagn, ”at man anvender CAPM”.

I de følgende afsnit vil vi illustrere, hvor forskellige CAPM-afkastkrav man kan komme frem til, selv når de estimeres i overensstemmelse med klassiske værker som Armitage’s (2005) ”The Cost of Capital – Intermediate Theory”, Brealey et al.’s (2017) ”Principle of Corporate Finance”, Damodarans (2014) ”Applied Corporate Finance”, og Petersen et al.’s (2017) ”Financial Statement Analysis. Modellens komponenter– det risikofrie aktiv, beta og markedsrisikopræmien – vil blive behandlet hver for sig.

3.1. Den risikofrie rente

Det risikofrie aktiv er teoretisk set et aktiv, hvor det forventede afkast altid er lig det realiserede afkast. For at leve op til det i praksis er der normalt to forhold, der skal være opfyldt: Der må hverken være konkursrisiko eller geninvesteringsrisiko (Damodaran, 2014). Det første forhold udelukker som minimum aktier og erhvervsobligationer, men i teorien også realkreditobligationer. I princippet er det kun statsobligationer, der potentielt kan være uden konkursrisiko. For stater har ansvaret for pengeskabelsen og vil derfor kunne printe penge for at sikre udbetalinger. Det andet forhold indebærer, at et forventet afkast for en given tidshorisont altid bør matches af en statsobligation med tilsvarende løbetid. Det risikofrie afkast for en 20-årig tidshorisont kan hverken bestemmes af afkastet på en 10-årig nulkupon-obligation eller en 20-årig kupon-obligation. For der skal i begge situationer geninvesteres til renter, der er ukendte i dag.

I praksis lempes som regel det andet forhold om ”periode matching”, da det kan være umuligt at finde nulkupon-statsobligationer, der svarer til løbetiderne for projekters pengestrømme. I stedet vil man ofte tage udgangspunkt i en enkelt statsobligation, hvor varigheden matcher varigheden på projektets betalingsstrømme. På den måde håber man, at afkastkravet er eksponeret over for samme renterisiko som pengestrømmene. Er nulkupon-rentestrukturen stejl, kan det dog være en fordel at operere med flere risikofrie renter (Ibid). For så kan der være betydelig forskel på værdien af at modtage betalingsstrømme på kort og langt sigt. Findes der ikke nulkupon-obligationer, vil syntetiske nulkuponer kunne dannes på baggrund af bootstrapping af kuponobligationerne på markedet. Det kræver bare, at der er nok kuponobligationer med løbetider svarende til de nulkupon-renter, man er interesseret i (Christensen, 2014). Ofte vil man være nødt til at anvende statistiske estimationsmodeller til at inter- og ekstrapolere en komplet rentekurve. For inter- og ekstrapolerede nulkupon-renter er problemet dog, de ikke udgør noget investeringsalternativ i den virkelige verden.

Man risikerer derfor at give afkald på en realinvestering, fordi det på papiret er bedre at investere i et imaginært risikofrit aktiv.

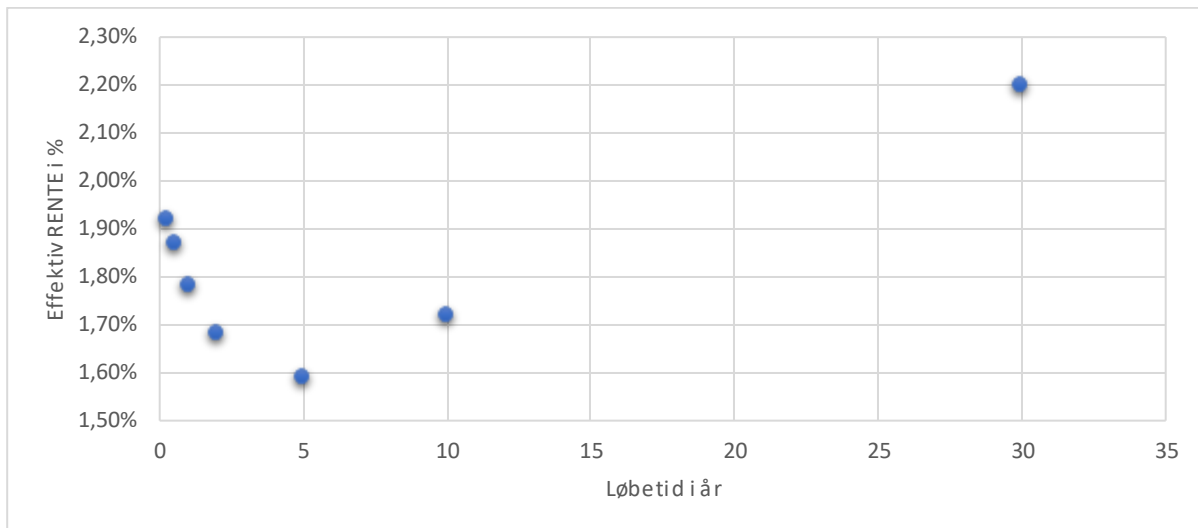
I praksis bør der desuden være konsistens mellem diskonteringsrenten og betalingsstrømmene, der tilbagediskonteres. Estimerer man eksempelvis betalingsstrømme i en nominel kurs, skal man bruge en nominel rente, og estimerer man betalingsstrømme i filippinske pesos, skal man ikke bruge en dansk statsobligation som det risikofrie aktiv. For så indbygges der forskellige inflationsforventninger i tælleren og nævneren. I det omfang, at Purchasing Power Parity er opfyldt, bør det ikke give forskellige værdiestimer, om man foretager sin analyse i kroner, i peso eller dollars.

3.1.1. En til tider upræcis tommelfingerregel

I praksis er det efterhånden blevet en tommelfingerregel blot at anvende den toneangivende 10-årige statsobligation som estimat for den risikofrie rente (Petersen et al, 2017). Rationalet er, at selv om der måtte være kuponbetalinger, vil Macaulay-varigheden være tæt på 10 og nogenlunde i overensstemmelse med varigheden på de fleste virksomheders realinvesteringsprojekter. I den virkelige verden er det nok et noget tyndt argument. For Macaulay-varigheden er meget afhængig af det konkrete betalingsforløb, og for et nystartet biotek- eller medicinalsselskab er det næppe urealistisk, at hovedparten af værdien ligger årtier ude i fremtiden, mens den for andre realinvesteringsprojekter kan ligge få år ude i fremtiden. Man kan derfor hurtigt komme til at over- eller underkompensere investor, hvis man blot følger tommelfingerreglen, og rentestrukturen ikke er flad.

3.1.2. Estimering af rentestrukturen for nulkupon-obligationer

Man kan danne sig et indtryk af risikoen for at over- eller underkompensere investor ved at sammeligne de effektive renter på obligationsmarkedet. Figur 6 viser de effektive renter for de amerikanske Treasury Yields per 12. september 2019 (Bloomberg, 2019).

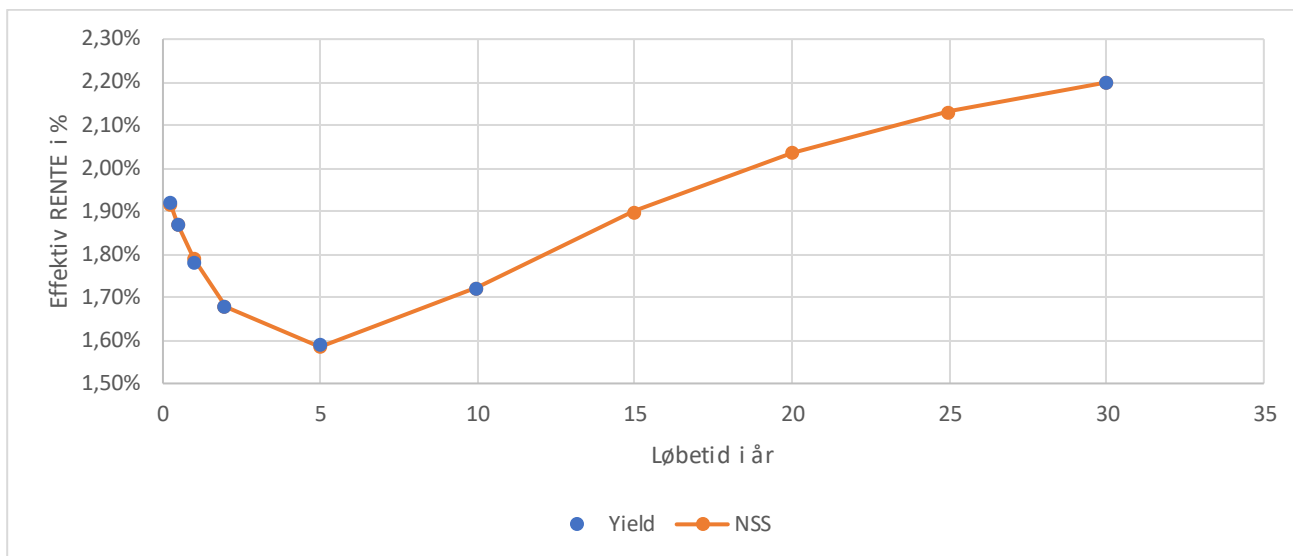


Figur 6: Effektive rente for amerikanske Treasury Yields pr. 12.09.19

Det kan af figuren ses, at de effektive renter i øjeblikket er højere for de kortere renter end for de lidt længere renter, og at der for mange løbetider ikke findes obligationer. Renterne i figuren er ikke risikofrie, da de kan dække over præmier for inflationsrisiko og geninvesteringsrisiko, men ved brug af eksempelvis Svenssons udvidelse af Nelson og Siegel's decay metode (NSS) kan man estimere syntetiske nulkupon-renter:

$$z(T, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right)}{\left(\frac{T}{t_1}\right)} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_1}\right)}{\left(\frac{T}{t_1}\right)} - \exp\left(-\left(\frac{T}{t_1}\right)\right) \right) \\ + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{t_2}\right)}{\left(\frac{T}{t_2}\right)} - \exp\left(-\left(\frac{T}{t_2}\right)\right) \right)$$

, hvor $z(T, \beta)$ angiver nulkupon-renten for løbetid T som en funktion af vektorene $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, t_1 og t_2 , der bestemmes under iterationen. I figur 7 ses resultatet af NSS-metoden,



Figur 7: Estimerede nulkuponrenter ved brug af NSS-metoden

Af figuren ses, at der forskel mellem nulkupon-renten på kort og på langt sigt, og man kan derfor risikere at over- eller underkompensere investor, hvis ikke man foretager ”periode matching” og kun anvender den 10-årige statsobligation som det risikofrie aktiv.

3.2. Markedsrisikopræmien

Markedsrisikopræmien defineres som merafkastet, investor kræver for at investere i markedsporteføljen frem for et risikofrit aktiv:

$$E(r_{mrp}) = E(r_{mp}) - r_f$$

Hvor $E(r_{mrp})$ angiver den forventede markedsrisikopræmie, $E(r_{mp})$ er det forventede afkast på markedsporteføljen og r_f er den risikofrie rente. I praksis findes der flere metoder til at estimere den forventede risikopræmie, herunder:

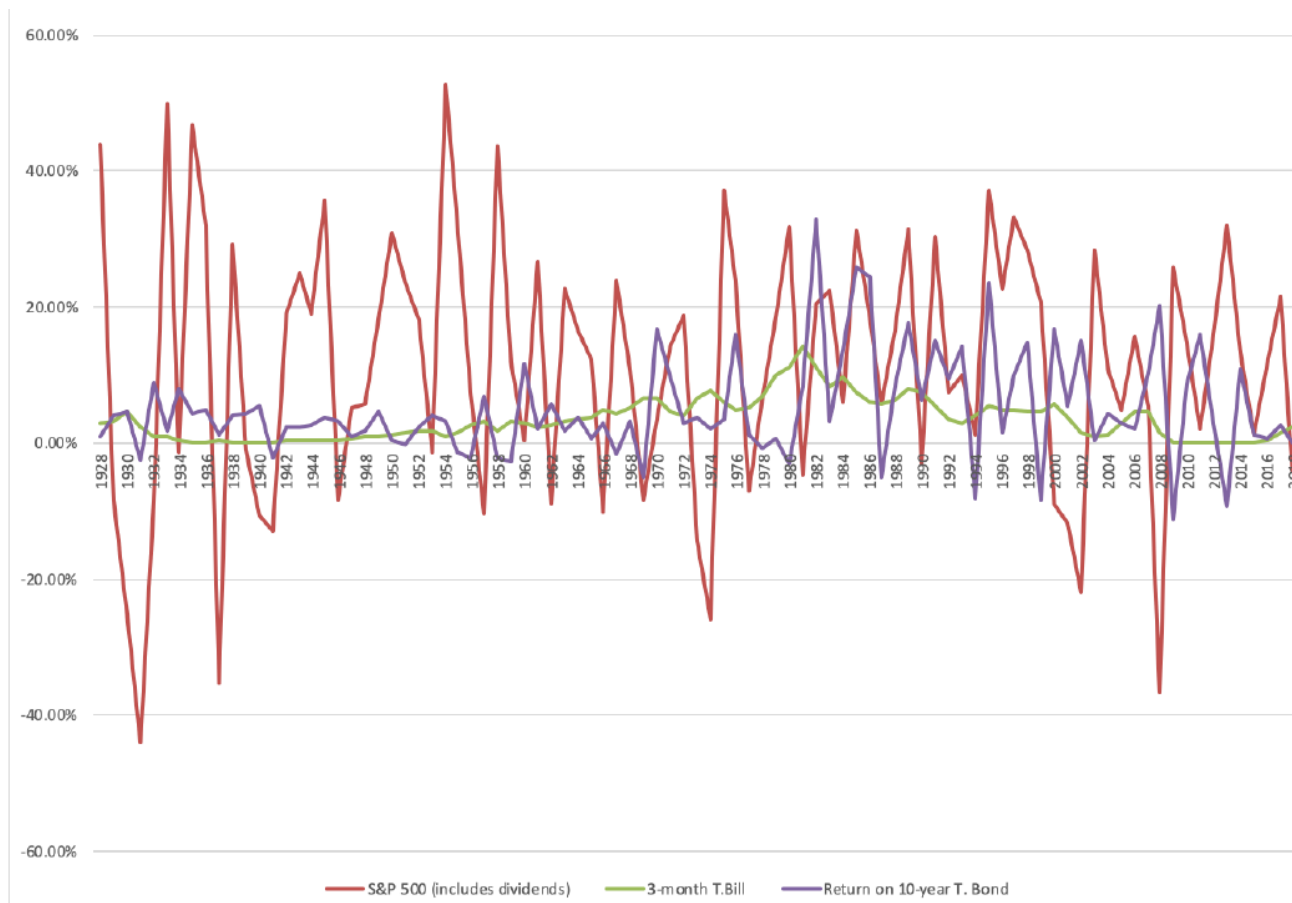
1. Det historiske merafkast
2. Surveybaserede opgørelser
3. Implicitte markedsrisikopræmier

3.2.1. Det historiske merafkast

Den mest udbredte metode til at estimere den forventede risikopræmie er historiske merafkast på markedsporteføljen ift. den risikofrie rente (Armitage, 2005). I teorien skal princippet om periode matching følges, og hvis man anvender en 10-årig statsobligation som den risikofrie rente i CAPM,

bør det historiske afkast opgøres som markedsporteføljens gennemsnitlige merafkast ift. afkastet på 10-årige statsobligationer.

Metoden bygger på idéen om, at historiske afkast kan bruges til at sige noget om fremtidige afkast, og et gennemsnit, der går langt tid tilbage i tid, bygger alt andet lige på en antagelse om, at markedsrisikopræmien er konstant over tid, mens et gennemsnit, der kun går få år tilbage, bygger på en antagelse om, at præmien er tidsvarierende. At markedsrisikopræmien kan være tidsvarierende, skal særligt ses i lyset af, at den afhænger af investorenes risikoaversion. Graden af risikoaversion afhænger af flere faktorer, fx investorenes alder og forbrugsbehov (Rieger et al., 2012). Yngre personer med et langt liv foran sig vil ofte være mere risikovillige, og hvis investorerne bliver yngre som helhed, kan det få risikoaversionen til at falde – og dermed også risikopræmien til at falde. Forbrugsbehovet kan også påvirke risikoaversionen. Hvis en investor skal bruge penge inden for en overskuelig årrække, kan vedkommende være mindre tilbøjelig til at løbe risici og derfor kræve et større afkast for at investere i markedsporteføljen. Det samme kan være tilfældet i forbindelse med økonomiske recessioner, hvor investorerne kan være mere bekymret for fremtidsudsigterne og derfor opsparer mere (Damodaran, 2019). De historiske afkast for korte og lange amerikanske statsobligationer og S&P500-aktier siden 1928 er vist i figur 8:



Figur 8: Årlige afkast for aktier, T-bonds og T-bills

Kilde: Damodaran (2019)

Af den grafiske afbildning er der ikke meget, der tyder på, at det historiske merafkast har været konstant, og det er derfor langt fra sikkert, at det forventede merafkast skulle have været det. Ikke desto mindre opgøres det historiske merafkast ofte over en så lang tidsperiode som muligt for at reducere standardfejlen på estimatet (Ibid).

3.2.1.1. Det historiske afkast som aritmetisk eller geometrisk gennemsnit

Markedsporteføljens gennemsnitlige merafkast afhænger af, om man anvender det aritmetiske eller geometriske gennemsnit. Det geometriske gennemsnit afspejler den egentlige formuetilvækst og vil altid være lig med eller lavere end det aritmetiske gennemsnit. Antag eksempelvis, at din formue forventes at stige med 100% det ene år for at falde med 50% året efter. Dit forventede afkast er 25%, mens din forventede formuetilvækst er 0%. Hvis din formue enten kan stige med 100% eller falde med 50 % mange år i træk, og begge udfald er lige sandsynlige, kommer din forventede formue ikke til at være symmetrisk omkring det forventede afkast, men højreskæv. Med mange stigninger i træk vokser formuen mod uendeligt, mens du højst kan risikere at tabe hele formuen med mange fald i

træk. Det mest sandsynlige udfald er dog, at din formue er uændret. Forskellen mellem det geometriske og aritmetiske gennemsnit er størst, når volatiliteten er stor. På lang sigt vil det aritmetiske gennemsnit overvurdere formuertilvæksten, mens det geometriske gennemsnit vil undervurdere det forventede afkast. Der er derfor bred enighed om, at man bør bruge det aritmetiske gennemsnit i forbindelse med realinvesteringer og værdiansættelser, hvis man anvender historiske merafkast (Brealey et al, 2017), og f.eks. Cooper (1996): *”Note that the arithmetic mean, not the geometric mean, is the relevant value for this purpose. The arithmetic mean, or simple average, is the unbiased measure of the expected value of repeated observations of a random variable, not the geometric mean (...) the geometric mean underestimates the expected annual return rate of return”* (s. 158)

Tabel 1 viser det historiske merafkast for amerikanske aktier, når det opgøres som enten et aritmetisk eller geometrisk gennemsnit for perioden 1928-2018.

	Aritmetisk gennemsnit	Geometrisk gennemsnit
Aktier vs. Kort risikofri rente	7,93%	6,11%
Aktier vs. Lang risikofri rente	6,26%	4,66%

Tabel 1: Egen tilvirkning – Historiske gennemsnit for markedsrisikopræmien i USA (1928 – 2018)

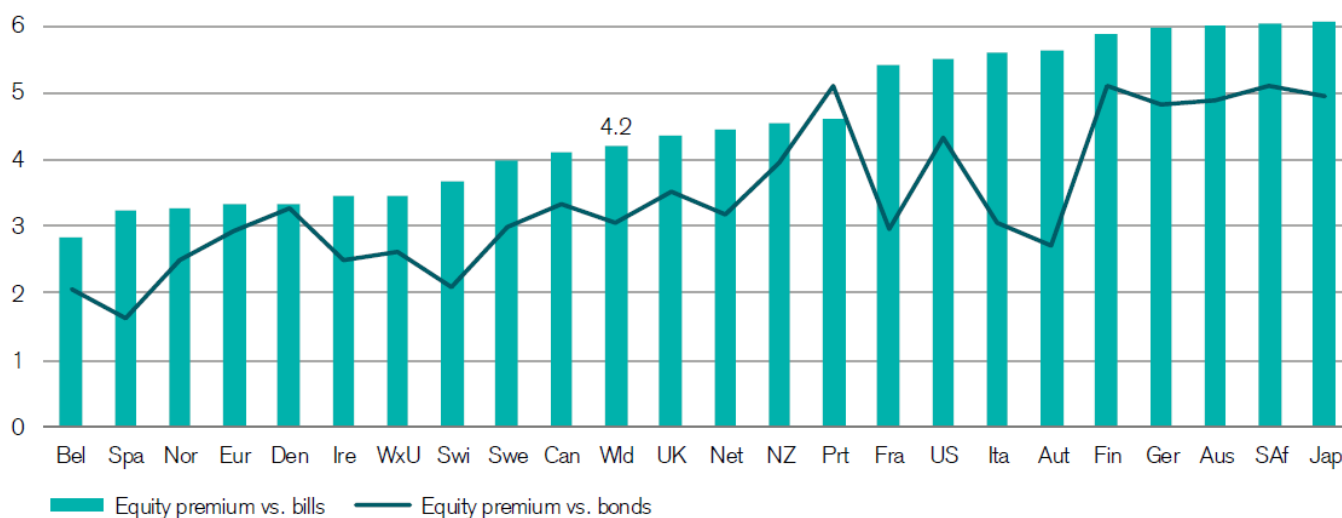
Kilde: Damodaran (2019)

Alt efter om merafkastene opgøres ift. korte eller lange statsobligationer, kan gennemsnittet variere med op til 2 procentpoint.

3.2.1.2. Valget af markedsindeks

Den sande markedsportefølje indeholder ikke kun aktier, men også human kapital, ejendomme osv. I den virkelige verden kan markedsporteføljen ikke observeres, og det er derfor ikke muligt at lave nogen utvetydig korrekt anvendelse af modellerne (Roll, 1977). Campbell (1996) og Jagannathan og Wang (1996) viser, at en faktor relateret til ændringer i human kapital gør CAPM bedre i stand til at forklare realiserede afkast. Problemet er dog, at værdien af human kapital ikke kan opgøres særligt pålideligt, og at der vil være meget usikkerhed forbundet med at opgøre samvariationen med alle andre aktiver. Tilsvarende kan man forsøge at kombinere aktieindekser verden over med indekser for ejendomsinvesteringer. Det underliggende problem er dog, at det ikke er muligt at måle korrelationen mellem forskellige proxier og den sande markedsportefølje. Ingen ved med sikkerhed, hvilket indeks eller kombination af indekser der bedst reflekterer den sande markedsportefølje. I praksis vil man

ofte anvende ét aktieindeks som markedsporteføljen (Armitage, 2005), selv om størrelsen af de historiske merafkast varierer alt efter det enkelte land, jf. figur 9.



Figur 9: Årlig markedsrisikopræmie (%) set ift. både korte (bills) - og lange statsobligationer (bonds) (1900–2018)

Kilde: Dimson, E., Marsh, P. & Staunton, M. (2018). *Credit Suisse Global Investment Returns Yearbook 2018*.

Af figuren kan det ses, at valget af indeks har stor betydning for merafkastets størrelse. Eksempelvis er det for tyske aktier ift. korte statsobligationer 6% i perioden 1900 – 2018, mens det for danske aktier kun har været lidt over 3 %. En mulig forklaring er selvfølgelig, at det danske marked har korreleret mindre med den sande markedsportefølje, og at man derfor har forventet et lavere afkast af det. Ikke desto mindre er det i hele taget vanskeligt at estimere den ”rigtige” markedsrisikopræmie baseret på historiske merafkast, og udfordringerne relaterer sig i øvrigt til:

- i. Survivorship bias
- ii. Størrelseseffekt og illikviditet
- iii. Særegne opgørelsesmetoder

3.2.1.2.1. Survivorship bias

For mange indekser er der fare for, at de historiske merafkast overvurderer den fremadrettede risikopræmie, fordi det kun er de suveræne virksomheder, der har været stærke nok til at overleve perioder med verdenskrige og politisk uro (Goetzmann & Ibbotson, 2005). Den gennemsnitlige virksomhed er ikke nødvendigvis så dygtig i dag, som den var i første halvdel af det 20. århundrede. Kritikken bliver ofte fremført mod det amerikanske marked (Ibid).

3.2.1.2.2. Størrelseseffekt og illikviditet

Hvis mindre virksomheder har klaret sig bedre end større virksomheder, kan man komme til at overvurdere den forventede risikopræmie, når man baserer den på markeder, der i perioder har været domineret af mindre virksomheder. Mindre virksomheder er desuden oftere illikvide end større virksomheder (Gray og Tutticci, 2007), og illikviditetspræmier kan 'forvanske' de historiske merafkast yderligere. Det kan særligt være et problem, hvis afkastet på et indeks opgøres som et ligevægtet afkast og ikke et værdivægtet afkast.

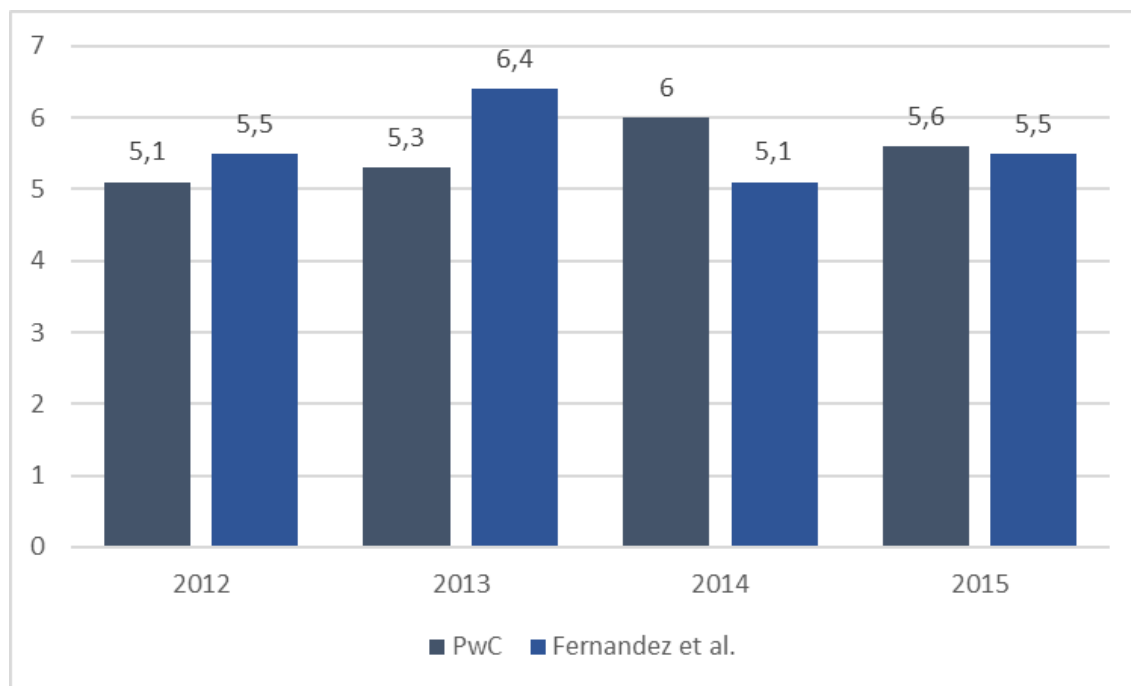
3.2.1.2.3. Forskellige opgørelsesmetoder

Det er et stort arbejde at generere afkastserier for aktier og obligationer, og det er ikke altid, at der eksisterer sammenhængende og homogene afkastserier i alle lande. F.eks. er den danske risikopræmie i Parum (1999a) beregnet ud fra realkreditobligationer frem for statsobligationer, fordi der indtil 90'erne ikke var et "obligationsmarkedsindeks" analogt til aktieindekser. Og afkastet på lange realkreditobligationer er ikke mere risikofrit, end at det også dækker over præmier for konverteringsrisiko og renterisiko. Desuden gælder det særforhold på det danske marked, at den Danske Fondsbørs i en årrække ikke fjernede virksomheder fra indeksberegningerne, når de gik konkurs. I stedet blev de blot fastfrosset i indekset til kursen på suspensionstidspunktet (Ibid). Det vil sige, at man både kan komme til at under- og overvurdere de historiske afkast, hvis ikke man er opmærksom på kvaliteten af data og særlige rapporteringsforhold. Det taler for at anvende amerikanske data, der er hyppigt anvendt i den akademiske litteratur, og hvor viden om utilstrækkelige data er mere tilgængelig.

3.2.2. Den surveybaserede opgørelse

Alternativt til historiske merafkast kan man anvende surveybaserede opgørelser, hvor markedsdeltagere spørges ind til den risikopræmie, de kræver. Undersøgelserne, der forsøger at være mere fremadskuende end historiske merafkast, foretages både af PWC (2016) og Fernandez et al. (2019). De rundspørger en lang række rådgivere, institutionelle investorer samt corporate finance- og

værdiansættelsesafdelinger. Fernandez et al., (2019) undersøger i alt 84 lande, men undersøgelserne er ikke nødvendigvis problemfrie. Skardziukas (2010) viser, at respondenternes svar ofte er følsomme over for aktiemarkedets performance det seneste år, mens Ilamen (2003) viser, at spørgsmålets ordlyd har stor betydning for svaret. Problemet er, at mange angiver premien, de håber på, og ikke den, de anvender.



Figur 10: Egen tilvirkning - Surveybaserede estimater af den danske markedsrisikopræmie

Kilde: PWC (2016), Fernandez et al. (2015).

I figur 10 er angivet resultaterne af undersøgelserne af PwC og Fernandez et al. i årene 2012-2015 for det danske aktiemarked. De to undersøgelser kommer frem til tal, der er meget tætte på hinanden, når det tages i betragtning, at de er baseret på subjektive svar. Fernandez et al. (2015) angiver f.eks., at respondenterne afgav svar, der var alt mellem 2 pct. og 14 pct. for den danske markedsrisikopræmie.

3.2.3. Den implicitte markedsrisikopræmie

Alternativt til survey-opgørelser kan man tage udgangspunkt i indekspriser og udregne de implicitte risikopræmier gennem forskellige vækstformler, f.eks:

$$Kurs = \sum_{t=1}^n \frac{FCFE_t}{(1 + r_e)^t}$$

Hvor FCFE angiver de forventede frie pengestrømme til aktionærene i periode t. Problemet med de implicitte tilgang er, at man er nødt til at have forventninger til de fremtidige pengestrømmene. De kan være underlagt enorm usikkerhed og desuden ændre sig løbende. Det er heller ikke muligt at udlede én implicit risikopræmie af ovenstående formel, hvis ikke alle investorer på markedet har homogene forventninger. Ikke desto mindre har Damodaran (2015) for 1961 og frem estimeret de implicitte risikopræmier med udgangspunkt i 1) prisen på S&P500-indekset, 2) analytiker-estimer af væksten i S&P500 fem år ud i fremtiden og 3) en antagelse om, at væksten i S&P500 herefter følger den forventede inflationsrate:

$$E = \left(\sum_{t=1}^5 \frac{FCFE_t}{(1 + r_e)^t} + \frac{FCFE_6}{(r_e - g)(1 + r_e)^5} \right)$$

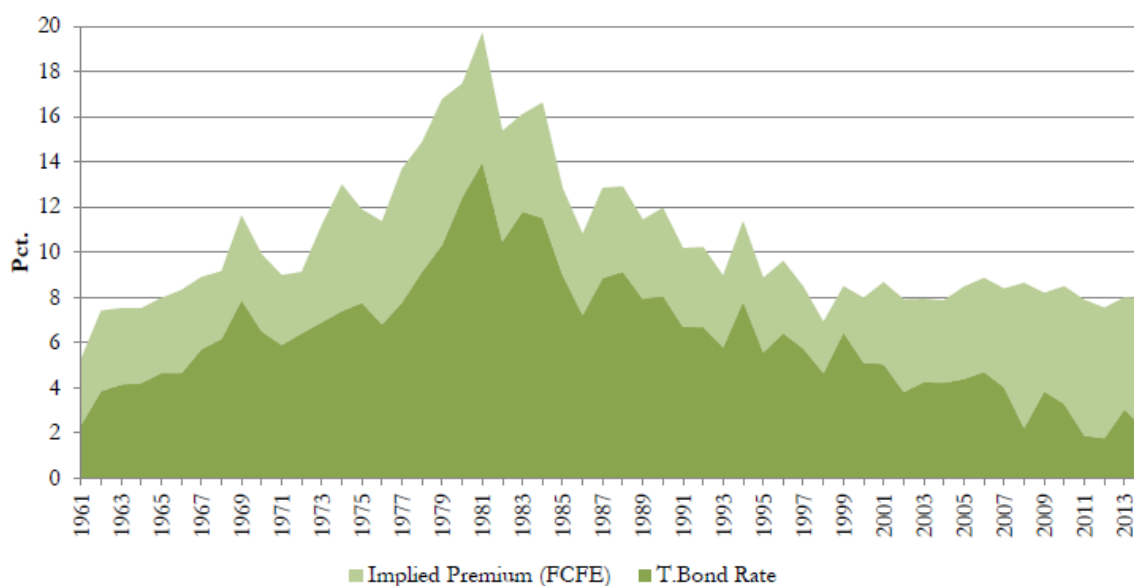
Hvor

E: prisen på markedsporteføljen

$FCFE_t$: de forventede dividendeudbetalinger + eventuelt aktietilbagekøb til tidspunkt t.

r_e : ejernes forventede afkast til markedsporteføljen

g: er den langsigtede vækstrate i dividendeudbetalinger + eventuelt aktietilbagekøb



Figur 11: Den implicitte markedsrisikopræmie for S&P 500

Kilde: Parum et al. (2016)

År	Frit cashflow (Dividender + aktietilbagekøb)
1	80,00
2	82,00
3	82,80
4	84,60
5	85,60
6	88,17

Tabel 2: Skildring af fiktive cashflow fra et aktieindeks

Hvis det eksempelvis antages, at estimaterne i tabel 2 er rimelige, og at den langsigtede vækst er 3%, mens aktieindekset er korrekt prissat (fx 1400), kan den implicitte risikopræmie bestemmes:

$$1400 = \frac{80}{(1+r)} + \frac{82}{(1+r)^2} + \frac{82,8}{(1+r)^3} + \frac{84,6}{(1+r)^4} + \frac{85,6}{(1+r)^5} + \frac{88,17}{(r-0,03)(1+r)^5}$$

<=>

$$r = 8,47 \%$$

Hvor den implicitte markedsrisiko præmie vil kunne udledes, hvis det risikofrie afkast eksempelvis er 3%:

$$\text{Implicitte MRP} = \text{Implicitte merafkast} - \text{risikofri rente}$$

$$\text{Implicitte MRP} = 8,47 \% - 3 \% = 5,47 \%$$

Fordelen ved denne tilgang er, at den er mere fremadskuende og potentielt kan afspejle markedsforholdene, i takt med at de ændrer sig. Ulempen er selvfølgelig, at modellens input kan være enormt subjektive, og at analytikere kan have forskellige holdninger til fremtiden, der ikke nødvendigvis afspejler, hvad markedet forventer som helhed. For den enkelte virksomhed er det formentlig også meget at forlange, at den løbende skal foretage estimer af markedets fremtidige udvikling.

3.2.4. Realinvesteringer på tværs af landegrænser – behovet for en 'country risk premium'

Risikoen ved at investere i to forskellige lande er ikke nødvendigvis den samme. Mens markedsforholdene kan være stabile i resten af verden, kan der opstå konflikter og politiske kriser i

Venezuela, som resulterer i, at fabrikker og butikker bliver beslaglagt, eller at landet ikke kan opfylde dets betalingsforpligtelser med udenlandske stater og virksomheder. Damodaran (1999) argumenterer for, at en diversificeret portefølje ikke tilstrækkeligt reducerer den specifikke landerisiko, og at investor derfor bør kræve en særskilt risikopræmie for at investere i udlandet. Rationalet er, at markederne verden over samvarierer for meget.

Hvis en amerikansk virksomhed eksempelvis forventer, at halvdelen af dets indtægter fremover vil komme fra Brasilien, bør den estimere CAPM-markedsrisikopræmien som et gennemsnit af risikopræmierne på det amerikanske og brasilianske marked. Problemet er dog, at det kan være svært at opgøre risikopræmien på det brasilianske marked med historiske merafkast, da kvaliteten af datagrundlaget ofte er utilstrækkeligt, hvilket ligeledes kan være tilfældet for flere vestlige markeder: *”While the economies of Germany, Italy and France can be categorized as mature, their equity markets did not share the same characteristics until recently. They tended to be dominated by a few large companies, many businesses remained private, and trading was thin except on a few stocks”* (Damodaran, 2012, s. 28). Derfor hævder Damodaran, at markedsrisikopræmierne for alle lande bør tage udgangspunkt i risikopræmien for det amerikanske marked og derefter blive tillagt en landespecifik risikopræmie.

Damodaran foreslår bl.a. at de landespecifikke risikopræmier kan beregnes på baggrund af den historiske volatilitet på et lands aktieindeks relativt til et amerikansk aktieindeks. Forholdet fungerer på den måde som en risikomultiplikator, der ganges på risikopræmien for det amerikanske marked:

$$\text{Risikomultiplikator} = \frac{\text{Standardafvigelse}_{\text{Undersøgte land}}}{\text{Standardafvigelse}_{\text{USA}}}$$

Antages det, at den årlige standardafvigelse på det brasilianske marked er 33 %, mens den på det amerikanske marked er 18 %, vil risikomultiplikatoren være

$$RM = \frac{33 \%}{18 \%} = 1,833$$

Hvis markedsrisikopræmien på det amerikanske marked er 5,5 %, bør risikopræmien for Brasilien være

$$5,5 \% * 1,833 = 10,08 \%$$

For den amerikanske virksomhed, der forventede, at halvdelen af indtægterne ville komme fra Brasilien, bliver dets endelige CAPM-risikopræmie:

$$0,5 * 5,5 \% + 0,5 * 10,08 \% = 7,79 \%$$

I praksis er der dog særligt et forhold, der kan gøre metoden mindre hensigtsmæssig. For standardafvigelsen på aktieindekser vil ofte være undervurderet på mindre likvide markeder. For mange udviklingslande vil metoden derfor føre til lavere risikopræmier end risikopræmien på det amerikanske marked (Ibid). Som alternativ foreslår Damodaran bl.a., at man for det brasilianske marked vil kunne tage udgangspunkt i landets ”10-year US dollar denominated Brazilian bond”. For forskellen i renterne mellem dette instrument og den amerikanske 10-årige statsobligation vil være et udtryk for den brasilianske konkursrisiko. Når Brasiliens statsobligationer dog er mindre risikable end landets aktier, bør man justere risikoen med forholdet mellem standardafvigelsen på landets aktier og statsobligationer:

$$Country Risk Premium = Landets konkursrisiko * \left(\frac{\sigma_{equity}}{\sigma_{Country bonds}} \right)$$

Derefter kan man lægge den specifikke landerisiko til risikopræmien på det amerikanske marked. Formålet med metoderne er ikke nødvendigvis at være teoretisk korrekte, men derimod anvendelige i praksis.

3.3. Beta

Som beskrevet i kapitel 2, er beta et mål for den systematiske risiko. Eftersom betaværdien er den eneste komponent af CAPM, der varierer fra projekt til projekt, er det den, der afgør, hvordan den generelle risikopræmie på markedet differentieres mellem aktiver. I praksis er der mange tilgange til at estimere beta, herunder:

1. Regressionsbeta
2. Bottom-up beta
3. Fundamentalanalyse af beta

3.3.1. Regressionsbeta

Traditionelt har estimering af beta været baseret på regressionsanalyse, hvor det enkelte selskabs afkast er blevet regresseret på afkastet af et markedsindeks. Den generelle markedsmodel for bestemmelsen af beta vha. ex-post regressionsanalyser er

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

hvor

R_i : Aktiens afkast

α_i : Konstant, der ikke tolkes direkte på, da en fortolkning vil forudsætte $\beta_i = 0$

β_i : Aktiens systematiske risiko

R_m : Markedsafkast for markedsportefølje indikeret ved en anvendt proxy

ε_i : Fejllid, der angiver den usystematiske risiko

3.3.1.1. Datafrekvensen i regressionen

Mange lærebøger forholder sig sjældent til, om man bør anvende, daglige, ugentlige, månedlige eller årlige afkastobservationer, når man estimerer beta. Både variansen og samvariationen imellem aktiverne kan være forskellig alt efter valget af datafrekvens, og det kan have stor betydning for værdien af beta. Anvender man daglige afkastobservationer, risikerer man desuden oftere, at parameterestimatet af beta er biased. For mens nogle aktier handles tusindvis af gange hver dag, er der andre, der handles mere infrekvent. Priserne på aktier, der ikke handles ofte, kan risikere ikke at afspejle al tilgængelig markedsinformation, fordi det tager nogle dage, før den bliver opfanget. Det bliver ofte fremført, at det f.eks. kan være dyrt og tidskrævende hele tiden at opdatere værdiestimer for de enkelte virksomheder, og kalkulerne bliver derfor først opdateret, når den enkelte investor mener, at der er kommet nok ny information, der kan berettige en revurdering af estimerne. Imellem hver "opdatering" kan kursen på aktien derfor se mere stabil ud, fordi der foretages færre handler, end hvad der blive gjort, hvis investorerne hele tiden opdaterede deres værdiestimer.

3.3.1.2. Tidsperiode

I mange lærebøger bliver det heller ikke diskuteret, hvor langt tilbage i tid man bør gå, når beta skal estimeres. Anvender man månedlige data, og går man kun 5 måneder tilbage i tid, vil det næppe være tilstrækkeligt til at genere et pålideligt estimat. Armitage (2005) skriver i forhold til tidsperioden, at det er en afvejning mellem aktualitet og statistisk sikkerhed: *"A longer estimation period gives a more reliable estimate of beta, assuming that beta is stable over time; the standard error of the beta coefficient falls as the number of returns observations increases. On the other hand, given the evidence that that betas are not stable over time, an unadjusted OLS beta becomes more 'out of date' the longer the estimation period is (...)"* (Armitage, 2005, S. 290)

Den enkelte virksomhed kan over tid både skifte operationelle og finansielle karakteristika, og det taler for, at valget af tidsperiode bør afhænge af, hvornår virksomheden sidst har ændret karakteristika. Har virksomheden for nyligt været involveret i en række opkøb, restruktureringer eller

frasalg af virksomhedsenheder, bør man undgå en lang tidsperiode, fordi den er mindre retvisende for fremtiden.

3.3.2. Bottom-up beta

Regressionsbetaen kan virke tilfældig, fordi den både afhænger af det valgte markedsindeks, datafrekvensen og tidshorisonten, mens det ikke er åbenlyst, at det er den ene metode frem for den anden, man bør vælge. Damodaran (1999) beskriver en alternativ tilgang, der tager udgangspunkt i regressionsanalyser, men alligevel er mere fremadskuende for det enkelte selskab.

Metoden, der kaldes ”bottom-up beta”, bestemmer først et projekts aktiv beta på baggrund af virksomheder, der opererer med samme operationelle forhold som *projektet*. Herefter geares aktiv beta med projektets specifikke kapitalstruktur. Ofte anvendes Harris Pringles-relationen, der antager, at beta på gælden er nul, og at gælden rebalanceres kontinuertligt, så beta på renteskatteskjoldet svarer til aktiv beta:

$$\begin{aligned}\beta_E &= \beta_A + (\beta_A - \beta_D) \left(\frac{V_D}{V_E} \right) - (\beta_A - \beta_{ITS}) \left(\frac{V_{ITS}}{V_E} \right) \\ &= \beta_A + \beta_A \left(\frac{V_D}{V_E} \right)\end{aligned}$$

hvor

β_E = Virksomhedens gearede beta

β_A = Virksomhedens beta, hvis virksomheden var gældsfri – også kaldet aktiv beta

β_D = beta på gælden

β_{ITS} = beta på renteskatteskjoldet

$\frac{D}{E} = \frac{\text{Markedsværdien af gælden}}{\text{Markedsværdien af egenkapitalen}}$

Aktiv beta beregnes ud fra følgende trin:

1. Identificering af virksomheder, der driver sammenlignelige projekter, hvorefter en regressionsbeta bestemmes for hvert enkelt selskab.
2. Hvert selskabs aktiv beta bestemmes vha. Harris Pringles-relationen¹.

¹ Regressionsbetaer bestemmer virksomhedernes gearede betaer. Derfor må de ugeares vha. f.eks. Harris Pringles-relationen: $\beta_A = \frac{\beta_E}{\left(1 + \left(\frac{D}{E}\right)\right)}$

3. Hvert selskabs aktiv beta justeres for selskabet beholdning af likvide midler, der antages at have en beta lig nul²
4. Alt efter antallet af outliers bestemmes projektets aktiv beta som et simpelt gennemsnit eller medianen af de sammenlignelige selskabers aktiv beta
5. Projektets aktiv beta geares med projektets kapitalstruktur

Fordelen ved bottom-up betaer er, at de tager udgangspunkt i de risikoforhold, som projektet er eksponeret over for fremadrettet. Hvis projektet afviger fra den pågældende virksomheds kerneaktiviteter, giver det alt andet lige bedre mening at basere betaestimatet på en række peers, hvis risikoforhold stemmer overens med projektets. Og selv hvis projektet måtte være identisk med virksomhedens øvrige aktiviteter, kan det alligevel være en fordel at basere beta-estimatet på adskillige regressioner frem for en enkelt. For under antagelse af at afkast er uafhængige, reduceres standardfejlen på bottom-up betaestimatet med antallet af sammenlignelige selskaber, der foretages regressioner for:

$$Standardfejl_{bottom-up\ beta} = \frac{Gns. Standardfejl_{regressionsbeta\ for\ peers}}{\sqrt{n}}$$

Ulempen ved bottom-up betaer er, at de involverer mange subjektive skøn, når regressionsbetaerne skal bestemmes for gruppen af sammenlignelige selskaber, og det kan i det hele taget være vanskeligt at afgøre, om et selskab er tilstrækkeligt sammenligneligt med projektet.

3.3.3. Fundamentalanalyser

En fundamentalanalyse er helt eller delvist baseret på subjektive vurderinger af, hvad der kan påvirke den systematiske risiko, og den tager typisk udgangspunkt i en opdeling af beta på driftsrisiko og finansiel risiko:

$$\beta_E = \beta_{UA} + (\beta_{UA} - \beta_D) \left(\frac{V_D}{V_E} \right)$$

Hvor β_{UA} er driftsrisikoen, mens $(\beta_{UA} - \beta_D) \left(\frac{V_D}{V_E} \right)$ er den finansielle risiko.

Analysen kan udformes på mange måder, men det er ofte populært at vurdere driftsrisikoen fra tre perspektiver (Petersen et al., 2017):

² $\beta_{A,justeret\ for\ kontantbeholdning} = \frac{\beta_A}{\left(1 - \frac{kantantbeholdning}{(D+E)}\right)}$

- **Det eksterne perspektiv**
- **Det strategiske perspektiv**
- **Det operationelle perspektiv**

Det eksterne perspektiv er de risikofaktorer, der påvirker en virksomheds driftsindtjening, men som virksomheden ikke har indflydelse over. Det kan f.eks. være den økonomiske udvikling i de lande, den opererer i, eller graden af politisk stabilitet. Hvor en forhøjelse af selskabsskattesatsen typisk rammer alle virksomheder ens, kan et fald i BNP påvirke selskaber og industrier forskelligt. De, der handler med varer, der lettere kan undværes, er som regel mere afhængige af, at det går godt i økonomien. For selv i dårlige tider skal man bruge medicin.

Strategiske risiko er tæt forbundet til industrien, som virksomheden er i, og kan f.eks. være graden af konkurrence i industrien eller virksomhedens afhængighed af enkelte leverandører og kunder. Virksomheden har større indflydelse over strategiske risikofaktorer, og den vil eksempelvis kunne forsøge at opnå komparative fordele gennem innovation og nye produkter eller mindske afhængigheden af enkelte kunder gennem salgsstrategier.

Det operationelle perspektiv er tæt forbundet til interne risikofaktorer, der påvirker stabiliteten af driftsindtjeningen. Det kan f.eks. være virksomhedens operationelle gearing, livscyklus og kvaliteten af salgs- og produktionsafdelinger. Når de faste omkostninger er høje i forhold til de samlede omkostninger, vil et selskab alt andet lige være mere udsat for økonomiske udsving. For de faste omkostninger skal betales, selv om salget går dårligt. Virksomheder, der f.eks. er dårlige til at forecaste salget, vil som regel også have en mindre stabil driftsindtjening. For det kan være dyrt at producere for lidt eller for meget.

I forhold til den finansielle risiko er det ofte populært at analysere den ud fra to perspektiver (Ibid):

- **Selskabets gældsætningsgrad**
- **Gældens karakteristika**

Gældsætningsgraden angiver, hvor belånt virksomheden er. Selv om salget går dårligt, skal renterne betales, og en høj gældsætningsgrad har derfor samme effekt som en høj operationel gearing.

I forhold til gældens karakteristika vil man typisk analysere gældens afdragsprofil, løbetid, om den er fast eller variabelt forrentet og om lånet er optaget i en fremmed valuta. Eksempelvis vil et variabelt forrentet lån optaget i en fremmed valuta som regel øge den finansielle risiko. For ydelsernes størrelse er ukendt, mens kursværdien ikke følger kursværdien af selskabets indtægter.

På baggrund af driftsrisikoen og den finansielle risiko vil man komme frem til konkret mål for beta, selv om det ofte kan ske på mange måder. F.eks. kan man anvende Fernandez' (2009) "MASCOFLAPEC"-metode. Den inddrager mange af ovenstående risikoforhold og tillægger dem prædefinerede vægte:

Vægt		Lav 1	Middel 2	Middel- høj 3	Høj 4	Meget høj 5	Vægtet risiko
10%	M Management	1					0,1
25%	A Assets: industry/products					5	1,25
3%	S Strategy				4		0,12
15%	C Country risk				4		0,6
10%	O Operational leverage				4		0,4
15%	F Financial leverage		2				0,3
5%	L Liquidity of investment					5	0,25
5%	A Access to sources of funds			3			0,15
2%	P Partners				4		0,08
5%	E Exposure to other risks		2				0,1
5%	C Cash flow stability			3			0,15
100%							3,5
Beta =	3,5	x	0,5	=	1,75		

Tabel 3: MASCOFLAPEC

Kilde: Petersen 2017: Financial Statement Analysis

I det konkrete eksempel fører metoden til en beta på egenkapitalen på 1,75.

Andre fundamentalanalyser er kun delvist styret af skøn. I stedet tager de udgangspunkt i et gennemsnitligt afkastkrav for virksomheden bestemt vha. regressionsanalyser som beskrevet i afsnit 3.3.1. Gennem subjektive vurderinger vil afkastkravet for det enkelte projekt justeres, alt efter om

driftsrisikoen og den finansielle risiko er lavere eller højere end virksomhedens gennemsnitlige projekt.

Ulempen ved fundamentalanalyser er selvfølgelig, at de er lette at manipulere med, hvis man vil tale et bestemt projekt op eller ned. For det er op til brugeren at vurdere, om den operationelle risiko fx er meget høj eller bare høj. Metoderne kræver som regel indgående kendskab til virksomheden og konteksten, som den opererer i, og værdien er ofte bundet op på brugerens kompetencer. Hvis investorerne reelt er diversificerede, risikerer man også nemt at indregne risiko, som de allerede er garderet imod. Fordelen ved analyserne er for det første, at den enkelte virksomhed kan inddrage viden om risikoforhold, som ikke er tilgængelig for den eksterne analytiker. For det andet tvinger analyserne beslutningstageren til at tage selvstændig stilling til risiko, og det kan potentielt gøre dem bedre til at risikomitigere på sigt.

3.3.4. Konsekvensen af de mange estimationsmetoder af beta i praksis

De mange estimationsmetoder leder ofte frem til meget forskellige resultater for beta. Tabel 4 viser eksempelvis opgørelsen af flere finansielle databasers mål for Coca-Cola's, Disney's og Walmart's beta per 2009.

Databases	Coca-Cola	Disney	WalMart stores
Bloomberg	0,79	1,06	0,58
Cnbc	0,60	1,00	0,30
Damodaran	0,61	0,88	0,19
Datastream	0,31	0,72	0,13
Ft.Com	0,80	1,06	0,57
Google Finance	0,60	1,03	0,26
Hoovers	0,60	1,00	0,20
Infomercados	0,33	1,39	0,31
Msn Moneycentral	0,54	1,03	0,16
Quote	0,54	1,13	0,19
Reuters	0,53	1,01	0,17
Smartmoney	0,61	1,03	0,26
Thomson Banker	0,55	1,09	0,38
Value Line	0,55	1,00	0,60
Vernimmen website	NA	1,08	0,71
Yahoo Finance	0,63	0,99	0,28
Max	0,80	1,39	0,71
Min	0,31	0,72	0,13

Tabel 4: Oversigt over finansielle databasers mål for beta
Kilde: Petersen et al. (2017)

Af tabellen kan det ses, at målene for beta er forskellige fra database til database. Antages det, at markedsrisikopræmien er 6 %, kan CAPM-afkastkravet for Coca-Cola være alt mellem 2% og 5% i tillæg til det risikofri aktiv, mens det for Disney kan være alt mellem 4% og 8%. Det bliver derfor et temmelig løst udsagn, ”at man anvender CAPM”, når modellen kan komme frem til så forskellige resultater for den samme virksomhed.

4. Modeltest – Introduktion

Ovenfor så vi, at man alt efter valget af estimationsmetode kan komme frem til vidt forskellige CAPM-afkastkrav. Fundamentalanalyserne og de fremadskuende tilgange kritiseres ofte for at være for løsrevet fra *objektive* afkast- og regnskabstal, der gør det muligt at måle deres præcision. Det er ikke kun tidskrævende at vurdere den operationelle risiko, gældens karakteristika eller hvordan fremtidige indtægter vil komme fra alverdens lande. Ofte er det information, der ikke er tilstrækkeligt tilgængelig i årsrapporter, og tilgangene involverer derfor mange skøn. Skønnene er per definition subjektive, og der er ikke nogen universel måde at foretage dem på. Hvis tilgangene viser sig signifikante i modeltest, giver det sjældent nogen generel mening. For signifikansen kan være snævert forbundet til de subjektive valg. Tilsvarende vil modeltest, der baserer sig på surveys af de forventede risikopræmier, være utilstrækkelige. For der findes kun surveys for enkelte år. Modeltest af CAPM og FFM3 har derfor været tæt knyttet til regressionsanalyser af historiske afkast- og regnskabstal, som der vil blive gjort rede for i de følgende afsnit.

4.1. Traditionelle modeltest af CAPM og FFM3

Risikomodellerne hævder et forhold mellem aktivernes systematiske risiko og deres forventede afkast. I den virkelige verden kan forventede afkast ikke observeres, og test af modellerne må tage udgangspunkt i realiserede afkast. Typisk sker det i to trin. Først bestemmes enkeltaktivernes systematiske risiko i en tidsserieregression:

$$R_{it} - R_{ft} = \alpha_i + \beta_i [R_{mt} - R_{ft}] + e_{it} \quad (\text{CAPM})$$

$$R_{it} - R_{ft} = \alpha_i + \beta_i [R_{mt} - R_{ft}] + s_i \text{SMB}_t + h_i \text{HML}_t + e_{it} \quad (\text{FFM3})$$

Hældningskoefficienterne bruges derefter i en tværsnitsregression af aktivernes gennemsnitlige merafkast:

$$\overline{R_i - R_f} = y_0 + y_1 \beta_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{CAPM})$$

$$\overline{R_i - R_f} = y_0 + y_1\beta_i + y_2s_i + y_3h_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (FFM3)$$

Ifølge CAPM bør $y_0 = 0$ og $y_1 = \overline{R_m - R_f}$, mens FFM3 hævder, at $y_0 = 0$, $y_1 = \overline{R_m - R_f}$, $y_2 = \overline{SMB}$ og $y_3 = \overline{HML}$.

Det er imidlertid ikke uproblematisk at bruge realiserede afkast fra enkeltaktiver. De er meget volatile, og de aritmetiske gennemsnitsafkast kan derfor være tilsvarende misvisende (Munk, 2017). Man vil som regel forsøge at reducere støjen ved at inddele aktiverne i en række porteføljer baseret på størrelsen af parameterestimerne af β_i i tidsserieregessionerne. Tværnsnitsregressionen foretages nu med færre, men mere præcise observationer. En variant af fremgangsmåden er Fama-MacBeth-metoden (1973), hvor der foretages tværnsnitsregressioner i hver enkelt tidsperiode t :

$$R_{it} - R_{ft} = y_{0t} + y_{1t}\beta_i + \epsilon_{it} \quad (CAPM)$$

$$R_{it} - R_{ft} = y_{0t} + y_{1t}\beta_i + y_{2t}s_i + y_{3t}h_i + \epsilon_{it} \quad (FFM3)$$

hvor β_i , s_i og h_i er bestemt ved tidsserieregessioner i hver enkelt tidsperiode. Efter t perioder har man tidsserier af y_{0t} , y_{1t} , y_{2t} og y_{3t} , og de gennemsnitlige værdier kan sammenlignes med hhv. 0, $\overline{R_m - R_f}$, $\overline{SMB}$ og $\overline{HML}$.

Selv om porteføljer fører til mere præcise observationerne, er inddelingsmetoden ovenfor blevet klandret for ikke at gøre tilstrækkeligt ved målefejlen på parameterestimerne af β_i , s_i og h_i . Der er generelt en tendens til, at parameterestimatet af β_i indeholder en positiv målefejl, når β_i er høj, og en negativ målefejl, når β_i er lav. Hvis de enkelte aktiver inddeles i porteføljer baseret på størrelsen af parameterestimerne af β_i i tidsserieregessionerne, vil målefejlene til dels blot gå igen i porteføljens β . Jensen et al. (1972) foreslog i stedet, at inddelingen af aktiver kunne foretages i en tidsperiode, der lå forud for tidsperioden, som porteføljernes β estimeres ud fra. Hvert år kunne man eksempelvis fordele aktiverne på 10 porteføljer, hvor den første portefølje altid tildeles aktiverne med de 10 % laveste parameterestimer og så fremdeles. Afkastet for de 10 porteføljer måles ét år frem i tiden, hvorefter aktiverne inddeles igen. Efter t perioder kan man regressere porteføljernes afkast på risikopræmierne, og den eventuelle målefejl i parameterestimerne af porteføljernes β_i , s_i og h_i vil være mere uafhængig af målefejlen i enkeltaktivernes β_i . Uanset inddelingsmetoden er der dog enighed om, at modeltest er mere retvisende, når de foretages for porteføljer bestående af mange aktiver.

Alternativt til Jensen et al. er der i litteraturen foreslået flere metoder til at justere OLS-estimerne, som delvist er motiveret af at imødegå tendensen til positive målefejl, når β_i er høj, og negative målefejl, når β_i er lav. F.eks. foreslår Blume (1971, 1975), at OLS-estimatet bør justeres imod værdien 1:

$$\hat{\beta}^{Blume} = \frac{2}{3}\hat{\beta}^{OLS} + \frac{1}{3}1$$

Selskaber, der overlever på markedet, har det med at vokse i størrelse og blive mere diversificerede over tid. De kommer derfor mere og mere til at ligne markedsporteføljen. Hvis OLS-estimatet af β_i dækker over en stor målefejl, kan man lige så godt justere estimatet mod en værdi, som man tror vil være rigtig på sigt. Damodaran (2014) argumenterer dog for, at der ikke er grund til at tro, at alle selskaber konvergerer mod 1 med samme hastighed, og at Blumes vægte derfor ikke altid er lige hensigtsmæssige. Virksomheder, der spreder sig over flere forretningsområder, bør alt andet lige konvergere kraftigere mod 1 end virksomheder, der bliver på et enkelt område. Vasicek (1973) foreslår alternativt, at OLS-estimatet kan konvergere mod en prædefineret variabel med en hastighed, der afhænger af forholdet mellem usikkerheden på OLS-estimatet og usikkerheden på en prædefineret variabel:

$$\hat{\beta}_{i,t}^{Vasicek} = \frac{s_{b_{i,t}}^2}{\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS} + s_{b_{i,t}}^2} \hat{\beta}^{OLS} + \frac{\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS}}{\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS} + s_{b_{i,t}}^2} b_{i,t}$$

Hvor $s_{b_{i,t}}^2$ er variansen på den prædefinerede variabel til tidspunkt t, $\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS}$ er variansen på OLS-estimatet til tidspunkt t, mens $b_{i,t}$ er værdien af den prædefinerede variabel til tidspunkt t. Den prædefinerede variabel kan eksempelvis være den gennemsnitlige beta på tværs af alle virksomheder til tidspunkt t eller alle virksomheder i samme industri. Vasicek-justerede OLS-estimer er særligt tidskrævende, når Fama-MacBeth-metoden anvendes, fordi de kan foretages både for β_i , s_i og h_i og skal ske for samtlige tidsperioder, som de rullende regressioner foretages over.

4.1.1. Andre anvendte teknikker i forbindelse med modeltest

Som beskrevet i afsnit 3.3.1.1. kan illikvide aktier være særligt problematiske, når beta baseres på daglige afkastobservationer. Dimson (1979) foreslår, at man ved at lagge og leade markedsporteføljen kan opfange noget af ”spillover”-effekten, der kan opstå i forbindelse med infrekvent handel:

$$\beta_{Dimson} = \sum_{k=-n}^n \beta_{j,k}$$

Hvor $\beta_{j,k}$, hvis der f.eks. anvendes et enkelt lag og lead, bestemmes i regressionen

$$R_{j,t} = \alpha_j + \beta_{j,t-1} * R_{m,t-1} + \beta_{j,t} * R_m + \beta_{j,t+1} * R_{m,t+1} + e_{j,t}$$

Dimson (1979) forklarer, at antallet af lags og leads kan øges, hvis problemerne som følge af infrekvent handel er store. Ofte er det dog tilstrækkeligt med 2 lags og leads (Armitage, 2005).

4.2. Beslutningtagerens problem og out of sample forecast

I praksis er det næppe tilstrækkeligt at vide, om en parameter er signifikant forskellig fra nul. For en parameter kan godt være signifikant uden at være af særlig stor betydning. T-teststørrelsen er givet ved forholdet mellem værdien af parameterestimatet og dets standardfejl, og der er ikke noget i vejen for, at små parameterestimer kan være signifikante, blot standardfejlene er tilstrækkeligt lave. Hvad værre er, siger signifikante estimer ikke nødvendigvis meget om modellens samlede evne til at forklare variationen i den afhængige variabel. F.eks. viser Herrnstein og Murray (1994), at der er en signifikant sammenhæng mellem IQ og løn, når der kontrolleres for en række socioøkonomiske faktorer. Problemet er bare, at IQ kun øger modellens forklaringskraft fra 0,253 til 0,263 (Wooldrige, 2012). Tilsvarende kan signifikante CAPM- og FFM3-parametre være til liden nytte, hvis modellerne samlet set er så upræcise, at det i højere grad er held end forstand, der afgør, om forudsigelserne holder stik.

Desuden har out of sample test af modellerne sjældent været særligt relevante for beslutninger om realinvesteringer i praksis. De fleste test har undersøgt modellernes evne til at forklare afkast én måned frem i tiden, mens investeringsprojekter i den virkelige verden ofte rækker adskillige år frem i tiden. Det er derfor næppe nok at vide, at modellerne er retvisende på den helt korte bane. For at vurdere, om det giver mening at anvende modellerne til at tilbagediskontere pengestrømme, der først falder om lang tid, er det nødvendigt at teste modellernes evne til at forudsige afkast flere år frem i tiden. Hvis forecast-fejlene er meget høje, er det relevant at diskutere, hvor præcise modellerne er, uanset om ét eller flere parameterestimer måtte være signifikante.

4.3. Den samlede usikkerhed på afkastkravet

Når CAPM- og FFM3-afkastkravet baseres på historiske afkast- og regnskabsdata, kan både hældningskoefficienterne i (2) og (4) og risikopræmierne i (1) og (3), jf. afsnit 2, være estimeret med fejl. Ved hjælp af standard konfidensintervaller kan det afgrænses, hvilke værdier det ”sande” – eller det faktiske – afkastkrav kommer til at tage. Det kræver blot et mål for den samlede standardfejl. Fejlen på CAPM-afkastkravet er givet ved:

$$\begin{aligned} e(CAPM) &= \hat{\beta} \overline{R_m - R_f} - \beta [E(R_m - R_f)] \\ &= (\beta + \epsilon_\beta) [E(R_m - R_f) + \epsilon_m] - \beta [E(R_m - R_f)] \\ &= \epsilon_\beta [E(R_m - R_f)] + \beta \epsilon_m + \epsilon_\beta \epsilon_m \end{aligned}$$

Hvor $\hat{\beta}$ er parameterestimatet af β , ϵ_β er målefejlen på β , $\overline{R_m - R_f}$ er parameterestimatet af $E(R_m - R_f)$ og ϵ_m er målefejlen på $E(R_m - R_f)$.

Hvis afkast følger en multivariat normalfordeling, er ϵ_β og ϵ_m ukorrelerede, og standardfejlen på CAPM-afkastkravet kan skrives som

$$SE(CAPM) = \left[E(R_m - R_f)^2 \text{var}(\epsilon_\beta) + \hat{\beta}^2 \text{var}(\epsilon_m) + \text{var}(\epsilon_\beta) \text{var}(\epsilon_m) \right]^{0,5} \quad (5)$$

Hvor den økonomiske tolkning er, at standardfejlen på β påvirker afkastkravet i (1), når det ganges på parameterestimatet af risikopræmien, mens standardfejlen på $E(R_m - R_f)$ påvirker afkastkravet, når det ganges på parameterestimatet af β . I virkeligheden svarer det blot til at udnytte, at variansen af produktet af to normalfordelte variable, X og Y kan skrives som:

$$\text{Var}(XY) = \text{Var}(x)E(Y)^2 + \text{Var}(Y)E(X)^2 + \text{Var}(x)\text{Var}(Y) \quad (6)$$

Og for en to-faktor model, hvor afkastkravet kan skrives som

$$E(r) = \beta_1 RP_1 + \beta_2 RP_2$$

kan variansen på afkastkravet skrives som summen af to normalfordelte variable, X og Y,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Hvor $X = \beta_1 RP_1$ og $Y = \beta_2 RP_2$.

Vi får derfor, at

$$Var(\beta_1 RP_1 + \beta_2 RP_2) = Var(\beta_1 RP_1) + Var(\beta_2 RP_2) + 2Cov(\beta_1 RP_1, \beta_2 RP_2)$$

Hvor β_1 og RP_1 , β_1 og RP_2 , β_2 og RP_1 samt β_2 og RP_2 er uafhængige.

$Var(\beta_1 RP_1)$ og $Var(\beta_2 RP_2)$ kan bestemmes hver for sig via (6), mens kovariansen mellem $\beta_1 RP_1$ og $\beta_2 RP_2$ kan beregnes ved:

$$\begin{aligned} Cov(\beta_1 RP_1, \beta_2 RP_2) &= E(\beta_1 \beta_2 RP_1 RP_2) - E(\beta_1 RP_1)E(\beta_2 RP_2) \\ &= E(\beta_1 \beta_2)E(RP_1 RP_2) - E(\beta_1)E(RP_1)E(\beta_2)E(RP_2) \\ &= [E(\beta_1 \beta_2) - E(\beta_1)E(\beta_2)][E(RP_1 RP_2) - E(RP_1)E(RP_2)] \\ &\quad + E(\beta_1)E(\beta_2)[E(RP_1 RP_2) - E(RP_1)E(RP_2)] \\ &\quad + E(RP_1)E(RP_2)[E(\beta_1 \beta_2) - E(\beta_1)E(\beta_2)] \\ &= Cov(\beta_1, \beta_2)Cov(RP_1, RP_2) + E(\beta_1)E(\beta_2)Cov(RP_1, RP_2) \\ &\quad + E(RP_1)E(RP_2)Cov(\beta_1, \beta_2) \end{aligned}$$

For 3 faktorer får man, at

$$Var(X + Y + Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) + 2Cov(X, Y) + 2Cov(X, Z) + 2Cov(Y, Z)$$

Hvor X, Y og Z for FFM3 er lig $\beta E(R_m - R_f)$, $sE(SMB)$ og $hE(HML)$.

Standardafvigelsen på FFM3-afkastkravet kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} SE(FFM3) &= [Præmie' Var(\epsilon_y) Præmie + y' Var(\epsilon_{præmie}) y \\ &\quad + 1' [Var(\epsilon_{præmie}) \circ Var(\epsilon_y)] 1]^{0,5} \end{aligned}$$

hvor Præmie er en 3x1-vektor med parameterestimaterne af risikopræmierne, $Var(\epsilon_{præmie})$ er kovariansmatricen for risikopræmierne, y er 3x1-vektor med parameterestimaterne af hældningskoefficienterne i (3), $Var(\epsilon_y)$ er kovariansmatricen for målefejlene på hældningskoefficienterne, 1 er en 3x1-vektor bestående af 1-taller og $\circ$ angiver Hadamard-produktet af to matricer. Hvis 95%-konfidensintervallerne er meget brede, når afkastkravene baseres på historisk data, er der næppe grund til at tro, at man kommer til at observere modellens forudsigelse. Modellernes præcision, når de baseres på historiske data, kan derfor blive lige så ”håsbaseret”, som de mere subjektive fundamentalanalyser og fremadskuende tilgange er blevet klandret for. Og så er der næppe nogen grund til at bruge den ene metode fremfor den anden.

5. Analyse – Introduktion

I de følgende afsnit vil vi undersøge udfordringerne forbundet med at estimere CAPM- og FFM3-afkastkrav. Det vil blive gjort ved at analysere amerikanske kurs- og regnskabsdata for aktier optaget på NYSE, AMEX og NASDAQ i perioden 1963-2019. Undersøgelsen vil blive foretaget for industrier for at reducere usikkerheden på de historiske afkast og målefejlen på parameterestimaterne. Tesen er, at hvis modellerne ikke engang kan estimeres præcist for porteføljer bestående af industrier, vil håbet kun være ringere for enkeltsekskaber og -projekter. Databehandlingen vil blive forklaret løbende.

5.1. De historiske risikopræmier

Tabel 5 viser de historiske risikopræmier på amerikanske aktier optaget på NYSE, AMEX og NASDAQ i perioden 07/1963-07/2019. Før 1963 mangler mange virksomhedsdata på Compustat, og vi har derfor – som alle andre – startet stikprøven fra 1963. Se tabelnoten for yderligere information.

Tabel 5: Risikopræmier (målt i pct.) for CAPM og FFM3 i perioden 07/1963-07/2019

<i>(Risikopræmier i pct.)</i>	$R_m - R_f$	SMB	HML
Månedlig			
Gennemsnitlig præmie	0,52	0,20	0,31
Standardafvigelse	4,40	3,05	2,80
Standardfejl	0,17	0,12	0,11
Årlig (12 gange månedlige præmier)			
Gennemsnitlig præmie	6,29	2,44	3,72
Standardfejl	2,04	1,42	1,30

Tabelnote: R_f er den 1-månedlige Treasury bill rate observeret i begyndelsen af hver måned. R_m , SMB og HML er dannet på følgende måde: Ultimo juni hvert år (1963-2019) sorteres aktierne på NYSE, AMEX og NASDAQ i to grupper baseret på deres størrelse. Aktier med en højere markedsværdi af egenkapital (ME) end medianen på NYSE sættes i en gruppe for store aktier (B), mens aktier med en ME lavere end medianen på NYSE sættes i en gruppe for små aktier (S). Fordelingen på 'NYSE' er som i FF97 lavet for at sikre, at medianen ikke er domineret af de mange mindre selskaber på NASDAQ. Ultimo juni hvert år (1963-2019) sorteres aktierne på NYSE, AMEX og NASDAQ desuden i tre grupper baseret på ratioen af deres bogførte værdi af egenkapital (BE) og

ME. Aktier med BE/ME, der er lavere eller lig med 0,30-percentilen på NYSE, sættes i en gruppe for lave aktier (L), mens aktier med BE/ME, der er højere eller lig med 0,70-percentilen på NYSE, sættes i en gruppe for høje aktier (H). De resterende aktier sættes i en gruppe for middelmådige aktier (M). Hvert enkelt selskab er nu inddelt i en portefølje baseret på fællesmængden af 1) selskaberne i S og B og 2) selskaberne i L, M og H. Det giver seks porteføljer (S/L, S/M, S/H, B/L, B/M, B/H). For at sikre, at regnskabsdata er kendt, inden de bliver brugt til at forklare afkast, er inddelingen af aktierne til tidspunkt t (ultimo juni) ift. BE/ME foretaget med udgangspunkt i den bogførte værdi af egenkapitalen, som den fremgår af årsrapporten i år $t - 1$, og markedsværdien af egenkapitalen ultimo december i år $t - 1$. For hver af de seks porteføljer beregnes værdivægtede afkast ét år frem, før porteføljerne dannes på ny. SMB beregnes hver måned som forskellen mellem det gennemsnitlige afkast på de små porteføljer (S/L, S/M, og S/H) og det gennemsnitlige afkast på de store porteføljer (B/L, B/M og B/H) i samme måned. HML beregnes hver måned som forskellen mellem det gennemsnitlige afkast på de høje aktier (S/H og B/H) og det gennemsnitlige afkast på de lave aktier (S/L og B/L). Som i FF97 ekskluderer vi virksomheder med negativ BE. For hver måned beregnes R_m som det værdivægtede gennemsnitlige afkast af alle aktier, inklusive aktier med negativ BE.

Tabellen viser, at aktier i gennemsnit har klaret sig markant bedre end korte – praktisk taget riskofri – Treasury bills (6,29 %), men at standardfejlen på det årlige merafkast har været højt (2,04 %). Små aktier har i gennemsnit udkonkurreret store aktier med 2,44 % årligt, mens aktier med høj BE/ME har givet et årligt merafkast på 3,72 % ift. aktier med lav BE/ME. De årlige standardafvigelser er dog høje (2,44 % og 1,42 %). Anvender man de historiske risikopræmier som de forventede præmier i CAPM (1) og FFM3 (3), er konfidensintervallerne brede. For den gennemsnitlige virksomhed med beta lig 1 får man i et standard 95%-konfidensinterval, at det sande CAPM-afkastkrav kan være alt mellem 2,29 % og 10,29 % i tillæg til den risikofrie rente. Det gør det næppe nemt at ramme rigtigt i praksis. Virksomhedernes andet problem er, at de skal estimere, hvordan de er eksponeret over for de enkelte risikopræmier – de såkaldte faktorloadings.

5.2. Faktorloadings for industrier

Tabel 6 viser estimater af CAPM og FFM3 faktorloadings for 48 industrier i tidsperioden 07/1963-07/2019. Industrierne er som i FF97 valgt for at inddele aktierne optaget på NYSE, AMEX og NASDAQ i en række undergrupper. Inddelingen er sket på baggrund af SIC-koder (appendiks 11). F.eks. repræsenterer industrien "Coal" alle virksomheder med SIC-koder i intervallet 1200-1299. Det er virksomhederne, der primært er engageret i "Bituminous Coal and Lignite Surface Mining", "Bituminous Coal Underground Mining", "Anthracite Mining" og "Coal Mining Services" efter United States Department of Labor's klassifikation. Vi antager – uden at vide det – at eventuelle grænsetilfælde (konglomerater osv.) er placeret i den SIC-kode, der optager hovedparten af dens aktivitet. Se tabelnoten for yderligere information.

.

Tabel 6: Regressioner på industriniveau for CAPM og FFM3 i tidsperioden 07/1963-07/2019. Industrieme er defineret i appendiks 11. For hver måned beregnes R_i som det værdvægtede afkast i industri i . De månedlige risikopræmier er defineret i tabel 1. $t(a)$ er t -teststørrelsen for α_i . Den gennemsnitlige standardfejl (ikke vist) på $\hat{\beta}$ er 0,04 i CAPM, mens de er 0,04, 0,05 og 0,06 på hhv. $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}$ og $\hat{h}$ i FFM3

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i[R_m - R_f] + e_i \qquad R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i[R_m - R_f] + s_iSMB + h_iHML + e_i$$

Industri	CAPM				FFM3					
	α	$t(\alpha)$	b	R^2	α	$t(\alpha)$	b	s	h	R^2
Agric	0,13	0,64	0,87	0,37	0,06	0,32	0,81	0,39	0,07	0,40
Food	0,28	2,28	0,68	0,47	0,24	1,97	0,74	-0,17	0,14	0,50
Soda	0,34	1,72	0,81	0,33	0,28	1,43	0,88	-0,16	0,18	0,35
Beer	0,35	2,30	0,75	0,42	0,34	2,24	0,79	-0,14	0,05	0,43
Smoke	0,60	2,89	0,66	0,23	0,57	2,73	0,74	-0,27	0,15	0,25
Toys	-0,17	-0,90	1,17	0,52	-0,29	-1,57	1,11	0,49	0,19	0,56
Fun	0,28	1,54	1,36	0,62	0,19	1,03	1,30	0,44	0,14	0,64
Books	-0,05	-0,37	1,07	0,66	-0,18	-1,37	1,07	0,24	0,27	0,69
Hshld	0,10	0,86	0,80	0,59	0,13	1,13	0,83	-0,16	-0,04	0,60
Clths	0,14	0,85	1,10	0,57	-0,03	-0,21	1,09	0,36	0,35	0,62
Hlth	0,08	0,34	1,07	0,37	0,01	0,06	0,97	0,47	0,05	0,40
MedEq	0,30	2,23	0,90	0,58	0,40	3,09	0,85	0,05	-0,29	0,60
Drugs	0,27	2,00	0,81	0,52	0,43	3,40	0,82	-0,31	-0,33	0,58
Chems	0,00	-0,03	1,05	0,70	-0,13	-1,11	1,12	-0,06	0,33	0,73
Rubbr	0,12	0,81	1,08	0,62	-0,07	-0,53	1,01	0,60	0,32	0,72
Txtls	0,01	0,06	1,14	0,49	-0,33	-1,85	1,14	0,58	0,72	0,61
BldMt	-0,01	-0,08	1,18	0,72	-0,22	-1,91	1,21	0,26	0,47	0,77
Cnstr	-0,07	-0,44	1,30	0,63	-0,24	-1,48	1,25	0,48	0,30	0,68
Steel	-0,37	-2,04	1,30	0,60	-0,56	-3,25	1,28	0,41	0,39	0,64
FabPr	-0,21	-1,03	1,11	0,46	-0,36	-1,81	1,03	0,58	0,23	0,51
Mach	-0,05	-0,42	1,23	0,76	-0,14	-1,19	1,20	0,27	0,15	0,78
ElcEq	0,11	0,89	1,22	0,74	0,09	0,72	1,21	0,07	0,03	0,74

Autos	-0,19	-1,08	1,13	0,55	-0,46	-2,83	1,21	0,15	0,66	0,62
Aero	0,22	1,31	1,14	0,57	0,09	0,53	1,16	0,17	0,30	0,59
Ships	0,08	0,38	1,11	0,46	-0,13	-0,62	1,16	0,16	0,48	0,50
Guns	0,38	1,80	0,84	0,32	0,19	0,90	0,88	0,19	0,44	0,36
Gold	0,26	0,65	0,57	0,06	0,20	0,51	0,50	0,41	0,05	0,07
Mines	0,09	0,41	1,11	0,43	-0,09	-0,41	1,11	0,32	0,37	0,46
Coal	0,10	0,27	1,14	0,24	-0,06	-0,17	1,11	0,39	0,30	0,25
Oil	0,15	0,94	0,81	0,43	0,06	0,39	0,89	-0,19	0,27	0,46
Util	0,18	1,44	0,51	0,33	0,07	0,61	0,61	-0,19	0,32	0,41
Telcm	0,07	0,58	0,77	0,56	0,05	0,39	0,84	-0,20	0,11	0,58
PerSv	-0,26	-1,44	1,12	0,53	-0,36	-2,03	1,05	0,48	0,12	0,57
BusSv	0,10	0,83	1,16	0,78	0,24	2,49	1,15	0,34	-0,45	0,85
Hardw	-0,03	-0,17	1,21	0,59	0,18	1,13	1,08	0,19	-0,57	0,65
Softw	-0,42	-2,45	1,56	0,70	-0,52	-3,03	1,17	0,28	0,18	0,60
Chips	-0,05	-0,35	1,39	0,69	0,08	0,53	1,25	0,38	-0,42	0,75
LabEq	0,04	0,28	1,31	0,62	0,16	1,17	1,15	0,47	-0,40	0,76
Paper	0,05	0,36	0,98	0,58	-0,10	-0,79	1,04	-0,01	0,37	0,66
Boxes	0,10	0,72	0,96	0,67	0,07	0,48	1,00	-0,08	0,10	0,58
Trans	0,01	0,06	1,07	0,71	-0,15	-1,16	1,09	0,19	0,34	0,70
Whlsl	0,06	0,56	1,07	0,67	-0,02	-0,23	0,99	0,47	0,11	0,77
Rtail	0,16	1,33	1,00	0,58	0,15	1,21	0,99	0,07	0,02	0,68
Meals	0,27	1,75	1,04	0,63	0,21	1,38	1,01	0,23	0,09	0,59
Banks	0,00	-0,01	1,07	0,57	-0,24	-1,95	1,21	-0,15	0,64	0,72
Insur	0,15	1,04	0,95	0,50	0,00	0,00	1,05	-0,14	0,41	0,62
REst	-0,37	-1,76	1,24	0,79	-0,75	-4,20	1,19	0,88	0,74	0,66
Fin	0,06	0,55	1,23	0,58	-0,06	-0,53	1,25	0,13	0,26	0,80
Gnsn.	0,07	0,46	1,04	0,54	-0,02	-0,09	1,03	0,20	0,18	0,58

Af tabellen kan det ses, hvordan parameterestimerne af CAPM og FFM3 faktorloadings er forskellige fra industri til industri. Eksempelvis er CAPM faktorloading 1,07 for bogindustrien (Books), mens det er 1,30 for underholdningsindustrien (Fun) og 0,68 for madindustrien (Food). Afkastet på bogindustrien har stort set fulgt afkastet på markedsporteføljen, mens underholdningsindustrien har oplevet større udsving og madindustrien mindre. En mulig forklaring er, at det alt andet lige er lettere at vælge underholdning fra, når økonomien er dårligere, jf. afsnit 3.3.3. Både når det går godt, og når det går dårligt i markedet, har man brug for mad. Madindustrien er derfor som helhed mindre følsom over for risiko opfanget af markedsporteføljen. I forhold til FFM3 er parameterestimerne β , s og h for madindustrien hhv. 0,74, -0,17 og 0,15. Over perioden har industrien ikke opført sig som de mindste aktier, mens der har været en beskedent positiv samvariation med merafkastet på de relativt mest nødstedte virksomheder. Samvariationen er dog lavere end gennemsnittet for alle industrier (0,17), og industrien har derfor næppe været i nogen særegen nød. I forhold til CAPM er beta-estimatet en anelse højere i FFM3, og forklaringsgraden stiger fra 0,47 til 0,49. På tværs af industrier er FFM3 generelt bedre til at forklare variationen i afkast end CAPM, og den gennemsnitlige forklaringsgrad stiger fra 0,54 til 0,58.

Estimerne af faktorloadings ser ud til at være estimeret præcist. Den gennemsnitlige standardfejl på parameterestimatet af β er 0,04 i CAPM, mens de gennemsnitlige standardfejl på estimerne af β , s (SMB) og h (HML) i FFM3 er 0,04, 0,05 og 0,06. De lave standardfejl kan dog være misvisende, fordi de antager, at de sande parametre er konstante over tid. I den virkelige verden kan f.eks. ændringer i teknologi, forbrugsvaner og lovgivning føre til både midlertidige og permanente ændringer i industriers udbud og efterspørgsmål. Det vil blive undersøgt i de følgende afsnit.

5.3. Tidsvarierende faktorloadings for industrier

Tidsvariende faktorloadings kan illustreres med rullende regressioner af CAPM og FFM3. Hvis målefejlen på et parameterestimat er ukorreleret med den sande parameter, er tidsserievariansen af de rullende regressioner blot lig summen af variansen på målefejlen og den sande parametervarians:

$$\sigma^2(\hat{\beta}) = \sigma^2(\beta) + \sigma^2(\epsilon)$$

Hvor $\sigma^2(\beta)$ er den sande parametervarians, og $\sigma^2(\epsilon)$ er variansen på målefejlen. Tesen er, at hvis tidsserievariansen af de rullende regressioner er større end variansen på målefejlen, må den sande parametervarians være positiv.

Tabel 7 viser de implicitte standardafvigelser på parametrene i CAPM og FFM3 for de 48 industrier på baggrund af fem års rullende regressioner i tidsperioden 07/1963-07/2019. Se tabelnoten for yderligere information.

Tabel 7: Implicitte standardafvigelser på faktorloadings i CAPM og FFM3 med 5-års rullende regressioner i tidsperioden 07/1963-07/2019

$$\sigma(k) = \sqrt{\sigma^2(\hat{k}) - SE(\hat{k})^2}$$

CAPM		FFM3		
Industri	b	b	s	h
Agric	0,107	0,029	0,189	0,097
Food	0,147	0,071	0,099	0,160
Soda	0,170	0,160	0,050	0,245
Beer	0,169	0,090	0,170	0,169
Smoke	0,065	0,000	0,107	0,207
Toys	0,130	0,012	0,098	0,197
Fun	0,135	0,060	0,080	0,093
Books	0,132	0,060	0,089	0,099
Hshld	0,148	0,109	0,018	0,126
Clths	0,113	0,067	0,150	0,261
HIth	0,000	0,000	0,000	0,000
MedEq	0,105	0,028	0,000	0,247
Drugs	0,113	0,076	0,069	0,157
Chems	0,108	0,029	0,000	0,162
Rubbr	0,098	0,045	0,184	0,181
Txtls	0,236	0,076	0,039	0,256
BldMt	0,152	0,042	0,125	0,073
Cnstr	0,095	0,000	0,109	0,165
Steel	0,183	0,132	0,032	0,134
FabPr	0,064	0,033	0,164	0,246
Mach	0,053	0,054	0,068	0,136
ElcEq	0,014	0,000	0,151	0,050
Autos	0,167	0,097	0,100	0,189
Aero	0,078	0,006	0,173	0,187
Ships	0,189	0,040	0,141	0,163
Guns	0,321	0,200	0,091	0,178
Gold	0,122	0,107	0,044	0,054
Mines	0,168	0,179	0,134	0,219
Coal	0,086	0,079	0,000	0,275
Oil	0,096	0,057	0,095	0,234
Util	0,082	0,055	0,047	0,187
Telcm	0,125	0,109	0,077	0,063
PerSv	0,210	0,088	0,119	0,222
BusSv	0,071	0,016	0,090	0,100

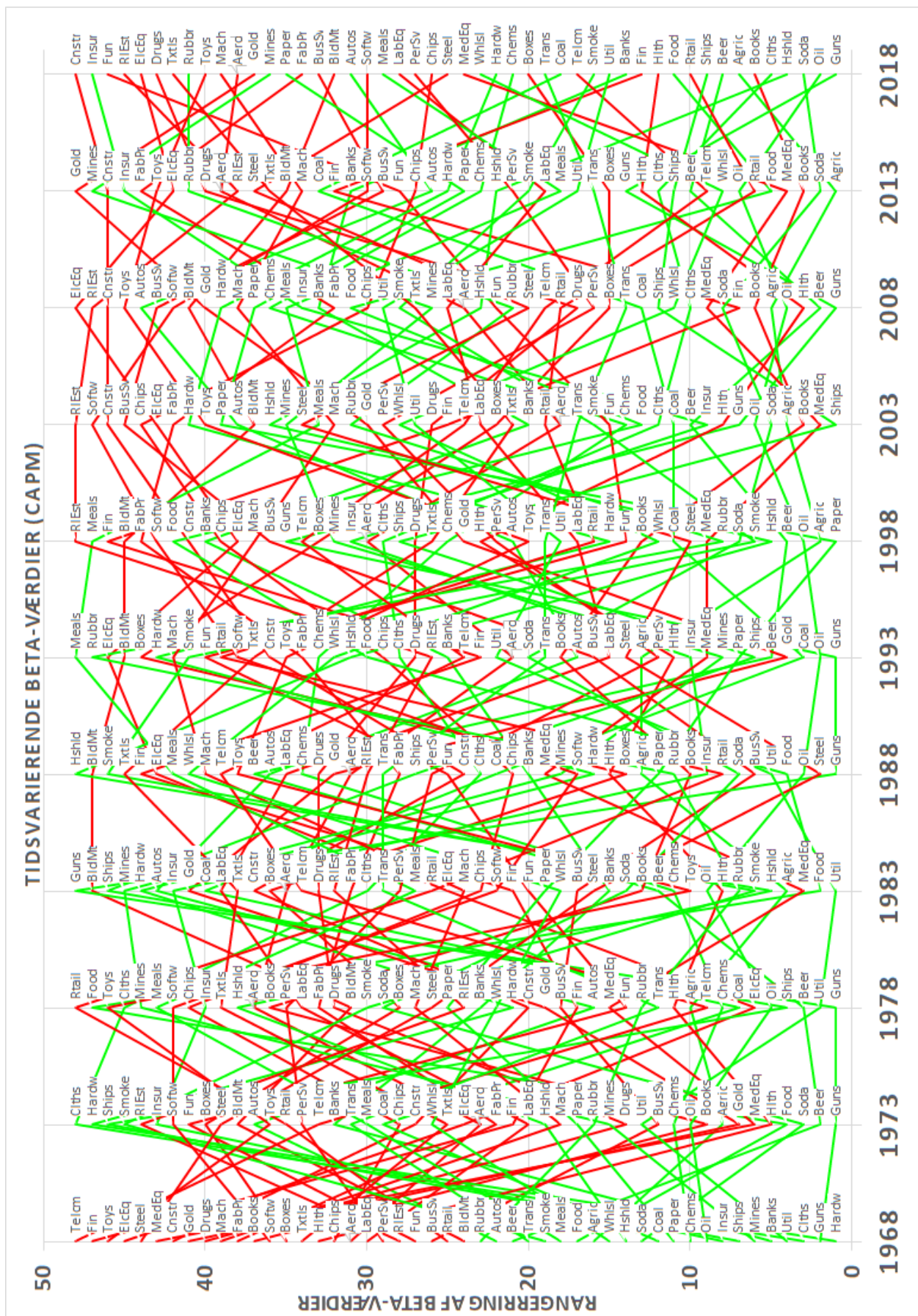
Hardw	0,194	0,116	0,049	0,158
Softw	0,080	0,000	0,753	0,208
Chips	0,178	0,119	0,062	0,199
LabEq	0,070	0,047	0,000	0,136
Paper	0,074	0,000	0,000	0,100
Boxes	0,069	0,072	0,050	0,117
Trans	0,107	0,041	0,034	0,078
Whlsl	0,171	0,026	0,174	0,155
Rtail	0,066	0,037	0,046	0,087
Meals	0,242	0,096	0,185	0,229
Banks	0,097	0,079	0,093	0,189
Insur	0,101	0,011	0,068	0,076
RIEst	0,316	0,145	0,122	0,114
Fin	0,129	0,118	0,039	0,067
Gennemsnit	0,128	0,064	0,105	0,156

Tabelnote: Industrierne er defineret i appendiks 11 og er de samme som i FF97. De månedlige risikopræmier er defineret i tabel 1. Hver måned (07/1963-07/2019) beregnes parameterestimerne på baggrund af de seneste fem års månedlige afkast efter formel (2) og (4). Den implicitte standardafvigelse beregnes som kvadratroden af forskellen mellem tidserievariansen på parameterestimerne og den gennemsnitlige kvadrerede standardfejl på estimerne. Den implicitte standardafvigelse sættes til 0, når den gennemsnitlige standardfejl på et estimat overstiger kvadratroden af tidsserievariansen på estimatet (og dermed indikerer en negativ standardafvigelse).

Af tabellen kan det ses, at de implicitte standardafvigelser for CAPM- og FFM3-faktorloadings er forskellige fra industri til industri. CAPM-faktorloadings er eksempelvis større i våbenindustrien (0,321) end i bankindustrien (0,097) og landbrugsindustrien (0,107). En mulig alt-andet-lige forklaring er, at våbenindustrien er mere udsat for midlertidige skift i udbud og efterspørgsel som følge af kortvarige internationale konflikter. Generelt er de implicitte standardafvigelser høje for CAPM-faktorloadings. 31 industrier har en standardafvigelse over 0,10, mens 5 har en standardafvigelse over 0,20. Den gennemsnitlige standardafvigelse er 0,128. Hvis den gennemsnitlige industri har en langsigtet beta på 1, kan den nuværende beta være alt mellem 0,749 og 1,251. Med en forventet risikopræmie svarende til det historiske gennemsnit (6,29 % årligt) kan det nuværende afkastkrav spænde mellem 4,72 % og 7,87 % i tillæg til den risikofrie rente.

For FFM3 er de implicitte standardafvigelser høje for HML-loadings. 37 industrier har en standardafvigelse over 0,1, 12 har en standardafvigelse over 0,2, mens den gennemsnitlige standardafvigelse er 0,156. For mange industrier er det ikke til at sige, om den nuværende HML-loading er høj eller lav, og om afkastet kommer til at samvariere meget eller lidt med afkastet på de relativt mest nødstedte virksomheder. De implicitte standardafvigelser på SMB-loadings ligeledes høje. 17 industrier har en standardafvigelse over 0,1, mens 2 har en standardafvigelse over 0,2. Den gennemsnitlige standardafvigelse er 0,105. For mange industrier er det heller ikke til at sige, om afkastet kommer til at opføre sig meget eller lidt som de relativt mindste selskaber, der historisk set har opnået højere afkast. Industrier med numerisk lave HML- og SMB-loadings er endda ringere stillet. For i standard 95%-konfidensintervaller vil deres nuværende loadings både kunne være negative og positive.

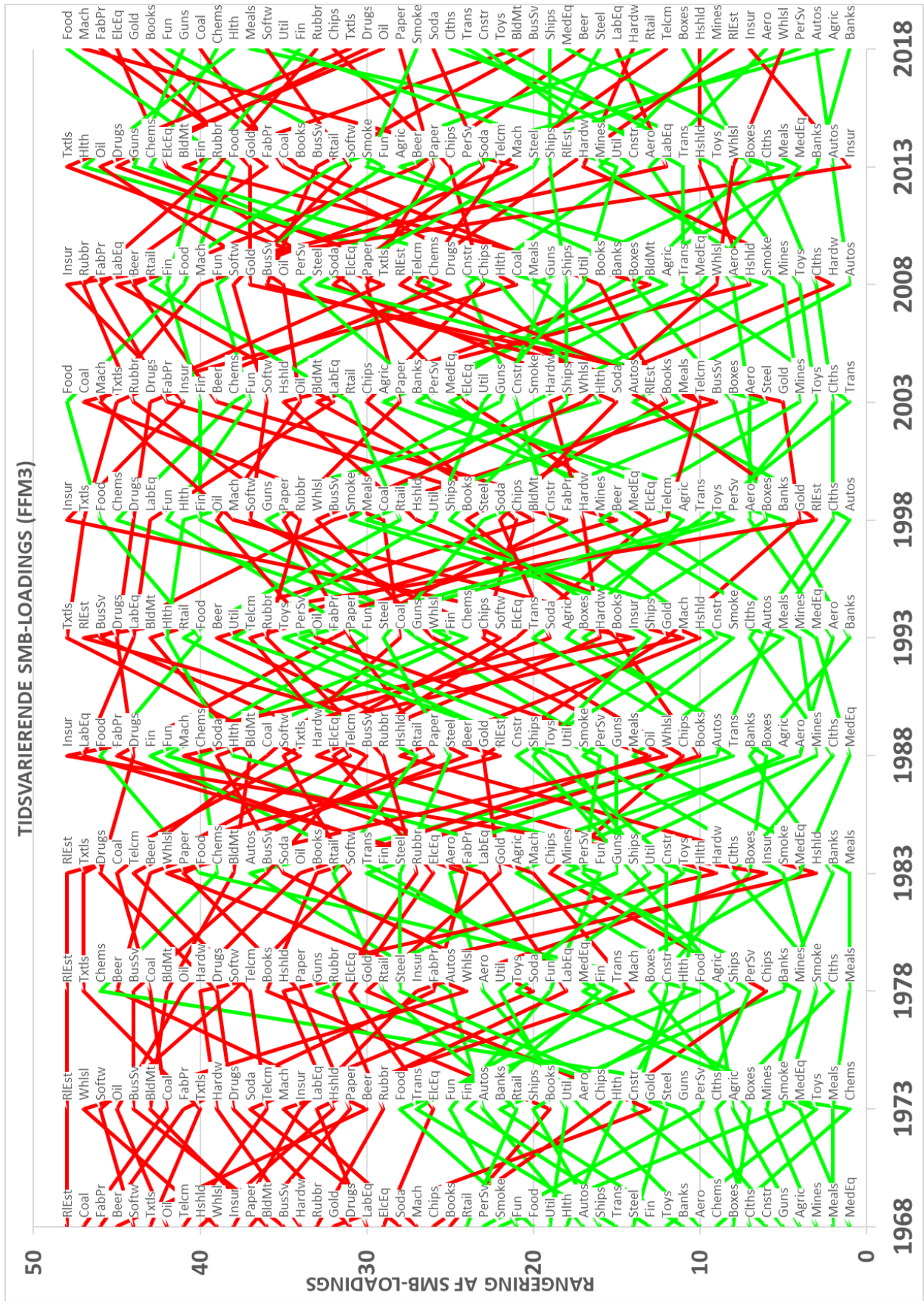
Opstår der løbende permanente ændringer i industriers udbud og efterspørgsel, er de sande faktorloadings ikke stationære, og tidsserievariansen vil ikke kunne bruges til at udlede den sande parametervarians. Er det tilfældet, kan tabel 3 kun tages til indtægt for, at de sande parametre ændrer sig over tid. Figur 12 på næste side viser rangeringen (fra lavest til højest) af industriernes CAPM-faktorloading, når det i stedet antages, at de seneste fem års data bedst reflekterer den sande loading for de følgende fem år.

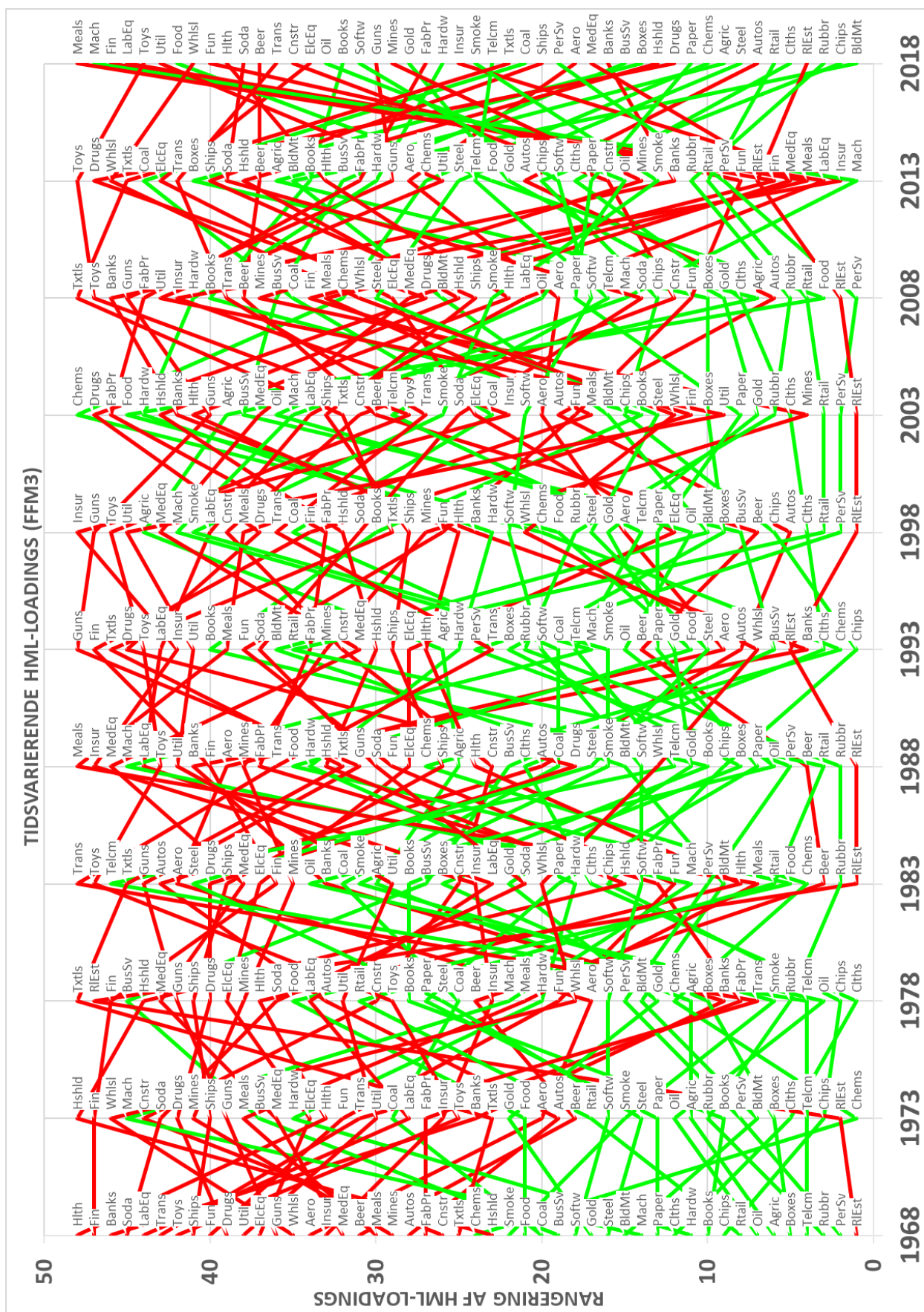


Af figuren kan det ses, hvordan rangeringen af industriernes beta-værdier varierer fra år til år. F.eks. har forsyningsindustrien (Util) den 4. laveste beta i år 1968, mens underholdningsindustrien (Fun) har den 27. højeste beta. Blot fem år senere rykker forsyningsindustrien op med ni pladser, mens underholdningsindustrien rykker op med 14 pladser. For begge industrier er samvariationen med markedsporteføljen derfor lavere i den første femårsperiode end i den efterfølgende femårsperiode. I de efterfølgende ni femårsperioder er forsyningsindustrien placeret i den nederste halvdel syv gange, mens underholdningsindustrien er placeret i den øverste halvdel fire gange. For underholdningsindustrien har det derfor været meget afhængigt af tidsperioden, om den har samvarieret meget eller lidt med markedsporteføljen målt i forhold til andre industrier.

For hver femårsperiode sker der generelt mange ændringer. Af industrierne, der er placeret i den nederste halvdel i 1968, er det kun 13 industrier, der er placeret i den nederste halvdel i 1973. Otte industrier forbliver i den nederste halvdel i de første femten år, mens det kun er to industrier, der forbliver i den nederste halvdel i hele tidsperioden 1968-2018. 17 af industrierne, der er placeret i den nederste halvdel i 1968, er dog også placeret i den nederste halvdel i 2018. Det kan tyde på, at CAPM-loadings over lange tidsperioder er mere stabile. Af industrierne, der er placeret i den øverste halvdel i 1968, er det kun 12 industrier, der er placeret i den øverste halvdel i 1973. Kun fire industrier forbliver i den øverste halvdel frem til 1983, og ingen industrier forbliver i den øverste halvdel i hele tidsperioden 1968-2018. 17 af industrierne, der er placeret i den øverste halvdel i 1968, er dog også placeret i den øverste halvdel i 2018, og det kan igen tyde på, at CAPM-loadings over lange tidsperioder er mere stabile. Over hele tidsperioden når en industri i gennemsnit at skifte mellem at være placeret i den øverste eller nederste halvdel 3,73 gange. Af de 15 industrier, der skifter fem eller flere gange, var 10 af dem placeret i enten den øverste eller nederste tredjedel i 1968. Der er derfor ikke tale om, at det kun er midterfeltet, der rykker frem og tilbage.

Selv om de mange skift måtte være en konsekvens af permanente ændringer i industriers udbud og efterspørgsel, har der historisk set været så mange ændringer, at det for mange industrier har været svært bare at forudsige, om en industri er i den øverste eller nederste halvdel i den følgende femårsperiode. For analytikeren bliver det derfor vanskeligt at vide på forhånd, hvordan markedsrisikopræmien bedst kan differentieres mellem aktiverne. På de to næste sider viser Figur 13 og 14 rangeringen (fra lavest til højest) af industriernes SMB- og HML-loading, når det antages, at de seneste fem års data bedst afspejler de sande loadings for de følgende fem år.





For hver femårsperiode ændres rangeringen af industriernes SMB-loadings meget. Af industrierne, der er placeret i den nederste halvdel i 1968, er der 21 industrier, der er placeret i den nederste halvdel i 1973. 13 industrier forbliver i den nederste halvdel helt frem til 1988, mens der er tre industrier, der forbliver i den nederste halvdel i hele tidsperioden 1968-2018. Af industrierne, der er placeret i den øverste halvdel i 1968, er der 21 industrier, der er placeret i den øverste halvdel i 1973. 10 industrier forbliver i den øverste halvdel helt frem til 1988, mens der er fire industrier, der forbliver i den øverste halvdel i hele tidsperioden 1968-2018. Over hele tidsperioden når en industri i gennemsnit at skifte halvdel 2,79 gange, og antallet af store udsving er derfor lavere end for industriernes CAPM-faktorloadings. En mulig forklaring er, at det i nogle industrier er lettere at opnå stordriftsfordele end i andre. Industrierne vil derfor alt-andet-lige være domineret af færre større aktører, og det gør deres SMB-loadings lavere og mere stabile over tid.

Rangeringen af HML-faktorloadings ændrer sig meget over tid. Af industrierne, der er placeret i den nederste halvdel i 1968, er der 19 industrier, der er placeret i den nederste halvdel igen i 1973. Syv industrier forbliver i den nederste halvdel helt frem til 1988, mens der er tre industrier, der forbliver i den nederste halvdel i hele tidsperioden 1968-2018. Af industrierne, der er placeret i den øverste halvdel i 1968, er der 20 industrier, der er placeret i den øverste halvdel igen i 1973. Otte industrier forbliver i den øverste halvdel helt frem til 1988, mens der kun er to industrier, der forbliver i den øverste halvdel i hele tidsperioden 1968-2018. I gennemsnit når en industri at skifte halvdel 3,29 gange, og 28 industrier skifter halvdel fire eller flere gange. Der er ganske få industrier, der under hele tidsperioden opfører sig konsekvent i forhold til porteføljen med de relativt mest nødstedte selskaber.

Selv om de mange skift i HML-faktorloadings måtte være en konsekvens af permanente ændringer, har der historisk set været så mange ændringer, at det har været svært at forudsige, om en industri vil befinde sig i den øverste eller nederste halvdel i den følgende femårsperiode. Selv om SMB-faktorloadings har været en anelse mindre volatile, er det næppe meget værd at vide, om en industri befinder sig i den ene eller den anden halvdel i fremtiden. Det er der for mange industrier til, og det bliver derfor ikke væsentligt lettere at differentiere de forventede risikopræmier mellem industrierne. For det enkelte selskab vil problemet naturligvis kun være større, fordi der skal mindre til, før de sande faktorloadings ændrer sig. For industrierne og de enkelte selskaber gælder desuden det forhold, at tidsvarierende faktorloadings ikke nødvendigvis bliver bedst afspejlet af de seneste års data. Tallene er muligvis mere aktuelle, men målefejlene på parameterestimerne kan være tilsvarende større. Det vil blive undersøgt i de følgende afsnit.

5.4. Optimal estimering af CAPM- og FFM3-faktorloadings

Hvis de sande faktorloadings er tidsvarierende, vil de sande afkastkrav også være det. Det forventede afkast for næste år kan være forskelligt fra det forventede afkast 10 år ud i fremtiden. For at afspejle investors offeromkostning kan det betyde, at det enkelte selskab bør anvende adskillige afkastkrav i dets NPV-beregninger alt efter løbetiden på de underliggende betalingsstrømme.

Under standardantagelsen om at realiserede afkast svarer til forventede afkast, kan det undersøges, hvilken estimationsmetode der har været bedst til at modellere afkastkrav. Ovenfor så vi, at faktorloadings er volatile over tid. Forhåndsformodningen er derfor, at CAPM og FFM3 er bedre til at forklare afkast, når faktorloadings baseres på 'korte' regressioner, dvs. de seneste 3-5 års afkastdata. For meget lange forecasthorisonter er forhåndsformodningen dog afhængig af typen af tidsvarians. Hvis de sande faktorloadings er stationære, er CAPM og FFM3 formentlig bedre til at forklare afkast, når faktorloadings baseres på 'lange' regressioner, dvs. al tilgængeligt data på tidspunktet for forudsigelsen. Skyldes tidsvariationen derimod permanente ændringer i de sande faktorloadings, er CAPM og FFM3 formentlig bedre til at forklare afkast, når faktorloadings baseres på korte regressioner.

Testvarianterne

I de følgende afsnit tester vi CAPM og FFM3's evne til at forklare afkast for forecasthorisonterne:

- 1 måned frem i tiden
- 1 år frem i tiden
- 2 år frem i tiden
- 3 år frem i tiden
- 4 år frem i tiden
- 5 år frem i tiden
- 10 år frem i tiden
- 15 år frem i tiden

CAPM- og FFM3-faktorloadings vil blive estimeret med rullende regressioner i lighed med Fama-MacBeth (1973), og vi tester estimationsmetoderne

1. Rullende regressioner med de seneste 3 års månedlige data
2. Rullende regressioner med de seneste 4 års månedlige data
3. Rullende regressioner med de seneste 5 års månedlige data

4. Rullende regressioner med hele den observerbare periode (dvs. al tilgængelig afkastdata på tidspunktet for forudsigelsen)
5. Blume-justerede faktorloadings
6. Vasicek-justerede faktorloadings
7. 1-4 med daglige afkastobservationer
8. Dimson-justerede faktorloadings med daglige afkastobservationer"

For at gøre testene sammenlignelige ender estimationsperioden for det *første* forecast altid i juni 1968. For regressionerne baseret på de seneste 3 års data betyder det eksempelvis, at faktorloadings for det *første* forecast er baseret på observationerne fra juli 1965 til juni 1968, mens faktorloadings for det *andet* forecast er baseret på observationerne fra august 1965 til juli 1968. For regressionerne baseret på hele den observerbare periode vil faktorloadings for det *første* forecast derfor være baseret på observationerne fra juni 1963 til juni 1968, mens faktorloadings for det *andet* forecast vil være baseret på observationerne fra juni 1963 til juli 1968 osv. osv.

Forecastet for måned $t + i$ bruger faktorloadings baseret på $t - n$ ($n = 36, 48, 60$ og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned $t + i$. I den virkelige verden vil risikopræmierne for måned $t + i$ være ukendt, når man står i periode t . Vores test vil derfor kun sige noget om, hvor godt eller dårligt det havde været at bruge en bestemt estimationsmetode i tidsperioden 1963-2019. For de, der tilmed forsøgte at estimere risikopræmierne for måned $t + i$, vil de gennemsnitlige forecast-fejl kun have været større. For nuværende er vi dog kun interesseret i at undersøge den optimale estimationsmetode for CAPM- og FFM3-faktorloadings.

Forecast-perioden løber frem til juni 2019, og for alle konfigurationer af $t + i$ ($i = 1, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180$) foretages 672 regressioner per industri, når der anvendes månedlige afkastobservationer. For daglige afkastobservationer foretages 14072 regressioner per industri. Vi har inddelt undersøgelsen, så vi først undersøger modellernes evne til at forklare afkast 1 måned frem i tiden, når der anvendes månedlige afkastdata for estimationsmetoderne "1-4" fra den nummererede liste ovenfor. Vi undersøger herefter de samme estimationsmetoders evne til at forklare afkast for længere løbetider. Til sidst undersøger vi, om variationerne "5-8" fører til væsentligt andre resultater.

5.4.1. Modellernes evne 1 måned frem i tiden

Tabel 8: CAPM's evne til at forklare afkast 1 måned frem i tiden, når faktorloadings baseres på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode (dvs. al tilgængelig data på tidspunktet for forecastet). Industrieme er defineret i Appendix 11. CAPM-faktorloadings for den enkelte industri er estimeret hver måned fra 7/1968 til og med 6/2019 og er baseret på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode fra 1963 og frem. Tabellen viser den enkelte industris gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelsen for forecast-fejlene (RMSE) i forecastperioden. Forecast-fejlene bestemmes som forskellen mellem forecastet fortidspunkt $t+1$ og det faktiske afkast til tidspunkt $t+1$. Forecastet for måned $t + i$ bruger faktorloadings baseret på $t - n$ ($n = 36, 48, 60$ og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned $t + i$.

	3-års rullende regression		4-års rullende regression		5-års rullende regression		Fuld periode regression	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Agric	3,84	5,10	3,82	5,07	3,82	5,07	3,82	5,10
Food	2,34	3,21	2,34	3,21	2,33	3,19	2,39	3,30
Soda	3,89	5,37	3,88	5,34	3,87	5,34	3,82	5,29
Beer	2,94	3,95	2,93	3,95	2,91	3,94	2,99	4,00
Smoke	4,12	5,57	4,12	5,55	4,09	5,52	4,09	5,51
Toys	3,60	4,73	3,60	4,72	3,59	4,70	3,67	4,81
Fun	3,70	4,84	3,67	4,81	3,69	4,81	3,71	4,87
Books	2,50	3,37	2,51	3,37	2,49	3,36	2,53	3,41
Hshld	2,14	2,92	2,13	2,91	2,14	2,92	2,18	3,02
Clths	3,19	4,31	3,22	4,33	3,23	4,33	2,23	4,34
Hlth	4,27	6,14	4,28	6,17	4,31	6,20	4,38	6,39
MedEq	2,68	3,44	2,68	3,45	2,68	3,44	2,70	3,46
Drugs	2,62	3,51	2,64	3,52	2,62	3,51	2,67	3,55
Chems	2,32	3,09	2,31	3,08	2,31	3,07	2,33	3,14
Rubbr	2,64	3,60	2,65	3,59	2,65	3,58	2,64	3,65
Txtls	3,59	5,15	3,56	5,11	3,58	5,12	3,56	5,27
BldMit	2,40	3,24	2,41	3,26	2,40	3,26	2,42	3,37
Cnstr	3,33	4,32	3,34	4,33	3,35	4,34	3,37	4,33
Steel	3,66	4,72	3,65	4,70	3,65	4,69	3,69	4,82

FabPr	4,08	5,42	4,07	5,40	4,07	5,38	4,07	5,37
Mach	2,45	3,16	2,44	3,15	2,43	3,13	2,42	3,14
ElcEq	2,55	3,24	2,52	3,21	2,51	3,20	2,51	3,18
Autos	3,39	4,64	3,37	4,61	3,36	4,60	3,37	4,69
Aero	3,19	4,34	3,19	4,34	3,16	4,31	3,15	4,31
Ships	3,99	5,30	3,99	5,29	3,99	5,29	4,09	5,44
Guns	3,78	5,11	3,79	5,14	3,81	5,18	3,90	5,43
Gold	7,86	10,47	7,90	10,51	7,91	10,50	7,48	10,43
Mines	4,49	5,70	4,47	5,69	4,47	5,68	4,48	5,74
Coal	6,97	9,53	6,97	9,51	6,97	9,48	6,93	9,40
Oil	3,29	4,29	3,29	4,29	3,30	4,29	3,31	4,30
Util	2,59	3,33	2,59	3,31	2,56	3,29	2,57	3,33
Telcm	2,38	3,07	2,34	3,03	2,35	3,03	2,39	3,10
PerSv	3,34	4,48	3,37	4,49	3,40	4,51	3,48	4,61
BusSv	2,25	2,95	2,23	2,95	2,23	2,94	2,28	3,00
Comps	3,28	4,36	3,27	4,33	3,25	4,43	3,31	4,49
Softw	3,14	4,45	3,14	4,44	3,15	4,48	3,19	4,48
Chips	2,94	3,98	2,96	4,00	2,95	4,00	2,98	4,12
LabEq	2,88	3,91	2,89	3,92	2,88	3,90	2,91	3,89
Paper	2,46	3,43	2,45	3,42	2,44	3,40	2,46	3,45
Boxes	2,85	3,76	2,86	3,75	2,86	3,76	2,84	3,73
Trans	2,56	3,34	2,55	3,33	2,55	3,33	2,59	3,39
Whlsl	2,03	2,74	2,03	2,74	2,03	2,75	2,10	2,91
Rtail	2,38	3,15	2,36	3,13	2,35	3,12	2,39	3,15
Meals	2,79	3,66	2,76	3,62	2,73	3,60	2,90	3,90
Banks	2,72	3,71	2,72	3,72	2,70	3,70	2,70	3,67
Insur	2,55	3,56	2,55	3,56	2,53	3,53	2,53	3,58
REst	3,64	5,29	3,64	5,28	3,64	5,26	3,82	5,57
Fin	2,00	2,78	1,99	2,77	1,99	2,77	2,10	2,87
Gnsn.	3,22	4,33	3,22	4,32	3,21	4,32	3,23	4,38

Af tabellen kan det ses, at CAPM's evne til at forklare afkast 1 måned frem i tiden varierer mellem industrierne og estimationsmetoderne. Eksempelvis er den gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelse på forecast-fejlene (RMSE) hhv. 2,50 % og 3,37 % for bogindustrien (Books), når faktorloadings baseres på de seneste 3 års data, mens de er hhv. 2,51 % og 3,37 %, når faktorloadings baseres på de seneste 4 års data. For 5 års data falder MAE og RMSE til hhv. 2,49 % og 3,36 %, mens de stiger til hhv. 2,53 % og 3,41 %, når hele den observerbare periode anvendes. Forskellene er små – men reelle – og for bogindustrien har det derfor været en fordel at basere faktorloadings på de seneste 5 års data. En mulig forklaring er, at CAPM-faktorloadings i bogindustrien har været tilstrækkeligt tidsvarierende til, at kortere regressioner har kunnet gøre op for deres større målefejl.

For 20 industrier er forskellene på niveau med bogindustrien. Deres MAE spænder i gennemsnit med 0,03 procentpoint alt efter valget af estimationsmetode. For 25 industrier er forskellene væsentligt større. For ejendomsindustrien (REst) stiger MAE f.eks. fra 3,64 % ved kortere regressioner til 3,82 %, når faktorloadings baseres på hele den observerbare periode. En mulig forklaring er, at den finansielle krise i 2008 har ført til store ændringer i den amerikanske ejendomsindustri. Hvis det er tilfældet, kan faktorloadings baseret på lange tidsperioder være særdeles biased. Dog stiger målefejlen med færre observationer, og det er derfor ikke givet, at estimerer baseret på lange tidsperiode er dårligere. Det er en 'kamp' mellem aktualitet og målefejl.

Set over alle industrier er kortere regressioner generelt bedre til at forklare afkastet 1 måned frem i tiden. I gennemsnit producerer CAPM MAE og RSME på hhv. 3,22 % og 4,33 %, når faktorloadings baseres på de seneste 3 års data, mens de hhv. 3,22 % og 4,32 %, når faktorloadings baseres på de seneste 4 års data. For 5 års data falder MAE og RSME i gennemsnit til hhv. 3,21 % og 4,32 %, mens de stiger til hhv. 3,23 % og 4,38 %, når hele den observerbare periode anvendes.

Tabel 9: FFM3's evne til at forklare afkast 1 måned frem i tiden, når faktorloadings baseres på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode (dvs. al tilgængelig data på tidspunktet for forecastet). Industriene er defineret i Appendix 11. FFM3-faktorloadings for den enkelte industri er estimeret hver måned fra 7/1968 til og med 6/2019 og er baseret på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode fra 1963 og frem. Tabellen viser den enkelte industris gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelsen for forecast-fejlene (RMSE) i forecastperioden. Forecast-fejlene bestemmes som forskellen mellem forecastet for tidspunkt $t+1$ og det faktiske afkast til tidspunkt $t+1$. Forecastet for måned $t + i$ bruger faktorloadings baseret på t – n ($n = 36, 48, 60$ og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned $t + i$.

	3-års rullende regression		4-års rullende regression		5-års rullende regression		Fuld periode regression	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
Agric	3,77	5,03	3,72	4,97	3,73	5,07	3,75	5,02
Food	2,32	3,12	2,29	3,07	2,29	3,19	2,38	3,25
Soda	3,88	5,40	3,82	5,31	3,80	5,34	3,79	5,28
Beer	2,89	3,94	2,88	3,93	2,87	3,94	2,99	4,01
Smoke	4,02	5,52	3,95	5,42	3,92	5,52	4,03	5,45
Toys	3,50	4,56	3,48	4,52	3,54	4,70	3,64	4,69
Fun	3,73	4,81	3,65	4,71	3,68	4,81	3,66	4,75
Books	2,48	3,32	2,48	3,30	2,46	3,36	2,48	3,33
Hshld	2,11	3,02	2,09	2,98	2,07	2,92	2,13	3,03
Clths	2,91	3,87	2,95	3,92	2,97	4,33	3,01	4,19
Hlth	4,01	5,63	4,05	5,76	4,04	6,20	4,28	6,33
MedEq	2,48	3,25	2,48	3,25	2,47	3,44	2,58	3,39
Drugs	2,44	3,20	2,47	3,23	2,48	3,51	2,53	3,34
Chems	2,32	3,03	2,27	2,98	2,26	3,07	2,26	3,01
Rubbr	2,35	3,19	2,33	3,16	2,33	3,58	2,46	3,30
Txtls	3,34	4,62	3,30	4,58	3,33	5,12	3,28	4,66
BldMt	2,23	2,96	2,22	2,97	2,21	3,26	2,24	3,07
Cnstr	3,16	4,08	3,17	4,05	3,16	4,34	3,26	4,21
Steel	3,59	4,75	3,58	4,53	3,57	4,69	3,53	4,60

Steel	3,59	4,75	3,58	4,53	3,57	4,69	3,53	4,60
FabPr	3,94	5,19	3,95	5,19	3,94	5,38	3,83	5,09
Mach	2,35	3,07	2,33	3,03	2,33	3,13	2,33	3,04
ElcEq	2,55	3,23	2,53	3,19	2,54	3,20	2,54	3,23
Autos	3,20	4,39	3,20	4,36	3,19	4,60	3,17	4,33
Aero	3,14	4,15	3,10	4,11	3,07	4,31	3,18	4,28
Ships	4,02	5,25	4,00	5,21	4,00	5,29	4,02	5,31
Guns	3,76	5,09	3,75	5,07	3,79	5,18	3,92	5,34
Gold	8,06	10,83	8,04	10,77	7,95	10,50	7,77	10,43
Mines	4,38	5,57	4,41	5,60	4,33	5,68	4,40	5,62
Coal	7,15	9,48	7,07	9,70	6,97	9,48	6,88	9,37
Oil	3,26	4,28	3,22	4,23	3,21	4,29	3,28	4,21
Util	2,39	3,09	2,36	3,06	2,32	3,29	2,42	3,16
Telcm	2,27	3,00	2,25	2,97	2,28	3,03	2,30	3,04
PerSv	3,17	4,29	3,18	4,25	3,17	4,51	3,31	4,52
BusSv	1,75	2,33	1,73	2,30	1,73	2,94	1,85	2,53
Comps	3,15	4,10	3,12	4,07	3,10	4,43	3,17	4,19
Softw	2,94	4,26	2,94	4,29	2,94	4,48	3,15	4,49
Chips	2,67	3,60	2,66	3,60	2,69	4,00	2,75	3,75
LabEq	2,64	3,58	2,63	3,55	2,59	3,90	2,59	3,47
Paper	2,49	3,36	2,48	3,35	2,43	3,40	2,42	3,31
Boxes	2,87	3,78	2,88	3,79	2,85	3,76	2,84	3,73
Trans	2,53	3,24	2,49	3,20	2,50	3,33	2,51	3,26
Whlsl	1,70	2,38	1,69	2,38	1,70	2,75	1,84	2,74
Rtail	2,39	3,18	2,37	3,15	2,35	3,12	2,39	3,17
Meals	2,61	3,40	2,61	3,39	2,59	3,60	2,88	3,99
Banks	2,37	3,11	2,38	3,15	2,36	3,70	2,37	3,17
Insur	2,44	3,36	2,43	3,33	2,41	3,53	2,46	3,39
REst	3,18	4,51	3,18	4,56	3,17	5,26	3,23	4,68
Fin	1,96	2,74	1,94	2,72	1,94	2,77	1,99	2,78
Gnsn.	3,10	4,15	3,09	4,13	3,08	4,11	3,13	4,22

Af tabel 9 ses det, at FFM3's evne til at forklare afkast 1 måned frem også varierer fra industri til industri, men at MAE i gennemsnit er cirka 0,10 procentpoint lavere end CAPM-forudsigelserne. For 14 industrier fører valget af estimationsmetode til et spænd i MAE på højst 0,03 procentpoint. Målt i forhold til CAPM er der derfor flere industrier, hvor valget af estimationsmetode fører til større forskelle. En mulig forklaring er, at der hurtigere opstår permanente skift i FFM3-faktorloadings, fordi det kan ske for hver enkelt af faktorerne, uden det nødvendigvis sker for de to andre. Forskellene mellem at anvende korte regressioner eller hele den observerbare periode kan derfor hurtigt blive store.

For 3 industrier opnås der en i gennemsnit en større forecast-præcision, når FFM3-faktorloadings baseres på fulde observerbare perioder. Det er industrier, hvor faktorloadings var særligt volatile i figur 12-14. F.eks. er MAE og RMSE for kulindustrien (Coal) hhv. 7,15 % og 9,48 %, når faktorloadings baseres på de seneste 3 års data, mens de er hhv. 7,07 % og 9,70 %, når faktorloadings baseres på de seneste 4 års data. For 5 års data falder MAE og RMSE til hhv. 6,97 % og 9,48 %, mens de falder yderligere til hhv. 6,88 % og 9,37 %, når faktorloadings baseres på hele den observerbare periode. MAE og RMSE er ganske høje i kulindustrien, og en mulig forklaring, at industriens faktorloadings har ændret sig så ofte, at selv de seneste tre års data er uaktuelle for afkastet 1 måned frem. At hele den observerbare periode 'vinder' er blot et udtryk for, at den gør en ellers 'dårlig' forudsigelse mindre tilfældig pga. flere observationer og en lavere målefejl. Set over alle industrier har kortere regressioner dog generelt været bedre til at forudsige afkastet 1 måned frem i tiden. For regressionerne baseret på de seneste 3, 4 og 5 års data er de gennemsnitlige MAE hhv. 3,10 %, 3,09 % og 3,08 %, mens de gennemsnitlige RMSE er 4,15 %, 4,13 % og 4,11 %. For regressionerne baseret på den fulde observerbare tidsperiode er de hhv. 3,13 % og 4,22 %.

Valget af estimationsmetode ændrer dog ikke på, at CAPM og FFM3, begge har været dårlige til at forklare afkastet 1 måned frem i tiden.

5.4.2. Modellernes evne flere år frem i tiden

Tabel 10 viser CAPM's gennemsnitlige evne til at forklare industriernes afkast for forskellige løbetider, når faktorloadings baseres på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode (dvs. al tilgængelig data på tidspunktet for forecastet)

$$CAPM - \text{en faktor regression: } R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)								
3-års rullende	3,22	3,27	3,30	3,31	3,35	3,38	3,41	3,43
4-års rullende	3,22	3,26	3,28	3,31	3,35	3,39	3,40	3,42
5-års rullende	3,21	3,26	3,29	3,31	3,36	3,40	3,39	3,40
Fuld periode	3,23	3,27	3,28	3,28	3,30	3,29	3,32	3,36
Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)								
3-års rullende	4,33	4,41	4,43	4,44	4,51	4,56	4,60	4,64
4-års rullende	4,32	4,38	4,41	4,44	4,52	4,59	4,57	4,61
5-års rullende	4,32	4,38	4,43	4,47	4,54	4,60	4,56	4,60
Fuld periode	4,38	4,41	4,43	4,43	4,46	4,48	4,48	4,55

Tabel 10: Industrierne er defineret i Appendiks 11. CAPM-faktorloadings for den enkelte industri er estimeret hver måned fra 7/1968 til og med 6/2019 og er baseret på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode fra 1963 og frem. Tabellen viser den enkelte industris gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelsen for forecast-fejlene (RMSE) i forecastperioden. Forecast-fejlene bestemmes som forskellen imellem forecastet for tidspunkt $t+i$ ($i = 1, 12, 24, 36, 48, 60, 120$ og 180 måneder) og det faktiske afkast til tidspunkt $t+i$. Forecastet for måned $t + i$ bruger faktorloadings baseret på $t - n$ ($n = 36, 48, 60$ og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned $t + i$.

Af tabellen ses det, at CAPM bliver dårligere og dårligere til at forklare afkast, jo længere forecasthorisonten er. For forecasts 1 år frem i tiden ses det, at valget af estimationsmetode generelt ikke har betydet meget – MAE ændres højst med 0,01 procentpoint. Her har faktorloadings formentlig stadig været tilstrækkeligt tidsvarierende til, at de kortere regressioner gør op for deres højere målefejl. For forecasts 2 år frem i tiden er valget af estimationsmetode stadig uden voldsom

betydning – MAE ændres højest med 0,02 procentpoint. Hvis tidsvariationen i faktorloadings over bred kam kan henføres til permanente ændringer i industriernes udbud og efterspørgsel, skulle regressioner baseret på hele den observerbare periode blive relativt dårligere til at forecaste, i takt med at forecasthorisonten udvides. Det er imidlertid ikke tilfældet. For forecasts 3 år eller mere frem i tiden er regressioner baseret på hele den observerbare periode bedst. F.eks. fører de til en gennemsnitlig MAE og RMSE på 3,32 % og 4,48 % 10 år frem i tiden, mens regressionerne baseret på få års data spænder mellem 3,39-3,41% og 4,56-4,60%. Det tyder i stedet på, at tidsvariationen i faktorloadings kun er midlertidig, og at beta over lange tidsperioder er mere stabil. For den gennemsnitlige industri har det derfor klart været en fordel at bruge hele den observerbare periode til at estimere CAPM-faktorloadings, når man har skullet bruge forventede afkast og afkastkrav til betalingsstrømme med lange løbetider, mens korte regressioner har været overlegne for forventede afkast for løbetider på højest 1 år.

Tabel 11: FFM3's evne til at forklare afkast frem i tiden, når faktorloadings baseres på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode (dvs. al tilgængelig data på tidspunktet for forecastet)

<i>FFM3 – tre faktor regression; $R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + s_iSMB + h_iHML + \varepsilon_i$</i>								
	1							
	måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
<i>Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)</i>								
3-års rullende	3,10	3,22	3,29	3,35	3,40	3,42	3,50	3,49
4-års rullende	3,09	3,19	3,27	3,31	3,35	3,39	3,45	3,44
5-års rullende	3,08	3,18	3,25	3,29	3,34	3,38	3,43	3,40
Fuld periode	3,13	3,18	3,21	3,22	3,24	3,26	3,30	3,34
<i>Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)</i>								
3-års rullende	4,15	4,33	4,45	4,52	4,60	4,64	4,78	4,75
4-års rullende	4,13	4,28	4,40	4,47	4,53	4,61	4,69	4,69
5-års rullende	4,11	4,27	3,39	4,44	4,52	4,59	4,68	4,64
Fuld periode	4,22	4,31	4,36	4,38	4,52	4,44	4,50	4,59

Tabel 11: Industrierne er defineret i Appendiks 11. FFM3-faktorloadings for den enkelte industri er estimeret hver måned fra 7/1968 til og med 6/2019 og er baseret på de seneste 3, 4 og 5 års månedlige data eller den fulde observerbare periode fra 1963 og frem. Tabellen viser den gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelsen for forecast-fejlene (RMSE) rapporteret som et gennemsnit på tværs af industrierne. Forecast-fejlene bestemmes som forskellen imellem forcecastet for tidspunkt $t+i$ ($i = 1, 12, 24, 36, 48, 60, 120$ og 180 måneder) og det faktiske afkast til tidspunkt $t+i$. Forecastet for måned $t + i$ bruger faktorloadings baseret på $t - n$ ($n = 36, 48, 60$ og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned $t + i$.

Af tabellen ses det, at FFM3 også bliver dårligere og dårligere til at forklare afkast, jo længere forecasthorisonten er. For forecasts 1 år frem i tiden ses det, at valget af estimationsmetode generelt betyder noget – MAE ændres med op til 0,04 procentpoint. En mulig forklaring er igen, at der hurtigere kan opstå permanente skift i FFM3-faktorloadings, fordi det kan ske for en enkelt af faktorerne, uden det nødvendigvis sker for de to andre. Forskellene mellem at anvende korte regressioner eller hele den observerbare periode kan derfor hurtigt blive store. For forecasts 2 år frem i tiden er valget af estimationsmetode af større betydning – MAE ændres med op til 0,08 procentpoint. Jo længere forecasthorisonten bliver, jo større bliver spændet mellem metoderne, fordi de kortere regressioner bliver relativt værre til at forudsige afkast. F.eks. er den gennemsnitlige MAE og RMSE hhv. 3,22 % og 4,33 % for forecasts 1 år frem i tiden, når faktorloadings er baseret på de seneste 3 års data, mens de er hhv. 3,18 % og 4,31 %, når faktorloadings er baseret på hele den observerbare periode. For forecasts 15 år frem i tiden er den gennemsnitlige MAE og RMSE hhv. 3,49 % og 4,75 %, når de seneste 3 års data anvendes, mens de er 3,34 % og 4,59 %, når hele tidsperioden anvendes. Der er derfor ikke noget, der tyder på, at tidsvariationen i faktorloadings generelt kan henføres til permanente skift. I stedet ser det ud til, at også FFM3-faktorloadings over lange tidsperioder er mere stabile. For den gennemsnitlige industri har det derfor også været en fordel at bruge hele den observerbare periode til at estimere FFM3-faktorloadings, når man har skullet bruge forventede afkast og afkastkrav til betalingsstrømme med lange løbetider, mens korte regressioner har været overlegne for forventede afkast for løbetider på højest 1 år.

I forhold til CAPM-forudsigelserne er det næppe bemærkelsesværdigt, at FFM3 generelt er bedre til at forudsige afkast, når faktorloadings baseres på hele den observerbare periode. Det er derimod mere bemærkelsesværdigt, at CAPM fører til lavere MAE for forecasts med løbetider over 2 år, når kun de kortere regressioner sammenlignes. FFM3 har derfor ikke været CAPM overlegen på alle parametre. Valget af estimationsmetode ændrer dog ikke på, at CAPM og FFM3 begge har været dårlige til at forudsige afkast på kort og på lang sigt. Hvis modellerne stiller et afkast på 5 % i sigte, vil man formentlig føle sig temmelig narret, hvis afkastet i gennemsnit er 3 procentpoint ved siden af. Når præcisionen tilmed afhænger af den enkelte industri, bliver det kun yderligere kompliceret for de enkelte selskaber. De må midt i al støjen afgøre, om de tilstrækkeligt 'ligner' industrien som helhed, eller om der kan være særforhold, f.eks. gældsætningsgraden, der ikke tåler sammenligning. Dog vil det enkelte selskab kunne trøste sig med, at valget af estimationsmetode historisk set kun har haft betydning for, om forecastet har været elendigt eller bare meget dårligt.

5.4.3. Robusthedsanalyse med Blume, Vasicek, Dimson og daglige afkastobservationer

Traditionelt har der været mindre interesse for forecast-fejlernes størrelse og mere interesse for, om parameterestimatet er signifikant forskelligt fra nul, når det realiserede afkast for tidspunkt $t + i$ regresseres på forecastet for tidspunkt $t + i$. Som beskrevet i afsnit 4.2. er signifikante parameterestimer dog en liden trøst, hvis modellerne stadig er meget upræcise. Det er derfor mere interessant at undersøge, om f.eks. Blume-, Vasicek- eller Dimson-justerede faktorloadings ville have ført til væsentligt lavere forecast-fejl. Dette vil blive gjort i de følgende afsnit.

Tabel 12: CAPM's og FFM3's evne til at forklare afkast frem i tiden, når faktorloadings er Blume- eller Vasicek-justerede

Panel A - Blume

$$CAPM - \text{en faktor regression: } R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)								
3-års rullende	3,20	3,24	3,25	3,26	3,27	3,31	3,34	3,36
4-års rullende	3,20	3,23	3,25	3,27	3,29	3,32	3,33	3,36
5-års rullende	3,20	3,23	3,25	3,27	3,30	3,33	3,33	3,35
Fuld periode	3,24	3,26	3,27	3,27	3,28	3,29	3,30	3,33
Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)								
3-års rullende	4,30	4,36	4,38	4,38	4,40	4,47	4,50	4,56
4-års rullende	4,30	4,35	4,38	4,40	4,44	4,49	4,50	4,54
5-års rullende	4,30	4,35	4,39	4,41	4,46	4,50	4,49	4,53
Fuld periode	4,38	4,40	4,41	4,41	4,43	4,44	4,45	4,52

Panel B - Blume

$$FFM3 - \text{tre faktor regression: } R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + s_iSMB + h_iHML + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
--	---------	------	------	------	------	------	-------	-------

Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)

3-års rullende	3,08	3,19	3,26	3,31	3,35	3,38	3,46	3,45
4-års rullende	3,07	3,16	3,24	3,28	3,31	3,35	3,41	3,41
5-års rullende	3,06	3,16	3,23	3,26	3,30	3,34	3,39	3,38
Fuld periode	3,13	3,18	3,21	3,22	3,24	3,26	3,30	3,34

Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)

3-års rullende	4,13	4,29	4,40	4,47	4,54	4,58	4,73	4,70
4-års rullende	4,11	4,25	4,37	4,43	4,49	4,55	4,64	4,65
5-års rullende	4,10	4,24	4,35	4,40	4,48	4,54	4,61	4,61
Fuld periode	4,22	4,31	4,35	4,41	4,41	4,44	4,50	4,59

Panel C - Vasicek

$$CAPM - en faktor regression: R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)								
3-års rullende	3,18	3,24	3,24	3,25	3,26	3,29	3,32	3,34
4-års rullende	3,19	3,22	3,25	3,25	3,28	2,30	3,32	3,34
5-års rullende	3,16	3,23	3,26	3,24	3,28	3,32	3,32	3,35
Fuld periode	3,23	3,24	3,24	3,26	3,27	3,29	3,30	3,32
Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)								
3-års rullende	4,25	4,32	4,35	4,34	4,37	4,42	4,46	4,53
4-års rullende	4,25	4,31	4,36	4,36	4,36	4,44	4,47	4,54
5-års rullende	4,24	4,32	4,37	4,37	4,46	4,45	4,49	4,51
Fuld periode	4,32	4,33	4,35	4,39	4,42	4,44	4,46	4,48

Panel D - Vasicek

$$FFM3 - tre faktor regression: R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + s_iSMB + h_iHML + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)								
3-års rullende	3,04	3,18	3,23	3,30	3,33	3,35	3,44	3,43
4-års rullende	3,03	3,14	3,25	3,26	3,30	3,34	3,42	3,42
5-års rullende	3,03	3,16	3,23	3,25	3,29	3,36	3,39	3,36
Fuld periode	3,13	3,17	3,20	3,20	3,22	3,24	3,30	3,31
Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)								
3-års rullende	4,11	4,27	4,35	4,47	4,53	4,56	4,71	4,68
4-års rullende	4,10	4,24	4,36	4,43	4,46	4,55	4,62	4,65
5-års rullende	4,10	4,23	4,32	4,40	4,42	4,53	4,61	4,60
Fuld periode	4,21	4,27	4,32	4,41	4,39	4,42	4,50	4,57

Tabel 12: Tabellen viser den gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelsen for forecast-fejlene (RMSE) rapporteret som gennemsnit på tværs af industrierne i forecastperioden. Forecast-fejlene bestemmes som forskellen imellem forecastet for tidspunkt $t+i$ ($i = 1, 12, 24, 36, 48, 60, 120$ og 180 måneder) og det faktiske afkast til tidspunkt $t+i$. Forecastet for måned $t + i$ bruger faktorloadings baseret på $t - n$ ($n = 36, 48, 60$ og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned $t + i$. Panel A viser resultaterne for Blume-justerede betaestimer, dvs.:

$$\hat{\beta}^{Blume} = \frac{2}{3} \hat{\beta}^{OLS} + \frac{1}{3} 1,$$

hvor $\hat{\beta}^{OLS}$ er OLS-estimatet af beta. Panel B viser resultaterne for Vasicek-justerede loadings, dvs.:

$$\hat{\beta}_{i,t}^{Vasicek} = \frac{s_{b_{i,t}}^2}{\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS} + s_{b_{i,t}}^2} \hat{\beta}_{i,t}^{OLS} + \frac{\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS}}{\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS} + s_{b_{i,t}}^2} b_{i,t},$$

hvor $\hat{\beta}_{i,t}^{OLS}$ er OLS-estimatet af de enkelte industriers faktorloadings (beta, SMB og HML) til tidspunkt t , og $\sigma_{\hat{\beta}_{i,t}}^{2OLS}$ er standardfejlen på estimerne. $b_{i,t}$ er værdien af en faktorloading målt som et simpelt gennemsnit på tværs af industrierne til tidspunkt t , mens $s_{b_{i,t}}^2$ er variansen i OLS-estimerne af en faktorloading til tidspunkt t .

Af tabellen ses det, at Blume- og Vasicek-justerede faktorloadings fører til lavere forecast-fejl for både CAPM og FFM3, og at effekten er størst for regressioner baseret på få års data, når forecasthorisonterne er lange. Eksempelvis så vi ovenfor, at MAE og RMSE er 3,39 % og 4,60 % for CAPM, når forecasthorisonten er 10 år, og faktorloadings baseres på de seneste fem års data. Med Blume- og Vasicek-justeringer falder MAE og RMSE til omtrent 3,33 % og 4,53 %. Når faktorloadings i stedet baseres på hele den observerbare periode, fører justeringerne til fald i MAE og RMSE på omtrent 0,02 og 0,03 procentpoint. Det taler for, at tidsvariationen i CAPM-faktorloadings kun er midlertidig, og at beta konvergerer mod et langsigtet niveau, som særligt de seneste års data har svært ved at opfange. Når selv regressionen baseret på hele den observerbare periode forbedres af justeringerne, taler det for, at det langsigtede niveau over bred kam er tættere på 1 end noget industri-specifikt niveau.

For FFM3 er mønstret det samme. Blume- og Vasicek-justeringer har størst betydning for regressioner baseret på få års data, når forecasthorisonten er lang, og det taler også for, at tidsvariationen i FFM3-faktorloadings kun er midlertidig, og at loadings konvergerer mod et langsigtet niveau, som særligt de seneste års data har svært ved at opfange. Forbedringerne i MAE er beskedne – men reelle – og for den gennemsnitlige industri har det derfor været en fordel at bruge Blume- og Vasicek-korrigerede faktorloadings, når man har skullet bruge forventede afkast og afkastkrav. For det enkelte selskab vil effekten endda kunne være større, fordi justeringerne kan mildne den større målefejl. Det store billede er dog det samme som tidligere. CAPM og FFM3 har begge været meget dårlige til at forklare afkastet frem i tiden.

Tabel 13: CAPM's og FFM3's evne til at forklare afkast frem i tiden, når faktorloadings er baseret på daglige afkastobservationer med eller uden Dimson-justeringer

Panel E - Daglige observationer (uden Dimson)								
<i>CAPM – en faktor regression: $R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i$</i>								
	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
<i>Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)</i>								
3-års rullende	3,22	3,27	3,28	3,30	3,33	3,36	3,41	3,43
4-års rullende	3,22	3,27	3,28	3,30	3,34	3,37	3,40	3,42
5-års rullende	3,23	3,27	3,29	3,31	3,35	3,37	3,40	3,41

Fuld periode	3,28	3,30	3,30	3,32	3,33	3,35	3,35	3,36
<i>Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)</i>								
3-års rullende	4,35	4,39	4,41	4,44	4,50	4,55	4,63	4,64
4-års rullende	4,33	4,39	4,42	4,46	4,51	4,56	4,61	4,64
5-års rullende	4,34	4,39	4,42	4,46	4,52	4,58	4,60	4,62
Fuld periode	4,44	4,46	4,46	4,49	4,51	4,54	4,53	4,56

Panel F - Daglige observationer
(uden Dimson)

$$FFM3 - \text{tre faktor regression: } R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + s_iSMB + h_iHML + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
<i>Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)</i>								
3-års rullende	3,00	3,16	3,22	3,25	3,29	3,33	3,41	3,42
4-års rullende	3,04	3,16	3,22	3,26	3,29	3,34	3,41	3,42
5-års rullende	3,07	3,18	3,25	3,26	3,31	3,35	3,40	3,41
Fuld periode	3,28	3,33	3,36	3,38	3,40	3,43	3,45	3,46
<i>Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)</i>								
3-års rullende	4,15	4,33	4,44	4,52	4,60	4,74	4,77	4,72
4-års rullende	4,19	4,33	4,42	4,59	4,61	4,67	4,73	4,73
5-års rullende	4,22	4,37	4,45	4,56	4,62	4,68	4,69	4,73
Fuld periode	4,53	4,61	4,68	4,68	4,70	4,76	4,72	4,74

Panel G - Dimson-justeret beta

$$CAPM - \text{en faktor regression: } R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i$$

	1 måned	1 år	2 år	3 år	4 år	5 år	10 år	15 år
<i>Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)</i>								
3-års rullende	3,20	3,26	3,20	3,30	3,35	3,38	3,43	3,43
4-års rullende	3,20	3,26	3,28	3,31	3,35	3,39	3,42	3,43

5-års rullende	3,21	3,28	3,28	3,30	3,34	3,38	3,41	3,42
Fuld periode	3,34	3,36	3,35	3,37	3,40	3,42	3,45	3,46
Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)								
3-års rullende	4,44	4,45	4,46	4,52	4,62	4,73	4,80	4,70
4-års rullende	4,42	4,43	4,47	4,52	4,65	4,68	4,75	4,73
5-års rullende	4,47	4,47	4,49	4,53	4,65	4,70	4,72	4,66
Fuld periode	4,65	4,60	4,57	4,62	4,70	4,72	4,76	4,75

Panel H - Dimson-justeret beta

$$FFM3 - \text{tre faktor regression: } R_i - R_f = \alpha + b_i(R_m - R_f) + s_iSMB + h_iHML + \epsilon_i$$

Gennemsnitlig absolutte forecast-fejl (MAE)								
3-års rullende	3,03	3,17	3,22	3,28	3,32	3,36	3,43	3,43
4-års rullende	3,05	3,20	3,24	3,33	3,31	3,36	3,44	3,42
5-års rullende	3,08	3,22	3,26	3,33	3,36	3,38	3,45	3,43
Fuld periode	3,30	3,36	3,37	3,41	3,43	3,46	3,47	3,46
Gennemsnitlig standardafvigelse på forecast-fejl (RMSE)								
3-års rullende	4,20	4,34	4,44	4,53	4,62	4,74	4,78	4,73
4-års rullende	4,21	4,33	4,44	4,60	4,62	4,68	4,73	4,75
5-års rullende	4,24	4,39	4,44	4,59	4,63	4,68	4,69	4,75
Fuld periode	4,57	4,63	4,70	4,70	4,70	4,76	4,70	4,76

Tabel 13: Tabellen viser den gennemsnitlige absolutte forecast-fejl (MAE) og standardafvigelsen for forecast-fejlene (RMSE) rapporteret som gennemsnit på tværs af industrierne i forecastperioden. Forecast-fejlene bestemmes som forskellen imellem forcecastet for tidspunkt t+i (i = 1, 12, 24, 36, 48, 60, 120 og 180 måneder) og det faktiske afkast til tidspunkt t+i. Forecastet for måned t + i bruger faktorloadings baseret på t – n (n = 756 dage, 1008 dage, 1260 dage og hele den observerbare periode, alt efter estimationsmetoden) og de realiserede risikopræmier i måned t + i. Der er således antaget 21 handelsdage per måned. Panel B viser resultaterne for Dimson-justerede betaestimer, dvs.:

$$\beta_{Dimson} = \sum_{k=-n}^n \beta_{j,k}$$

hvor der er tilføjet to lags og to leads.

Af tabellen ses det, at det ikke har været en fordel at bruge daglige afkastobservationer, når man har baseret CAPM-faktorloadings på hele den observerbare periode. MAE og RMSE stiger med 0,01-0,05 procentpoint ift. månedlige afkastobservationer, og flere observationer er derfor i sig selv ikke nogen garanti for mere retvisende faktorloadings. For regressionerne baseret på de seneste års daglige data er MAE 0,01-0,02 procentpoint højere, når forecasthorisonterne er 2 år eller kortere, og for forecasthorisonter over 2 år er MAE 0,01-0,02 procentpoint lavere. En mulig forklaring er, at 756-1260 daglige observationer fører til meget variabilitet, men at man trods alt opfanger meget af den langsigtede tendens. De er derfor bedre for lange forecasthorisonter.

For FFM3-faktorloadings har det ligeledes været en fordel at bruge månedlige afkast, når man har brugt hele den observerbare periode. Med daglige afkastobservationer stiger MAE med 0,12-0,17 procentpoint. For regressionerne baseret på de seneste års daglige data er MAE generelt lavere for alle forecasthorisonter, mens RMSE er højere. I det store billede ændrer det dog ikke meget at anvende daglige afkastobservationer i stedet for månedlige. CAPM og FFM3 har begge været dårlige til at forklare afkast frem i tiden. Det gør heller ingen stor forskel at Dimson-justere OLS-estimerne af beta. Tværtimod bliver MAE generelt en anelse dårligere både for CAPM og FFM3, og der er derfor intet, der tyder på, at illikviditet er et problem på de store amerikanske børsmarkeder.

5.5. Afkastkravets størrelse

Tabel 8-13 viste, at der historisk set ikke har været nogen klar favorit blandt CAPM- og FFM3-estimationsmetoderne. For korte tidshorisonter har rullende regressioner generelt været en anelse bedre, mens det for længere tidshorisonter har været en anelse bedre at bruge hele den observerbare tidsperioden. Selv om forskellene er beskedne, er valget af estimationsmetode dog ikke uden betydning for industriernes afkastkrav. Tabel 14 viser industriernes afkastkrav per maj 2019, når faktorloadings enten er baseret på 1) de seneste fem års afkastdata eller 2) afkastdata for hele tidsperioden 1963-2019.

Tabel 14: CAPM- og FFM3-afkastkrav per juni 2019

Tabelnote: Industriene er defineret i appendiks 11 og er de samme som i FF97. Per primo juni 2019 er CAPM- og FFM3-afkastkravet (CE) beregnet for den enkelte industri som produktet af de årlige risikopræmier defineret i tabel 1 og faktorloadings baseret på enten 1) de seneste fem års månedlige afkastdata eller 2) månedlige afkast for perioden 07/1963-05/2019. b, s og h udgør faktorloadings for markedsporteføljen, SMB og HML

Industri	CAPM				FFM3							
					5 års rullende regression				5 års rullende regression			
	b	CE	b	CE	b	s	h	CE	b	s	h	CE
Agric	0,94	5,91	0,87	5,49	0,94	0,03	0,05	6,12	0,81	0,39	0,07	6,20
Food	0,61	3,82	0,68	4,28	0,67	-0,29	-0,11	3,17	0,74	-0,17	0,14	4,84
Soda	0,55	3,45	0,81	5,12	0,67	-0,60	-0,17	2,32	0,88	-0,16	0,18	5,89
Beer	0,59	3,68	0,75	4,69	0,68	-0,45	-0,27	2,29	0,79	-0,14	0,05	4,84
Smoke	0,59	3,71	0,66	4,13	0,78	-0,88	-0,12	2,55	0,74	-0,27	0,15	4,65
Toys	1,19	7,50	1,17	7,38	1,15	0,18	-0,06	7,41	1,11	0,49	0,19	8,71
Fun	1,32	8,29	1,36	8,57	1,28	0,10	-0,49	6,45	1,30	0,44	0,14	9,65
Books	1,22	7,66	1,07	6,75	1,12	0,49	0,29	9,19	1,07	0,24	0,27	8,24
Hshld	0,56	3,53	0,80	5,05	0,59	-0,17	-0,26	2,38	0,83	-0,16	-0,04	4,74
Cltls	0,81	5,07	1,10	6,94	0,78	0,09	-0,18	4,43	1,09	0,36	0,35	8,92
Hlth	0,93	5,85	1,07	6,73	0,83	0,44	-0,24	5,25	0,97	0,47	0,05	7,33
MedEq	0,86	5,43	0,90	5,67	0,77	0,32	-0,75	2,72	0,85	0,05	-0,29	4,39
Drugs	0,93	5,81	0,81	5,06	0,88	0,12	-0,46	4,09	0,82	-0,31	-0,33	3,24
Chems	1,26	7,92	1,05	6,58	1,25	0,12	0,30	9,19	1,12	-0,06	0,33	8,11
Rubbr	1,09	6,86	1,08	6,78	1,01	0,36	0,01	7,16	1,01	0,60	0,32	8,85
Txtls	1,31	8,21	1,14	7,17	1,17	0,57	-0,35	7,26	1,14	0,58	0,72	11,12
BldMt	1,39	8,71	1,18	7,40	1,28	0,54	0,23	10,04	1,21	0,26	0,47	9,89
Cnstr	1,21	7,58	1,30	8,14	1,08	0,61	0,17	8,71	1,25	0,48	0,30	10,00
Steel	1,51	9,51	1,30	8,16	1,46	0,38	0,82	13,03	1,28	0,41	0,39	10,41
FabPr	1,13	7,12	1,11	6,95	0,88	1,22	0,53	10,15	1,03	0,58	0,23	8,58
Mach	1,34	8,41	1,23	7,70	1,27	0,39	0,48	10,62	1,20	0,27	0,15	8,69

ElcEq	1,34	8,44	1,22	7,64	1,26	0,41	0,14	9,32	1,21	0,07	0,03	7,89
Autos	1,20	7,55	1,13	7,11	1,14	0,33	0,45	9,58	1,21	0,15	0,66	10,40
Aero	1,18	7,44	1,14	7,17	1,21	-0,12	0,18	8,04	1,16	0,17	0,30	8,75
Ships	1,42	8,90	1,11	6,97	1,37	0,28	0,46	10,91	1,16	0,16	0,48	9,40
Guns	0,86	5,37	0,84	5,29	0,90	-0,22	-0,12	4,72	0,88	0,19	0,44	7,57
Gold	-0,06	-0,35	0,57	3,58	-0,02	-0,15	0,14	0,10	0,50	0,41	0,05	4,17
Mines	1,23	7,72	1,11	6,99	1,26	-0,02	0,80	10,83	1,11	0,32	0,37	9,07
Coal	1,00	6,28	1,14	7,14	0,80	1,10	1,08	11,37	1,11	0,39	0,30	8,93
Oil	1,15	7,24	0,81	5,06	1,09	0,44	0,92	11,18	0,89	-0,19	0,27	6,21
Util	0,35	2,17	0,51	3,22	0,34	0,01	-0,20	1,39	0,61	-0,19	0,32	4,62
Telcm	0,80	5,00	0,77	4,86	0,86	-0,28	0,16	5,41	0,84	-0,20	0,11	5,22
PerSv	0,89	5,60	1,12	7,03	0,85	0,24	0,21	6,63	1,05	0,48	0,12	8,05
BusSv	1,06	6,63	1,16	7,30	1,10	-0,26	-0,35	5,06	1,15	0,34	-0,45	6,25
Hardw	1,17	7,36	1,21	7,59	1,20	-0,18	-0,26	6,18	1,08	0,19	-0,57	5,03
Softw	1,17	7,34	1,56	9,80	1,16	-0,04	-0,51	5,31	1,17	0,28	0,18	8,58
Chips	1,17	7,34	1,39	8,73	1,12	0,17	-0,45	5,72	1,25	0,38	-0,42	7,09
LabEq	1,05	6,61	1,31	8,23	1,04	0,04	-0,06	6,39	1,15	0,47	-0,40	6,76
Paper	1,21	7,62	0,98	6,13	1,18	0,16	0,05	7,93	1,04	-0,01	0,37	7,92
Boxes	1,22	7,63	0,96	6,06	1,19	0,16	0,31	8,97	1,00	-0,08	0,10	6,52
Trans	1,04	6,56	1,07	6,73	0,98	0,33	0,10	7,22	1,09	0,19	0,34	8,56
Whlsl	1,01	6,35	1,07	6,71	1,02	-0,08	-0,36	4,86	0,99	0,47	0,11	7,67
Rtail	0,65	4,07	1,00	6,28	0,69	-0,20	-0,06	3,68	0,99	0,07	0,02	6,45
Meals	1,20	7,52	1,04	6,54	1,21	0,06	0,77	10,59	1,01	0,23	0,09	7,20
Banks	0,86	5,42	1,07	6,71	0,84	0,12	0,25	6,48	1,21	-0,15	0,64	9,64
Insur	1,50	9,39	0,95	5,98	1,45	0,25	0,18	10,32	1,05	-0,14	0,41	7,82
REst	1,15	7,21	1,24	7,80	1,12	0,21	0,71	10,18	1,19	0,88	0,74	12,09
Fin	0,83	5,19	1,23	7,71	0,91	-0,32	0,38	6,44	1,25	0,13	0,26	9,10
Gnsn.	1,02	6,41	1,04	6,57	1,00	0,12	0,09	6,86	1,03	0,20	0,18	7,59

Af tabellen kan det ses, at varierer mellem industrierne og de to estimationsmetoder. Eksempelvis er CAPM-afkastkravet 5,91 % for landbrugsindustrien, når faktorloading er baseret på de seneste fem års data, mens det er 5,49 %, når faktorloading er baseret på hele tidsperioden 1963-2019. For ca. halvdelen af industrierne er forskellen i de to CAPM-estimerer beskeden og lavere end 1 procentpoint. For 22 industrier er forskellen mere end 1 procentpoint, og for fem industrier er forskellen mere end 2 procentpoint. Særligt guldindustrien er følsom over for længden af regressionsperioden. Baseret på de seneste fem år har industrien en beta på -0,06 og baseret på hele tidsperioden har den en beta på 0,57. Det fører til en forskel i CAPM-afkastkrav på næsten 4 procentpoint. For nogle industrier betyder det derfor ganske meget, om CAPM-afkastkravet er estimeret med den ene eller den anden fremgangsmåde.

For FFM3-afkastkravene er forskellene større. For 40 industrier er forskellen mere end 1 procentpoint, for 22 industrier er den mere end 2 procentpoint og for 10 industrier er den mere end 3 procentpoint. Særligt olieindustrien er følsom over for længden af regressionsperioden, hvor dens SMB- og HML-loadings er høje, når de baseres på de seneste fem år (0,44 og 0,92), men lave når de baseres på hele tidsperioden 1963-2019 (-0,19 og 0,27). Det fører til en forskel i FFM3-afkastkravet på næsten 5 procentpoint. For de fleste industrier betyder det derfor ganske meget, om FFM3-afkastkravet bliver estimeret med den ene eller den anden fremgangsmåde.

Tilsvarende er der store forskelle mellem den enkelte industris CAPM- og FFM3-afkastkrav, når faktorloadings baseres på hele tidsperioden 1963-2019. For 31 industrier er forskellen mere end 1 procentpoint, og for 11 industrier er den mere end 2 procentpoint. F.eks. har boligindustrien (RIEst) et FFM3-afkastkrav, der er næsten 4 procentpoint højere end dens CAPM-afkastkrav. Det skyldes, at boligindustrien har samvarieret relativt meget med SMB og HML i tidsperioden. Omvendt fører hardware-industriens negative HML-loading (-0,57) til et FFM3-afkastkrav, der er næsten 2,6% lavere end dens CAPM-afkastkrav. Forskellene er tilsvarende store, når faktorloadings baseres på de seneste fem års data. For 30 industrier er forskellen mellem CAPM- og FFM3-afkastkravet mere end 1 procentpoint, og for 12 industrier er den mere end 2 procentpoint. For kulindustrien, der haft høje SMB- og HML-loadings (1,10 og 1,08) i de seneste fem år, er FFM3-afkastkravet mere end 5 procentpoint højere end CAPM-afkastkravet. Selv om der historisk set ikke har været store forskelle i modellernes evne til at forudsige industriernes afkast, har valget af model og estimationsmetode alligevel stor betydning for afkastkravets størrelse, når det baseres på historiske afkastdata. For det enkelte selskab vil forskellene kun være større, fordi der ikke er noget 'låg' på målefejlen. Traditionel

scenarieanalyse med et ”best case”, ”worst case” og ”base case” bliver derfor temmelig tilfældig, når selv base case kan rykkes med op til flere procentpoint.

5.6. Den samlede usikkerhed på afkastkravet

Valget af estimationsmetode har stor betydning for afkastkravets størrelse, men udgør en begrænset del af den samlede statistiske usikkerhed på afkastkravet. Tabel 15 viser de gennemsnitlige standardfejl på de årlige CAPM- og FFM3-afkastkrav under forskellige forudsætninger om målefejlen på faktorloadings og risikopræmier.

Tabel 15: De gennemsnitlige standardfejl på det årlige CAPM- og FFM3-afkastkrav på tværs af industrier.

	CAPM	FFM3
<i>Risikopræmier uden målefejl</i>		
(1) Faktorloadings med målefejl	0,24	0,46
<i>Risikopræmier med målefejl</i>		
(2) Faktorloadings uden målefejl	2,13	2,21
(3) Faktorloadings med målefejl	2,15	2,27

Tabel 15: Standardfejlen på CAPM-afkastkravet er for hver industri givet ved:

$$SE(CAPM) = \left[(\overline{R_m} - \overline{R_f})^2 \text{var}(\epsilon_\beta) + \hat{\beta}^2 \text{var}(\epsilon_m) + \text{var}(\epsilon_\beta) \text{var}(\epsilon_m) \right]^{0,5}$$

hvor $\overline{R_m} - \overline{R_f}$ er det årlige gennemsnitlige merafkast på markedsporteføljen fra 07/1963-07/2019, $\text{var}(\epsilon_\beta)$ er den kvadrerede standardfejl på parameterestimatet af $\hat{\beta}$, mens $\text{var}(\epsilon_m)$ er den kvadrerede standardfejl af $\overline{R_m} - \overline{R_f}$. For FFM3 er standardfejlen på afkastkravet for hver industri givet ved:

$$SE(FFM3) = \left[\text{Præmie}' \text{Var}(\epsilon_y) \text{Præmie} + y' \text{Var}(\epsilon_{\text{præmie}}) y + 1' [\text{Var}(\epsilon_{\text{præmie}}) \circ \text{Var}(\epsilon_y)] 1 \right]^{0,5}$$

hvor Præmie er en 3x1-vektor med de årlige gennemsnitlige risikopræmier fra 07/1963-07/2019, $\text{Var}(\epsilon_{\text{præmie}})$ er kovariansmatricen mellem risikopræmierne, y er 3x1-vektor med parameterestimerne af hældningskoefficienterne i (3), $\text{Var}(\epsilon_y)$ er kovariansmatricen mellem målefejlene på hældningskoefficienterne, 1 er en 3x1-vektor bestående af 1-taller og $\circ$ angiver Hadamard-produktet af to matricer.

De første to rækker (1 og 2) angiver den gennemsnitlige standardfejl, når de historiske risikopræmier måles uden fejl, dvs. $Var(\epsilon_{præmie}) = 0$ for alle risikopræmier. De næste tre rækker (3, 4 og 5) angiver de gennemsnitlige standardfejl, når risikopræmierne estimeres med målefejl, mens faktorloadings estimeres enten med eller uden målefejl.

Af tabellen kan det ses, at standardfejlene på de årlige afkastkrav er relativt beskedne, når risikopræmierne estimeres uden målefejl, og faktorloadings baseres på hele tidsperioden 1963-2019 (1). På tværs af industrier er gennemsnittet 0,24% for CAPM-afkastkravet og 0,46% for FFM3-afkastkravet.

Estimeres risikopræmierne med fejl, er standardfejlene på CAPM- og FFM3-afkastkravet store, selv når det antages, at faktorloadings kan estimeres uden fejl (2). På tværs af industrier er gennemsnittet 2,13% for CAPM-afkastkravet og 2,21% for FFM3-afkastkravet. I et standard 95%-konfidensinterval kan CAPM-afkastkravet for den gennemsnitlige industri (tabel 14) være alt mellem 2,40-10,78%, mens FFM3-afkastkravet kan være alt mellem 3,26-11,92%. Det indebærer meget upræcise afkastkrav, som ikke engang møntkast-intervaller kan skjule. I 50%-konfidensintervaller er det gennemsnitlige CAPM-afkastkrav i intervallet 5,13-8,01%, mens det gennemsnitlige FFM3-afkastkrav er i intervallet 6,10-9,08%.

Estimeres både faktorloadings og risikopræmierne med fejl, forøges usikkerheden kun marginalt, når faktorloadings baseres på hele tidsperioden 1963-2019 (3). Standardfejlen vokser ikke med summen af målefejlene, men med kvadratroden af summen. For (3) er det afgørende, at risikopræmierne isoleret set er behæftet med meget usikkerhed.

Ovenstående er gennemsnitstal på tværs af industrier. Det er oplagt, at der kan være industrier, hvor usikkerheden er mindre. Industrier med lave faktorloadings vil f.eks. være mindre eksponeret over for usikkerheden på risikopræmierne end industrier med høje faktorloadings. Tabel 16 viser 95%-konfidensintervallerne for industriernes CAPM- og FFM3-afkastkrav per juni 2019.

Tabel 16: Industriernes CAPM-og FFM3-afkastkrav (målt i pct.) per juni 2019, inklusive 95%-konfidensinterval

$$95\% - \text{Konfidensinterval} = CE \pm 1,96 * SE(CE)$$

Industri	CAPM			FFM3		
	Nedre grænse	CE	Øvre grænse	Nedre grænse	CE	Øvre grænse
Agric	1,90	5,49	9,08	2,35	6,20	10,06
Food	1,51	4,28	7,04	1,95	4,84	7,74
Soda	1,78	5,12	8,46	2,35	5,89	9,43
Beer	1,65	4,69	7,73	1,69	4,84	8,00
Smoke	1,40	4,13	6,86	1,62	4,65	7,69
Toys	2,63	7,38	12,13	3,70	8,71	13,71
Fun	3,07	8,57	14,07	3,96	9,65	15,33
Books	2,42	6,75	11,08	3,79	8,24	12,70
Hshld	1,80	5,05	8,30	1,42	4,74	8,07
Clths	2,48	6,94	11,40	4,24	8,92	13,59
Hlth	2,42	6,73	11,03	2,71	7,33	11,94
MedEq	2,02	5,67	9,32	0,61	4,39	8,16
Drugs	1,80	5,06	8,33	-0,26	3,24	6,73
Chems	2,37	6,58	10,80	3,77	8,11	12,44
Rubbr	2,43	6,78	11,14	4,15	8,85	13,55
Txtls	2,55	7,17	11,79	5,94	11,12	16,30
BldMt	2,66	7,40	12,14	4,96	9,89	14,83
Cnstr	2,92	8,14	13,36	4,55	10,00	15,46
Steel	2,93	8,16	13,40	4,94	10,41	15,88
FabPr	2,46	6,95	11,44	3,74	8,58	13,43
Mach	2,77	7,70	12,62	3,68	8,69	13,71
ElcEq	2,75	7,64	12,52	2,97	7,89	12,82
Autos	2,54	7,11	11,68	5,49	10,40	15,31
Aero	2,56	7,17	11,77	4,00	8,75	13,49
Ships	2,47	6,97	11,47	4,64	9,40	14,15
Guns	1,84	5,29	8,74	3,80	7,57	11,33
Gold	0,94	3,58	6,22	0,73	4,17	7,61

Mines	2,47	6,99	11,51	4,29	9,07	13,86
Coal	2,44	7,14	11,85	3,79	8,93	14,08
Oil	1,78	5,06	8,34	2,74	6,21	9,69
Util	1,11	3,22	5,33	2,22	4,62	7,02
Telcm	1,73	4,86	7,99	1,98	5,22	8,47
PerSv	2,51	7,03	11,56	3,28	8,05	12,82
BusSv	2,13	7,30	12,47	0,85	6,25	11,65
Hardw	2,74	7,59	12,45	-0,12	5,03	10,18
Softw	5,01	9,80	14,60	3,65	8,58	13,51
Chips	3,14	8,73	14,31	1,26	7,09	12,92
LabEq	2,96	8,23	13,50	1,19	6,76	12,32
Paper	2,19	6,13	10,07	3,83	7,92	12,01
Boxes	2,16	6,06	9,96	2,54	6,52	10,49
Trans	2,42	6,73	11,05	4,10	8,56	13,01
Whlsl	2,41	6,71	11,00	3,18	7,67	12,17
Rtail	2,25	6,28	10,30	2,38	6,45	10,52
Meals	2,34	6,54	10,75	2,88	7,20	11,51
Banks	2,40	6,71	11,01	4,99	9,64	14,29
Insur	2,13	5,98	9,82	3,76	7,82	11,87
REst	2,78	7,80	12,82	6,31	12,09	17,87
Fin	2,78	7,71	12,64	4,10	9,10	14,11

Tabel 16: Afkastkravene (CE) per juni 2019 er givet i 14. Faktorloadings er baseret på hele tidsperioden 07/1963-07/2019. Standardafvigelseerne på CAPM- og FFM3-afkastkravet er beregnet som i tabel 15 række 3, hvor både risikopræmier og faktorloadings kan være behæftet med målefejl.

Af tabellen ses det, hvordan afkastkravet og grænserne af 95%-konfidensintervallet varierer fra industri til industri. F.eks. har landbrugsindustriens et CAPM-afkastkrav i intervallet 1,90-9,08%, mens underholdningsindustrien ligger i intervallet 3,07-14,07%. Intervallerne er generelt meget brede, og syv industriers CAPM-afkastkrav spænder mere end 10%. Industrien med det smalleste 95%-konfidensinterval spænder 4,22%. For FFM3-afkastkravene er konfidensintervallerne kun bredere. 13 industrier spænder med mere end 10%, og industrien med det smalleste interval spænder 4,80%. Selv for industrier med lave faktorloadings er det ikke muligt at undgå deprimerende brede konfidensintervaller. Dertil er usikkerheden på risikopræmierne for stor. Det er derfor næppe en særegen konklusion for det 'amerikanske marked'. Tabel 17 viser de historiske risikopræmier og standardfejl for kombinerede indekser lavet over forskellige internationale aktiemarkeder.

Tabel 17: Historiske risikopræmier og standardfejl for forskellige værdivægtede kombinationer af internationale indekser

Tabelnote: Indekserne er defineret i appendiks 12, og de månedlige afkast er taget fra French' hjemmeside, http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/Data_Library/. French oplyser, at alle afkast er blevet omregnet til dollars, og at de omfatter både kursgevinster og udlodninger. De månedlige risikopræmier er beregnet som forskellen mellem det værdivægtede afkast for en region og den 1-månedlige T-bill rate. Opgørelsen for regionernes afkast går kun tilbage til 1990, hvor der er tilstrækkelig afkastdata for de enkelte lande. Den årlige standardfejl er blevet beregnet på samme måde som i tabel

Indeks	Global	Europa	Japan	Asien Pacific eks Japan	Nordamerika (US + Canada)
Tidsperiode	07/1990 - 05/2019	07/1990 - 05/2019	07/1990 - 05/2019	07/1990 - 05/2019	07/1990 - 05/2019
$\overline{R_m - R_f}$	5,65	5,58	0,69	8,06	7,75
$\overline{SMB}$	-0,07	-0,09	0,62	-3,41	0,42
$\overline{HML}$	3,12	3,50	3,42	7,28	1,97
$SE(\overline{R_m - R_f})$	2,74	3,13	3,67	3,72	2,72
$SE(\overline{SMB})$	1,30	1,40	2,06	1,90	1,95
$SE(\overline{HML})$	1,49	1,53	1,87	1,89	2,09

Af tabellen kan det ses, at usikkerheden på de historiske risikopræmier generelt er lavere på det amerikanske marked, formentlig fordi det går længere tilbage i tid. Analysen har derfor ikke bare været et 'lucky punch'. I stedet er der tale om grundlæggende udfordringer, når de forventede risikopræmier estimeres på baggrund af historiske afkastdata. For enkeltvirksomheder vil problemet kun være større, fordi usikkerheden på faktorloadings tilmed er stor.

Stærke tilhængere af modellerne vil selvfølgelig mene, at i) markedsporteføljen ikke er tilstrækkeligt afspejlet af aktieindeks alene, og at ligevægtsantagelserne ii) om homogene forventninger og iii) to-parametriske nyttefunktioner ikke har været opfyldte. Vi skulle have udvalgt selskaber, hvor prisfastsættelsen udelukkende domineres af investorer med adgang til samme analyseapparater, og som forstår værdien af risikospredning. I den virkelige verden er det næppe realistisk at lave en sådan finopdeling af selskaber – og selv hvis det var, er der ingen garanti for, at modellerne havde klaret sig bedre. Selv blandt institutionelle investorer er der rapporteret betydelig "home-bias" verden over (Damodaran, 2014), og de kan også tolke de samme begivenheder forskelligt.

Det er selvfølgelig relevant at diskutere, i hvilken grad kritikken er berettiget, men i sidste ende er budskabet det samme: Når CAPM og FFM3 baseres på aktieindekser, har det været held snarere end forstand, om deres forudsigelser blev opfyldt.

Upræcise afkastkrav – hvad skal virksomhederne stille op?

Virksomheder må tage stilling til realinvesteringer, uanset om de har præcise afkastkrav eller ej. Fama og French afsluttede FF97 med at pointere, at afkastkravet kun udgør den ene halvdel af virksomhedernes problem: *"Uncertainty about the cashflow estimates in the numerator also creates first-order imprecision in estimates of project values. Project Valuation is central to the success of any firm. Our message is that the task is beset with massive uncertainty. The question then is whether there is an approach that values projects with less error than its competitors. Is the net-present-value approach, advocated with zeal by textbooks, typically more accurate than a less complicated approach, like payback? And how would one tell? Our guess is that whatever formal approach two of the ubiquitous tools in capital budgeting are a wing and a prayer, and serendipity is an important force in outcomes"* (FF97, s. 179). Det er deprimerende læsning, og det kan undre, at risikomodellerne har fået lov til at fylde så meget i praksis, når selv ophavsmændene klandrer dem.

Welch og Levi (2013) forklarer, at det kan have bidraget til modellernes anvendelse, at FF97 ikke efterlod læseren med nogle klare alternativer. De mener også, at det kan skyldes en manglende

påskønnelse af, hvor skuffende de empiriske beviser i virkeligheden er. Når der rapporteres signifikante faktorer hist og her, kan man hurtigt få indtryk af, at modellerne er nyttige. Men signifikante faktorer er en liden trøst, når den samlede forklaringskraft forbliver beskeden. I 1993 udtalte Fischer Black, at der i det hele taget er stor risiko for ”data mining”, når tusindvis af mennesker undersøger de samme data, og at der *må* findes anomalier hist og her (Black, 1993). Det betyder dog ikke, at man kan slutte fra korrelation til kausalitet, og anomalier har det med at blive arbitreret væk over tid. I det lys kan selv FFM3 ses som et resultat af data mining, jf. den faldende risikopræmie på SMB-faktoren siden 1981.

Mange mener, at problemerne først vil blive løst, når forbedringer af AI og Machine Learning fører til perfekte modeller og mere efficiente markeder. Det er dog noget uklart, om ”revolutionen” er så nært forestående, som debatten giver indtryk af, og om teknologien reelt vil ændre noget. En af teserne er, at man ikke vil kunne profitere på irrationelle markedstendenser, fordi maskinen arbitrerer dem væk i løbet af nul komma fem. Teknisk analyse vil uddø, og Millionærklubben på Radio24syv vil stå for fald. For det enkelte selskab betyder det mindre volatile afkast og mere præcise parameterestimer til gavn for aktionærene. Det er en besnærende tanke, som der ikke er nogen garanti for. For hvis computeren handler på baggrund af mønstergenkendelse, vil en større gruppe investorer så ikke kunne introducere nye mønstre til egen fordel? Empiri uden teori er sjældent en skudsikker strategi, og Millionærklubben kan erstattes af ”Sabotage-klubben”.

En anden af teserne er, at AI vil gøre kapitalmarkederne efficiente i semi-stærk forstand. Computerne vil med offentlig makro-data selv analysere sig frem til de bedste skøn for udviklingen i økonomien, og hvad man bør forvente af aktier som helhed. De forventede afkast vil være mere præcise end i dag. Men det er ikke det samme som at fjerne risikoen ved aktier. I morgen tweeter Trump løs igen, og fremtidsudsigterne er forandret. Så længe AI kun kan spå om fremtiden og ikke ”se ind” i den, har den næppe potentiale til at være fuldstændigt revolutionerende. Det er desuden svært at se, at den skulle kunne differentiere det forventede afkast *mellem* selskaberne meget anderledes end i dag. For der er næppe nogen, der mener, at virksomhederne skal blotlægge flere interne data, end de gør i dag. Informationsasymmetrien mellem selskaberne er trods alt en forudsætning for konkurrencen og videreførelsen af det samlede produktionssystem i et kapitalistisk samfund. Der vil derfor uundgåeligt være mange ubekendte.

Måske skal man i virkeligheden bare erkende, at usikkerhed er et grundvilkår, når det drejer sig om menneskelig aktivitet. Vi kan reducere den, men aldrig udrydde den. Og det er en illusion at tro, at

den kan måles særlig præcist. For den enkelte virksomhed er det afgørende nok, at den ikke lader præcision være noget ultimativt succeskriterie for valget af beslutningsmetode. Den skal selvfølgelig ikke vælge realinvesteringer i blinde, men den bør heller ikke afskrive hverken payback-metoden eller de mere eksotiske fundamentalanalyser og fremadskuende metoder.

Det kunne måske i det hele taget være en idé ikke at *antage*, hvad der er i aktionærernes interesse, men rent faktisk *spørge* dem. Ikke alle har en indre "Carl Icahn", og tidsånden taler mere og mere for, at nettoresultatet ikke står alene, men at etiske betragtninger vægter i det samlede billede. Det er selvfølgelig indviklet, hvis aktionærerne har modstridende interesser, men det ændrer ikke på den grundlæggende pointe: Valget af beslutningsmetode har stor betydning for selskabernes realinvesteringspolitikker, og på lige fod med udlodningspolitikken *bør* det være relevant information for aktionærerne. Det er næppe til skade for selskaberne at oplyse i årsrapporten, om de benytter CAPM baseret på få års data eller en helt anden fremgangsmåde. På den måde vil den enkelte investor selv kunne danne sig et indtryk af størrelsesordenen, og om han kan stå inde for processen.

Det er selvfølgelig svært at kontrollere, om erklæringer bliver overholdt i praksis, og selv en loyal ledelse vil kunne presses til at medregne usystematisk risiko, når den samlede risiko er høj. Vi har i hvert fald ikke hørt om en direktion eller bestyrelse, der er sluppet godt fra en konkurs ved at forklare, at nutidsværdien altid var i top, når den blev beregnet i overensstemmelse med finansiell teori. Men at gøre det til en "ting" at beskrive valget af beslutningsmetode er næppe en ulempe for det enkelte selskab. Tværtimod kan det gøre beslutningsprocessen mere refleksiv – og måske endda bedre.

6. Konklusion

Dette speciale har undersøgt, om det er meningsfuldt for virksomheder at anvende CAPM og FFM3 til at træffe beslutninger om realinvesteringer. Det er blevet slået fast, at CAPM oprindeligt ikke var tiltænkt realinvesteringer, og at virksomheder ikke har et naturligt incitament til at anvende modellen, da det kun er investorerne, der har gavn af diversifikationsfordelen. Ikke desto mindre anvendes modellen hyppigt af virksomheder, selv om der i praksis er mange tilgange til at estimere dens parametre, herunder regressionsanalyser, fundamentalanalyser, surveybaserede opgørelser og implicitte risikopræmier. Tilgangene kommer ofte frem til vidt forskellige resultater, og det er derfor et temmeligt løst udsagn, at "man anvender CAPM".

I forhold til modeltest af modellerne blev det beskrevet, at de traditionelt har været tæt forbundet til regressionsanalyser, da fundamentalanalyser og andre tilgange involverer mange skøn, som per definition er subjektive. Derfor tog opgavens analyse udgangspunkt i rullende regressionsanalyser i lighed med Fama-MacBeth (1973).

Analysen konkluderede, at industriens CAPM- og FFM3-faktorloadings varierer over tid, men at de set over lange tidsperioder er mere stabile. For den gennemsnitlige industri har det derfor været en fordel at basere faktorloadings på få års data, når man har skullet bruge forventede afkast for det kommende år, mens det har været en fordel at bruge al historisk afkastdata, når man har skullet bruge forventede afkast for længere tidshorisonter. Valget af estimationsmetode betyder dog ganske lidt for modellernes samlede evne til at forklare afkast, som på kort og lang sigt har været dårlig. MAE var typisk over 3%, og resultaterne var robuste over for Blume-, Vasicek- og Dimson-justerede faktorloadings.

Selv om estimationsmetoderne betyder minimalt for modellernes evne til at forklare afkast, er valget af metode dog ikke uden betydning for afkastkravets størrelse. Når faktorloadings per 2019 baseres på i) de seneste fem års data eller ii) hele tidsperioden 1963-2019, var forskellene i CAPM-afkastkrav mere end 1 procentpoint for 22 industrier og mere end 2 procentpoint for fem industrier. For FFM3-afkastkravene var forskellene mere end 1 procentpoint for 40 industrier og mere end 2 procentpoint for 22 industrier. For de fleste industrier betyder det derfor meget, om afkastkravet estimeres med den ene eller anden metode.

Alt i alt er den samlede usikkerhed på afkastkravet deprimerende høj. Selv under antagelse af, at faktorloadings kan estimeres uden fejl, førte usikkerheden på risikopræmierne til standardfejl, der i gennemsnit var 2,13% for industriernes CAPM-afkastkrav og 2,21% for industriernes FFM3-

afkastkrav. I standard 95%-konfidensinterval kan CAPM-afkastkravet derfor i gennemsnit være alt mellem 2,40-10,78%, mens FFM3-afkastkravet kan være alt mellem 3,26-11,92%. For det enkelte selskab vil den samlede usikkerhed kun være større, fordi faktorloadings estimeres mere upræcist.

Testene lider som altid under "Roll's critique", men som minimum kan det konkluderes, at modellerne har været meget upræcise, når de baseres på aktieindeks, som ofte er tilfældet i praksis. For det enkelte selskab er det afgørende derfor nok, at den ikke lader præcision være noget ultimativt succeskriterie for valget af beslutningsmetode. Den skal ikke vælge realinvesteringer i blinde, men den bør heller ikke afskrive hverken payback-metoden, fundamentalanalyserne, surveybaserede opgørelser eller implicitte risikopræmier. Metoden kan dog have stor betydning for selskabernes realinvesteringspolitikker, og på lige fod med udlodningspolitikken *bør* det være relevant information for aktionærene. Det er næppe til skade for selskaberne at oplyse i årsrapporten, om de benytter CAPM baseret på få års data eller en helt anden fremgangsmåde. På den måde vil den enkelte investor selv kunne danne sig et indtryk af størrelsesordenen, og om vedkommende kan stå inde for processen.

Litteraturliste

- Armitage, S. (2005). "The Cost of Capital – Intermediate Theory". Cambridge University Press
- Bloomberg (2018). United States Rates & Bonds. Indhentet 22. Juni fra <https://www.bloomberg.com/markets/rates-bonds/government-bonds/us>
- Black, F., Jensen M., & Scholes, M. (1972) "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests".
- Blume, M. E. (1971), 'On the assessment of risk', The Journal of Finance 26(1), 1–10.
- Blume, M. E. (1975), 'Betas and their regression tendencies', The Journal of Finance 30(3), 785–795
- Brealey, R, A, Allen & S. C. Myers (2017). "Principles of Corporate Finance" Fifth edition, McGraw Hill
- Bruner, R. F., Eades, K. M., Harris, R. S., & Higgins, C. (1998). "Best Practices in Estimating the Cost of Capital: Survey and synthesis" Udgivet i Financial Practice and Education, 8, 13-28.
- Campbell, J. Y. (1996). "Understanding Risk and Return. Journal of Political Economy" 104(2)
- Cenesizoglu, T., Liu, Q., Reeves, J, J., Wu, H. (2013)" Monthly Beta Forecasting with Low, Medium and High Frequency Stock Returns" HEC Montreal Academic Journal.
- Chan, K.C. and Nai-fu Chen (1991) "Structural and Return characteristics of small and large firms" Journal of Finance 46, 1467-1484.
- Chen, Nai-fu, Richard Roll, and Stephen A. Ross (1986) "Economic forces and the stock market" Journal of Business
- Cohen, K. J., Hawawini, G. A, Maier . S. F., Schwarts, R. A. and WHITCOMB, D. K. (1979) "Implications of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behavior". Imprimé par l'INSEAD, Fontainebleau France
- Cooper, I (1996) "Arithmetic versus geometric mean estimators: Setting discount rates for capital budgeting". European Financial Management Vol 2
- Dalgaard, Rune & Plenborg, Thomas (2010). "Egenkapitalens afkastkrav - hvad er konsekvensen af antagelsen om, at gælden er risikofri". Finansinvest. http://finansinvest.dk/wp-content/uploads/2015/09/2010nr2_egenkapitalens_afkastk%20-%20HkfEyzE4od.pdf

- Damodaran, A (1999). Estimating Risk Parameters. Stern School of Business,
- Damodaran, A (2005) "Discussion Issues and Derivations" Stern School of Business, SSRN Working Paper, http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/AppldCF/derivn/ch4deriv.html
- Damodaran, A (2012) "Equity Risk Premiums" Stern School of Business, SSRN Working Paper, <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/ERP2012.pdf>
- Damodaran, A (2014). "Applied Corporate Finance". 4. Udgave. Forlag: Wiley
- Damodaran, A (2019). Equity Risk Premiums (ERP): Determinants, Estimation and Implications. Stern School of Business, SSRN Working Paper, https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3140837
- Deutsche Bundesbank (1997). Estimating the term structure of interest rates. Tilgæt fra https://www.bundesbank.de/Redaktion/EN/Standardartikel/Statistics/publications_term_structure_of_interest_rates.html
- Dimosn, Elroy (1979). "Risk Measurement when stocks are subject to infrequent trading". London Business School.
- Dimson, E., Marsh, P., and Staunton, M. (2002) "Triumph of the Optimists: 101 Years of Global Investment Returns", Princeton University Press
- Dimson, E., Marsh, P. & Staunton, M. (2018). Credit Suisse Global Investment Returns Yearbook 2018
- Fama, Eugene F. & French, Kenneth R. (1986) "Dividend Yields and Expected Stock Returns," Journal of Financial Economics 22
- Fama, Eugene F. and Kenneth R. French (1993) "Common risk factors in the returns on stocks and bonds". Journal of Financial Economics
- Fama, Eugene F. and Kenneth R. French (1997) "Industry Cost of Equity". Journal of Financial Economics
- Fernandez, P & Acin, I. (2016) "Betas Used by Professors: A Survey With 2,500 Answers". China-USA Business Review, July 2016, Vol. 15
- Fernandez, P., Pershin, V., Acin, I (2015). "Market Risk Premium and Risk-Free Rate used for 59 countries in 2015: a survey Answers", SSRN Workning Paper,
- Fernandez, P., Pershin, V., Acin, I (2019). "Market Risk Premium and Risk-Free Rate used for 59 countries in 2019: a survey Answers", SSRN Workning Paper,

- Graham, J. R and Campbell R. H. (2001) "The theory and practice of corporate finance: evidence from the field" *Journal of Financial Economics*,
- Gray, Philip & Tutticci, Irene (2007). Australian Stock Market Anomalies. *Journal of investment strategy*,
[http://www.fssuper.com.au/media/library/CPD/PDFs/Journals/Investment%20Strategy/Volu
me%202/Number%202/JIS-v2no2-07_gray.pdf](http://www.fssuper.com.au/media/library/CPD/PDFs/Journals/Investment%20Strategy/Volume%202/Number%202/JIS-v2no2-07_gray.pdf)
- Groetzmann, N. William & Ibbotson, G. Robert (2005). "HISTORY AND THE EQUITY RISK PREMIUM". Yale International Center For Finance,
["http://depot.som.yale.edu/icf/papers/fileuploads/2382/original/05-04.pdf](http://depot.som.yale.edu/icf/papers/fileuploads/2382/original/05-04.pdf)
- Herrnstein, R. J., & Murray, C. (1994). "The Bell Curve: Intelligence and Class Structure in American Life". New York, NJ: Free Press
- Huberman, Gur and Shmuel Kandel (1987). "Mean-variance spanning". *Journal of Finance*
- Jagannathan, R. and Z. Wang (1996). The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns. *Journal of Finance* 51
- Jorion, Philippe and William N. Goetzmann, (1999). "Global Stock Markets in the Twentieth Century," *Journal of Finance*,
- Kolke, L. A., Read, J. A. & Hall, G. R. (1984) "The Cost of Capital, Estimating the Rate of Return for Public Utilities". MIT Press
- Ilmanen, A. (2003), "Expected returns on stocks and bonds", *Journal of Portfolio Management*
- Levhari, D. and H. Levy, 1977, "The capital asset pricing model and the investment horizon", *Review of Economics and Statistics*
- Lintner, John (1965) "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets". *Review of Economics and Statistics* 47
- Lo, Andrew W. & MacKinlay, A. Craig (1988) "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies*
- Lucas, R. E. (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy". *Journal of Finance*
- Merton, Robert C. (1973) "An intertemporal capital asset pricing model". *Econometrica* 41
- Mikkelsen, G: Jakob (2016). "Time-Varying Loadings in Factor Models: Theory and Applications" Aarhus Business School. PhD Dissertation
https://pure.au.dk/portal/files/104842477/PhD_dissertation_Jakob_G_Mikkelsen.pdf
- Munk, Claus (2017). *Financial Markets and Investment*. Copenhagen Business School

- Møller, Michael, 2014: ” Notat vedrørende afkastkrav til elsektorens realkapitalinvesteringer”. Hentet d. 11.06.2019
https://ens.dk/sites/ens.dk/files/El/kapital_afkast_michael_moeller.pdf
- Nielsen, M. M (1990): Erhvervsøkonomiens udvikling I forskning og praksis, i Andersen, Heine (1990): Videnskabsteori og metodelære – bind II Erhvervsøkonomi, Samfundslitteratur
- Parum, C. (1999a). ”Historisk afkast af aktier og obligationer i Danmark” Finans Invest. 3. s. 4-13.
- Parum, C. (1999b). ”Estimation af realkreditobligationsafkast i Danmark i perioden i perioden 1925-1998”. Finans Invest, 7.
- Parum, C. Bechmann, K., L. Hansen, I. Weuder, U., D. Sloth, B. Bjerre-Nielsen, S. (2016) ”Baggrundsrapport: Forrentningen af net-virksomhedernes fremadrettede investeringer (WACC)”. Energi, Forsynings – og Klimaministeriet.
- Petersen, C. Plenborg, T. og Kinserdal, F. (2017) “Financial Statement Analysis”, Fagbokforlaget, 2017, 1. Udgave
- Poklepović, T. Aljinović, Z. Marasović, B (2014). ”The Ability of Forecasting the Term Structure of Interest Rates Based On Nelson-Siegel and Svensson Model”. International Journal of Economics and Management Engineering.
<https://waset.org/publications/9997763/the-ability-of-forecasting-the-term-structure-of-interest-rates-based-on-nelson-siegel-and-svensson-model>
- Poterba, James M. and Summers, Lawrence H. “Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications,” Journal of Financial Economics 22, no. 1 (October 1988): 27–59.
- PWC (2016). ”Værdiansættelse af virksomheder: Sådan fastlægges afkastkravet i praksis”
- Rieger, M.O., M. Wang and T. Hens (2012). “International Evidence on the Equity Risk Premium Puzzle and Time Discounting”, SSRN Working Paper,
- Roll, Richard (1977) “A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory”. Journal of Financial Economics
- Ross, Stephen A., (1976) “The arbitrage theory of capital asset pricing”. Journal of Economic Theory
- Rubinstein, M. (1976). The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets. Journal of Finance
- Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. Journal of finance 49(3)

- Saabye, Nick (2003). "Risikopræmien på aktier", Nationalbankens Handelsafdeling. http://www.nationalbanken.dk/da/publikationer/Documents/2003/02/2003_KVO1_ris73.pdf
- Sharpe, William F., (1964) "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk" Journal of Finance 1
- Shanken, J., Sloan G. R., Kothari, S. P (1995) "Another Look at the Cross-section of Expected Stock Returns", The Journal of Finance
- Skardziukas, Domantas (2010). " Practical approach to estimating cost of capital". Erasmus University, Rotterdam
- Vasicek, O. A. (1973), 'A note on using crosssectional information in bayesian estimation of security betas', The Journal of Finance 28(5)
- Williams, J. B. "The Theory of Investment Value" (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1938)
- Wooldridge, M. Jeffrey (2012). "Introductory Econometrics - A Modern Approach", 5.udgave

Appendiks

Appendiks 1 – R kode til output til tabel 5 (Historiske risikopræmier)

File Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help

```
1 Mydata <- FF3_1963_2019_monthly
2
3 Averagepremium <- rep(0,3)
4 standard_deviation <- rep(0,3)
5 standard_error <- rep(0,3)
6
7 Denominator <- sqrt(nrow(Mydata))
8
9 Averagepremium [1] <- colMeans(Mydata[2])
10 standard_deviation [1] <- sd(as.matrix(Mydata[2]))
11 standard_error [1] <- standard_deviation[1]/Denominator
12
13 for (i in 1:3){
14
15     Averagepremium[i] <- colMeans(Mydata[1+i])
16     standard_deviation [i] <- sd(as.matrix(Mydata[1+i]))
17     standard_error [i] <- standard_deviation[i]/Denominator
18
19 }
```

Appendiks 2 – R kode til output til tabel 6 (Regressioner på industriniveau for fulde periode)

File Edit Code View Plots Session Build Debug Profi

```
1 Y <- as.matrix(Portfolio_returns[,2])
2 X <- as.matrix(Mydata[,2])
3
4 Regression <- lm(Y ~ X)
5 MySummary <- summary(Regression)
6 MyCoef <- coef(MySummary)
7
8 MyAlphas <- rep(0,49)
9 MyBetas <- rep(0,49)
10 MyT <- rep(0,49)
11 MyR2 <- rep(0,49)
12
13
14 MyAlphas [1] <- MyCoef[1,1]
15 MyT [1] <- MyCoef[1,3]
16 MyBetas [1] <- MyCoef[2,1]
17 MyR2[1] <- MySummary$r.squared
18
19
20 for (i in 1:49) {
21   Y <- as.matrix(Portfolio_returns[,1+i])
22
23   Regression <- lm(Y ~ X)
24   MySummary <- summary(Regression)
25   MyCoef <- coef(MySummary)
26
27   MyAlphas [i] <- MyCoef[1,1]
28   MyT [i] <- MyCoef[1,3]
29   MyBetas [i] <- MyCoef[2,1]
30   MyR2[i] <- MySummary$r.squared
31
32 }
```

Appendiks 3 – R kode til output til tabel 7 (Implicitte standardafvigelser)

Det færdige output er blevet bearbejdet i Excel. Men datakilden har været det output, som er blevet genereret med udgangspunkt i nedenstående kode

```
1 Y <- as.matrix(Portfolio_returns[,2])
2 X <- as.matrix(Mydata[,2])
3
4
5 Five_years_Rolling_reg <- roll_lm(X,Y,60)
6
7 Mycoef <- coef(Five_years_Rolling_reg)
8
9
10 mybetas_variance <- rep(0,49)
11 Mystandarderrors_variance <- rep(0,49)
12
13
14 mybetas_variance [1] <- var(Five_years_Rolling_reg$coefficients[60:671,2])
15 Mystandarderrors_variance [1] <- mean((Five_years_Rolling_reg$std.error[60:671,2])^2)
16
17
18
19 for (j in 1:49) {
20
21
22
23   Y <- as.matrix(Portfolio_returns[,1+j])
24   Five_years_Rolling_reg <- roll_lm(X,Y,60)
25
26   Mystandarderrors_variance [j] <- mean((Five_years_Rolling_reg$std.error[60:671,2])^2)
27
28   mybetas_variance [j] <- var(Five_years_Rolling_reg$coefficients[60:671,2])
29
30 }
31
32 Mynames_table3 <- colnames(Portfolio_returns[2:50])
33 MyData_table3 <- data.frame(Mynames_table3,mybetas_variance,Mystandarderrors_variance)
34
35 (Top Level) ↕
```

Appendiks 4 – R kode til output til figur 12-14 (tidsvarierende faktorloadings)

Figuren er blevet manuelt bearbejdet med udgangspunkt i det data, der blev genereret igennem koden til tabel 6.

Appendiks 5 – R kode til output til tabel 8-11 (Rullende regressioner)

```
File Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help
Daily Dimson.R* Table2.R* Table3A.R* Table4 01-08-19.R* Table4.R* session_script.R* Table 5 + 6, daily.R* session_script2.R* Table3B.R* Table1.R* Table1
Source on Save

1
2 library(tidyverse)
3
4
5 Risk_adjusted_portfolio_returns %>% dim()
6 industry_list = Risk_adjusted_portfolio_returns %>% colnames
7 # Risk_adjusted_portfolio_returns %>% head(40) %>% view
8
9 mybetas_5 = c()
10 CAPM_5 = c()
11
12 results_all = {}
13 n_months = # 36, 48, 60 , 72 Rullende
14 forecast_period = 1 # perioder der ønsket forecastet
15 FF3_1963_2019_monthly_ %>% head()
16 # 5.28
17 industry_error = c()
18 industry_sd = c()
19 beta_mean = c()
20 max_period = 60 # Periodestart (i måneder).
21 head(FF3_1963_2019_monthly_)
22
23
24 for ( j in 1:(ncol(Risk_adjusted_portfolio_returns))) {
25   # print(j)
26   # print(i)
27   results = matrix(NA,nrow =(nrow(FF3_1963_2019_monthly_)), ncol = 5 )
28   colnames(results) = c('Return Sector t_1','Forecasted Ret','Diff','Beta','Market Risk Premium')
29
30
31   for (i in max_period:(nrow(FF3_1963_2019_monthly_)-1)){
32     x = as.matrix(FF3_1963_2019_monthly_[(i-n_months+1):i,2]) #Ændre her når der udvides til FF3
33   }
34 }
```



```

File Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help
Go to file/function Addins
Daily Dimson.R Table2.R Table3A.R Table4 01-08-19.R Table4.R session script.R Table 5 + 6, daily.R session script2.R Table3B.R Table1.R Table1.R
Source on Save Run
35 y = as.matrix(Risk_adjusted_portfolio_returns[(i-n_months+1):i,j])
36
37
38 reg = lm(y~x)
39
40 # mybetas_5 = c(mybetas_5,coef(reg)[2])
41 ret_nextm = Risk_adjusted_portfolio_returns[i+forecast_period,j] %>% as.numeric
42 for_ret = (2/3*coef(reg)[2]) * FF3_1963_2019_monthly_[ i +forecast_period,2] +coef(reg)[3] * FF3_1963_2019_m
[ i +forecast_period,3] + coef(reg)[4] * FF3_1963_2019_monthly_[ i +forecast_period,4] #Ændre her når der udvides ti
43
44 diff = for_ret - ret_nextm
45
46 results[i+1,1] = as.numeric(ret_nextm)
47 results[i+1,2] = as.numeric(for_ret)
48 results[i+1,3] = as.numeric(diff)
49 results[i+1,4] = as.numeric(coef(reg)[2])
50 results[i+1,5] = as.numeric( FF3_1963_2019_monthly_[ i +forecast_period,2])
51
52
53 }
54 results_all[[industry_list[j]]] = results
55 print(j)
56 print(i)
57 industry_error = c(industry_error, mean(abs(results[,3]), na.rm = T))
58 industry_sd = c(industry_sd, sd(results[,3], na.rm = T))
59 beta_mean = c(beta_mean, mean(results[,4], na.rm = T))
60 }
61
62 industry_mape = data.frame(industry = industry_list, mean_error = industry_error, std_dev = industry_sd, beta =
beta_mean)
63 industry_mape
64
65

```

Appendiks 6 – R kode til output til tabel 8-11 (Fuld-periode regressioner)

```
file Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help
Daily Dimson.R × Table2.R × Table3A.R × Table4 01-08-19.R × Table4.R × session_script.R × Table 5 + 6, daily.R × session_script2.R × Table3B.R × Table1.R × Table1.R ×
Source on Save
1 library(tidyverse)
2
3
4 library(readxl)
5 Risk_adjusted_portfolio_returns <- read_excel("~/CBS 2017/5. år/Speciale/R/Risk adjusted portfolios.xlsx")
6 # > View(Risk_adjusted_portfolio_returns)
7 library(readr)
8 FF3_1963_2019_monthly_ <- read_csv("~/CBS 2017/5. år/Speciale/R/FF3 - 1963 - 2019 monthly .csv")
9 # Risk_adjusted_portfolio_returns %>% dim()
10 industry_list = Risk_adjusted_portfolio_returns %>% colnames
11 # Risk_adjusted_portfolio_returns %>% head(40) %>% view
12
13 mybetas_5 = c()
14 CAPM_5 = c()
15
16 results_all = {}
17 n_months = 36 # 36, 48, 60 , 72 Rullende
18
19 forecast_period = 1 #perioder der ønsket forecastet
20 # FF3_1963_2019_monthly_ %>% head()
21 # 5.28
22 industry_error = c()
23 industry_sd = c()
24 beta_mean = c()
25 max_period = 60 # Periodestart (i måneder).
26 head(FF3_1963_2019_monthly_)
27
28
29 for ( j in 1:(ncol(Risk_adjusted_portfolio_returns))) {
30   # print(j)
31   # print(i)
32   results = matrix(NA,nrow =(nrow(FF3_1963_2019_monthly_)), ncol = 5 )
33   colnames(results) = c('Return Sector t_1','Forecasted Ret','Diff','Beta','Market Risk Premium')
```

```

Daily Dimson.R* x Table2.R x Table3A.R* x Table4 01-08-19.R x Table4.R x session_script.R* x Table 5 + 6, daily.R* x session_script2.R* x Table3B.R x Table1.R x Table1.R x
Source on Save
20 # FF3_1963_2019_monthly_ %>% head()
21 # 5.28
22 industry_error = c()
23 industry_sd = c()
24 beta_mean = c()
25 max_period = 60 # Periodestart (i måneder).
26 head(FF3_1963_2019_monthly_)
27
28
29 for ( j in 1:(ncol(Risk_adjusted_portfolio_returns))) {
30   # print(j)
31   # print(i)
32   results = matrix(NA,nrow =(nrow(FF3_1963_2019_monthly_)), ncol = 5 )
33   colnames(results) = c('Return Sector t_1','Forecasted Ret','Diff','Beta','Market Risk Premium')
34
35
36
37   for (i in max_period:(nrow(FF3_1963_2019_monthly_)-forecast_period)){
38     x = as.matrix(FF3_1963_2019_monthly_[1:i,2]) #Andre her når der udvides til FF3
39
40     y = as.matrix(Risk_adjusted_portfolio_returns[1:i,j])
41
42
43     reg = lm(y~x)
44
45     # mybetas_5 = c(mybetas_5,coef(reg)[2])
46     ret_nextm = Risk_adjusted_portfolio_returns[i+forecast_period,j] %>% as.numeric
47
48     for_ret = coef(reg)[2] * FF3_1963_2019_monthly_[ i +forecast_period,2] #Andre her når der udvides til FF3
49
50     diff = for_ret - ret_nextm
51
52     results[i+forecast_period,1] = as.numeric(ret_nextm)
53
54     results[i+forecast_period,1] = as.numeric(ret_nextm)
55     results[i+forecast_period,2] = as.numeric(for_ret)
56     results[i+forecast_period,3] = as.numeric(diff)
57     results[i+forecast_period,4] = as.numeric(coef(reg)[2])
58     results[i+forecast_period,5] = as.numeric( FF3_1963_2019_monthly_[ i +forecast_period,2])
59
60   }
61   results_all[[industry_list[j]]] = results
62   print(j)
63   print(i)
64   industry_error = c(industry_error, mean(abs(results[,3]), na.rm = T))
65   industry_sd = c(industry_sd, sd(results[,3], na.rm = T))
66   beta_mean = c(beta_mean, mean(results[,4], na.rm = T))
67 }
68
69 industry_mape = data.frame(industry = industry_list, mean_error = industry_error, std_dev = industry_sd, beta = beta_mean)
70 industry_mape

```

Appendiks 7 – R kode til output til tabel 12 (Blume)

Eneste forskel fra bilag 6 og 7 er, at beta justeres med faktor 2/3

Appendiks 8 – R kode til output til tabel 13 (Daglige regressioner + Dimson)

File Edit Code View Plots Session Build Debug Profile Tools Help

```
1 library(tidyverse)
2 Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY = as.vector(Portfolio_return_48[,2:48]) - as.matrix(FF3_1963_2019_DAILY[,5])
3
4 Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY %>% dim()
5 industry_list = Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY %>% colnames
6 # Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY %>% head(40) %>% view
7
8 mybetas_5 = c()
9 CAPM_5 = c()
10
11 results_all = {}
12 n_tradingdays_month = 21
13 n_months = n_tradingdays_month * 36 # 36, 48, 60, 72 Rullende Et år antages at være 253 trading days
14 n_forecast = 21
15 forecast_period = 1 * n_forecast # perioder der ønsket forecaste
16 FF3_1963_2019_DAILY %>% head()
17 # 5.28
18 industry_error = c()
19 industry_sd = c()
20 beta_mean = c()
21 max_period = 1255 # Periodestart (i måneder)).
22 head(FF3_1963_2019_DAILY)
23
24 for ( j in 1:(ncol(Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY))) {
25   # print(j)
26   # print(i)
27   results = matrix(NA,nrow =(nrow(FF3_1963_2019_DAILY)), ncol = 5 )
28   colnames(results) = c('Return Sector t-1','Forecasted Ret','Diff','Beta','Market Risk Premium')
29
30   for (i in max_period:(nrow(FF3_1963_2019_DAILY)-1)){
31     x = as.matrix(FF3_1963_2019_DAILY[(i-n_months+1):i,2]) #Ændre her når der udvides til FF3
32     y = as.matrix(Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY[(i-n_months+1):i,j])
33
34     reg = lm(y~x)
35
36     # mybetas_5 = c(mybetas_5,coef(reg)[2])
37     ret_nextm = Risk_adjusted_portfolio_returns_DAILY[i+forecast_period,j] %>% as.numeric
38     for_ret = coef(reg)[2] * FF3_1963_2019_DAILY[ i +forecast_period,2] #Ændre her når der udvides til FF3
39
40     diff = for_ret - ret_nextm
41
42     results[i+1,1] = as.numeric(ret_nextm)
43     results[i+1,2] = as.numeric(for_ret)
44     results[i+1,3] = as.numeric(diff)
45     results[i+1,4] = as.numeric(coef(reg)[2])
46   }
47   results_all[[industry_list[j]]] = results
48   print(j)
49   print(i)
50   industry_error = c(industry_error, mean(abs(results[,3]), na.rm = T))
51   industry_sd = c(industry_sd, sd(results[,3], na.rm = T))
52   beta_mean = c(beta_mean, mean(results[,4], na.rm = T))
53 }
54
55 industry_mape = data.frame(industry = industry_list, mean_error = industry_error, std_dev = industry_sd, beta = beta_mean)
56 industry_mape
```

```

ret_nextm = Risk_adjusted_portfolios_globa[i+forecast_period,j] %>% as.numeric
for_ret = coef(reg)[2] * Global_3_Factors_1990_2019[ i +forecast_period,2]

diff = for_ret - ret_nextm

results[i+1,1] = as.numeric(ret_nextm)
results[i+1,2] = as.numeric(for_ret)
results[i+1,3] = as.numeric(diff)
results[i+1,4] = as.numeric(coef(reg)[2]) #change here when regression w/o intercept
results[i+1,5] = as.numeric( Global_3_Factors_1990_2019[ i +forecast_period,2])

#calculate covariance matrix
vY <- as.matrix(as.data.frame(Risk_adjusted_portfolio_returns))[(i-n_months+1):i,j]
mX <- cbind(constant = 1, as.matrix(FF3_1963_2019_monthly_)[(i-n_months+1):i,2:4]) # design matrix

vBeta <- solve(t(mX)%*%mX, t(mX)%*%vY) # parameter estimat
dSigmaSq <- sum((vY - mX%*%vBeta)^2)/(nrow(mX)-ncol(mX)) # sigma^2
mVarCovar <- dSigmaSq*chol2inv(chol(t(mX)%*%mX)) # varians kovarians matrix
vStdErr <- sqrt(diag(mVarCovar)) # coeff. est. standardfejl
# print(cbind(vBeta, vStdErr)) # output
cov_mat = data.frame(industry = industry_list[j],
                     iteration = i-max_period+1,
                     beta_all=vBeta ,
                     std_err=vStdErr)
# names(temp_cov ) = c('industry','iteration', 'vBeta','vstderr')

# cov_mat_indstry[industry_list[j]][i-max_period + 1] = cov_mat
# cov_mat
print(paste0('industry - ', industry_list[j]," iteration - ",i-max_period +1))
temp_cov = rbind(temp_cov, cov_mat)
}
results_all[[industry_list[j]]] = results

```

Appendiks 9 – R kode til output til tabel 14 (Afkastkravetsstørrelse)

```

1 Y1 <- as.matrix(Risk_adjusted_portfolio_returns[,2])
2 X1 <- as.matrix(FF3_1963_2019_monthly[,2])
3 X2 <- as.matrix(FF3_1963_2019_monthly[,3])
4 X3 <- as.matrix(FF3_1963_2019_monthly[,4])
5
6 Regression1 <- lm(Y1 ~ X1)
7 MySummary1 <- summary(Regression1)
8 MyCoef1 <- coef(MySummary1)
9
10 MyAlphas1 <- rep(0,48)
11 MyBetas1 <- rep(0,48)
12 MyT1 <- rep(0,48)
13 MyR21 <- rep(0,48)
14 MySMB1 <- rep(0,48)
15 MyHML1 <- rep(0,48)
16
17
18 MyAlphas1 [1] <- MyCoef1[1,1]
19 MyT1 [1] <- MyCoef1[1,3]
20 MyBetas1 [1] <- MyCoef1[2,1]
21 MySMB1 [1] <- MyCoef1[3,1]
22 MyHML1 [1] <- MyCoef1[4,1]
23 MyR21[1] <- MySummary1$r.squared
24
25
26 for (i in 1:48) {
27   Y1 <- as.matrix(Risk_adjusted_portfolio_returns[,i])
28
29   Regression1 <- lm(Y1 ~ X1 )
30   MySummary1 <- summary(Regression1)
31   MyCoef1 <- coef(MySummary1)
32
33   MyAlphas1 [i] <- MyCoef1[1,1]
34   MyT1 [i] <- MyCoef1[1,3]
35   MyBetas1 [i] <- MyCoef1[2,1]
36   #MySMB1 [i] <- MyCoef1[3,1]
37   #MyHML1 [i] <- MyCoef1[4,1]
38   MyR21[i] <- MySummary1$r.squared
39
40 }
41
42 Mynames <- colnames(Risk_adjusted_portfolio_returns[1:48])
43 MyData2 <- data.frame(Mynames,MyAlphas1,MyT1,MyBetas1,MySMB1,MyHML1,MyR21)

```

Appendiks 10 – R kode til output til tabel 15 (Den samlede usikkerhed på afkastkravet)

```

vY <- as.matrix(as.data.frame(Risk_adjusted_portfolio_returns))[,1] #
mX <- cbind(constant = 1, as.matrix(as.data.frame(FF3_1963_2019_monthly_))[2:4]) # design matrix

vBeta <- solve(t(mX)%%mX, t(mX)%%vY) # parameterestimat
dSigmaSq <- sum((vY - mX%%vBeta)^2)/(nrow(mX)-ncol(mX)) # sigma^2
mVarCovar <- dSigmaSq*chol2inv(chol(t(mX)%%mX)) # varians kovarians matrix
vStdErr <- sqrt(diag(mVarCovar)) # coeff. est. standardfejl
print(cbind(vBeta, vStdErr)) # output
cov_mat_indstry = list()

temp_cov = matrix(nrow = 0, ncol = 4)
temp_cov = as.data.frame(temp_cov)
names(temp_cov) = c('industry','iteration', 'beta_all','std_err')

for ( j in 1:(ncol(Risk_adjusted_portfolios_globa))) {
  # print(j)
  # print(i)
  results = matrix(NA,nrow=(nrow(Global_3_Factors_1990_2019)), ncol = 5 )
  colnames(results) = c('Return Sector t_1','Forecasted Ret','Diff','Beta','Market Risk Premium')

  for (i in max_period:(nrow(Global_3_Factors_1990_2019)-1)){
    x = as.matrix(Global_3_Factors_1990_2019[(i-n_months+1):i,2])

    y = as.matrix(Risk_adjusted_portfolios_globa[(i-n_months+1):i,j])

    reg = lm(y~x) #

    # my nextm = my nextm + 1
    ret_nextm = Risk_adjusted_portfolios_globa[i+forecast_period,j] %>% as.numeric
    for_ret = coef(reg)[2] * Global_3_Factors_1990_2019[ i +forecast_period,2]

    diff = for_ret - ret_nextm

    results[i+1,1] = as.numeric(ret_nextm)
    results[i+1,2] = as.numeric(for_ret)
    results[i+1,3] = as.numeric(diff)
    results[i+1,4] = as.numeric(coef(reg)[2]) #change here when regression w/o intercept
    results[i+1,5] = as.numeric( Global_3_Factors_1990_2019[ i +forecast_period,2])

    #calculate covariance matrix
    vY <- as.matrix(as.data.frame(Risk_adjusted_portfolio_returns))[(i-n_months+1):i,j]
    mX <- cbind(constant = 1, as.matrix(FF3_1963_2019_monthly_))[(i-n_months+1):i,2:4]) # design matrix

    vBeta <- solve(t(mX)%%mX, t(mX)%%vY) # parameterestimat
    dSigmaSq <- sum((vY - mX%%vBeta)^2)/(nrow(mX)-ncol(mX)) # sigma^2
    mVarCovar <- dSigmaSq*chol2inv(chol(t(mX)%%mX)) # varians kovarians matrix
    vStdErr <- sqrt(diag(mVarCovar)) # coeff. est. standardfejl
    # print(cbind(vBeta, vStdErr)) # output
    cov_mat = data.frame(industry = industry_list[j],
                        iteration = i-max_period+1,
                        beta_all=vBeta ,
                        std_err=vStdErr)
    # names(temp_cov) = c('industry','iteration', 'vBeta','vstderr')

    # cov_mat_indstry[industry_list[j]][i-max_period + 1] = cov_mat
    # cov_mat
    print(paste0('industry - ', industry_list[j]," iteration - ",i-max_period +1))
    temp_cov = rbind(temp_cov, cov_mat)
  }
  results_all[[industry_list[j]]] = results
}

```

Appendiks 11 – Industrioversigt

1 Agric Agriculture

0100-0199 Agric production - crops

0200-0299 Agric production - livestock

0700-0799 Agricultural services

0910-0919 Commercial fishing

2048-2048 Prepared feeds for animals

2 Food Food Products

2000-2009 Food and kindred products

2010-2019 Meat products

2020-2029 Dairy products

2030-2039 Canned-preserved fruits-vegs

2040-2046 Flour and other grain mill products

2050-2059 Bakery products

2060-2063 Sugar and confectionery products

2070-2079 Fats and oils

2090-2092 Misc food preps

2095-2095 Roasted coffee

2098-2099 Misc food preparations

3 Soda Candy & Soda

2064-2068 Candy and other confectionery

2086-2086 Bottled-canned soft drinks

2087-2087 Flavoring syrup

2096-2096 Potato chips

2097-2097 Manufactured ice

4 Beer Beer & Liquor

2080-2080 Beverages

2082-2082 Malt beverages

2083-2083 Malt

2084-2084 Wine

2085-2085 Distilled and blended liquors

5 Smoke Tobacco Products

2100-2199 Tobacco products

6 Toys Recreation

0920-0999 Fishing, hunting & trapping

3650-3651 Household audio visual equip

3652-3652 Phonographic records

3732-3732 Boat building and repair

3930-3931 Musical instruments

3940-3949 Toys

7 Fun Entertainment

7800-7829 Services - motion picture production and distribution

7830-7833 Services - motion picture theatres

7840-7841 Services - video rental

7900-7900 Services - amusement and recreation

7910-7911 Services - dance studios

7920-7929 Services - bands, entertainers

7930-7933 Services - bowling centers

7940-7949 Services - professional sports

7980-7980 Amusement and recreation services (?)

7990-7999 Services - misc entertainment

8 Books Printing and Publishing

2700-2709 Printing publishing and allied

2710-2719 Newspapers: publishing-printing

2720-2729 Periodicals: publishing-printing

2730-2739 Books: publishing-printing

2740-2749 Misc publishing

2770-2771 Greeting card publishing

2780-2789 Book binding

2790-2799 Service industries for print trade

9 Hshld Consumer Goods

2047-2047 Dog and cat food

2391-2392 Curtains, home furnishings

2510-2519 Household furniture

2590-2599 Misc furniture and fixtures

2840-2843 Soap & other detergents

2844-2844 Perfumes cosmetics

3160-3161 Luggage

3170-3171 Handbags and purses

3172-3172 Personal leather goods, except handbags

3190-3199 Leather goods

3229-3229 Pressed and blown glass

3260-3260 Pottery and related products

3262-3263 China and earthenware table articles

3269-3269 Pottery products

3230-3231 Glass products

3630-3639 Household appliances

3750-3751 Motorcycles, bicycles and parts (Harley & Huffy)

3800-3800 Misc inst, photo goods, watches

3860-3861 Photographic equip (Kodak etc, but also Xerox)

3870-3873 Watches clocks and parts

3910-3911 Jewelry-precious metals

3914-3914 Silverware

3915-3915 Jewelers' findings, materials

3960-3962 Costume jewelry and notions

3991-3991 Brooms and brushes

3995-3995 Burial caskets

10 Clths Apparel

2300-2390 Apparel and other finished products

3020-3021 Rubber and plastics footwear

3100-3111 Leather tanning and finishing

3130-3131 Boot, shoe cut stock, findings

3140-3149 Footware except rubber

3150-3151 Leather gloves and mittens

3963-3965 Fasteners, buttons, needles, pins

11 Hlth Healthcare

8000-8099 Services - health

12 MedEq Medical Equipment

3693-3693 X-ray, electromedical app

3840-3849 Surg & med instru

3850-3851 Ophthalmic goods

13 Drugs Pharmaceutical Products

2830-2830 Drugs

2831-2831 Biological products

2833-2833 Medicinal chemicals

2834-2834 Pharmaceutical preparations

2835-2835 In vitro, in vivo diagnostics

2836-2836 Biological products, except diagnostics

14 Chems Chemicals

2800-2809 Chemicals and allied products

2810-2819 Industrial inorganic chems

2820-2829 Plastic material & synthetic resin

2850-2859 Paints

2860-2869 Industrial organic chems

2870-2879 Agriculture chemicals

2890-2899 Misc chemical products

15 Rubbr Rubber and Plastic Products

3031-3031 Reclaimed rubber

3041-3041 Rubber & plastic hose and belting

3050-3053 Gaskets, hoses, etc

3060-3069 Fabricated rubber products

3070-3079 Misc rubber products (?)

3080-3089 Misc plastic products

3090-3099 Misc rubber and plastic products (?)

16 Txtls Textiles

2200-2269 Textile mill products

2270-2279 Floor covering mills

2280-2284 Yarn and thread mills

2290-2295 Misc textile goods

2297-2297 Nonwoven fabrics

2298-2298 Cordage and twine

2299-2299 Misc textile products

2393-2395 Textile bags, canvas products

2397-2399 Misc textile products

17 BldMt Construction Materials

0800-0899 Forestry

2400-2439 Lumber and wood products

2450-2459 Wood buildings-mobile homes

2490-2499 Misc wood products

2660-2661 Building paper and board mills

2950-2952 Paving & roofing materials

3200-3200 Stone, clay, glass, concrete etc

3210-3211 Flat glass

3240-3241 Cement hydraulic

3250-3259 Structural clay prods

3261-3261 Vitreous china plumbing fixtures

3264-3264 Porcelain electrical supply

3270-3275 Concrete gypsum & plaster

3280-3281 Cut stone and stone products

3290-3293 Abrasive and asbestos products

3295-3299 Non-metallic mineral products

3420-3429 Handtools and hardware

3430-3433 Heating equip & plumbing fix

3440-3441 Fabricated struct metal products

3442-3442 Metal doors, frames

3446-3446 Architectual or ornamental metal work

3448-3448 Pre-fab metal buildings

3449-3449 Misc structural metal work

3450-3451 Screw machine products

3452-3452 Bolts, nuts screws

3490-3499 Misc fabricated metal products

3996-3996 Hard surface floor cover

18 Cnstr Construction

1500-1511 Build construction - general contractors

1520-1529 Gen building contractors - residential

1530-1539 Operative builders

1540-1549 Gen building contractors - non-residential

1600-1699 Heavy Construction - not building contractors

1700-1799 Construction - special contractors

19 Steel Steel Works Etc

3300-3300 Primary metal industries

3310-3317 Blast furnaces & steel works

3320-3325 Iron & steel foundries

3330-3339 Prim smelt-refin nonfer metals

3340-3341 Secondary smelt-refin nonfer metals

3350-3357 Rolling & drawing nonferrous metals

3360-3369 Non-ferrous foundries and casting

3370-3379 Steel works etc

3390-3399 Misc primary metal products

20 FabPr Fabricated Products

3400-3400 Fabricated metal, except machinery and trans eq

3443-3443 Fabricated plate work

3444-3444 Sheet metal work

3460-3469 Metal forgings and stampings

3470-3479 Coating and engraving

21 Mach Machinery

3510-3519 Engines & turbines

3520-3529 Farm and garden machinery

3530-3530 Constr, mining material handling machinery

3531-3531 Construction machinery

3532-3532 Mining machinery, except oil field

3533-3533 Oil field machinery

3534-3534 Elevators

3535-3535 Conveyors

3536-3536 Cranes, hoists

3538-3538 Machinery

3540-3549 Metalworking machinery

3550-3559 Special industry machinery

3560-3569 General industrial machinery

3580-3580 Refrig & service ind machines

3581-3581 Automatic vending machines

3582-3582 Commercial laundry and drycleaning machines

3585-3585 Air conditioning, heating, re Frid eq

3586-3586 Measuring and dispensing pumps

3589-3589 Service industry machinery

3590-3599 Misc industrial and commercial equipment and mach

22 ElcEq Electrical Equipment

3600-3600 Elec mach eq & supply

3610-3613 Elec transmission

3620-3621 Electrical industrial appar

3623-3629 Electrical industrial appar

3640-3644 Electric lighting, wiring

3645-3645 Residential lighting fixtures

3646-3646 Commercial lighting

3648-3649 Lighting equipment

3660-3660 Communication equip

3690-3690 Miscellaneous electrical machinery and equip

3691-3692 Storage batteries

3699-3699 Electrical machinery and equip

23 Autos Automobiles and Trucks

2296-2296 Tire cord and fabric

2396-2396 Auto trim

3010-3011 Tires and inner tubes

3537-3537 Trucks, tractors, trailers

3647-3647 Vehicular lighting

3694-3694 Elec eq, internal combustion engines

3700-3700 Transportation equipment

3710-3710 Motor vehicles and motor vehicle equip

3711-3711 Motor vehicles & car bodies

3713-3713 Truck & bus bodies

3714-3714 Motor vehicle parts

3715-3715 Truck trailers

3716-3716 Motor homes

3792-3792 Travel trailers and campers

3790-3791 Misc trans equip

3799-3799 Misc trans equip

24 Aero Aircraft

3720-3720 Aircraft & parts

3721-3721 Aircraft

3723-3724 Aircraft engines, engine parts

3725-3725 Aircraft parts

3728-3729 Aircraft parts

25 Ships Shipbuilding, Railroad Equipment

3730-3731 Ship building and repair

3740-3743 Railroad Equipment

26 Guns Defense

3760-3769 Guided missiles and space vehicles

3795-3795 Tanks and tank components

3480-3489 Ordnance & accessories

27 Gold Precious Metals

1040-1049 Gold & silver ores

28 Mines Non-Metallic and Industrial Metal Mining

1000-1009 Metal mining

1010-1019 Iron ores

1020-1029 Copper ores

1030-1039 Lead and zinc ores

1050-1059 Bauxite and other aluminum ores

1060-1069 Ferroalloy ores

1070-1079 Mining

1080-1089 Mining services

1090-1099 Misc metal ores

1100-1119 Anthracite mining

1400-1499 Mining and quarrying non-metallic minerals

29 Coal Coal

1200-1299 Bituminous coal

30 Oil Petroleum and Natural Gas

1300-1300 Oil and gas extraction

1310-1319 Crude petroleum & natural gas

1320-1329 Natural gas liquids

1330-1339 Petroleum and natural gas

1370-1379 Petroleum and natural gas

1380-1380 Oil and gas field services

1381-1381 Drilling oil & gas wells

1382-1382 Oil-gas field exploration

1389-1389 Oil and gas field services

2900-2912 Petroleum refining

2990-2999 Misc petroleum products

31 Util Utilities

4900-4900 Electric, gas, sanitary services

4910-4911 Electric services

4920-4922 Natural gas transmission

4923-4923 Natural gas transmission-distr
4924-4925 Natural gas distribution
4930-4931 Electric and other services combined
4932-4932 Gas and other services combined
4939-4939 Combination utilities
4940-4942 Water supply

32 Telcm Communication

4800-4800 Communications
4810-4813 Telephone communications
4820-4822 Telegraph and other message communication
4830-4839 Radio-TV Broadcasters
4840-4841 Cable and other pay TV services
4880-4889 Communications
4890-4890 Communication services (Comsat)
4891-4891 Cable TV operators
4892-4892 Telephone interconnect
4899-4899 Communication services

33 PerSv Personal Services

7020-7021 Rooming and boarding houses
7030-7033 Camps and recreational vehicle parks
7200-7200 Services - personal
7210-7212 Services - laundry, cleaners

7214-7214 Services - diaper service

7215-7216 Services - coin-op cleaners, dry cleaners

7217-7217 Services - carpet, upholstery cleaning

7219-7219 Services - laundry, cleaners

7220-7221 Services - photo studios, portrait

7230-7231 Services - beauty shops

7240-7241 Services - barber shops

7250-7251 Services - shoe repair

7260-7269 Services - funeral

7270-7290 Services - misc

7291-7291 Services - tax return

7292-7299 Services - misc

7395-7395 Services - photofinishing labs (School pictures)

7500-7500 Services - auto repair, services

7520-7529 Services - automobile parking

7530-7539 Services - auto repair shops

7540-7549 Services - auto services, except repair (car washes)

7600-7600 Services - Misc repair services

7620-7620 Services - Electrical repair shops

7622-7622 Services - Radio and TV repair shops

7623-7623 Services - Refridg and air conditioner repair

7629-7629 Services - Electrical repair shops

7630-7631 Services - Watch, clock and jewelry repair

7640-7641 Services - Reupholster, furniture repair

7690-7699 Services - Misc repair shops

8100-8199 Services - legal

8200-8299 Services - educational

8300-8399 Services - social services

8400-8499 Services - museums, galleries, botanic gardens

8600-8699 Services - membership organizations

8800-8899 Services - private households

7510-7515 Services - truck, auto rental and leasing

34 BusSv Business Services

2750-2759 Commercial printing

3993-3993 Signs, advertising specialty

7218-7218 Services - industrial launderers

7300-7300 Services - business services

7310-7319 Services - advertising

7320-7329 Services - credit reporting agencies, collection services

7330-7339 Services - mailing, reproduction, commercial art

7340-7342 Services - services to dwellings, other buildings

7349-7349 Services - cleaning and bulging maint

7350-7351 Services - misc equip rental and leasing

7352-7352 Services - medical equip rental

7353-7353 Services - heavy construction equip rental

7359-7359 Services - equip rental and leasing

7360-7369 Services - personnel supply services

7374-7374 Services - computer processing, data prep

7376-7376 Services - computer facilities management service

7377-7377 Services - computer rental and leasing

7378-7378 Services - computer maintenance and repair

7379-7379 Services - computer related services

7380-7380 Services - misc business services

7381-7382 Services - security

7383-7383 Services - news syndicates

7384-7384 Services - photofinishing labs

7385-7385 Services - telephone interconnections

7389-7390 Services - misc business services

7391-7391 Services - R&D labs

7392-7392 Services - management consulting & P.R.

7393-7393 Services - detective and protective (ADT)

7394-7394 Services - equipment rental & leasing

7396-7396 Services - trading stamp services

7397-7397 Services - commercial testing labs

7399-7399 Services - business services

7519-7519 Services - trailer rental and leasing

8700-8700 Services - engineering, accounting, research, management

8710-8713 Services - engineering, accounting, surveying

8720-8721 Services - accounting, auditing, bookkeeping

8730-8734 Services - research, development, testing labs

8740-8748 Services - management, public relations, consulting

8900-8910 Services - misc

8911-8911 Services - engineering & architect

8920-8999 Services - misc

4220-4229 Warehousing and storage

35 Comps Computers

3570-3579 Office computers

3680-3680 Computers

3681-3681 Computers - mini

3682-3682 Computers - mainframe

3683-3683 Computers - terminals

3684-3684 Computers - disk & tape drives

3685-3685 Computers - optical scanners

3686-3686 Computers - graphics

3687-3687 Computers - office automation systems

3688-3688 Computers - peripherals

3689-3689 Computers - equipment

3695-3695 Magnetic and optical recording media

36 Softw Computer Software

7370-7372 Services - computer programming and data processing

7375-7375 Services - information retrieval services

7373-7373 Computer integrated systems design

37 Chips Electronic Equipment

3622-3622 Industrial controls

3661-3661 Telephone and telegraph apparatus

3662-3662 Communications equipment

3663-3663 Radio TV comm equip & apparatus

3664-3664 Search, navigation, guidance systems

3665-3665 Training equipment & simulators

3666-3666 Alarm & signaling products

3669-3669 Communication equipment

3670-3679 Electronic components

3810-3810 Search, detection, navigation, guidance

3812-3812 Search, detection, navigation, guidance

38 LabEq Measuring and Control Equipment

3811-3811 Engr lab and research equipment

3820-3820 Measuring and controlling equipment

3821-3821 Lab apparatus and furniture

3822-3822 Automatic controls - Envir and applic

3823-3823 Industrial measurement instru

3824-3824 Totalizing fluid meters

3825-3825 Elec meas & test instr

3826-3826 Lab analytical instruments

3827-3827 Optical instr and lenses

3829-3829 Meas and control devices

3830-3839 Optical instr and lenses

39 Paper Business Supplies

2520-2549 Office furniture and fixtures

2600-2639 Paper and allied products

2670-2699 Paper and allied products

2760-2761 Manifold business forms

3950-3955 Pens pencils and office supplies

40 Boxes Shipping Containers

2440-2449 Wood containers

2640-2659 Paperboard containers, boxes, drums, tubs

3220-3221 Glass containers

3410-3412 Metal cans and shipping containers

41 Trans Transportation

4000-4013 Railroads-line haul

4040-4049 Railway express service

4100-4100 Transit and passenger trans

4110-4119 Local passenger trans

4120-4121 Taxicabs

4130-4131 Intercity bus trans (Greyhound)

4140-4142 Bus charter

4150-4151 School buses

4170-4173 Motor vehicle terminals, service facilities

4190-4199 Misc transit and passenger transportation

4200-4200 Motor freight trans, warehousing

4210-4219 Trucking

4230-4231 Terminal facilities - motor freight

4240-4249 Transportation

4400-4499 Water transport

4500-4599 Air transportation

4600-4699 Pipelines, except natural gas

4700-4700 Transportation services

4710-4712 Freight forwarding

4720-4729 Travel agencies, etc

4730-4739 Arrange trans - freight and cargo

4740-4749 Rental of railroad cars

4780-4780 Misc services incidental to trans

4782-4782 Inspection and weighing services

4783-4783 Packing and crating

4784-4784 Fixed facilities for vehicles, not elsewhere classified

4785-4785 Motor vehicle inspection

4789-4789 Transportation services

42 Whlsl Wholesale

5000-5000 Wholesale - durable goods

5010-5015 Wholesale - autos and parts

5020-5023 Wholesale - furniture and home furnishings

5030-5039 Wholesale - lumber and construction materials

5040-5042 Wholesale - professional and commercial equipment and supplies

5043-5043 Wholesale - photographic equipment

5044-5044 Wholesale - office equipment

5045-5045 Wholesale - computers

5046-5046 Wholesale - commercial equip

5047-5047 Wholesale - medical, dental equip

5048-5048 Wholesale - ophthalmic goods

5049-5049 Wholesale - professional equip and supplies

5050-5059 Wholesale - metals and minerals

5060-5060 Wholesale - electrical goods

5063-5063 Wholesale - electrical apparatus and equipment

5064-5064 Wholesale - electrical appliance TV and radio

5065-5065 Wholesale - electronic parts

5070-5078 Wholesale - hardware, plumbing, heating equip

5080-5080 Wholesale - machinery and equipment

5081-5081 Wholesale - machinery and equipment (?)

5082-5082 Wholesale - construction and mining equipment

5083-5083 Wholesale - farm and garden machinery

5084-5084 Wholesale - industrial machinery and equipment

5085-5085 Wholesale - industrial supplies

5086-5087 Wholesale - machinery and equipment (?)

5088-5088 Wholesale - trans eq except motor vehicles

5090-5090 Wholesale - misc durable goods

5091-5092 Wholesale - sporting goods, toys

5093-5093 Wholesale - scrap and waste materials

5094-5094 Wholesale - jewelry and watches

5099-5099 Wholesale - durable goods

5100-5100 Wholesale - nondurable goods

5110-5113 Wholesale - paper and paper products

5120-5122 Wholesale - drugs & proprietary

5130-5139 Wholesale - apparel

5140-5149 Wholesale - groceries & related prods

5150-5159 Wholesale - farm products

5160-5169 Wholesale - chemicals & allied prods

5170-5172 Wholesale - petroleum and petro prods

5180-5182 Wholesale - beer, wine

5190-5199 Wholesale - non-durable goods

43 Rtail Retail

5200-5200 Retail - bldg material, hardware, garden

5210-5219 Retail - lumber & other building mat

5220-5229 Retail

5230-5231 Retail - paint, glass, wallpaper

5250-5251 Retail - hardward stores

5260-5261 Retail - nurseries, lawn, garden stores

5270-5271 Retail - mobile home dealers

5300-5300 Retail - general merchandise stores

5310-5311 Retail - department stores

5320-5320 Retail - general merchandise stores (?)

5330-5331 Retail - variety stores

5334-5334 Retail - catalog showroom

5340-5349 Retail

5390-5399 Retail - Misc general merchandise stores

5400-5400 Retail - food stores

5410-5411 Retail - grocery stores

5412-5412 Retail - convenience stores

5420-5429 Retail - meat, fish mkt

5430-5439 Retail - fruit and vegetable markets

5440-5449 Retail - candy, nut, confectionary stores

5450-5459 Retail - dairy product stores

5460-5469 Retail - bakeries

5490-5499 Retail - miscellaneous food stores

5500-5500 Retail - auto dealers and gas stations

5510-5529 Retail - auto dealers

5530-5539 Retail - auto and home supply stores

5540-5549 Retail - gasoline service stations

5550-5559 Retail - boat dealers

5560-5569 Retail - recreational vehicle dealers

5570-5579 Retail - motorcycle dealers

5590-5599 Retail - automotive dealers

5600-5699 Retail - apparel & acces

5700-5700 Retail - home furniture and equipment stores

5710-5719 Retail - home furnishings stores

5720-5722 Retail - household appliance stores

5730-5733 Retail - radio, TV and consumer electronic stores

5734-5734 Retail - computer and computer software stores

5735-5735 Retail - record and tape stores

5736-5736 Retail - musical instrument stores

5750-5799 Retail

5900-5900 Retail - misc

5910-5912 Retail - drug & proprietary stores

5920-5929 Retail - liquor stores

5930-5932 Retail - used merchandise stores

5940-5940 Retail - misc

5941-5941 Retail - sporting goods stores, bike shops

5942-5942 Retail - book stores

5943-5943 Retail - stationery stores

5944-5944 Retail - jewelry stores

5945-5945 Retail - hobby, toy and game shops

5946-5946 Retail - camera and photo shop

5947-5947 Retail - gift, novelty

5948-5948 Retail - luggage

5949-5949 Retail - sewing & needlework stores

5950-5959 Retail

5960-5969 Retail - non-store retailers (catalogs, etc)

5970-5979 Retail

5980-5989 Retail - fuel & ice stores (Penn Central Co)

5990-5990 Retail - retail stores

5992-5992 Retail - florists

5993-5993 Retail - tobacco stores

5994-5994 Retail - newsdealers

5995-5995 Retail - computer stores

5999-5999 Retail stores

44 Meals Restaurants, Hotels, Motels

5800-5819 Retail - eating places

5820-5829 Restaurants, hotels, motels

5890-5899 Eating and drinking places

7000-7000 Hotels, other lodging places

7010-7019 Hotels motels

7040-7049 Membership hotels and lodging

7213-7213 Services - linen

45 Banks Banking

6000-6000 Depository institutions

6010-6019 Federal reserve banks

6020-6020 Commercial banks

6021-6021 National commercial banks

6022-6022 State banks - Fed Res System

6023-6024 State banks - not Fed Res System

6025-6025 National banks - Fed Res System

6026-6026 National banks - not Fed Res System

6027-6027 National banks, not FDIC

6028-6029 Banks

6030-6036 Savings institutions

6040-6059 Banks (?)

6060-6062 Credit unions

6080-6082 Foreign banks

6090-6099 Functions related to deposit banking

6100-6100 Nondepository credit institutions

6110-6111 Federal credit agencies

6112-6113 FNMA

6120-6129 S&Ls

6130-6139 Agricultural credit institutions

6140-6149 Personal credit institutions (Beneficial)

6150-6159 Business credit institutions

6160-6169 Mortgage bankers

6170-6179 Finance lessors

6190-6199 Financial services

46 Insur Insurance

6300-6300 Insurance

6310-6319 Life insurance

6320-6329 Accident and health insurance

6330-6331 Fire, marine, property-casualty ins

6350-6351 Surety insurance

6360-6361 Title insurance

6370-6379 Pension, health, welfare funds

6390-6399 Insurance carriers

6400-6411 Insurance agents

47 REst Real Estate

6500-6500 Real estate

6510-6510 Real estate operators

6512-6512 Operators - non-resident buildings

6513-6513 Operators - apartment buildings

6514-6514 Operators - other than apartment

6515-6515 Operators - residential mobile home

6517-6519 Lessors of real property

6520-6529 Real estate

6530-6531 Real estate agents and managers

6532-6532 Real estate dealers

6540-6541 Title abstract offices

6550-6553 Real estate developers

6590-6599 Real estate

6610-6611 Combined real estate, insurance, etc

48 Fin Trading

6200-6299 Security and commodity brokers

6700-6700 Holding, other investment offices

6710-6719 Holding offices

6720-6722 Investment offices

6723-6723 Management investment, closed-end

6724-6724 Unit investment trusts

6725-6725 Face-amount certificate offices

6726-6726 Unit inv trusts, closed-end

6730-6733 Trusts

6740-6779 Investment offices

6790-6791 Miscellaneous investing

6792-6792 Oil royalty traders

6793-6793 Commodity traders

6794-6794 Patent owners & lessors

6795-6795 Mineral royalty traders

6798-6798 REIT

6799-6799 Investors, NEC

Appendiks 12 – Markedsoversigt

Country	Developed	Developed US	ex Europe	Japan	Asia Japan	Pacific	exNorth America
Australia	✓	✓			✓		
Austria	✓	✓	✓				
Belgium	✓	✓	✓				
Canada	✓	✓					✓
Switzerland	✓	✓	✓				
Germany	✓	✓	✓				
Denmark	✓	✓	✓				
Spain	✓	✓	✓				
Finland	✓	✓	✓				
France	✓	✓	✓				
Great Britain	✓	✓	✓				
Greece	✓	✓	✓				
Hong Kong	✓	✓			✓		

Ireland	✓	✓	✓						
Italy	✓	✓	✓						
Japan	✓	✓			✓				
Netherlands	✓	✓	✓						
Norway	✓	✓	✓						
New Zealand	✓	✓					✓		
Portugal	✓	✓	✓						
Sweden	✓	✓	✓						
Singapore	✓	✓					✓		
United States	✓								✓