

Prisfastsættelse af erhvervsobligationer

HD 2. Del finansiering, Copenhagen Business School

02.05.2017

Af Morten Skyhøj Olsen

Vejleder Peter Toftager

Indhold:

Abstract	side 4
Indledning og resumé	side 3
1.1 Problemformulering	Side 5
1.2 Afgrænsning	Side 6
1.3 Metodevalg	Side 5
1.4 Om obligationer	Side 7
2.1 Introduktion til datamateriale	Side 8
2.1.1 Carlsbergs obligationsudstedelse	Side 8
2.1.2 Statsobligationer til brug ved beregning af nulkupon	Side 11
2.1.3 Data til brug ved estimation af rentevolatilitet	Side 11
2.1.4 Andre datakilder	Side 11
2.1.5 Kritik af datakilder og metode	Side 12
2.1.6 Opgavens struktur	Side 13
3.1.0 Nulkuponrenter	Side 13
3.1.1 Datamateriale til udledning af nulkuponrenter	Side 14
3.1.2 Udledning af nulkuponrentestrukturen	Side 15
3.1.3 Udledning af nulkuponrenter v. NSS	Side 17
3.2.0 Prisfastsættelse ved nulkuponrentestrukturen	side 19
3.3.0 Nulkuponrenter plus volatilitet	Side 21
3.3.1 Estimation af volatiliteten	Side 21
3.3.2 Test for normalitet	Side 21
3.3.3 Historisk volatilitet	Side 23
3.3.4 EWMA	Side 25
3.3.5 Udledning af implicit volatilitet	side 25
3.3.6 Estimation af rentestruktur	Side 27
3.3.7 Valg af model til brug ved kalibrering	Side 30
3.3.8 Cox Rubinstein & Ross	Side 30
3.9.9 Ho-Lee Modellen	Side 32
3.3.10 Forudsætninger for Ho-Lee	Side 33
3.3.11 Beregning af kort rente ved Ho-Lee	Side 34
3.4.0 Prisfastsættelse ud fra binomialmodellen	Side 36
3.4.1 Præsentation af rentebinomialmodellen	Side 36
3.4.2 Beregning af pristræ i binomialmodellen	Side 37

3.4.3 Diskussion af resultat	Side 40
3.4.4. Delkonklusion	Side 41
4. Kreditrisiko	Side 41
4.1.0 Om kreditrisiko generelt	Side 42
4.2.0 Kredittillæg beregnet ved BSM	Side 43
4.2.1 Forudsætninger for anvendelse af BSM	Side 44
4.2.1 Fremgangsmåde ved beregning af kredittillæg	Side 45
4.2.2 Beregning af volatilitet	Side 48
4.2.3 Værdi af gæld og egenkapital	Side 51
4.2.4 Udledning af σ og V	Side 52
4.2.5 Beregning af kredittillæg ved BSM	Side 52
4.2.6 Bestemmelse af kredittillæg ud fra konkurssandsynlighed	Side 53
4.2.8 Udledning af kredittillæg via binomialmodellen	Side 56
4.2.9 Delkonklusion	Side 58
5.0.1 Konverteringspræmie på obligation	Side 60
5.1.0 Beregning af konverteringspræmie ved calloption	Side 61
5.1.2 fremgangsmåde ved berening	Side 63
5.1.3 Beregning af calloption	Side 65
5.2.1 Konverteringspræmie ved pristræ for obligation	Side 65
5.2.2 Beregning af konverteringspræmie ved binomialmodel 2	Side 67
5.2.3 Estimering af konverteringstillæg	Side 68
5.2.4 Diskussion af resultat	Side 69
5.3 Delkonklusion	Side 71
6.0.1 Opsummering	Side 72
7.0.0 Konklusion	Side 73
8.0.1 Litteraturliste	Side 74
Bilagsliste	Side 77

Abstract

In this paper I examine how the spread arising from the risk of default and issuers use of call option can be priced using the binomial model and the models proposed by Black Scholes and Merton.

The paper offers a guide to how the binomial model can be calibrated to that exact function, and show how this is done in the current state of negative interest rates.

The binomial model is calibrated using the Ho-Lee model.

A model that allows for negative interest rates. I also show how implied volatility can be extracted using the functions in the Ho-Lee model.

Other volatility is calculated using historical volatility and EWMA.

Along the course we test if our material follows a normal distribution.

My conclusion is, that using Black Scholes and binomial lattices, risk premiums can easily be identified given the correct information is available.

My paper can also find its use as a guide to the mistakes and flaws that can arise while working with the before mentioned models.

Indledning og resumé

Jeg har valgt at skrive om netop kreditobligationer i min hovedopgave, da det er et af de emner jeg i min HD uddannelse har fundet mest interessant.

I mit daglige virke som ejendomsmægler kommer jeg sjældent i kontakt med komplicerede problemstillinger, hvorfor jeg har fundet den teoretiske indgangsvinkel til fixed income spændende.

Af samme årsag har arbejdet med denne opgave været hårdt, da jeg kun har et teoretisk grundlag at bygge min opgave på.

1.1 Problemformulering

Den effektive rente vil i forbindelse med enhver obligation, det værende statsobligationer eller kreditobligationer, afspejle den risiko man som investor påtager sig.

Den effektive rente kan derfor også betragtes som obligationens pris.

Den risiko kan deles op i kredit, rente og likviditetsrisiko der skal tillægges den risikofri rente man alternativt vil kunne opnå. Den risikofri rente vil her afspejle den alternativomkostning man som investor har ved at holde obligationen.

Det antages at kreditobligationer har et større risikotillæg frem for statsobligationer.

Min antagelse er, at denne risiko kan beregnes efter sikre og pålidelige metoder.

Jeg ønsker i min afhandling at nå frem til hvilke metoder der kan anvendes hertil, og bedømme hvor pålidelige de er.

Min problemformulering lyder derfor som følger;

Hvordan fastsættes prisen på kreditobligationer set fra et teoretisk synspunkt?

1.2 Afgrænsning

Ud over risikotillæg for kreditrisiko og konverteringsrisiko, vil det være nærliggende også at undersøge om der er et målbart tillæg for migreringsrisiko, likviditetsrisiko og risiko for udsving i valutakurser.

For at holde afhandlingen overskuelig vil vi dog afgrænse os til at undersøge de forhold der afgør kreditrisiko og konverteringsrisiko, da vi antager at disse står for hovedparten af risikoen ved denne obligationsudstedelse.

Mit udgangspunkt var oprindeligt også at undersøge likviditetsrisikoen, men undervejs i opgaven stod det klart at kredit og konverteringsrisiko dækker så bredt, at yderligere begrænsning var påkrævet.

Dertil stod det også efter lidt forarbejde klart, at likviditetsrisikoen her var mindre end ved andre kreditobligationer, eftersom den handles på børsen og det observerede bid/ask spread ikke er særligt højt.

Risikomål som varighed og konveksitet vil heller ikke blive inddraget, ligesom risikoafdækning heller ikke vil blive behandlet.

Carlsberg har desuden tre andre obligationer der ikke vil blive inddraget i denne afhandling, uagtet at en sammenligning kunne være interessant.

For at opsummere er min afhandling afgrænset til udelukkende at beskrive obligationens prisfastsættelse med udgangspunkt i kreditrisiko og konverteringsrisiko.

Der vil derfor i risikotillæggen heller ikke blive taget stilling til omkostninger i forbindelse med reinvestering til andre og mere risikable aktiver. Dette antages at være indeholdt i risikotillægget.

1.3 Metodevalg

Jeg vil benytte mig af anerkendte modeller til prisfastsættelse og kombinere disse til at danne mig et passende overblik og acceptabel værdiansættelse.

Det vil være nødvendigt at estimere en fremtidig rentestruktur, hvor jeg vil benytte mig af Nelson Siegels metode til estimering af nulkuponrentestrukturen.

Den fundne nulkuponrentestruktur vil herefter blive brugt til igen at estimere strukturen i den korte rente via en binomialmodel, der vil blive udgangspunktet for en foreløbig prisfastsættelse af begge obligationer. Dette vil blive gjort via en kalibrering ud fra Ho-

Lee modellen, der udover at tage udgangspunkt i den gældende nul kuponrentestruktur også inddrager rentevolatiliteten.

Tillægget for kreditrisikoen vil blive beregnet ud fra tre forskellige metoder:

Black Scholes der er en model til bestemmelse af priser på optioner, men hvor vi vælger at betragte aktionærernes aktieinvestering som en erhvervet calloption.

En metode hvor vi ved Black Scholes og en modificeret ligning fra John Hulls Options, futures and other derivatives" udleder kredittillægget.

En binomial/trinomial model hvor vi ud fra en konkurssandsynlighed udledt fra Black Scholes konstruerer et pristræ hvor konkurs er et af udfaldene.

Baggrunden for valg af disse metoder er, at vi bestemmer risikoen ud fra virksomheden uden skelen til markedet i øvrigt.

Ellers er det også muligt at bestemme konkursrisiko og tillæg ud fra observerede spreads i markedet, men vi ønsker her at afdække tillæggene med udgangspunkt i virksomheden uden at lade os påvirke af udefra kommende faktorer.

Valgte vi denne metode ville opgaven få en mere beskrivende karakter, hvilket ikke hænger sammen med hvad jeg selv ønsker at få ud af opgaveskrivningen.

Betingelser for anvendelse af Nelson Siegel Svensson og Black Scholes Merton vil blive diskuteret, og selvom alle betingelser ikke er opfyldt vil de alligevel blive anvendt.

Tillægget for konverteringsrisikoen vil blive beregnet udelukkende fra binomialmodellen. Først ved en antagelse om prisfastsættelse via en amerikansk calloption, herefter ved at konstruere et pristræ for en inkonverterbar obligation.

Grunden til at jeg har valgt flere metoder til samme problem er, at jeg ønsker at vurdere metodernes brugbarhed.

Fremgangsmåderne til modellernes anvendelse kommer fra lærebøger og artikler skrevet af bl.a. John Hull, Michael Christensen og Pietro Veronesi.

Excel ark til beregning af Nelson Siegel Svensson kommer fra undervisning i faget fixed income ved Ulrik Strandgaard.

Arket er i mindre grad tilpasset til mine egne behov for beregninger.

Dette er som udgangspunkt sket fordi min egen version byggede så meget på denne, at det gav mere mening simpelthen at tilpasse Ulriks ark til egne behov.

Til de statistiske test for normalitet er programmet Hypostat blevet anvendt.

Materiale fra undervisningen i fagene fixed income samt derivatives er desuden brugt til at forstå og beregne ud fra modellerne.

Af mere sekundær natur er kilder i form af hjemmesiderne bionicturtle.com samt financetrain.com blevet anvendt til en skridt for skridt forklaring på udledning af volatilitet. De bagvedliggende ligninger er dog de same som beskrevet af John Hull i bogen "Fundamentals og Futures and Options Markets".

1.4 Om obligationer kort

Som långiver skal man som udgangspunkt have følgende krav opfyldt, når man anbringer sine penge i en obligation og dermed giver afkald på forbrugsmuligheder i en længere periode.

Den første vil være at man som minimum får det afkast man ville have fået ved at anbringe sine midler i et risikofrit aktiv.

Dette kan betragtes som alternativomkostningerne, idet vi antager, at man altid har mulighed for at anbringe sine penge til den risikofri rente. I de fleste tilfælde vil man med dette mene højt ratede (AAA) statsobligationer, der har en negligerbar risiko for at misligholde deres betalinger.

Dertil kommer den risiko der er for at udsteder ikke kan betale som forventet.

Man vil i den situation nøjes med en mindre del af hovedstolen¹ og gå glip af den resterende ydelsesrække.

En anden udbredt risiko er, at mange udstedere har en calloption på obligationen der giver udsteder ret til at købe obligationen tilbage ved kurs 100. Derved vil långiver miste de fremtidige kuponbetalinger samt det beløb over kurs 100 der er blevet betalt for obligationen. Endnu en risikabel faktor ved at udsteder har en calloption er, at såfremt den bliver eksekveret vil det være i en situation med lavere renter end udgangspunktet. Man vil som investor alt andet lige ikke kunne finde investeringsmuligheder med samme kombination af afkast og risikoprofil.

¹ Recovery rate gennemgås senere

Vores udgangspunkt i denne afhandling bliver derfor, at en obligations effektive rente kan opdeles i en enkel "basisrente", den risikofri, med tillæg svarende til forskellige risikofaktorer. Her antages kreditrisiko for at være den største, sammen med risikoen for en tidlig indfrielse fra investors side.

Målet med opgaven er herfra at undersøge muligheder til at identificere og måle disse risici.

2.1 Introduktion til datamateriale

Til brug ved arbejdet med afhandlingen vil vi benytte en række af data der i det følgende vil blive præsenteret. Alt data er offentligt tilgængeligt, hvilket stiller større krav til kildekritik, og samtidig begrænser os på nogle områder.

2.1.1 Carlsbergs obligationsudstedelse

Kreditobligationen jeg ønsker at værdiansætte er en udstedelse fra Carlsberg² der blev udstedt 28. maj 2014 med udløb 28. maj 2024. Restløbetid for obligationen er fra d. 5 april således 7,145 år.

Obligationen er et stående lån og har en kupon på 2,500%. Lånets størrelse er nominelt 1.000.000.000,00 euro med en stykstørrelse på 1.000,00 euro. Obligationen handles til kurs 109,73³ og er noteret på Luxembourg Stock Exchange.

Låneprovenuets skal bruges til "general corporate purposes" hvilket forstås som at de skal indgå til finansiering af den almindelige drift af virksomheden.

Udstedelsen sker under reglerne for european medium term notes, hvilket vil sige at man under dette program kan optage gæld ad flere omgange under samme "program" forudsat det holdes under 5.000.000.000,000 euro.

² ISIN: XS1071713470, prospekt indgår som bilag 20, final terms som bilag 5

³ Pr. 5 april 2017

Dette giver fleksibilitet og sparer penge på hver udstedelse. At de er european betyder bare at de ikke er amerikanske eller canadiske.

Der er i forbindelse med udstedelsen blevet givet udsteder en calloption der giver Carlsberg ret til at opkøbe/indfri gælden til kurs 100.

Alt andet lige tilføjer dette risikomoment, da investor ved et rentefald og efterfølgende forindfrielse af gælden vil have svært ved at finde muligheder for at reinvestere til samme rente og risikoprofil.

Et ganske interessant fænomen ved denne calloption er, at den ikke er blevet eksekveret selvom kursen er langt over pari og der er mulighed for refinansiering til en lavere rente.

Carlsberg har ved årsafslutning 2016 en rating BBB hos Fitch og en Baa2 hos Moody's⁴ der betyder at Carlsberg og dennes udstedelser befinder sig i den laveste ende af hvad der kan betegnes investment grade.

Obligationen er med hensyn til sikkerhed for lånet hvad der kaldes senior unsecured notes.

Dette betyder at der ikke er stillet sikkerhed i form af aktiver, som det er tilfældet med eksempelvis realkreditobligationer. Investor har ved en konkurs således ikke pant i et specifikt aktiv og er stillet ringere i prioritetesrækken end dem der har pant i aktiver, som eksempelvis realkreditinstitutter. Recovery rate vil derfor i udgangspunkt være ringere ved denne type gæld.

⁴ Kilde: Carlsbergs årsrapport 2016 side 35, bilag 10

2.1.2 Statsobligationer til brug ved beregning af nulkuponrentestrukturen / den risikofri rente

Som et mål for den risikofri rente vælger vi at benytte os af den gældende nulkuponrentestruktur. For at udlede denne benytter vi os af tyske statsobligationer hvor relevant data er tilgængelig via Bundesrepublik Deutschland – Finanzagentur GmbH. Fra samme sted er kursinformation om disse obligationer indhentet.

Til brug ved udarbejdelse af rentetræ til beskrivelse af de forventede korte renter er benytte statsobligationer i form af strips. Strips er en interessant konstruktion hvor man sælger en statsobligation uden de medfølgende kuponbetalinger, dermed en kunstig nulkuponobligation. Det er dog ikke af den grund at der er valgt til brug ved konstruktion af rentetræet, men af den simple årsag at der var en obligation (med samme risikoprofil) med udløb til hver enkel periode t , hvilket gjorde konstruktionen af rentetræet mere pålidelig.

2.1.3 Data til brug ved estimation af rentevolatilitet

Til brug ved estimation af rentevolatilitet er der gjort brug af euribor renterne der er tilgængelige på euribor-rates.eu.

Denne kilde til data er valgt da renterne er baseret på de renter et panel⁵ af europæiske banker tager for at låne hos hinanden. Data er desuden offentligt tilgængeligt og præsenteret overskueligt.

2.1.4 Andre datakilder

Ud over de ovenstående, er der taget udgangspunkt i Carlsberg gruppens årsrapport for 2016 for oplysninger om gæld og som et udgangspunkt for en forståelse af virksomheden hvis obligationsudstedelse vi betragter. Carlsbergs hjemmeside der giver adgang til årsrapporter og prospekter er også blevet brugt som en kilde til data.

⁵ <http://www.euribor-rates.eu/panelbanks.asp>

For indhentning af oplysninger om obligationskurser, heriblandt kurs og effektiv rente på de i afsnit 2.1.2 nævnte stripobligationer, har jeg gjort brug af hjemmesiden for børsen i Frankfurt⁶. Dette fordi der her findes oplysninger om de fleste værdipapirer der handles i det sekundære marked, uanset hvilken børs de handles på, og priserne vises i euro. For oplysninger om recovery rates og generel orientering om ratings er der brugt hjemmesiderne for Moody's og Fitch, samt publikationer herfra.

2.1.5 Kritik af datakilder og metode

Det er mit indtryk af de valgte datakilder kan antages at angive de korrekte data i en sådan grad, at den største fejlkilde må ligge i min egen måde at betragte og behandle data på. Jeg går ud fra, at de valgte kilder ikke har interesse i, at vise fejlagtige data.

Med hensyn til de anvendte metoder antager jeg at forfattere der benyttes i undervisningen på CBS benytter sig af troværdige metoder. Ydermere kan det let undersøges hvilke uddannelsesinstitutioner forfatterne er tilknyttet og om det er universiteter man mener driver en redelig forskning.

På baggrund af dette har jeg ingen antagelser om, at de kilder jeg benytter i mine metoder ikke relevante.

For så vidt angår Black Scholes Merton antager jeg at nobelprisen i økonomi taler for sig selv. Det samme gør sig gældende for Ho-Lee modellen der blev udviklet i 1986 og stadig anvendes den dag i dag. Den har dog ikke vundet en nobelpris, men en længere research har ikke givet anledning til alarmklokker.

For at opsummere kildekritikken mener jeg at have holde mig til neutrale datakilder og troværdige modeller, således at de fejl der må opstå vil bero på egne fejlantagelser.

⁶ <http://en.boerse-frankfurt.de/>

2.1.6 Opgavens struktur

I det følgende vil jeg påbegynde min analyse af væsentlige faktorer for herefter at opbygge en rentestruktur der skridt for skridt viser en metode til værdiansættelse af en kreditobligation. Det væsentlige er her den effektive rente, hvorfor det er obligationens rente vi fokuserer på og ikke selve kursen.

Kursen vil kun blive brugt til udledning af rentestrukturen.

Første del vil være at estimere den risikofri rente. Vi antager at den risikofri rente kan repræsenteres ved nulkuponrentestrukturen.

Herefter vil vi med udgangspunkt i Black Scholes Merton estimere et risikotillæg der kompenserer investor for at virksomheden ikke kan overholde deres betalinger.

Efterfølgende vil vi nå frem til et tillæg der kompenserer investor for den risiko der er for at Carlsberg vælger at benytte sin calloption og indfri lånet til kurs 100.

Til slut vil vi estimere en rentestruktur gældende for hele obligationens løbetid der bygger på de fundne risikotillæg.

Opgaven har på trods af forsøg på begrænsning en vis længde, hvorfor jeg ser det nødvendigt at opridse struktur og formål i dette afsnit.

3.1.0 Nulkuponrenter

Nulkuponrenter bruges til at sikre at alle betalingsstrømme prissættes ens, så én krone modtaget som betaling prissættes ens, uanset hvor betalingen kommer fra.

Nulkuponrenten for perioden t_i viser den interne rente for nulkuponobligationen i netop den periode. Nulkuponrenten er ens for alle betalinger der forfalder på samme termin, hvorfor den er ideel til at benytte som en universel diskonteringsrente.

Dette er i kontrast til den effektive rente der måler renten i hele obligationens løbetid, uanset tidspunktet for hvornår betalingen falder.

Nulkuponrenten vil ud over at være referencerenten, betragtes som det minimum af afkast man som investor ønsker som compensation for, at give afkald på nutidige forbrugsmuligheder.

I teorien kan vi derfor ved at diskontere enhver obligations betalingsstrømme med nulkuponrenten og finde dens teoretiske kurs, og ved sammenligning med den observerede kurs bestemme om den er korrekt prisfastsat i markedet.

Svagheden ved dette er, at fremgangsmåden ikke forholder sig til de risici man som investor løber ud over de forbigåede forbrugsmuligheder, såsom kreditrisiko, konverteringsrisiko og evt. andre risici.

3.1.1 Datamateriale til udledning af nulkuponrentestruktur

Nulkuponrenter udledes af nulkuponobligationer. Obligationer uden kuponbetaling der kun giver én betaling, nemlig hovedstolen ved udløb. Der findes ikke mange nulkuponobligationer i omløb hvorfor vi har taget en række af obligationer med løbetider N til N+1 for hver enkelt, således at vi har en med udløb i hver periode for herigennem at estimere en nulkuponrentestruktur.

Da vi anvender obligationer der handles i euro er der i beregningen taget udgangspunkt i otte tyske statsobligationer vist i tabel 1 nedenfor. Vi regner således med at vi ikke behøver tage højde for valutakursrisiko, selvom den danske fastkurspolitik i det store hele burde eliminere denne risiko.

Der er valgt tyske statsobligationer da statsobligationer anses for at være særligt gode indikatorer for den risikofri rente og en nulkuponrente skal komme så tæt på den risikofri rente som muligt.

På trods af at statsobligationer ofte betragtes som risikofri aktiver er der flere eksempler på stater der ikke kan servicere deres gæld⁷. Man bør derfor vælge være omhyggelig når man vælger et eksempel på et risikofrit aktiv.

Tyskland er derfor valgt som et eksempel på den rent risikofri rente, da det er blandt de lande med mindst sandsynlighed for, at misligholde deres betalinger.

De har derfor den højeste rating, AAA⁸, højere end eksempelvis USA.

⁷ Se f.eks. bilag 6

⁸ Standard & Poor's

Nulkuponrenter udledt fra tyske statsobligationer kan derfor antages at være et af de mest sikre mål for en risikofri rente. Kreditrisikoen er så lav som den kan blive og obligationerne er inkonverterbare.

Der kan argumenteres for at renterne holdes "kunstigt" lavt ved støtteopkøb fra den europæiske centralbank, men ikke desto mindre er denne rente gældende, og må være den vi forholder os til.

3.1.2 Udledning af nulkuponrentestrukturen ved bootstrapping

Der findes flere modeller til estimation af nulkuponrentestrukturen hvoraf en af de mest simple er bootstrapping. Denne metode kan lade sig gøre med en række kendte kurser og udløbstider på obligationer.

Fremgangsmåden der bruges her er fra Fundamentals of Futures and Options Markets af John Hull (8. udgave) kapitel fire side 88.

Den grundlæggende idé er, at betragte både kupon og hovedstol som én samlet betaling, og dermed simulere en nulkuponobligation.

Obligation	Kupon	Dirty price	ISIN
4,25% STL17	4,25	104,42	DE0001135333
4,25% STL18	4,25	109,53	DE0001141653
3,5%% STL19	3,50	112,37	DE0001135382
3,00% STL20	3,00	114,52	DE0001135408
3,25% STL21	3,25	119,02	DE0001135440
1,75% STL22	1,75	112,98	DE0001135473
2,00% STL23	2,00	114,44	DE0001102366
1,00% STL24	1,00	108,56	DE0001102366

Figur 1, Kilde: egen tilvirkning

Vi benytter obligationerne⁹ fra figur 1. De har alle termin d. 4. juli på nær de to sidst nævnte der har termin 15. august. I stedet for kursen benyttes dirty price, altså kurs inkl. vedhængende rente

⁹ Kilde: <http://en.boerse-frankfurt.de/bonds>, 5. april 2017

For første periode er nulkuponrenten således

$$104,25 = 104,25 * e^{-n*0,246575}$$

$$n_1 = -0,6608\%$$

For den næste i rækken bliver det (t er her = 1,24)

$$4,25e^{0,006608*0,246575} + 104,25e^{-n*1,246575} = 109,53$$

$$4,25 * e^{0,006608*0,246575} + 104,2 * e^{-n*1,246575} = 109,53$$

$$n_2 = -0,7834\%$$

Vi fortsætter denne procedure ind til vi får følgende rentekurve for alle perioder.
Beregningerne for de øvrige renter udelades her men kan betragtes i bilag 3.

t	n
0,246575342	-0,6608%
1,246575342	-0,7834%
2,246575342	-0,7802%
3,247091034	-0,7190%
4,246987952	-0,5850%
5,246919215	-0,3577%
6,361893584	-0,0379%
7,361893584	-0,0623%

Figur 2, Kilde: egen tilvirkning¹⁰



Figur 3¹¹

Resultatet er en kurve der viser den estimerede nulkuponrentestruktur ud fra en række resultater, der intuitivt giver mening ud fra vores viden om det nuværende renteniveau. Der viser sig dog nogle af de problemer der gør at bootstrapping ikke er den mest udbredte måde at estimere nulkuponrenterne på. Vi har ikke nok obligationer med

¹⁰ Kilde: Egen tilvirkning. Se beregninger i bilag 3 mappe 2

¹¹ Kilde: Egen tilvirkning

samme termin, og får dermed ikke en ubrudt række af nulkuponobligationer med tilhørende renter.

Hvad vi ønsker, er en model der kan estimere nulkuponrenterne for alle perioderne, så det matcher alle betalinger.

Beregningen i dette afsnit tjener dog udmærket som et sammenligningsgrundlag til at vurdere kvaliteten af fremtidige resultater, og for at illustrere hvad nulkuponrenter er via en simpel beregning.

3.1.3 Udledning af nulkuponrentestruktur ved Nelson Siegel Svensson

Modellen vi bruger til estimering af nulkuponrentestrukturen er Nelson Siegel Svensson modellen der er udbredt til dette formål.

Modellen er en rentestrukturmodel beregnet til at beskrive hele rentestrukturen ud fra relativt få parametre.

Funktionen vi bruger til estimering er fra MC (2014) og er følgende:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1 - \exp(-\frac{t}{\alpha_3})}{t/\alpha_3} + \alpha_2 \exp(-\frac{t}{\alpha_3}) \quad \text{Ligning 1}^{12}$$

Hvor y_t er nulkuponrenten til tid t , og $\alpha_0 - \alpha_3$ er de parametre der giver den bedste aproksimation af en nulkuponrentestruktur.

Vi vil med dette estimere nulkuponrenter til diskontering af eksisterende statsobligationer.

Parametrene α_0 til α_3 vil vi korrigere indtil vi opnår resultater i modellen der passer med de i virkeligheden observerede kurser på de anvendte obligationer.

I excel beregnes obligationskurser med Nelson Siegel Svenssons model der herefter sammenlignes med de aktuelle kurser observeret i markedet d. 5. april 2017.

¹² MC formel 3.13, side 74

Alle informationer om disse tyske statspapirer er hentet fra Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur, der må antages at være en pålidelig kilde til datamateriale af denne type.

Alle obligationerne er stående lån ratet investment grade, og er inkonverterbare.

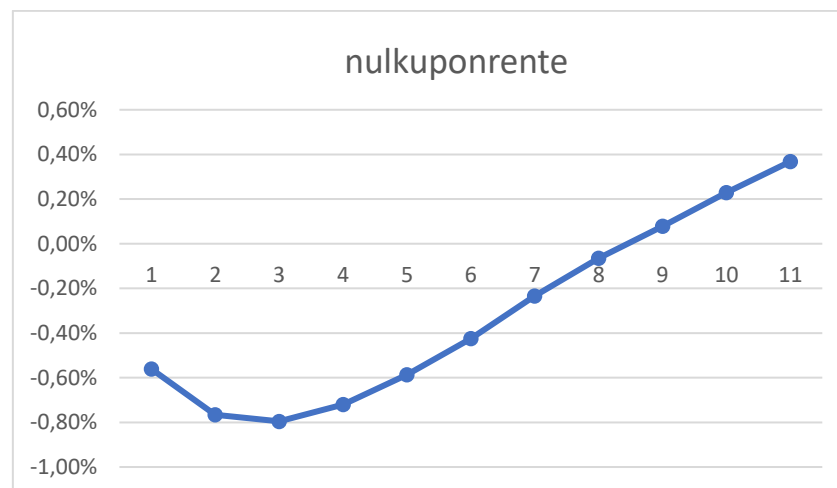
Værdier for parametrene ændres via excels solverfunktion indtil modellens forudsigelser ligner de gældende kurser så meget at summen af de kvadrerede fejl summer til 0,00625.

Ved beregning i Nelson Siegel Svensson's model giver følgende nul kuponrenter.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	-0,56%	-0,77%	-0,80%	-0,72%	-0,59%	-0,43%	-0,25%	-0,06%	0,08%	0,23%	0,37%

Figur 4¹³

Hvilket giver anledning til rentekurven i figur 3



Figur 5, Kilde: Egen tilvirkning

Kurven i figur 5 viser den forventede nul kuponrentestruktur beregnet med udgangspunkt i obligationerne vist i tabel 2. Kurven viser hvilken risikofri rente der kan lånes til med forskellige løbetider. Lån med løbetid indtil ca. 8,5 år vil således have en negativ rente. Da renten baserer sig på aktuelle kurser, viser kurven også hvad markedet forventer af fremtiden. Priserne skabes ud fra vores viden i dag samt markedets forventninger til fremtiden under antagelsen, at der ikke findes muligheder for arbitrage.

¹³ Fra beregning i bilag 1

Den viser at der ikke forventes at være muligheder for investering i hvad vi betragter som risikofri aktiver med et positivt afkast før på den anden side af 2025.

Sammenligner vi med resultaterne vi fandt via bootstrapping ser vi, at begge resultater følger den samme tendens for kurven. Vi vælger dog at anvende resultatet fra Nelson Siegel modellen. Til dels fordi den arbejder ud fra et statistisk grundlag der tager højde for alle kurver på en gang, men også fordi dens anvendelse af flere centralbanker taler for dens brugbarhed og pålidelighed.

3.2.0 Prisfastsættelse af obligationer ud fra nulkuponrentestrukturen

Da vi nu har en nulkuponrentestruktur at arbejde videre med kan vi begynde at fastsætte en pris på vores obligation.

Der er mulighed for at prisfastsætte obligationen direkte ud fra nulkuponrentestrukturen med nedenstående formel:

$$K^* + v = \sum_t^N y_t * (1 + n_t)^{-t} \quad \text{Ligning 2}^{14}$$

Hvor K^* er nutidsværdien eller den teoretiske kurs, v er den vedhængende rente y_t er ydelse i den t 'te termin og n_t er nulkuponrenten til tid t .

Til sammenligning er bestemt i markedet, men på baggrund af den effektive rente givet ved

$$K + v = \sum_t^N y_t * (1 - i)^{-t} \quad \text{Ligning 3}^{15}$$

Hvor K er kursen obligationen handles til i markedet, og i er den effektive rente der er ens for alle betalinger fra tid t til N .

¹⁴ MC ligning 3.14 side 75

¹⁵ MC ligning 3.15 side 75

Med udgangspunkt i vores nul kuponrenter beregnes den teoretiske kurs for Carlsbergs obligation med udløb i maj 2024.

Markedsprisen d. 5 april 2017 var 109,68. Ved at tilpasse t i vores beregning til at matche denne udløbsdato kan vi approksimere en pris i overensstemmelse med nul kuponrentestrukturen.

Ved at indsætte i ligning 1 fås følgende

$$K^* + v = \sum_{t=1}^8 y_t * (1 + n_t)^{-t}$$
$$K^* + v = \underline{120,75^{16}}$$

Resultatet ses at være væsentligt større end den kurs der er gældende i markedet, hvilket kan betyde følgende

- Obligationen er undervurderet
- Vores beregning af nul kuponrenter er forkerte
- En tilbagediskontering af betalingerne med nul kuponrenter tager ikke tilstrækkeligt med faktorer i betragtning for at værdiansætte aktivet/obligationen.

Derfor forsøger vi os med at værdiansætte en statsobligation der som bekendt er tysk, med udløb den 15. maj 2024, altså ca. to uger efter Carlsbergs obligation hvilket kun burde give en negligerbar forskel.

Kuponbetalingen er 1,5% da en tysk statsobligation med samme kupon og udløb ikke findes.

Kursen i markedet var 5. april 2017 112,004

Der foretages samme beregning men med en anden termin og kupon, hvilket følger ligning 2.

Resultatet er

$$K^* + v = 112,635$$

Hvilket er bemærkelsesværdigt tæt på markedskursen.

¹⁶ Se beregninger i bilag 3

Heraf kan konkluderes at den udledte risikofri rentestruktur på tilfredsstillende vis værdiansætter risikofri obligationer.

Vi skal nu have taget højde for risiko.

3.3.0 Nulkuponrenter plus volatilitet - værdiansættelse ved binomialmodellen

På baggrund af resultatet i afsnit 3.2.0 vil vi nu tilføje endnu et element til vores prisfastsættelse.

Dette sker ved at vi ved hjælp af en binomialmodel prisfastsætter obligationen ud fra både nulkuponrentestrukturen og den gældende rentevolatilitet.

Til dette vil vi i det følgende udlede et mål for volatiliteten og kalibrere pristræet til at give os et rentetræ der viser de korte renter.

Dette bør give os en mere nøjagtig metode til prisfastsættelse.

3.3.1 Estimation af volatiliteten

Til videre beregninger i denne afhandling vil det være nødvendigt at estimere et mål for rentevolatiliteten.

Rentevolatilitet er den usikkerhed der er forbundet med udsving i renten, og beregnes som standardafvigelsen i den korte rente. Volatiliteten vil vi bruge til udarbejdelse af det rentetræ vi anvender, når vi arbejder med beregninger i binomialmodellen.

Binomialmodellen vil blive anvendt ad flere omgange i denne afhandling, til prisfastsættelse af både obligationer og optioner.

Det mest optimale ville være, at have den forventede fremtidige volatilitet som udgangspunkt for vores beregning.

I dette tilfælde vil vi benytte den historiske volatilitet som en proxy for denne.

Volatiliteten beregnes ens for alle aktiver, såfremt renten betragtes som det underliggende aktiv. Formlen vi anvender er

$$s_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \ln(u_{n-1} - \hat{u})^2 \quad \text{ligning 4}$$

I praksis anvender vi dog en anden men stadig lignende formel når vi har at gøre med kort tidsintervaller som her. I denne antager vi at det gennemsnitlige logaritmiske afkast, eller i dette tilfælde ændring i renten ($\hat{u}$), er lig nul, og lader også $(m-1) = m$.

Dette kan lade sig gøre da $\hat{u} \rightarrow 0$.

Vi bruger altså i stedet følgende formel til beregning af historisk volatilitet

$$s_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln u_{n-i}^2 \quad \text{ligning 5}$$

Til brug ved et estimat på rentevolatiliteten tager vi udgangspunkt i Euriborrenterne.

Euribor renten er et benchmark for de europæiske pengemarkeder, og er et validt datamateriale til brug ved beregning af volatilitet. Et andet plus er, at data er let tilgængelige på euribors hjemmeside.

Der er mulighed for at bruge data for hele år, uger, måneder og dage. Der er her valgt renter af en måneds varighed.

Mindre tidsintervaller end dette vil være for volatilt og give et forvrænget billede. Siden vi beskæftiger os med perioder af et års varighed vil stikprøver af længere varighed være mere passende.

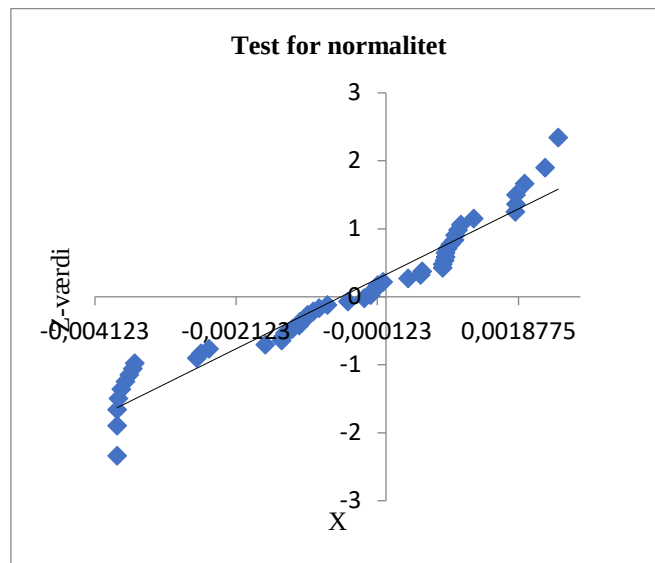
Vi vælger derfor at benytte os af 1-månedes renter.

3.3.2 Test for normalitet

Da vores statistiske beregninger forudsætter at data er normalfordelt tester vi før vores beregninger hvorvidt data kan afvises at være normalfordelt. Eftersom stikprøven er >30 vil stikprøvegennemsnittet jf. den centrale grænseværdisætning være approksimativt normalfordelt. Vi tester i det følgende for normalitet¹⁷.

Beregningerne er udført med programmet Hypostat.

¹⁷ Se beregninger i bilag 2, test for normalitet



Kilde: Egen tilvirkning, se beregninger i bilag 3

Da punkterne ligger nogenlunde tilfældigt omkring en ret linie kan det ikke afvises at data er normalfordelt.

Med dette på plads fortsætter vi vores beregninger af volatilitet/ under antagelse om at data er normalfordelt.

3.3.3 Historisk volatilitet¹⁸

Ved indsættelse af data i ligning 3 fås følgende resultat:

$$s_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln u_{n-i}^2 = 19,129\%$$

$$\sigma = 43,737\%$$

Den daglige volatilitet på renten er dermed 43,737%.

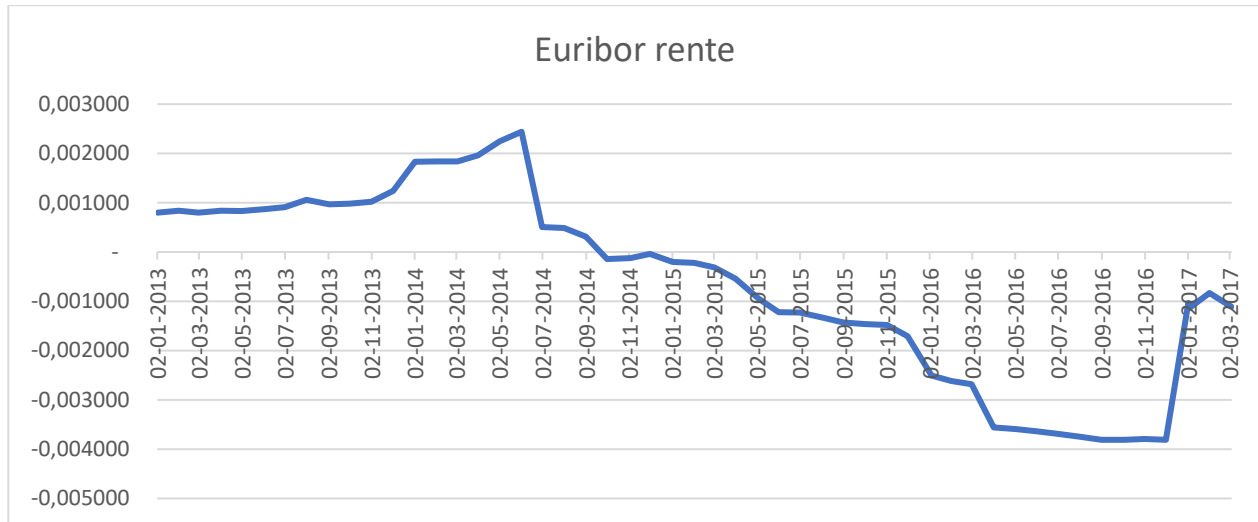
For at få den årlige volatilitet multipliceres med kvadratroden af antallet af handelsdage der her antages at være 250, altså $\sqrt{250}$.

$$1,51509\% = 0,43737 * \sqrt{250}$$

Årlig rentevolatilitet er således 151,509%.

¹⁸ Se beregninger i bilag 2, historisk volatilitet

Denne volatilitet er alt for stor til at kunne give et realistisk resultat i Ho-Lee modellen, hvorfor vi er nødt til at se på andre mål for volatiliteten



Figur 6, Kilde: Egen tilvirkning

Som det ses i figur 6 har udsvingene i renten været relativt store, hvilket skal ses i relation til, at med det nuværende meget lave renteniveau vil en ændring i renten på kun 0,01% point fra f.eks. -0,1% til -0,15% ses som et udsving på 50%.

I første omgang vil vi forsøge os med et andet mål for volatiliteten, der lægger en større vægt på de seneste observationer.

3.3.4 EWMA¹⁹

Exponential weighted moving average benytter sig af, at tillægge en vægt til hver enkel observation, ud fra hvor tæt den tidsmæssigt befinder sig på t . Herefter summeres de i stedet for at tage middelværdien. Alle vægtene summer til 1 således at

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad \text{og} \quad 1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \quad \text{Ligning 6}$$

Vægtene beregnes som $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 = \alpha_1 * \lambda$ osv.

Lambda (λ) sættes initialt til 0,94, da det er den model af lambda der bruges af Riskmetrics hvorfor vi også bruger den her. I realiteten kan vi dog vælge lambda alt efter hvilken vægt, vi ønsker at tillægge de seneste observationer.

Ved at benytte os af ligning 6 kommer vi frem til følgende resultat

$$\sigma^2 = 17,933\%$$

$$\sigma = 42,347\%$$

Hvorfor vi finder den årlige volatilitet som årlig $\sigma = \sigma * \sqrt{12} = 146,695\%$

Det ses at den simple historiske volatilitet er større end den der er fundet for EWMA, men stadig for stor til, at vi kan benytte den i Ho-Lee modellen.

Vi forsøger derfor med et nyt mål for volatiliteten.

3.3.5 Udledning af implicit volatilitet fra historiske renter

Da resultaterne fundet ved beregning af historisk volatilitet og EWMA giver resultater der ikke kan anvendes med et acceptabelt resultat i Ho-Lee modellen, konkluderes det at volatiliteten må udledes med en anden fremgangsmåde.

Problemet består i, at Ho-Lee modellen i sit andet led lader renten stige eller falde med en faktor svarende til $t * \sigma$ når $t=1$, hvilket ses i ligning 7.

¹⁹ Se beregninger i bilag 2, EWMA. Beregning af EWMA forklares i øvrig i John Hull's Fundamentals of Futures and Options Markets kapitel 13

(Ho-Lee modellen vil blive gennemgået nærmere i næste afsnit)

$$\left. \begin{aligned} r_{i+1,j} &= r_{i,j} + \eta(i)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} && \text{for up state} \\ r_{i+1,j+1} &= r_{i,j} + \eta(i)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} && \text{for down state}^{20} \end{aligned} \right\} \text{Ligning 7}$$

Det giver derfor ikke mening at gøre brug af et volatilitetsmål, der er så åbentlyst giver et ubrugeligt resultat.

Løsningen bliver derfor at vende ligningen om, således at vi lader modellen "forudsige" et-årige euribor renter fra 3. april 2006 frem til 1. april 2017. Herefter ændres på værdierne for σ og $\eta(i)$, indtil forskellen mellem den beregnede og den historiske rente er på et minimum.

Vi har i afsnit 3.2.2 allerede slået fast, at Euribor renterne kan antages at være normalfordelte, og fortsætter derfor med vores beregning uden yderligere test.

σ antages at være konstant, mens $\eta(i)$ er variabel fra år til år.

Hvorvidt der skal være positivt eller negativt fortegn foran $\sigma\sqrt{\Delta t}$ kommer an på, om renten er gået op eller ned i forhold til den forrige periode.

Rent praktisk vil vi ikke manuelt afprøve et større antal værdier for σ og η , da dette er for tidskrævende.

I stedet vil vi lade excels problemløser afprøve et x antal variable indtil summen af de kvadrerede forskelle mellem den beregnede og faktuelle værdi, er så tæt på nul som muligt.

Ved denne fremgangsmåde vil vi finde et mål for volatiliteten der passer med modellen, og som er i overensstemmelse med den gældende nulkuponrentestruktur.

Volatiliteten bestemmes ved at sætte de kendte variable ind i ligning 7.

De kendte variable er som følger:

$$\Delta t, \quad r_{i,j}, \quad r_{i+1,j}, \quad r_{i,j+1}$$

De ubekendte er

²⁰ Handbook of fixed income securities, ligning 17.26, side 395.

$\eta(i), \sigma$

Herigennem findes en løsning for de ubekendte der giver et resultat, der i høj grad ligner de historiske.

Resultatet bliver at:

$$\sigma = 0,8640\%^{21}$$

Hvilket er den volatilitet vi vil anvende ved estimation af rentestrukturen.

3.3.6 Estimation af rentestruktur

Vi vil nu ved hjælp af en binomialmodel estimere de fremtidige korte renter ved at konstruere et rentetræ frem til 2024.

Binomialmodellen har den fordel at den tager udgangspunkt i den gældende nulkuponrentestruktur og også i den forventede rentevolatilitet.

Rentebinomialmodeller er et meget brugbart værktøj til at prisfastsætte ikke bare obligationer, men også stort set alle afledte produkter af både aktier og obligationer.

Modellen er overskuelig at arbejde med, og kan nemt tilpasses til specifikke formål.

Rentetræet vil også senere finde anvendelse ved prisfastsættelse af calloption når vi skal beregne konverteringspræmien på Carlsbergobligationen.

Ved beregning af kredittillæg vil modellen også finde anvendelse.

Der findes flere forskellige binomialmodeller der tager udgangspunkt i, at der kan være to udfald, hvor renten enten stiger eller falder.

Sandsynligheden antages at være 50% for hvert udfald, selvom det kan diskuteres at der i den nuværende situation ikke er meget der taler for yderligere faldende renter.

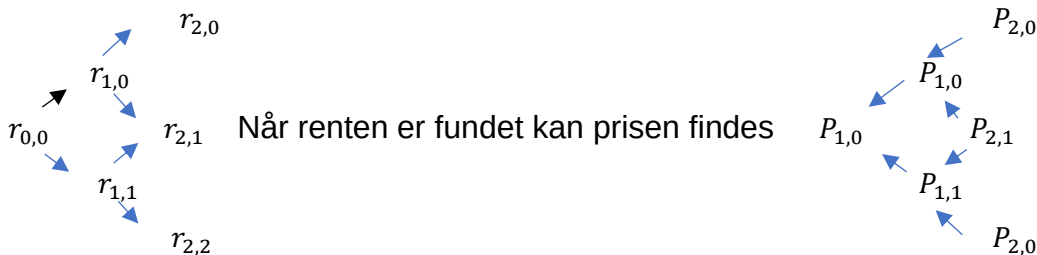
Dette betyder at rentetræet konstrueres således, at den 1-årige rente forudsættes at følge en binomialfordeling med sandsynlighed 0,5.

Rentebinomialtræet der skal konstrueres ser i princippet således ud, og kan bygges videre i det omfang det er nødvendigt.

²¹ Beregninger ses i bilag 11, udledning af implicit volatilitet

Den forskel man ser mellem de forskellige binomialmodeller, er hvordan renten i up og down state beregnes.

Selve binomialmodellen fungerer som beskrevet i det følgende:



Udgangspunkt er at $r_{0,0}$ og $P_{0,0}$ er kendt mens at de andre værdier af $P_{i,j}$ og $r_{i,j}$ skal udledes heraf.

Prisen P kan findes ud fra ligningen

$$P_{t,j} = \frac{q * (P_{t+1,j+1} + C_{t+1,j+1}) + (1 - q) * (P_{t+1,j} + C_{t+1,j})}{1 + r_{t,j}} \quad \text{Ligning 8}$$

Hvor $C_{t,j}$ er lig kuponbetaling på tidspunkt t i state j .

Et vigtigt udgangspunkt for modellens anvendelighed er, at de obligationer vi benytter er prissat korrekt i forhold til nulkuponrentestrukturen.

På denne måde inddrages både nulkuponrenter og rentevolatilitet, for bedst muligt at give et retvisende billede af den aktuelle struktur for de korte renter.

Til grund for estimat af den korte rente skal vi bruge et antal obligationer svarende til den tidshorisont vi analyserer.

Der udvælges følgende obligationer grundet deres løbetid og fordi de er likvide.

Statsobligationer forventes at være i overensstemmelse med den gældende nulkuponrentestruktur.

Alle obligationerne er såkaldte strips, hvilket vil sige at de er statsobligationer der er blevet "strippet" for deres kuponbetaling, og kan i den forstand betragtes som "rene" nulkuponobligationer.

Der vil i denne afhandling ikke blive redegjort omfattende omkring strip bonds, men de er almindelige statsobligationer, der af professionelle har fået separeret betaling af hovedstol og kuponbetaling. Som regel af en centralbank.

Grunden til at disse blev valgt var at de med deres lave risikoprofil og manglende kuponbetaling kan antages at være prissat korrekt ud fra den gældende nulkuponrentestruktur.

En anden mere tungtvejende grund er, at der findes en obligation med udløb i hver enkel af de år vi ønsker at finde renterne for.

Fra: 10-04-2017

udløb	t	Kupon	ISIN
04-jul-17	0,2466	0,000	DE0001108512
04-jul-18	1,2466	0,000	DE0001108538
04-jul-19	2,2466	0,000	DE0001108561
04-jul-20	3,2471	0,000	DE0001108603
04-jul-21	4,2470	0,000	DE0001108629
04-jul-22	5,2469	0,000	DE0001108652
04-jul-23	6,2469	0,000	DE0001143261
04-jul-24	7,3621	0,000	DE0001143279
04-jul-25	8,3621	0,000	DE0001143287

Figur 7, Kilde: <http://en.boerse-frankfurt.de/bonds>

I tilfælde som den vi har her hvor vi kun ønsker at estimere for otte perioder med to mulige udfald ville en vægtning af q være mulig og give mening.

Dog vil man over længere perioder opleve store problemer forbundet med at beregne for sandsynligheder for hvert udfald, som hvis f.eks. vi skulle beregne udfald for hver state af en 30-årig realkreditobligation med fire årlig terminer.

Over længere perioder ses desuden at alle q konvergerer mod 0,5, hvorfor vi holder os til denne regel.

3.3.7 Valg af model til brug ved kalibrering af binomialmodel

Til kalibrering af binomialmodellen for at afdække strukturen for de korte renter skal vi bruge en matematisk model.

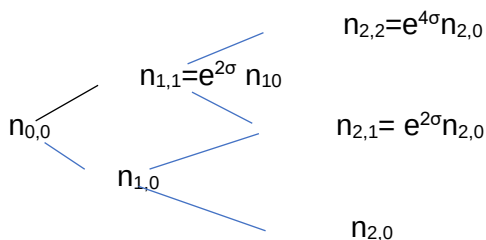
3.3.8 Cox, Ross & Rubinstein

Den foretrukne model til estimation af vil være den af Cox, Ross & Rubinstein der viser at

$$n_{t,j+1} = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} n_{t,j}^{22} \quad \text{Ligning 9}$$

på et hvert givent tidspunkt.

Fremgangsmåden er gennemgået i Christensen 2014 og vil give følgende metode for beregning af rentetræet, hvor $n_{t,j}$ for t_0 til t_2 og j_0 til j_2 er



Da vi i state 0,0 kender prisen på obligationen og den effektive rente for samme, kan man let løse for $n_{1,0}$ osv. for herved at finde de fremtidige korte renter.

Som det ses af ligningen tager vi den naturlige eksponential funktion e^x og multiplicerer med produktet af volatiliteten og den pågældende state j .

Dette er simpelt og nemt at beregne da de fundne renter kan "genbruges" når vi beregner det næste state til tid $t+1$.

Det er også nemt at sikre sig at resultatet er korrekt.

²² MC (2014 side 78), ligning 3

Det problematiske ligger dog i, at den fundne rente til tid $t+1$ altid vil få samme fortegn som til tid t med en eksponentiel stigning afhængig af j og den valgte volatilitet

Dette ses let hvis vi vælger at konstruere et rentetræ givet ved ligning 9 som beskrevet ovenfor.

Vi antager her udgangspunkt i følgende tre obligationer²³ hvor den initiale effektive rente er -0,222% for obligationen med udløb i 2018.

udløb	t	Kupon	ISIN
04-jul-17	0,2466	0,000	DE0001108512
04-jul-18	1,2466	0,000	DE0001108538
04-jul-19	2,2466	0,000	DE0001108561

Volatiliteten antages at være 0,8640% (se afsnit 3.2.5), hvor vi ved at indsætte i ligning 6 kommer til følgende rentetræ for to perioder

				j=
			-1,049%	3
		-0,576%		
	-0,222%		-1,040%	2
		-0,571%		
			-1,030%	1
t=	0	1	2	

Kilde: Egen tilvirkning

Af rentetræet ses let, at princippet med en up og downstate ikke virker når en negativ rente kommer ind i billedet.

Med det nuværende renteniveau er dette problematisk.

Kalibreringen af rentetræet ved denne model kan derfor ikke lade sig gøre hvis vi ønsker at udgangspunktet skal være i de nuværende risikofri renter der som bekendt er negative.

Konsekvensen heraf er at finde et risikofrit aktiv med et afkast der ikke er negativt eller anvende en model der tillader negative renter.

²³ Kilde: <http://en.boerse-frankfurt.de/bonds> 11.april 2016

Der kan argumenteres for det førstnævnte med, at det nuværende renteniveau er urealistisk og kunstigt lavt, men vi må acceptere at tingenes tilstand er således. Vælger vi et andet afkast er positivt vil det være med en større risiko, hvilket vil undergrave hensigten med at estimere en risikofri rente. Vi vælger derfor at anvende en anden model.

De fleste har dog med vilje indbyggede mekanismer til netop at undgå negative renter. I en "normal" situation er negative renter en teoretisk kuriositet, og et irritationsmoment når vi skal beregne renterne.

3.3.9 Ho-Lee modellen

En af de første modeller til prisfastsættelse af optioner ud fra en binomialmodel blev udviklet i 1986 af Thomas Ho og Sang Bin Lee.

Modellen er med vilje opbygget simpelt hvorved der er givet afkald på en mekanisme der forhindrer netop de negative renter.

Dette har tidligere været betragtet som en svaghed ved modellen og årsag til at den først afprøvede model og andre lignende (bl.a. Black, Derman, Toy der også blev afprøvet men forkastet ud fra samme problemstilling) har været foretrukket.

I den nuværende rentesituation er det dog et plus at modellenden tillader negative renter. Resultatet bliver acceptabelt og inden for det nogenlunde realistiske.

Den måde modellen vil blive anvendt på er beskrevet i bogen Handbook of fixed income securities, hvor den fremtidige korte rente i up og down state er beskrevet ved følgende:

$$\left. \begin{aligned} r_{i+1,j} &= r_{i,j} + \eta(i)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} && \text{for up state} \\ r_{i+1,j+1} &= r_{i,j} + \eta(i)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} && \text{for down state}^{24} \end{aligned} \right\} \text{Ligning 7}$$

Som det ses er r afhængig af σ og η .

²⁴ Handbook of fixed income securities, ligning 17.26, side 395.

Vi lader η være den eneste variable i ligningen og lader σ være en konstant baseret på den i afsnit 3.2.5 fundne volatilitet.

Hvert enkel skift i t , der i dette tilfælde er 1, medfører at renten stiger η med hver gang og enten stiger eller falder med σ alt efter om det er up eller down state.

Dette betyder at hvis vi vælger et volatilitetsmål der er for højt vil vi få urealistiske resultater.

Dette er grunden til at den historiske volatilitet samt EWMA volatilitet ikke var brugbare.

σ må derfor være et lavt mål på omkring de 0,5% uden at dette postulat skal have indflydelse på beregningen. Det giver dermed sig selv at lader vi volatiliteten være 40% får vi en ubrugelig model.

Det giver derfor mening at lade σ være givet ved den implicite volatilitet fundet ud fra de et-årige euribor renter fra 3. april 2006 til 3. april 2017

Denne er i dette tilfælde fundet til værende

$$\sigma = 0,8640\%^{25}$$

3.3.10 Forudsætninger for anvendelse af Ho Lee

Følgende antagelser om et perfekt kapitalmarked skal være i orden såfremt vi ønsker at anvende modellen²⁶:

- Der er ingen skat eller transaktionsomkostninger, og alle værdipapirer er perfekt delelige
- Modellen er i diskret tid
- Obligationsmarkedet er perfekt, således at der findes nulkuponobligationer for hvert udløbstidspunkt ($n = 0, 1, 2, \dots$).
- Til ethvert udløbstidspunkt N , er der et endeligt antal af tilstande s , på tidspunkt t i tilstand s relateres prisen på en nulkuponobligation med udløb til tid T til diskonteringsfaktoren. Funktionen for denne beskriver hele nulkuponrentestrukturen.

²⁵ Se beregninger i bilag 11, Udlodning af implicit volatilitet

²⁶ Ho og Lee - Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims

- Dertil skal en nul kuponobligation med udløb straks, have en nutidsværdi på 1, og en obligation med uendelig løbetid have en nutidsværdi $\rightarrow 0$.

Til dette skal der tilknyttes følgende kommentarer

1. Denne del kan ikke komme på plads, da analysen tager udgangspunkt i reelle priser samt rente og volatilitetsstruktur i en verden hvor der findes transaktionsomkostninger. Værdipapirer er heller ikke perfekt delelige. Vi vil dog antage at det er tilfældet for at komme videre med vores beregning, og bruger heller ikke selv tid på at tage højde for dette.
2. Modellen er i diskret tid. Dog handles der i den virkelige verden ikke kun på nøje fastlagte tidspunkter.
Vi antager dog at der handles i diskret tid.
3. Dette kan ikke helt opfyldes, vi kan dog ud fra kuponggivende obligationer og strips konstruere en nul kuponrentestruktur, således at denne forudsætning kan antages opfyldt.
4. Der er ikke et endeligt antal tilstande, men vi antager det.
5. Dette antages opfyldt.

3.3.11 Beregning af den korte rentestruktur ved Ho-Lee

Vi beregner nu de korte renter ud fra ligning 4 og 7.

Med udgangspunkt i obligationerne i tabel 3 beregnes et rentegitter med otte perioder gældende fra $t = 0,24$ til $t = 8,24$.

Renten til tid $t = 0$ sættes lig den effektive rente på obligationen med udløb i 2018.

Med ligning 7 skal vi nu løse for en enkel t variabel η i begge ligninger. Den fundne rente i hvert state skal kunne anvendes som den diskonteringsfaktor der giver kursværdien for obligationen med udløb i 2018.

Dette gøres ved at forsøge sig med forskellige værdier af η indtil vi finder et resultat der giver renten der leder os til det rette resultat. Rent praktisk benyttes excells solverfunktion.

$$-0,1406\% = -0,222\% + \eta(1)0,24t + 0,8640\%\sqrt{0,24t} \quad \text{for up state}$$

$$-0,9987 = -0,222\% + \eta(1)0,24t - 0,8640\%\sqrt{0,24t} \quad \text{for down state}$$

Anvendt i ligning 6 giver dette anledning til følgende obligationspriser

$$P_{1,0} = 100,14 = \frac{0,5 * (100 + 0) + (1 - 0,5) * (100 + 0)}{1 + (-0,1406\%)}$$

$$P_{1,1} = 100,80 = \frac{0,5 * (100 + 0) + (1 - 0,5) * (100 + 0)}{1 + (-0,9987\%)}$$

$$P_{0,0} = 100,63 = \frac{0,5 * (100,34 + 0) + (1 - q) * (100,80 + 0)}{(1 - 0,222\%)^{0,2466}}$$

Denne fremgangsmåde foretages på alle obligationer, hvor vi løser for $\eta(1)$ frem til og med $\eta(8)$ hvorefter vi kommer frem til følgende rentetræ i figur 8.

Up = $r_{i+1,j} = r_{i,j} + \eta(i)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}$ $q=0,5$ Down = $r_{i+1,j+1} = r_{i,j} - \eta(i)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}$									
t→	0	0,2466	1,2466	2,2466	3,2471	4,2470	5,2469	6,2469	7,3621
j↓ i→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-0,2222%	-0,1406%	0,5944%	2,0000%	3,0064%	4,1887%	6,1752%	6,8852%	7,7743%
1		-0,9987%	-1,1337%	0,2719%	1,2783%	2,4606%	4,4471%	5,1571%	6,0462%
2			-2,2103%	-0,8047%	0,2018%	0,7325%	2,7190%	3,4290%	4,3181%
3				-2,5328%	-1,5263%	-0,3441%	0,9909%	1,7009%	2,5900%
4					-2,0429%	-0,8607%	-0,0857%	0,6243%	1,5134%
5						-2,5888%	-0,6022%	-1,1038%	-0,2147%
6							-2,3303%	-1,6203%	-0,7313%
7								-3,3484%	-2,4594%
8									-4,1875%

Figur 8, Kilde: Egen tilvirkning²⁷

Vi ser her strukturen i den korte rente vi som udgangspunkt forventede ville vise sig ved brug af denne model.

Rentetræet vist i figur 8 vil vi benytte os af ved prisfastsættelse af vores valgte obligation. Ud over at benytte den gældende nul kuponrentestruktur, arbejder vi nu også ud fra, at de korte renter er volatile.

3.4.0 Prisfastsættelse ud fra binomialmodellen

I det følgende vil vi præsentere binomialmodellen og herefter fastsætte obligationspriser i henhold hertil. Dette vil tage udgangspunkt i de i afsnit 3.3 udledte data og modeller.

3.4.1 Præsentation af rentebinomialmodellen

I rentebinomialmodellen kan et aktiv værdiansættes i et knudepunkt P , der afhænger af udfaldet i de to næste knudepunkter P_u og P_d .

P_u er værdien når renten er gået op, og P_d er værdien når renten er gået ned.

Ved P er de to værdier vægtet hver med $q = 0,5$ og tilbagediskonteret med den korte rente gældende for knudepunkt P .

P kan derfor beregnes således at:

$$P = \frac{0,5 * (P_u + P_d) + c}{(1 + r)} \quad \text{Ligning 10}$$

Hvor c er kuponbetalingen og $0,5$ angiver sandsynligheden q for begge udfald P_u og P_d .

Ligningen er i store træk den samme som ligning 6 vi brugte i forbindelse med, at estimere de korte renter.

Princippet er at vi regner bagud fra Carlsbergobligationens udløb.

²⁷ Se beregninger i Bilag 11, Estimering af kort rente med Ho-Lee

Her udbetales hovedstolen på 100 samt kuponbetalingen på 2,5, og ser i en simplificeret udgave således ud:

$$\begin{array}{rcl}
 & & 100 \\
 P_u & = & \frac{0,5 * (P_{uu} + P_{du}) + c}{(1 + r)} \\
 P & = & \frac{0,5 * (P_u + P_d) + c}{(1 + r)} \\
 & & 100 \\
 P_d & = & \frac{0,5 * (P_{du} + P_{dd}) + c}{(1 + r)} \\
 & & 100
 \end{array}$$

Hvor vi ser at der principielt kan bygges videre i det uendelige, og at 100 både er upstate og downstate alt efter hvilken state der kom før.

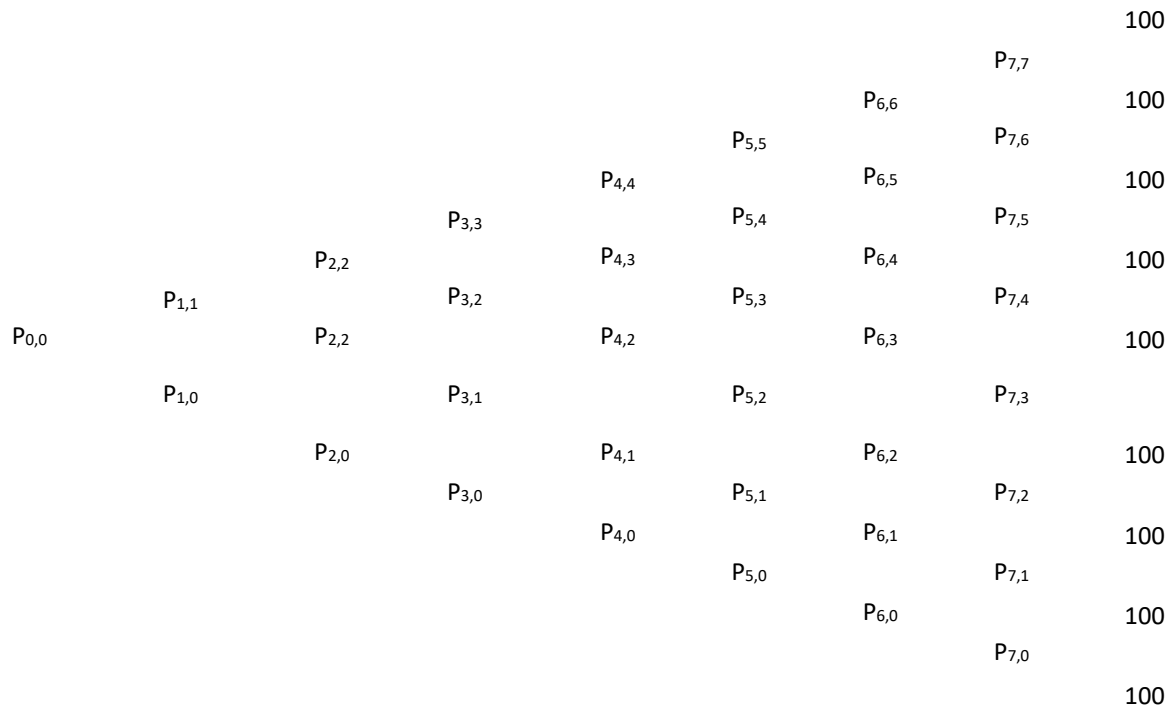
Pristræet vi vil beregne kommer til at følge denne struktur. For diskonteringsrenterne henvises til tabel 4²⁸ der blev beregnet med Ho-lee modellen. I vores binomialmodel starter vi med 9 states der alle udbetaler 102,5 til $t = 7,1457$.

Da sidste periode t ikke løber et helt år opløftes diskonteringsfaktorerne i $t_{+1}-t$.

Pristræet vi ønsker at konstruerer følger strukturen vist i figur 4 nedenfor.

Alle knudepunkter senere beskrevet i opgaven vil følge strukturen i figur 9.

²⁸ Se beregninger for disse i bilag 2, beregning af kort rente Ho-Lee



3.4.2 Beregning af pristræ i binomialmodellen

$$P_{6,6} = \frac{0,5 * (98,82 + 100,3) + 2,5}{(1 + 0,061752)} = 96,1349$$

Dato	10-04-2017	04-07-2017	04-07-2018	04-07-2019	04-07-2020	04-07-2021	04-07-2022	04-07-2023	04-07-2024
t	0,0000	0,2329	1,2329	2,2329	3,2334	4,2333	5,2332	6,2332	7,1458
Pistræet viser udviklingen i priserne givet forskellige states med forskellige renter.								98,82	102,50
Prisen er til enhver tid givet ved et gennemsnit af de to forudgående states tilbagediskonteret med den risikofri rente.						96,14	96,13	100,30	102,50
				101,69	98,03		99,17		102,50
			107,37		100,79			101,83	
		114,56		104,38			102,35		102,50
			109,30		105,60			103,41	
	121,93		116,39		109,79		105,37		102,50
		124,17		115,82		109,45		104,39	
			124,50		115,01		107,80		102,50
				122,71		112,08		106,06	
					119,22		109,46		102,50
						116,50		106,57	
							112,54		102,50
								108,30	
									102,50

Figur 10, Kilde: egen tilvirkning²⁹

Vi kan ligeledes afgøre, om prifastsættelsen af den tyske statsobligation giver et andet billede ved denne beregningsmåde. Til dette ændres på t og kuponbetaling hvilket leder os til at samme beregning i knudepunkt $P_{6,6}$, for den tyske statsobligation

$$P_{6,6} = \frac{0,5 * (97,17 + 98,57) + 1,5}{(1 + 0,061752)} = 93,60$$

Dette gentages for alle knudepunkter, hvilket leder os til pristræet vist i bilag 4³⁰, og vi får at prisen på statsobligationen er $P_{0,0} = 112,90$

Til sammenligning var de i afsnit 3.2.0 beregnede priser hhv. 122,04 og 112,635.

Det ses at kurserne beregnet ud fra nulkuponrenter og kurser beregnet efter nulkuponrenter og volatilitet giver stort set identiske resultater.

²⁹ Se beregninger i bilag 4, Prifastsættelse binomialmodel

³⁰ Bilag 4, pristræ tysk obl. 1,5%

3.4.3 Diskussion af resultat

Vi afviser at vores beregning af nulkuponrenterne er forkert.

Dels fordi de viser en korrekt værdiansættelse af statsobligationen, og dels fordi to forskellige metoder, og to sæt risikofri obligationer, giver anledning til samme resultat.

Vi afviser ligeledes at Carlsbergs obligation er undervurderet.

Dette på baggrund af en af vores grundantagelser om at markederne er effektive og der ikke findes arbitragemuligheder.

Dertil kommer at der også er flere faktorer der taler for ekstra risikotillæg, hvilket virker mere plausibelt end at obligationen i så høj grad er undervurderet.

De udledte nulkuponrenter kan benyttes til at tilbagediskontere alle typer af betalingsrækker uanset type obligation. Derfor ville Carlsbergs obligation kunne prissættes korrekt havde den haft samme rentestruktur som statsobligationen.

Dette er dog ikke tilfældet.

Statsobligationen lader til at følge nulkuponrentestrukturen, hvilket kreditobligationen ikke gør.

Årsagen til at vores værdiansættelse ved nulkuponrenten ikke rammer markedsprisen må derfor skyldes faktorer der ikke tages højde for i nulkuponrenterne.

Disse faktorer antages at være følgende

- Manglende konverteringspræmie. Statsobligationen har ikke en calloption, mens Carlsbergs kreditobligation har. Det betyder at Carlsberg til enhver tid kan købe obligationen til kurs 100, hvorved man som obligationsejer ikke bare mister sine fremtidige kuponbetalinger, men også alt hvad man har betalt for obligationen der overstiger kurs 100.

For at tage højde for denne risiko er vil investor kompenseres i form af en konverteringspræmie der ikke tages højde for i nulkuponrentestrukturen baseret på inkonverterbare obligationer.

- Kreditrisiko er væsentligt større på Carlsbergs kreditobligation.

Tyskland har meget lille risiko for at misligholde sine betalinger da staten har magt til at opkræve skatter og afgifter. Tyskland har som nation også væsentligt bedre muligheder for at få kredit end virksomheder.

Carlsberg har ikke de samme muligheder, og har derfor større risiko for at misligholde sine betalinger.

Denne større risiko for at miste hele sin investering vil man som investor også forvente en kompensation for at påtage sig.

- Nulkuponrenterne er beregnet ud fra risikofri aktiver der er AAA³¹ ratet, og det er muligt at de derfor kun er egnede til prisfastsættelse af aktiver med samme risikoprofil. Carlsberg er ratet BBB³² netop fordi der tilknytter sig andre risici hvortil der hører en præmie.

Denne præmie er der ikke taget højde for i nulkuponrenterne.

3.4.4 Delkonklusion

Hvad vi kan konkludere er, at vi har lavet en korrekt prisfastsættelse af en risikofri inkonverterbar obligation.

De næste skridt i vores analyse er således at indarbejde et risikotillæg der skal kompensere for kredit og konverteringsrisiko.

4. Kreditrisiko

I det følgende vil vi beregne den risikopræmie der kompenserer en låntager for den ekstra risiko for, at udsteder ikke kan servicere sin gæld.

Risikopræmien skal svare til virksomhedens individuelle risiko, hvorfor vi vil tilstræbe at tage udgangspunkt i Carlsberg som virksomhed uden skelen til markedet i øvrigt.

³¹ Kilde: <https://www.fitchratings.com/site/pr/1020425>

³² Se Bilag 5, Final terms side 4

4.1.0 Om kreditrisiko generelt

En af de største forskelle der er på stats og kreditobligationer er kreditrisikoen.

Skulle en virksomhed gå konkurs eller i betalingsstandsning, vil långiver/obligationsejer ikke modtage hverken kuponrente eller hovedstolen ved udløb.

Dette betyder dog ikke, at en statsobligation ikke har en kreditrisiko, den er dog betydeligt mindre end for kreditobligationer, jf. tabel 5.

Sovereign										Tabel 5
Rating	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4	Year 5	Year 6	Year 7	Year 8	Year 9	Year 10
Aaa	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
Aa	0,000%	0,000%	0,189%	0,526%	0,879%	1,064%	1,064%	1,064%	1,064%	1,064%
A	0,000%	0,078%	0,528%	0,857%	1,202%	1,749%	2,518%	3,346%	4,246%	5,236%
Baa	0,000%	0,455%	0,749%	1,070%	1,417%	1,757%	1,757%	1,757%	1,757%	1,757%
Ba	0,588%	1,536%	2,928%	4,188%	5,463%	6,367%	7,633%	9,273%	10,630%	11,890%
B	2,665%	5,633%	7,993%	10,318%	12,552%	14,762%	16,914%	18,925%	20,607%	21,904%
Caa-C	13,420%	21,197%	27,558%	33,472%	40,937%	45,504%	48,910%	52,680%	53,990%	53,990%
Investment-Grade	0,000%	0,131%	0,347%	0,573%	0,811%	1,056%	1,234%	1,423%	1,624%	1,839%
Speculative-Grade	2,599%	4,988%	7,154%	9,184%	11,268%	12,963%	14,725%	16,628%	18,106%	19,296%
All Rated	0,896%	1,791%	2,653%	3,468%	4,302%	5,006%	5,677%	6,389%	6,972%	7,473%

Global										
Rating	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4	Year 5	Year 6	Year 7	Year 8	Year 9	Year 10
Aaa	0,000%	0,013%	0,013%	0,039%	0,068%	0,102%	0,139%	0,142%	0,142%	0,142%
Aa	0,024%	0,067%	0,123%	0,210%	0,320%	0,418%	0,516%	0,601%	0,673%	0,755%
A	0,061%	0,186%	0,393%	0,608%	0,870%	1,158%	1,456%	1,772%	2,094%	2,407%
Baa	0,202%	0,517%	0,872%	1,297%	1,717%	2,142%	2,540%	2,937%	3,352%	3,813%
Ba	0,968%	2,701%	4,793%	6,979%	8,889%	10,643%	12,210%	13,679%	15,078%	16,479%
B	3,634%	8,576%	13,620%	18,140%	22,269%	25,966%	29,350%	32,165%	34,578%	36,495%
Caa-C	10,729%	19,011%	25,853%	31,315%	35,807%	39,150%	41,679%	44,022%	46,038%	47,874%
Investment-Grade	0,100%	0,268%	0,482%	0,728%	0,994%	1,267%	1,534%	1,802%	2,074%	2,356%
Speculative-Grade	4,243%	8,666%	12,880%	16,580%	19,788%	22,549%	24,969%	27,051%	28,884%	30,476%
All Rated	1,628%	3,274%	4,791%	6,086%	7,182%	8,108%	8,903%	9,589%	10,200%	10,750%

Kilde: Kilde: Moodys Sovereign - Global: Sovereign Default and Recovery Rates, 1983-2015³³

Vi ser her at trods samme rating har kreditobligationer større sandsynlighed for default. Det skyldes i høj grad at stater har magt til at opkræve skatter og afgifter, samt at deres

³³Bilag 6

lender of last resort, IMF eller verdenssamfundet har en negativ interesse i at lade en nation gå konkurs.

Ved default havde stater i perioden 1998 – 2015 en gennemsnitlig recovery rate på 52%³⁴, mens globale senior unsecured obligationer havde en recovery rate 48,8%³⁵ i perioden 1987 – 2015. Til dette skal dog knyttes den kommentar, at eftersom stater i mindre grad end virksomheder går konkurs, er datamaterialet mindre end for virksomheders konkurs.

Det må derfor antages at det er selve konkurssandsynligheden der berettiger den ekstra præmie, og ikke hvor meget af investeringen der går tabt.

Da Carlsbergs obligation må antages at have en større risiko for default end stater, må der lægges en præmie for dette oven i afkastet ud over den risikofri rente.

Således vil obligationsejer ud over at få dækket sit minimumskrav for afkast på sin investering, også blive kompenseret for risikoen for virksomhedens konkurs.

Kort fortalt dækker begrebet kreditrisiko over risikoen for konkurs.

Denne antages større for virksomheder end for stater, hvorfor man som investor kræver et højere afkast.

Vi vil nu gå videre til at beregne kredittillægget.

4.2.0 Kredittillæg beregnet ved Black Scholes Merton

Black Scholes Mertons model til prisfastsættelse af aktieoptioner blev udviklet af Fischer Black, Robert Merton og Myron Scholes. Dette gav dem i 1997 en Nobelpris i økonomi, hvilket i sig selv taler til modellens fortræffelighed.

Modellen har den store fordel at den ved modifikationer kan bruges til prisfastsættelse af stort set ethvert afledt produkt.

Den antagelse vi vil bruge her er følgende;

Virksomhedens aktionærer udsteder obligationer/gæld til at finansiere et projekt.

³⁴ Sovereign - Global: Sovereign Default and Recovery Rates, 1983-2015 side 14, Bilag 6

³⁵ SPECIAL COMMENT: CORPORATE DEFAULT AND RECOVERY RATES, 1920-2015 side 9, Bilag 8

I dette tilfælde er projektet virksomhedens fortsatte drift og likviditet³⁶.

Går investeringen som planlagt betaler aktionærerne hovedstolen tilbage ved obligationens udløb da deres aktiver er mere værd end gælden.

Går investeringen til gengæld ikke som forventet kan aktionærerne vælge at lade virksomheden gå konkurs, og miste deres aktieinvestering.

Ved at anskue situationen således, kan man fra aktionærernes side betragte aktieinvesteringen som en erhvervet calloption på virksomhedens aktiver.

Aktionærerne vil her vælge at benytte deres call når værdien af deres aktiver > passiver.

I denne situation vil aktionærerne beholde deres aktiver og betale obligationsejerne tilbage.

Er aktiverne < passiverne vil aktionærerne lade virksomheden gå konkurs og lade obligationsejerne overtage resten.

Ud fra denne tankegang kan man benytte Black Scholes Merton (BSM fremover) til at beregne den krævede præmie for at påtage sig en kreditrisiko.

4.2.1 Forudsætninger for anvendelse af Black Scholes Merton

Inden vi går videre, skal vi have afgjort om vi opfylder forudsætningerne for anvendelse af modellen.

Forudsætningerne er som følger³⁷:

1. De fremtidige korte renter er kendte.

Dette er ikke opfyldt. Vi har dog anslået dem med en vis grad af sikkerhed og antager derfor dette for opfyldt.

2. Aktivernes afkast er tilfældige og uafhængige af tidligere afkast.

Det vurderes ikke at aktivernes afkast kan være tilfældige og uafhængige af tidligere afkast, da det ville betyde at ledelsen ikke vidste hvad de gjorde.

Vi antager dog at det er tilfældet, og viser også i 4.2.2 at afkastene tilnærmelsesvis er normalfordelte.

³⁶ Kilde, Prospekt bilag 20

³⁷ The pricing of options and corporate liabilities, bilag 21

3. Aktien udbetaler ikke udbytte.

Da vi betragter virksomhedens aktiver som det underliggende aktiv antager vi, at dette aktiv ikke betaler udbytte.

4. Optionen er europæisk.

Vores antagelse går på, at optionen har udløb ved obligationens udløb, hvorfor vi kan betragte dette tidspunkt som det eneste hvor optionen kan udnyttes.

Betragtes derfor som opfyldt.

5. Der er ingen transaktionsomkostninger forbundet med at handle optionen eller det underliggende aktiv.

Transaktionsomkostningen vurderes lille men dog eksisterende. Vi antager dog at der ingen transaktionsomkostninger er.

6. Der er ingen begrænsninger for kortsalg.

Ikke muligt i den virkelige verden, men antages at være det.

7. Ind og udlån kan ske til den risikofri rente.

Antages muligt, men vil i realiteten være problematisk for mange.

Selvom forudsætningerne for anvendelse af Black Scholes kun delvist antages at være opfyldt, fortsætter vi med vores beregninger.

Det accepteres at vi for at fortsætte må gøre visse antagelser der nok aldrig vil kunne opfyldes 100%.

4.2.1 Fremgangsmåde ved beregning af kredittillæg

Vi har til beregning af kredittillægget mulighed for at benytte fremgangsmåden som beskrevet af Hull, Nelken & White³⁸.

I denne model bestemmes risikofaktorer endogent i modellen hvilket er hvad vi ønsker. Den klassiske BSM bruges til at udlede ubekendte variable ud fra kendte.

Fra BSM har vi at

³⁸ Bilag 15

$$c = A_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad \text{Ligning 12}$$

Da vi antager at virksomhedens aktier kan betragtes som en europæisk calloption på virksomhedens aktiver kan dette omskrives til

$$E_0 = A_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad \text{Ligning 13}$$

Hvor

$$d_1 = \frac{\ln(A_0 * N(d_1)/D)}{\sigma_A * \sqrt{T}} + 0,5 * \sigma_A \sqrt{T} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \quad \text{Ligning 14}$$

D er gælden i virksomheden som er tilbagediskonteret med e^{-rT} , A_0 er aktiverne i dag, σ_A er aktivernes volatilitet og r er den risikofri rente.

Rente og volatilitet antages at være konstante.

D kan vi anslå ud fra Carlsbergs årsrapport, og aktivernes volatilitet kan vi udlede ved volatiliteten i aktiekurserne.

Gearingen i dag antages at være

$$L = D/A_0 \quad \text{Ligning 15}$$

Jf. bilag 15 og ovenstående omskriver vi ligning 13 og 14 som

$$E_0 = A_0 (N(d_1) - LN(d_2)) \quad \text{Ligning 13}$$

$$d_1 = \frac{-\ln(L)}{\sigma_A \sqrt{T}} + 0,5 \sigma_A \sqrt{T} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \quad \text{Ligning 14}$$

Hvilket vi i Carlsbergs årsrapport kan se var 0,42 ved årsafslutning³⁹, men eftersom vi ønsker at estimere den nuværende gearing ud fra BSM anvendes ligning 15.

Ved Itô's lemma har vi ydermere at

³⁹ Bilag 10, side 13

$$\sigma_A = \frac{\sigma_A N(d_1)}{N(d_1) - LN(d_2)} \quad \text{Ligning 16}$$

Vi kan ud fra ligning 13 og 16 udlede de ubekendte σ_A og A_0 ved at vi kender E_0 , σ_E , T og r .

Dertil kommer at vi ved $N(-d_2)$ finder sandsynligheden for, at aktionærene vælger ikke at udnytte deres calloption på virksomhedens aktiver.

Dette er sandsynligheden for at virksomheden går konkurs.

σ_A	Ubekendt	σ_E	Observerbar
A_0	Ubekendt	T	7,14579
E_0	Observerbar	r	0,3600%
L	D/A_0	D	€ 9.620.069.318,14

Figur 11, Kilde: Egen tilvirkning

Figur 11 viser de variable vi skal bruge for at bestemme risikotillægget for Carlsbergs obligation.

De observerbare kan observeres i markedet, hvilket giver os mulighed for at betragte ligning 13 og 16 som to ligninger med to ubekendte.

Hvis vi betragter $A_0 - E_0$ som markedsværdien af gælden i dag, og lader dette være lig B_0 har vi

$$A_0 - E_0 = B_0 \quad \text{Ligning 18}$$

Hvilket ved at benytte os af ligning 13 giver

$$B_0 = A_0 [N(-d_1) + LN(d_2)] \quad \text{Ligning 19}$$

Yield to maturity, hvilket betyder den forrentning i procent man får ved at holde et værdipapir til dets udløb, eller afkastet på gælden er defineret ved

$$B_0 = De^{-yT} = D^{(r-y)T}$$

Hvor y er obligationens ydelse/yield to maturity. Ved at substituere ind i ligning 19 og benytte at

$$\ln e^{(r-y)T} = (r-y)T$$

kommer vi frem til følgende afkast på gælden

$$y = r - \ln \left[\frac{N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L}}{T} \right] \quad \text{Ligning 20}$$

Herfra kan vi udlede at eftersom kredittillægget " s " er defineret ved

$$s = y - r$$

udlede at kredittillægget på Carlsbergs obligation kan findes ved

$$s = y - r = \ln \left[\frac{N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L}}{T} \right] \quad \text{Ligning 21}$$

Først skal vi dog have udledt de observerbare variable.

4.2.2 Beregning af volatilitet σ_A

Volatiliteten på egenkapitalen finder vi ved ligning 3, der beskriver hvordan vi finder den historiske volatilitet, og fra ligning 4 der giver EWMA.

Data til brug ved dette er tilgængelige på nasdaqomxnordic.com og ses i bilag 11.

Carlsberg handles i A og B aktier, hvorfor volatiliteten på virksomhedens egenkapital samt værdi af samme ikke kan opgøres ved den ene, men må beregnes for begge.

A-aktier	33699252	A-andel	<u>0,220896</u>
B-aktier	118857554	B-andel	<u>0,779104</u>
I alt	152556806	I alt	1

Figur 12, Kilde: Egen tilvirkning⁴⁰

Ud fra antallet af begge aktieklasser kan vi beregne hvor meget de begge vægter således at volatiliteten for hele egenkapitalen beregnes således

$$\sigma_A * 0,220896 + \sigma_B * 0,779104 = \sigma_E$$

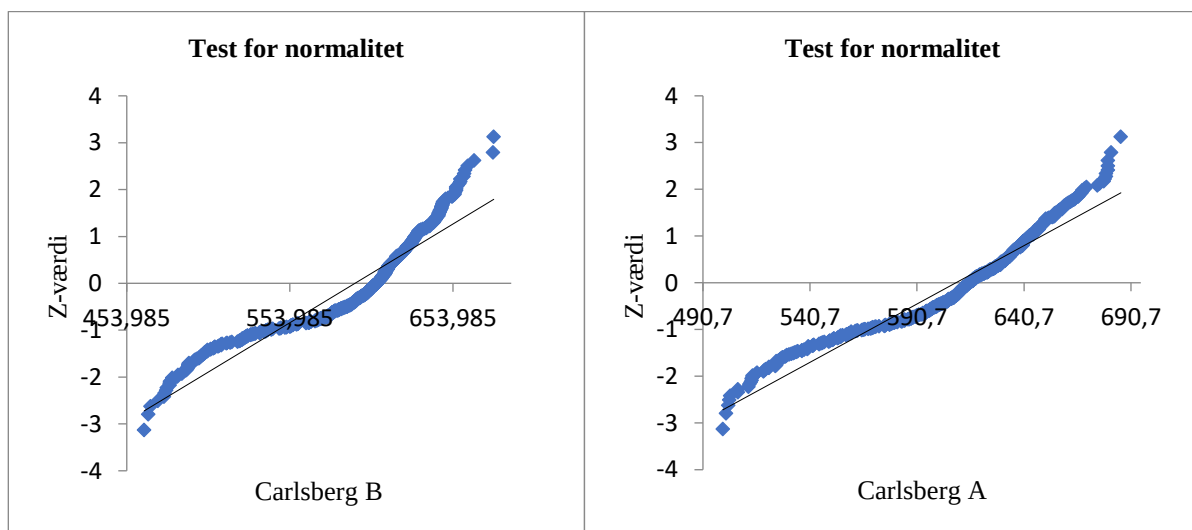
Data er indhentet fra 1. januar 2015 til og med 5. april 2017 og da beregning af volatilitet forudsætter at data er normalfordelt tester vi for normalitet.

Test for normalitet er grafisk illustreret i figur 13 og 14.

Eftersom populationen > 30 kan vi ud fra den centrale grænseværdisætning antage at data er normalfordelt, men tester dog for god ordens skyld.

Vi ser at datapunkterne tilnærmelsesvis, men ikke helt, ligger omkring en ret line.

Vi kan dermed i det følgende antage at data er normalfordelt.



Figur 13 og 14, Kilde: beregning i Hypostat⁴¹

⁴⁰ Se beregninger og datamateriale i bilag 9 Ark: "beregning af normalitet".

Antal af A og B aktier er fra Carlsbergs årsrapport 2016

⁴¹ Se beregninger i bilag 9

Vi kan nu beregne volatilitet ved at benytte ligning 3 for den historiske volatilitet, og ligning 4 for EWMA hvorved vi kommer frem til følgende resultater i figur 15 og 16.

Historisk volatilitet (CB)		EWMA volatilitet (CB)	
Daglig var	0,00028%	Daglig var	0,00028%
Stdafv	1,42654%	Stdafv	0,16611%
Årlig σ	22,64564%	Årlig σ	2,63696%

Figur 16, Kilde: Egen tilvirkning⁴²

Historisk volatilitet (CA)		EWMA volatilitet (CA)	
Daglig var	0,029250%	Daglig var	0,00024%
Stdafv	1,710255%	Stdafv	0,15479%
Årlig σ	27,149452%	Årlig σ	2,45726%

Figur 15, Kilde: Egen tilvirkning⁴³

Det ses at der er stor forskel i volatiliteterne fundet ved de forskellige beregningsformer. Dette skyldes at der har været mindre udsving i den seneste periode end hvad der har været tilfældet i de forudgående perioder.

Da EWMA lægger størst vægt på de seneste observationer, får vi dermed et mindre volatilitetsmål med denne beregning, end ved den historiske, der lægger lige stor vægt på alle observationer.

Begge resultater er rigtige og afspejler den samme virkelighed men med vægt på forskellige tidshorisonter.

Vi foretrækker dog et "stort" volatilitetsmål til denne model og vælger derfor at benytte os af historisk volatilitet.

Grunden til at vi foretrækker denne er, at der i beregningseksempel 23.1 i John Hulls "options, futures and other derivatives" benyttes et volatilitetsmål på 21,23%.

Da vi antager at John Hull er en autoritet på området tilstræbes at benytte samme metoder som i dette eksempel.

⁴² Se beregninger i bilag 9, Beregning af volatilitet

⁴³ Se beregninger i bilag 9, Beregning af volatilitet

Da vi skal have et volatilitetsmål for et samlet Carlsberg, vægtes begge volatiliteter med den andel af virksomheden de repræsenterer som vist i tabel 8.

Således kommer vi ved anvendelse af EWMA til følgende resultat for volatiliteten:

$$0,271495 * 0,220896 + 0,226456 * 0,779104 = 23,641\%^{44}$$

Da 97% af A-aktierne er ejet af Carlsberg fonden⁴⁵ kan det diskuteres om volatiliteten på disse bør indgå i vores beregning.

Vi vælger dog at medtage dem, dels da det ikke leverer en afgørende forskel, dels for at illustrere en pointe i beregningerne, der ville være relevante såfremt A-aktien var mere likvid.

4.2.3 Værdi af gæld og egenkapital

Ud over volatiliteten skal vi yderligere have et mål for virksomhedens gæld og værdi.

Da Carlsberg handles på børsen kan vi ved at multiplicere antallet af aktier med den gældende kurs 5. april 2016 finde Carlsbergs værdi som

$$118.857.554 * € 86,87 + 33.699.252 * € 83,65 = € \mathbf{13.144.098.145,78}^{46}$$

Hvor 118.857.554 er antallet af B-aktier, € 86,87 er værdien af én B-aktie, 33.699.252 er antallet af A-aktier og 83,65 er værdien af én A-aktie.

Kurser er indhentet for d. 5. april 2017 via børsen i Frankfurt for at få værdien i euro.

Gælden finder vi i Carlsbergs årsrapport der angiver en samlet gæld på kr. 73,241 mio⁴⁷, og omregner til euro⁴⁸ ved

⁴⁴ Se beregninger i bilag 9, Beregning af volatilitet

⁴⁵ Se årsrapport for Carlsberg Group 2016, side 52

⁴⁶ Se beregninger i bilag 9, Udlædning af variable

⁴⁷ Carlsberg Group årsrapport 2016 side 90, Bilag 10. Angivet som total borrowings

⁴⁸ Carlsberg Group Årsrapport, bilag 10, angiver vekselkurs som 7,4344 ved årsafslutning. Side 92

$$\frac{73,241\text{mio}}{7,4344} = €4.070.619.946,09$$

En vigtig antagelse omkring gælden er, at den er uændret siden årsafslutning 2016, hvilket selvfølgelig ikke er korrekt.

Da vi ikke har adgang til den nuværende gæld antager vi dog at den er som angivet ved årsafslutning 2016, og accepterer derfor, at der vil forekomme mindre fejl som følge af vores antagelse.

4.2.4 Udledning af σ_V og V_0

Vi udleder nu de ubekendte variable ved hjælp af excels problemløser således at de giver $E_0 = 13.144.098.145,78$ når de er indsat i ligning 13 til 19.

Beregningerne følger samme struktur som vist tidligere og fremgår mere detaljeret i bilag 11.

Herved findes let σ_A og A_0 , således at variable til brug ved den videre beregning ses i figur 17 nedenfor.

σ_A	13,740%	σ_E	23,641%
A_0	€ 22.746.881.962,10	T	7,14579
E_0	€ 13.144.098.145,78	r	0,3600%
L	42,292%	D	€ 9.620.069.318,14

Figur 17, Kilde: Egen tilvirkning

4.2.5 Beregning af kredittillæg med Black Scholes Merton

Givet de opstillede variable i figur 17 finder vi kredittillægget som beskrevet i afsnit 4.2.1 hvilket indsat i ligning 21⁴⁹ giver os

$$s = y - r = \ln \left[\frac{N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L}}{T} \right] \quad \text{Ligning 21}$$

⁴⁹ Alle beregninger ses i bilag 11

$$s = \ln \left[\frac{0,9844 + \frac{0,0058}{0,4230}}{7,1458} \right] = 0,0252\%$$

Dette resultat giver os at præmien for at påtage sig den ekstra risiko ved at investere sine penge i en obligation med større konkurssandsynlighed end en AAA ratet statsobligation, er et 0,0252% tillæg til den effektive rente.

Rent intuitivt giver det ikke meget mening, og vi må antage at en fejl eller forkert antagelse er gjort af undertegnede undervejs i denne beregning.

Som nævnt er fremgangsmåden beskrevet af John Hull i Journal of Credit Risk.

Trods en kritisk indgangsvinkel til kilder har vi ikke valide grunde til at anfægte Hull's ekspertise på området.

Vi må konkludere at fejlen ligger hos opgaveskriver.

En lignende fremgangsmåde er forsøgt implementeret med et tilsvarende resultat hvor kreditspreadet estimeres til 0,030%.

Dette andet forsøg med udgangspunkt i Michael Christensen (2014⁵⁰) er beskrevet i bilag 9 og vil ikke blive gennemgået nærmere i denne afhandling da der ikke er grund til at gennemgå to fejlagtige beregninger.

4.2.6 Bestemmelse af kredittillæg på baggrund af sandsynlighed for konkurs.

Følgende estimat på kredittillæget tager udgangspunkt i en ligning fra John Hulls "Options Futures and other derivatives", kapitel 23 side 523, ligning nr. 23.2.

Afsnittet beskriver hvorledes man udleder default sandsynligheder fra obligationspriser via følgende ligning

$$\lambda = \frac{s}{1 - \text{recovery rate}} \quad \text{Ligning 22}$$

⁵⁰ Kapitel 10 side 249

"s" er spreadet mellem en risikofri obligation og en med kreditrisiko.

Recovery rate er den andel af sin investering man som obligationsejer får dækket ved konkursen. Endelig er λ den årlige risiko for konkurs.

Altså har vi en ligning hvor recovery rate er kendt som 48,8%⁵¹, s er den variabel vi ønsker at finde, og λ er sandsynligheden for default.

Ligning 22 oven for er ikke fra BSM.

λ kan dog udledes af den originale BSM, hvis vi igen antager, at aktierne i virksomheden kan betragtes som en calloption på virksomhedens aktiver.

Fremgangsmåden ved denne udledning følger formelsamling til faget "derivatives"⁵²

Vi starter med at betragte ligning 23

$$c = A_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad \text{Ligning 23}$$

Vi har igen at c = aktiernes værdi, som vi fandt i afsnit 4.2.3 som $E_0 = €13.144.098.186,84$

Vi har d_1 og d_2 defineret som

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{D}\right) + \left(+\frac{\sigma_A^2}{2}\right) * T}{\sigma_A * \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \quad \text{Ligning 24}$$

Itô's lemma giver os at

$$\sigma_E * E_0 = N(d_1) * \sigma_A * A_0 \quad \text{Ligning 25}$$

Da vi tidligere har udledt E_0 , σ_E og da D er kendt som virksomhedens gæld skal vi løse ligning 23, 24 og 25 for at finde d_2 , eftersom $N(-d_2)$ er lig virksomhedens sandsynlighed for konkurs i perioden $t=0$ til T.

⁵¹ Bilag 8, side 9

⁵² Bilag 15

Denne sandsynlighed antager vi er for hele perioden, således at en investor der har købt en obligation gør dette med den hensigt at holde den til udløb, og dermed at risikoen antages konstant $N(-d_2)$.

Ved simultant at løse for de ubekendte fås at⁵³

$$A_0 = 22.505.411.780 \quad , \quad \sigma_A = 13,883\%$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{D}\right) + \left(+\frac{\sigma_A^2}{2}\right) * T}{\sigma_A * \sqrt{T}} = 0,9945 \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} = 0,9851$$

Hvor vi givet standardnormalfordelingen kommer til at

$$N(-d_2) = 1,4877\%$$

Hvilket er sandsynligheden for, at Carlsberg ikke kan servicere sin gæld inden for de næste 7,145 år. Denne sandsynlighed antages konstant for hele perioden.

Vi har fra Moody's i bilag 8 at recovery rate for senior unsecured bonds der må standse betalingerne er 48,8%, hvorfor vi ved at substituere dette resultat samt ligning 24 ind i ligning 22 får at

$$1,49\% = \frac{s}{1 - 0,48\%} = 0,7629\% = s$$

Altså at kredittillægget s er 0,7629% hvilket skal tillægges obligationens effektive rente. Dette resultat virker mere plausibelt end det vi fandt ved afsnit 4.2.5.

En tredje metode for at udlede kredittillægget ud fra den via BSM fundne konkurssandsynlighed vises i det følgende afsnit.

⁵³ Se beregninger i bilag 9

4.2.8 Udledning af kredittillæg via binomialmodellen

I det følgende vil vi via med hjælp af den i afsnit 4.2.7 fundne konkurssandsynlighed justere den tidligere i afsnit 3.4.2 udarbejdede binomialmodel, så der tages højde for en tredje mulighed, nemlig muligheden for konkurs.

Det vil således blive et trinomialt pristræ, men med den forskel at der ikke er lige stor sandsynlighed for alle udfald.

Løsningen her vil supplere den udledt i afsnit 4.2.7.

De tre udfald vil blive up, down og middle.

Sandsynligheden for middle, der er udfaldet for konkurs er 1,49%

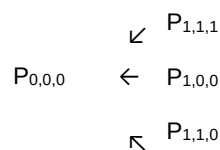
Sandsynligheden for up og down er således

$$q = 0,5 * (1 - 0,0149) = 0,49255$$

For at demonstrere fremgangsmåden tages et eksempel med udgangspunkt i P_0 .

$$P_0 = \frac{(0,49255 * (P_{1,1} + P_{1,0})) + 0,0149 * (P_{1,0,0})}{1 + r_0}$$

Således at vi i knudepunkt P_0 har den forventede værdi af de tre mulige udfald i næste periode, illustreret ved figur 18.



Figur 18, Kilde: egen tilvirkning

Ved denne fremgangsmåde kommer vi til et pristræ der ser ud som i figur 18, hvor vi lader det stå tydeligt, at der i middle state kun er mulighed for et afkast på € 48,8.

t	0,0000	0,2329	1,2329	2,2329	3,2334	4,2333	5,2332	6,2332	7,1458
									102,50
								97,50	48,80
							94,26	48,80	102,50
						93,69	48,80	99,10	48,80
					94,97	48,80	97,35	48,80	102,50
				97,89	48,80	98,33	48,80	100,76	48,80
			102,68	48,80	101,17	48,80	100,61	48,80	102,50
		108,77	48,80	105,23	48,80	103,11	48,80	102,47	48,80
	114,89	48,80	111,27	48,80	106,48	48,80	103,68	48,80	102,50
		117,80	48,80	111,53	48,80	106,96	48,80	103,54	48,80
			118,99	48,80	111,60	48,80	106,19	48,80	102,50
				118,19	48,80	109,62	48,80	105,35	48,80
					115,74	48,80	107,92	48,80	102,50
						114,03	48,80	105,91	48,80
							111,06	48,80	102,50
								107,80	48,80
									102,50

Figur 19, Kilde: Egen tilvirkning⁵⁴

Ved denne fremgangsmåde ser vi et pristræ der på en klar måde afspejler prisdannelsen, når sandsynligheden for konkurs tages med i betragtning.

Modellen er dertil også i overensstemmelse med den gældende nul kuponrentestruktur og rentevolatilitet.

Ved sammenligning med den i afsnit 3.4.2 fundne kurs på 121,93, er det en væsentlig forskel vi har fundet, og i overensstemmelse med den viden vi har om, at markedet tillægger kreditrisiko stor betydning.

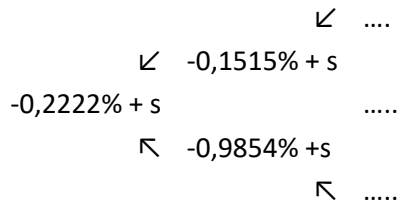
Ved at opstille det i et pristræ giver det også en mere intuitiv forståelse for mekanismen bag prisdannelsen.

Vi ønsker herfra at indkorporere denne risikopræmie i den effektive rente på obligationen, så vi arbejder os nærmere hen imod en rentestruktur der tager højde for obligationens samlede risikoprofil.

⁵⁴ Se beregninger i bilag 4

Vi gør dette ved at identificere det kredittillæg der er mellem den risikofri rente og Carlsbergs obligation. Vi ønsker at det skal kunne vises i et tillæg til den korte rente i hver enkel periode, og benytter os til dette af excels problemløser.

Vi løser her for det tillæg til renten der skal til for at nå $K=114,89$, således at vi som illustreret ved figur 9 løser for s i alle states, således at $K=114,89$.



Figur 20, Kilde: egen tilvirkning

Ved denne fremgangsmåde kommer vi til at kredittillægget er

$$s = 0,818\%$$

Dette giver anledning til følgende rentetræ i figur 20 for de korte renter i alle perioder og states. Det ses at der til de oprindelige renter illustreret i figur 8 er tillagt det fundne kredittillæg, s .

Renten vi her benytter til diskontering afspejler nu både nulkuponrentestruktur, volatilitet og kreditrisiko.

Resultatet med denne fremgangsmåde giver til sammenligning et kredittillæg der er marginalt højere end det i afsnit 4.2.6.

Forskellen er for lille til, at konkludere om det ene eller det andet er mere korrekt, da de begge er estimer.

Vi vælger at arbejde videre med tillægget på $0,818\%$, således at rentetræet i figur 21 vil være det gældende.

t=	0,0000	0,2329	1,2329	2,2329	3,2334	4,2333	5,2332	6,2332	7,1458
	0,5955%	0,6662%	1,4012%	2,8045%	3,8061%	4,9930%	6,9831%	7,6887%	7,2813%
		-0,1678%	-0,3269%	1,0764%	2,0780%	3,2649%	5,2550%	5,9606%	5,5532%
			-1,3781%	0,0252%	1,0267%	1,5368%	3,5269%	4,2325%	3,8251%
				-1,7029%	-0,7014%	0,4856%	1,7988%	2,5044%	2,0970%
					-1,2191%	-0,0322%	0,7476%	1,4531%	1,0458%
						-1,7603%	0,2298%	-0,2750%	-0,6823%
							-1,4983%	-0,7927%	-1,2001%
								-2,5208%	-2,9282%
									-4,6563%

Figur 21, Kilde: Egen tilvirkning

4.2.9 Delkonklusion

Vi har i dette afsnit fundet to resultater der godtages som valide estimater på kredittillægget.

Dog er et vigtigt punkt at vi med vores forsøg på at estimere kredittillæg via BSM ud fra Hulls model i afsnit 4.2.5 ikke kom til et brugbart resultat.

Dette kunne heller ikke lade sig gøre med Christensens model der også tog udgangspunkt i BSM. Begge disse resultater giver anledning til at tvivle på mine metoder hvormed variable udledes af BSM, hvilket har været udgangspunkt for estimatet på Carlsbergs konkurssandsynlighed.

Hvad der dog taler til fordel for mine beregninger er, at den udledte gearing på 42% er tæt på den angivne i Carlsbergs årsrapport⁵⁵ der er på 48%. Dertil har vi beregnet en default sandsynlighed på 1,49%.

Denne virker ikke urealistisk, selvom den er i uoverensstemmelse med de defaultrates der ses for baa2-ratede udstedere, der for perioden 1998 til 2015 er 1,96⁵⁶.

Risikoneutrale sandsynligheder vil dog altid være forskellige fra dem i den virkelige verden, og meningen med øvelsen var jo også at finde sandsynligheden for konkurs endogent, og ikke generelt for Baa2-ratede virksomheder.

⁵⁵ Se bilag 10 side 13

⁵⁶ Se bilag 8 side 44

Ønskede vi dette kunne vi have lænet os op ad Moody's gennem det meste af afhandlingen.

Vi holder os dog til konklusionen, at kredittillæget for Carlsbergs obligation er 0,818%.

5.0.1 Konverteringspræmie på obligationen

Da der som nævnt er en calloption forbundet med Carlsbergs obligationsudstedelse med udløb i maj 2024, vil prisen indeholde en konverteringspræmie der afspejler risikoen investor påtager sig.

Konverteringsretten der har form af en calloption, giver Carlsberg mulighed for at omlægge deres lån såfremt det bliver muligt at refinansiere til en lavere rente.

Lånet vil blive indfriet til kurs 100, og långiver vil miste det beløb ud over kurs 100 han har givet for obligationen.

Dertil løbes den risiko der er for ikke, at kunne placere pengene til samme afkast og risiko.

Muligheden for dette har Carlsberg betalt for via en lavere kurs ved udstedelse, og/eller en højere kuponrente hvilket er långivers risikopræmie.

Dette svarer til at Carlsberg har en calloption til strike 100, hvorfor konverteringsretten har samme værdi som en calloption.

Kursen på en konverterbar obligation kan derfor beregnes som

$$K_{konv} = K_{inkonv} - P_c \quad \text{ligning 10}^{57}$$

Hvor K_{konv} er prisen på den konverterbare obligation, K_{inkonv} er prisen på den inkonverterbare og P_c er prisen på calloptionen.

Optionen er en såkaldt amerikansk option. Det vil sige at den kan benyttes på et hvilket som helst tidspunkt i obligationens løbetid.

For den der har calloptionen vil det i teorien være interessant at udnytte konverteringsretten når renteniveauet kommer under obligationens kuponrente.

Teoretisk set vil det her være muligt at få gælden finansieret til en lavere rente.

⁵⁷ MC (2014) side 211

På dette tidspunkt vil obligationens kurs være større end 100.

Det er dog ikke usædvanligt at konverterbare obligationer kommer over kurs 100.

I tilfældet med Carlsbergs obligation er kursen 112,04 og dermed væsentligt over 100.

Grunden til dette vil blive diskuteret i det følgende.

5.1.0 Beregning af konverteringspræmie ved calloption

Vi vil i det følgende beregne prisen for en amerikansk calloption ved hjælp af binomialmodellen. En amerikansk calloption er en option der kan benyttes i hele optionens løbetid, i modsætning til en europæisk der kun kan benyttes på dens udløbstidspunkt.

Grunden til at vi beregner værdien af en amerikansk calloption er følgende.

Når udsteder har muligheden for at indfri sin gæld til kurs 100, er det ensbetydende med en erhvervet calloption på obligationsserien.

Når man køber en konverterbar obligation køber man i princippet en obligation og giver en calloption på den samme obligation til udsteder.

Værdien af denne option man giver væk skal således fratrækkes obligationens værdi.

Derfor kan en konverterbar obligation værdiansættes som en inkonverterbar obligation, fratrukket værdien af en calloption, hvorefter vi kan finde kursen på en konverterbar obligation som

$$K_{Konverterbar} = K_{Inkonverterbar} - c \quad \text{Ligning 22}$$

Hvor c =pris på calloption.

Optioner kan værdiansættes ud fra Black Scholes Merton eller via binomialmodellen.

BSM er et godt værktøj til dette, men ikke nødvendigvis det mest hensigtsmæssige, da modellen ikke er udarbejdet til dette til at håndtere amerikanske optioner der har mulighed for exercise på andre tidspunkter end ved udløb.

Dette fremgår i øvrigt af forudsætningerne for benyttelse af Black Scholes i afsnit 4.2.1.

Derfor vil vi udlede prisen via binomialmodellen.

For at få overskuelige beregninger antager vi at optionen kun kan udnyttes på et endeligt antal tidspunkter i dens løbetid. Vi accepterer ligeledes at forudsigelserne ikke bliver så præcise som hvis vi arbejder i kontinuert tid.

Optionen kan udnyttes af Carlsberg på alle tidspunkter og giver mulighed for at købe obligationen tilbage til kurs 100.

Det vil således være det rationelle at udnytte optionen når kursen kommer over 100, da det er her at man har mulighed for at refinansiere sit lån til en lavere rente.

Det er selvfølgelig ikke sandsynligt at man uden videre kan refinansiere uden omkostninger, hvorfor vi ikke antager at den reelle strike pris er 100.

Omkostninger til refinansiering omfatter blandt andet udgifter til dem der står for udstedelsen. I dette tilfælde en række af finansielle virksomheder som beskrevet i bilag 5, der er final terms for udstedelsen af den nuværende obligation udstedt i 2014.

Her står at udgifter direkte forbundet med at udstedelsen er € 6.100.000.

Vi antager at omkostningerne i dag formentlig vil være i samme leje, korrigeret for inflation. Dertil ses i samme dokument, at kurs ved udstedelse var 98,991 således at der ved udstedelse var et kurstab på € 18.961.736.

Dette vil sandsynligvis blive tilfældet igen.

Hvad vi ikke kan se er de omkostninger der vil være internt i virksomheden med forberedelse og analysearbejde i forbindelse med udnyttelse af call.

Vi må derfor gøre en antagelse eller helt se bort fra denne.

Hvad der er åbentlyst er, at vi ved udstedelsen i 2014 som minimum har haft omkostninger der beløber sig til

$$€ 6.100.000 + € 12.861.736 = € 18.961.726$$

Ved excersice ved kurs 100 ser vi således at det er en underskudsforretning for Carlsberg hvilket også er grunden til at de fleste konverterbare obligationer handles til over kurs 100.

Der vil altid være omkostninger af den ene eller anden art forbundet med refinansiering.

For at Carlsberg, alt andet lige, går i nul ved refinansieringen skal kursen minimum være

$$\frac{1.018.961.726}{1.000.000.000} = 1,01896$$

$$Kurs = 1,01896 * 100 = 101,896$$

Ser vi dermed bort fra andre omkostninger end de ovenfor nævnte, vil det være rationelt at Carlsberg refinansierer når kursen er over 101,896, da dette afspejler at man kan optage lån til en lavere rente end den nuværende.

5.1.2 Fremgangsmåde ved beregning

Vi vil i vores binomialmodel benytte det rentetræ vi har konstrueret efter tillæg af kreditpræmien, således at vi betragter et marked der har taget højde for konkursrisiko. Rentetræet ses i figur 21, og vil være de renter og t-værdier vi benytter til beregningerne.

Kendetegnet ved en amerikansk option er som tidligere nævnt at den kan anvendes på mere end ét tidspunkt. I binomialmodellen til værdiansættelse af optioner betyder det at vi beregner værdien optionen i hver state.

Vi sammenligner herefter med prisen i den forrige periode(diskonteret) og den højeste bliver prisen i dette state. Fremgangsmåden illustreres i figur 22.

t=	0	1	2
$ \begin{array}{c} \text{MAKS: } c; \frac{0,5 * (c_u + c_d)}{(1+r)} \nwarrow \text{MAKS: } c_u; \frac{0,5 * (c_{uu} + c_{ud})}{(1+r)} \nwarrow c_{uu} \\ \text{MAKS: } c_d; \frac{0,5 * (c_{du} + c_{dd})}{(1+r)} \nwarrow c_{dd} \end{array} $			

Figur 22, Kilde: Egen tilvirkning

c er lig værdien af calloptionen til tid t i en given state i og bestemmes som den tilbagediskonterede værdi af gennemsnittet af de to næste callværdier, eller værdien af calloptionen i dag.

Den i afsnit 4.2.8 fundne rentestruktur vil vi regulere efter at have estimeret callpræmien i den følgende beregning, således at vi har en rentestruktur, der tager højde for konverteringsrisiko og kreditrisiko.

Pristræet fra afsnit 4.2.8 vil vi først fratrække kuponbetalingerne, således at vi har den "rene" pris på obligationen. Renten til låntager skal betales uanset hvad, og det er nutidsværdien vi er interesserede i.

Derefter vil hver enkel knude blive fratrækket strike prisen på 101,896 således at optionens værdi i hver knude er kendt. Er den tilbagediskonterede sum af de efterfølgende optioner større, vil denne blive benyttet i stedet, således at hvis

$$\frac{0,5 * (c_{uu} + c_{ud})}{(1 + r)} > c_u$$

vil vi i knudepunktet for c_u benytte den største værdi af de to, hvilket vi fortsætter med for hele pristræet. Tabel 7 viser kun et pristræ for to perioder men bør illustrere princippet. Værdien af optionen kan med denne metode være den i periode nul, eller den bestemt i periode $c_{7,0}$ diskonteret med de rette faktorer.

5.1.3 Beregning af calloption

Beregning af pristræet for optionen udføres som beskrevet i afsnit 5.1.2, hvilket leder til pristræet i figur 23, hvor obligationspriserne fratrasket kuponbetaling står med sort og optionspriserne står med rødt nedenunder dem.

Dato	01-04-2017	01-07-2017	01-07-2018	01-07-2019	01-07-2020	01-07-2021	01-07-2022	01-07-2023	01-07-2024
t	0,0000	0,2329	1,2329	2,2329	3,2334	4,2333	5,2332	6,2332	7,2334
									100,00
								95,00	100,00
						91,09	-	96,59	100,00
					92,29	-	94,80	-	100,00
				95,16	-	95,71	-	98,24	100,00
			99,91	-	98,50	-	98,04	-	100,00
		106,01	-	102,53	-	92,09	-	97,59	100,00
	112,39	4,11	108,55	0,63/0,951	103,82	-	95,80	-	100,00
	10,49	115,14	6,66	96,16	1,92	96,71	-	99,24	100,00
		13,24	116,33	6,96	108,94	2,44	99,04	-	100,00
			14,43	103,53	7,05	93,09	1,70	98,59	100,00
				13,63	113,10	5,10	96,80	0,89	100,00
					11,20	97,71	3,42	100,24	100,00
						9,49	100,04	1,44	100,00
							6,54	99,59	100,00
								3,32	100,00

Figur 23, kilde: egen tilvirkning⁵⁸

Optionspriserne i figur 23 giver os anledning til at beregne hvorvidt vi skal benytte os af pris til tid=t eller pris til tid t+1.

Dette bliver kun tilfældet i state p_{3,2} hvor

$$\frac{0,5 * (0 + 1,99)}{1 + 0,03\%} = 0,951 > 0,63$$

Hvorfor optionsprisen bliver 0,951 i denne state.

Resultatet bliver at værdien af calloptionen vil være lig prisen på tid t=0 hvilket er

$$c = 10,49$$

Beregningerne har i afsnit 4.2.8 givet at obligationens teoretiske kurs er 114,89, og givet ligning 22 har vi at kursen for den inkonverterbare obligation er

⁵⁸ Beregninger i bilag 4

$$K_{\text{konverterbar}} = 114,89 - 10,40 = 104,49$$

Man kan diskutere om denne metode giver et for højt skøn af effekten af calloptionen, da der kun tages udgangspunkt i kurser der er givet ved fremtidige betalingstrømme hvori konverteringspræmien ikke er medregnet.

At forsøge sig med et skøn der tager højde for dette vil derfor give mening.

Dette vil derfor blive udledt i afsnit 5.2.1.

5.2.1 Konverteringspræmie ved konstruktion af pristræ for konverterbar obligation

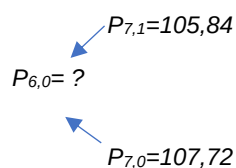
Princippet i det følgende er, at vi ved de forskellige knudepunkter tager højde for en konvertering. Dette gøres i praksis ved, at i alle knudepunkter hvor $P \geq$ strike sættes prisen automatisk til strike.

Dermed vil forventningerne til den mulige konvertering blive indkorporeret i priserne, og forventninger om en kommende udnyttelse af calloptionen, vil betyde en lavere forventet pris. Det færdige pristræ vil dermed blive et pristræ for en konverterbar kreditobligation.

Vi vil igen sætte et pristræ identisk med det i afsnit 4.2.8, hvor vi vil fratrække kuponrenten og få de rene priser.

Vi vil nu i markere de priser der overstiger 101,896, og lade de knudepunkter der afhænger af de tilbagediskonterede priser $> 101,896$ erstatte med 101,896.

For eksempel, har vi at knudepunkt $P_{6,0}$ afhænger af knudepunkterne $P_{7,1}$ og $P_{7,0}$.



$P_{7,1}$ og $P_{7,0}$ er begge større end strike prisen, hvorfor det giver mening at udsteder vælger at benytte sin call. Prisen kan derfor ikke være større end 101,896, hvorfor prisen i begge tilfælde ændres til dette. Deraf har vi at:

$$P_{6,0} = \frac{0,5 * (101,896 + 101,896)}{(1 + (-0,0150))} \quad \begin{matrix} \swarrow P_{7,1} = 105,84 \\ \nwarrow P_{7,0} = 107,72 \end{matrix}$$

$$P_{6,0} = 105,98$$

Vi får altså en anden pris end når vi beregner for optionen, og dermed et andet pristræ.

5.2.2 Beregning af konverteringspræmie ved binomialmodel v2.

Beregningen af hvert enkelt knudepunkt i pristræet sker på samme vis som beskrevet ovenfor.

Vi arbejder os således bagud fra udløbstidspunktet til vi når t=0.

Ved hvert knudepunkt større end 101,896 vil de værdier der tilbagediskonteres være 101,896. Dette giver et mere retvisende billede af hvordan prisen skal være, og giver os et bedre overblik over prisdannelsen.

Resultatet bliver et pristræ som set nedenfor.

Dato	10-04-2017	04-07-2017	04-07-2018	04-07-2019	04-07-2020	04-07-2021	04-07-2022	04-07-2023	04-07-2024
t	0,0000	0,2329	1,2329	2,2329	3,2334	4,2333	5,2332	6,2332	7,1458
									102,50
								98,14	
							94,75		102,50
						94,04		99,60	
					95,17		97,71		102,50
				97,98		98,55		101,10	
			102,06		101,28		100,82		102,50
		103,79		104,01		103,21		102,66	
	105,59		105,80		103,99		103,77		102,50
		104,57		105,41		104,83		103,63	
			105,85		105,13		104,48		102,50
				106,20		104,43		105,26	
					105,68		104,16		102,50
						106,27		105,77	
							105,98		102,50
								107,48	
Strike=	101,90								102,50

Figur 23, kilde: egen tilvirkning⁵⁹

Figur 23 viser pristræet korrigeret for calloptionen med en teoretisk kurs på 105,59. Kuponrenter er inkluderet i dette træ hvilket er årsagen til at vi ser kurser højere end strike. Når vi beregner om det er fordelagtigt at benytte calloptionen ønsker vi ikke at have kuponrenter med, da kuponen skal betales uanset hvad.

De røde knudepunkter er dem der uden kuponrenter overstiger strike, og derfor i beregningen tæller som 101,896⁶⁰.

Det ses her at kursen bliver højere end ved metoden med calloption beregnet i afsnit 5.1.3, og derved bedre afspejler en virkelighed, hvor vi lader forventninger om fremtidig pris influere nuværende skøn.

Strike prisen er beregnet som en funktion af de omkostninger der er forbundet med refinansiering af et nyt lån, og det kurstab der kan forventes i forbindelse med salg af obligationerne.

Der er dermed ikke taget højde for de omkostninger der er forbundet ved at afnotere obligationerne, det generelt forberedende arbejde internt i virksomheden samt den risiko man løber ved ikke at kunne få det forventede låneprovenu ved udstedelsen.

5.2.3 Estimering af konverteringstillæg

Vi har ved to beregninger baseret på samme princip i binomialmodellen nået frem til to estimater for kursen på den konverterbare kreditobligation.

Ved første estimat fandt vi at kursen på den konverterbare obligation kan betragtes som en inkonverterbar obligation fratrukket værdien af en amerikansk option.

Her blev resultatet at vi med en pris for call på 10,49 og en pris for den inkonverterbare obligation på 114,89 får en kurs på

⁵⁹ Se beregninger i bilag 4, prisfastsættelse af konverterbar

⁶⁰ Et pristræ uden kuponbetalinger ses i bilag 4, prisfastsættelse konverterbar

$$K_{konverterbar} = K_{inkonverterbar} - c = 114,89 - 10,49 = 104,49$$

Dette antages at være en ganske høj præmie at betale for konverteringsretten, hvorfor vi opstiller en alternativ model, hvor vi i pristræet antager at alle knudepunkter med en $K > 101,896$ tilbagediskonteres som 101,896.

Herved tager vi også på tid $t=0$ højde for en mulig konvertering i fremtiden, hvilket giver anledning til lavere kurser gennem hele pristræet.

Dette leder os til en kurs for den konverterbare obligation på

$$K_{konverterbar} = 105,59$$

Det første resultat virker for lavt, da det forudsætter at calloptionen som et faktum vil blive udnyttet ved den beregnede strike pris.

Prisen ved konstruktion af en konverterbar obligation virker mere realistisk set i lyset af de gældende markedsforhold. Jeg mener dog at den er i den lave ende.

Da afhandlingens formål ikke er specifikt at sætte den rigtige pris, men illustrere en korrekt fremgangsmåde accepteres dette forhold.

Risikopræmien for at påtage sig konverteringsrisikoen finder vi ved at justere de korte renter i vores pristræ illustreret i figur 23, hvor der er taget højde for kreditrisikoen.

Vi sætter kursen ved $t=0$ lig den fundne for den konverterbare obligation, altså 105,59, og løser for det tillæg der skal lægges til den korte rente for alle perioder.

Vi finder således, at når vi løser for s_{ks} i rentetræet hvor s_{ks} er lig konverteringsspread får vi at

$$s_{ks} = 1,250$$

Hvilket giver nedenstående rentetræ

t→	0,0000	0,2329	1,2329	2,2329	3,2334	4,2333	5,2332	6,2332	7,1458
j↓ i→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1,85%	1,92%	2,65%	4,05%	5,06%	6,24%	8,23%	8,94%	8,53%
1		1,08%	0,92%	2,33%	3,33%	4,51%	6,50%	7,21%	6,80%
2			-0,13%	1,27%	1,03%	2,79%	4,78%	5,48%	5,07%
3				-0,45%	0,55%	1,74%	3,05%	3,75%	3,35%
4					0,03%	1,22%	2,00%	2,70%	2,30%
5						-0,51%	1,48%	0,97%	0,57%
6							-0,25%	0,46%	0,05%
7								-1,27%	-1,68%
8									-3,41%

Figur 24, Kilde: egen tilvirkning

Dette tolkes som den risikopræmie man som långiver vil forlange for at påtage sig risikoen for en førtidig indfrielse, og omvendt som den pris man som låntager vil betale for muligheden for førtidig indfrielse.

5.2.4 Diskussion af resultat

I de foregående beregninger har vi set hvordan vi har beregnet to estimater for konverteringspræmien og det tillæg det skal afstedkomme i den effektive rente.

Hvad vi kan se er, at det fundne tillæg er relativt højt og afstedkommer en kurs der er tilsvarende lav.

Med en markedskurs på 109,73⁶¹ har vi en indikator på at den beregnede konverteringspræmie er for høj, eller at investorerne kun i mindre grad tager højde for den. Det sidstnævnte er usandsynligt, da obligationer af denne type for manges vedkommende er en "køb og hold" obligation, hvor risikoen for en førtidig indfrielse vejer tungt i hvad man vil betale for afkastet.

Teoretisk set bør Carlsberg benytte deres calloption når kursen kommer over 100, korrigeret for deres omkostninger. Man må antage at der ved udstedelsen har været overvejelser om hvorvidt man ville betale for en calloption, hvorfor det er ulogisk ikke at benytte den såfremt det bliver opportunt.

⁶¹ Pr. 5. april 2017

Derfor må vi ræsonere os frem til, at vores anslåede omkostninger i forbindelse med udnyttelse af call er for lav. Vi har ikke taget højde for de arbejdstimer der internt i virksomheden skal benyttes, da vi ikke har brugbare data til at vurdere dette.

Dertil kommer også en ret simpel forklaring der kan være mindst lige så brugbar.

Så længe det afkast de får fra gælden tilfredsstiller deres afkastkrav, kan det være irrelevant at få en marginalt lavere omkostning på deres renter.

Historisk set er det også usædvanligt, at kunne låse sin rente fast på et så lavt niveau som 2,5%, især med tanke på obligationens stilling i prioritetsrækken ved en konkurs.

Et sidste bud på hvorfor kan også være, at der i markedet spekuleres i hvorvidt denne calloption vil blive brugt og derfor af visse investorer med højere risikovillighed værdisætte højere end andre i markedet. Lige denne faktor har vi dog i denne afhandling begrænsede muligheder for at undersøge.

5.3 Delkonklusion

Størrelsen af konverteringspræmien afhænger i høj grad af de omkostninger og muligheder for refinansiering virksomheden står over for.

Carlsberg vil formentlig i forbindelse med en indfrielse af lånet have større omkostninger end dem vi har taget højde for i dette afsnit. Deres primære drift består af produktion af øl og læskedrikke, hvorfor vi kan antage at sådanne omkostninger vil være en ekstraordinær post, der skal afholdes uanset om der besluttet at indfri eller ej.

Det mest retvisende resultat vurderes at være det sidste, hvor vi ved konstruktion af en konverterbar obligation i binomialmodellen får et resultat der tager højde for fremtidige konverteringsmuligheder. Således tages der ud over konverteringen også udgangspunkt i den gældende rentestruktur og rentevolatilitet.

Resultatet bliver tilfredsstillende som et eksempel, men der lægges vægt på at omkostningerne i forbindelse med indfrielse vil afspejle omkostninger til refinansiering og udstedelse af ny obligationsserie. Omkostninger til disse kan skønnes ud fra tidligere omkostninger hertil. Dette er nemt at læse sig til i regnskab og prospekt. Omkostninger internt i virksomheden og omkostninger til at vurdere om konvertering er

hensigtsmæssigt er derimod svært at danne sig et skøn over uden et dybere kendskab til virksomheden.

6.0.1 Opsummering

Igennem nærværende afhandling er vi gennem en række beregninger nået frem til, at prisen på Carlsbergs 2,5% obligation kan ses som en funktion af dens effektive rente. Den effektive rente der kan opdeles i forskellige delkomponenter.

- Den risikofri rente der lader sig repræsentere ved den gældende nul kuponrentestruktur. Vi har i dette tilfælde desuden ladet volatilitet indgå i vores estimat.
- Tillæg for kreditrisiko. Forstået som den compensation man som investor kræver for at påtage sig risikoen for at miste sin investering ved en konkurs.
- Tillæg for konverteringsrisiko. Forstået som den compensation investor kræver for at påtage sig risikoen for en førtidig indfrielse til kurs 100.
- Andre risikotillæg. Her forstået tillæg vi ikke har gennemgået nærmere i nærværende afhandling, da vi ønsker at begrænse os. Heriblandt kommer f.eks. likviditetsrisiko, migreringsrisiko, valutakursrisiko mv.

Den risikofri rente fandt vi i afsnit 3.3.11 repræsenteret ved rentetræet vist i figur 3.

Her har vi i afsnit 4.2.8 udledt et tillæg matchende den påtagede kreditrisiko svarende til

$$s_{\text{kredit}} = 0,818\%$$

Herefter har vi i afsnit 5.2.3 udledt et tillæg der matcher risikoen for at påtage sig risikoen for at Carlsberg udnytter sin calloption, hvilket er

$$s_{\text{ks}} = 1,250$$

Kursen for obligationen tilbagediskonteret med disse tre elementer ses i afsnit 5.2.3 som værende 105,59.

Den effektive rente der giver denne kurs kan vi finde ved følgende ligning

$$K + v = \sum_t^N Y_j * (1 + r)^{-t}$$

Hvor vi kender $K+v$ som 105,59, Y som betalingerne på $t=t$ samt t og N .

Vi skal således løse for at finde r som er den effektive rente.

Den effektive rente er det vigtigste element ved prisfastsættelsen af obligationen, og kan hjælpe os til at udlede hvilken kuponbetaling/kurs vi skal sætte ved udstedelsen for at få en effektiv rente svarende til markedets forventning.

Sætter vi betalingerne lig 2,5 og 102,5 ved udløb og løser for den værdi af r der giver os kursen 105,59 får vi at den effektive rente er

$$r = 1,9531\%$$

Den effektive rente og dermed prisen på Carlsbergs 2,5% obligation er dermed 1,95%.

Prisen er udledt ved metoderne præsenteret i min opgave og besvarer implicit spørgsmålet i min problemformulering som lød:

Hvordan fastsættes prisen på kreditobligationer set fra et teoretisk synspunkt?

Dette leder os til konklusionen på min opgave som følger i næste afsnit.

7.0.0 Konklusion

Som udgangspunkt er der ikke forskel på hvorledes en statsobligation og kreditobligation prissættes. Begge obligationer er et løfte om en række af fremtidige betalingsstrømme, der skal tilbagediskonteres med en rente der afspejler risikoprofilen. En kreditobligation har dog større og mere tydelige risici end en statsobligation. Kreditobligationen prissættes i udgangspunkt som en risikofri statsobligation, men med tillæg for de ekstra risici der tages.

Derfor skal man efter at have udledt den basale mindsterente, den risikofri, tillægge prisen for at påtage sig ekstra risiko. Alt efter hvor mange ekstra risikofaktorer der påtages er flere beregninger påkrævet.

De væsentligste risici har jeg i min afhandling fastlagt som kreditrisikoen og konverteringsrisikoen. Værdien af disse har jeg herefter fratrasket eller tillagt den rene værdi når kreditobligationen betragtes som risikofri.

Min fremgangsmåde fremlagt i denne opgave mener jeg kan gentages for flere risikofaktorer. Altså udlede en værdi af disse, for herved at konstruere en obligation med tilhørende rentestruktur. Den effektive rente kan udledes af kursen for denne obligation, hvilket svarer obligationens pris.

Af de anvendte metoder har binomialmodellen vist sig mest pålidelig.

Styrken ved denne fremgangsmåde har vist sig ved, at man hurtigt opdager fejl og kan identificere fejlløbet.

Dette viser sig mere vanskeligt med BSM, der baserer sig meget på teori.

Kombinationen af de to ved udledning af kreditrisiko hvor sandsynligheden for konkurs udledes gennem BSM viste sig dog at fungere endog rigtig godt.

8.0.1 Litteraturliste

Bøger:

Michael Christensen, 2014 "obligationsinvstering", 8. udgave

John Hull, 2014, "Fundamentals of futures and options markets", 8. udgave.

John Hull, 2012, "Options, futures and other derivatives", 8. udgave.

Pietro Veronesi, 2016, "Handbook of fixed income securities", 1. Udgave.

Artikler og publikationer: (også vedlagt som bilag)

John Hull:

Journal of credit risk vol. 1 winter 2004/05

Standard & Poor's:

2014 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions

Standard & Poors:

Annual Global Project Finance Default and Recovery Study, 1980-2014

Moody's,

Annual Default Study: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2015

Moody's:

Annual Default Study: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2016

Moody's:

Sovereign Default and Recovery Rates, 1983-2015

Hjemmesider:

Nasdaq OMXNordic

<http://www.nasdaqomxnordic.com/>

Börse Frankfurt

<http://en.boerse-frankfurt.de/>

Bundesrepublik Deutschland – Finanzagentur

<http://www.deutsche-finanzagentur.de/en/>

CBS Bibliotek

<http://www.cbs.dk/en/library>

Euribor

<http://www.euribor-rates.eu/>

Andre kilder:

Final terms for Carlsberg obligation 2,5%

Carlsberg Group Annual report 2016

Prospekt for Carlsberg obligation 2,5%

Bilagsgliste:

Excel ark:

Bilag 1

NSS og volatilitet Bilag 2

Bilag 3

Bilag 4

Bilag 7

Black Scholes bilag 9

Bilag 11

Tekster:

Bilag 5

Bilag 6

Bilag 8

Bilag 15

Bilag 10

Bilag 20