Afgangsprojekt på HD F
Copenhagen Business School

Skal investorer med en længere tidshorisont placere en større del af deres formue i aktier?

Andreas Andersen

Vejleder: Linda Sandris Larsen

1. august 2017

Indhold

Kapitel 1

Problemfelt, afgrænsning og problemformulering

1.1 Indledning: Investeringsstrategier gennem tusinder af år

"Let every man divide his money into three parts, and invest a third in land, a third i business, and a third let him keep in reserve." [8]

Således lyder investeringsrådet i den jødiske Talmud formuleret og nedskrevet omkring begyndelsen af vores tidsregning, dvs. år nul. Fra den tidlige moderne tid finder vi investeringsråd repræsenteret i en populær kontekst både i teatermanuskripter og i ordbøger over talemåder. I Shakespeares komedie fra 1597 forklarer købmanden Antonio sin ven Salarino, hvorledes han ved at sprede sine investeringer over flere skibe og over forskellige tidsperioder undgår stor bekymring om skibsforlis og konsekvenserne heraf.

"Nej, tro mig. Jeg kan takke skæbnen for, at alle mine indskud ikke hviler på samme køl, og ikke på ét sted; ej heller er min formue begrænset til min succes i dette ene år - min handels vilkår gør mig ikke trist." [29]

I moderne finansieringsteoretisk kontekst vil formuleringen være, at Antonio ved at sprede sin risiko, givet visse forudsætninger, opnår en diversifikationsgevinst i form af et uændret forventet afkast $E[r]$ men med en lavere risiko σ.

Ordsproget 'Læg ikke alle æg i samme kurv' optræder på skrift på samme tid, hvor det i 1662 i en bog om italienske talemåder interessant nok defineres ud fra sådanne overvejelser om skibsfragt :

"To put all ones Eggs in a Paniard, viz. to hazard all in one bottom [ship]." [38, 33]

Tanken om risikospredning og diversifikationsgevinster går således langt forud for den kvantitative, formaliserede redegørelse. Fra det tidligst kendte investeringsråd formuleret i den jødiske Talmud til Harry Markowitz middelværdi-varians-analyse introduceret i 1952 [16] er der et tidsmæssigt spænd på ca. 2.000 år.

1.2 Problemfelt

Et velkendt, nutidigt investeringsråd siger, at man som ung investor skal holde en større andel af sin formue i aktier, og, at når man bliver ældre, skal reducere andelen og i stedet øge andelen af obligationer [28, 11, 22]. En konkret repræsentation af dette råd er tommelfingerreglen om at vælge en procentuel allokering til aktier på

$$100 - \text{Alder på investor}$$

og resten i obligationer [1] [14, 39, 15].

[1] Antages det at investeringshorisonten T er fra nu og til investors forventede levealder, kan investors alder udtrykkes ved Alder $=$ Forventet levetid $- T$. Allokeringen til aktier er dermed lineær med hældningskoefficient 1 i investeringshorisonten og givet ved $(100 - \text{Forventet levealder}) + T$

Middelværdi-varians-analysen af Markowitz bygger på en én-periode model og kan dermed ikke forklare dette råd. Jeg ønsker at undersøge, hvordan en investors optimale investeringsstrategi ser ud i et dynamisk setup, og om den optimale strategi er i overensstemmelse med det velkendte råd. Opgaven tager afsæt i artiklen Munk og Sørensen (2001) 'Skal investorer med lang investeringshorisont have større aktieandel?' Finans/Invest, no. 7, pp. 10-17 [22].

Spørgsmålet om allokering mellem aktivklasser og om tidshorisontens betydning herfor aktualiseres af et nybrud i tilgængeligheden af investering. Med de seneste års udvikling i online-handelsplatforme er investeringsbeslutningen rykket tættere på den enkelte privatinvestor end nogensinde før [9]. Med blot en app på mobiltelefonen kan selv småinvestorer investere en del af deres formue, monitorere deres portefølje, modtage finansielle nyheder og løbende omgøre investeringsbeslutningen. Udbydere af platforme som Nordnet, Saxo Bank, IG, Markets.com, De Giro, ETX Capital, Avatrade, eToro m.fl. konkurrerer mod hinanden men også mod bankerne om at få de private investorer som kunder. Den øgede tilgængelighed af investeringsplatforme og information må alt andet lige forventes at øge investeringsaktiviteten. Øget valgfrihed i forbindelse med pensionsinvestering og usikkerhed omkring den politisk vedtagne pensionsalder i fremtiden kan også forventes at medføre en øget bevidsthed om og interesse for livslang investering/opsparing hos den enkelte private investor.

1.3 Scope, afgrænsning og antagelser

Jeg har her i opgaven valgt at prioritere forholdsmæssigt meget plads på at redegøre for mit af valg af afgrænsninger, da afgrænsningerne er mange, og da en inddragelse af disse afgrænsningsområder ville betyde en langt større analyse, som ligger udenfor denne HD-opgaves omfang.

Målet med denne opgave er at undersøge, om den optimale aktieandel for en rationel, grådig og risikoavers investor afhænger af investeringshorisonten. Jeg vælger at afgrænse mig til overordnet at behandle spørgsmålet som et allokeringsproblem mellem to brede aktivklasser, aktier og obligationer, hvor aktierne modelleres af et bredt aktieindex og obligationerne af en enkelt risikofri investering. Dette er en betragtelig indsnævring i forhold til den store komplette porteføljeudvælgelsesanalyse, som en behandling med mange aktiver ville give anledning til. Afgrænsningen sker af hensyn til opgavens omfang men med en forhåbning om, at den som i Markowitz én-periode middelværdi-variansanalyse, hvor der gælder to-fond-separation, stadig kan opsamle kernen i problemstillingen. Investeringsmulighederne antages konstante i den forstand, at afkastfordelingen for aktieindexet og den risikofri rente antages at være ikke-stokastiske og konstante i tid. Aktieafkastet og dermed kursen er således stokastisk men afkastfordelingen konstant. Kursen på aktieindekset eller aktieprisen modelleres gennem opgaven som geometrisk Brownsk bevægelse.

Problemstillingen vælger jeg at behandle på tre måder:

- Med middelværdi-varians-analyse
- Ud fra outperformancesandsynligheder
- Med en intertemporal model baseret på forventet nytte-teori

Hver af disse tilgange kræver sine specifikke antagelser for at være mulige at behandle rent matematisk og for at give meningsfulde resultater.

Det er veldokumenteret, at investorer i porteføljer bestående af aktier og obligationer i altovervejende grad kan karakteriseres som grådige og risikoaverse[2]. Jeg kan derfor praktisk talt uden tab af generalitet antage, at investor er grådig og risikoavers.

Jeg vil i den intertemporale model tillade et løbende forbrug under en række rimelige bibetingelser beskrevet nedenfor. Det antages, at investor har nytte af

[2]Se bl.a. Guiso og Paialla (2008) [13] som i en empirisk undersøgelse afdækker, at 96 procent af en stikprøve på 3.297 investorer er risikoaverse, 3,7 procent risikoneutrale og forsvindende 0,5 procent risikoelskende. Dette er i overensstemelse med den øvrige litteratur, herunder von Neuman og Morgenstern (1944), Arrow (1971) og Prat (1964) [23, 24, 26]. Zhang, Brennan og W. Lo (2014) [40] beskriver, hvordan risikoaversion er et grundlæggende karaktertræk for det moderne menneske, og tilmed er et af de mest hyppigt observerede adfærdsmønstre i dyreriget.

det løbende forbrug (og ikke af formuen) samt terminalformuen. Investor tillades at rebalancere sin portefølje løbende. Grænsetilfældet, hvor der ikke er forbrug men kun nytteværdi i forbindelse med formuen i slutningen af investeringshorisonten, undersøges også. Problemet løses for en investor med additiv, tidsseparabel multiperiode-nyttefunktion og CRRA-én-periode-nyttefunktioner.

Jeg afgrænser mig fra at undersøge effekten af løbende indkomst for investor - mao. er hverken en konstant eller en stokastisk indkomst medtaget i modellen. Investor antages således at leve af sin formue frem til en på forhånd givet investeringshorisont (investors livslængde), og desuden antages investor at bruge hele sin formue i løbet af dette tidsrum.

Ydermere vil jeg afgrænse analysen fra at tage hensyn til human kapital (nutidsværdien af investors fremtidige lønindkomst) og anden indkomst, end den som generes af investeringerne. Investering og opsparing i egen bolig spiller en særlig rolle for mange mennesker og udgør ofte størstedelen af deres investering. Fritid er i økonomisk forstand et forbrugsgode, som har en betragtelig nytteværdi for individet. Med afgrænsningerne ovenfor ses der i denne opgave helt bort fra denne værdi. Man kunne argumentere for, at en god model til bestemmelse af den optimale investeringsstrategi skulle tage hensyn til disse forhold; det ligger dog uden for rammerne af denne opgave at inddrage humankapital, boligøkonomiske aspekter og værdien af fritid.

Der kan næppe laves en udtømmende liste over samtlige afgrænsninger, men listen inkluderer endvidere ting som fravær af handelsomkostninger, fravær af investorvaner (habit formation), fraværet af parameterusikkerhed, antagelse om at investor er pristager - dvs. ikke kan påvirke aktieprisen eller den risikofri rente, fraværet af inflationsrisiko, fraværet af beskatning, fraværet af muligheden for internationale aspekter og fraværet af elementer fra behavioural finance.

1.4 Problemformulering og underspørgsmål

Med udgangspunkt i problemfeltet og afgrænsningen ovenfor fremstilles her problemformuleringen samt underspørgsmål. De valgte afgrænsninger er for mange og for specifikke til alle eksplicit at kunne nævnes i problemformuleringen, hvorfor jeg vil tillade mig at nøjes med her at gøre læseren opmærksom på, at problemformuleringen skal læses med disse afgrænsninger in mente.

Problemformulering

Skal en investor med lang investeringshorisont have større aktieandel end en tilsvarende investor med en kort horisont?

Underspørgsmål

U1

Hvordan kan investorpræferencer modelleres?

U2

Hvad siger middelværdi-varians-analysen om den optimale aktieandel og om dennes afhængighed af investeringshorisonten?

U3

Hvilke begrænsninger ligger der i anvendelse af middelværdi-varians-analysen?

U4

Hvad er sandsynligheden for, at et aktieindex outperformer et obligationsindex, og kan denne outputperformancesandsynlighed bruges som beslutningskriterium for valg af aktieandel?

U5

Hvordan kan allokeringsproblemet beskrives i et dynamisk modelsetup?

U6

Hvad er den optimale allokeringsstrategi i en multiperiode, kontinuert-tids dynamisk model med løbende rebalancering?

U7

Skal investor med lang investeringshorisont have større aktieandel?

1.5 Metodeteoretiske overvejelser

Metodeteoretisk er der i denne opgave visse overlap med den aksiomatisk-deduktive metode, men det er vigtigt at understrege, at undersøgelsen helt overordnet sker på baggrund af modellernes ufuldkomne beskrivelse af virkeligeheden. Valg af modeller og modelparametre er udslagsgivende for resultaterne og kan diskuteres og kritiseres. Det, som beskrives, er afkast, som genereres på baggrund af priser, som genereres på baggrund af menneskers udbud og efterspørgsel. Undersøgelsen sker i alle tre hovedafsnit i opgaven ved at lave en matematisk model og undersøge konsekvenserne heraf. Metoden er derfor modellering.

Ved at undersøge spørgsmålet om den optimale aktieandel på tre forskellige måder er det hensigten at øge validiteten af undersøgelsen. De tre tilgange er forskellige men har dog visse overlap.

Alternativt kunne man have valgt en empirisk, eksperimentel tilgang, hvor man med udgangspunkt i data for forskellige investorers faktiske, realiserede porteføljevalg undersøgte allokering mellem aktivklasserne aktier og obligationer og undersøgte tidshorisontens betydning. Det vil være meget vanskeligt at udføre noget der bare delvis har karakter af et kontrolleret eksperiment. Investorer er vidt forskellige fra hinanden, de eksogene variable ændrer sig over tid, det er umuligt at gentage et eksperiment med samme setting, investorer ændrer adfærd osv. Dertil kommer, at det er svært at gennemføre eksperimenter, hvor investorer stilles overfor lige så store risici som dem, de står overfor med deres livslange opsparing. Selv hvis der kan opsamles relevant og valid data, ændrer det dog ikke ved, at en afdækning af hvordan investorer handler, ikke nødvendigvis kan bruges til at konkludere noget om, hvordan de bør handle. Jeg henviser til diskussionen i Campbell (2001) herom [3].

Jeg har i mit valg af kilder primært prioriteret at anvende publicerede peer review-artikler fra anerkendte videnskabelige journaler hvor teorier, fænomener og løsningsteknikker er behandlet indgående for første gang. For at gøre brug af en opdateret og hensigtsmæssig udgave af de forskellige resultater og for at forsøge at tilnærme en metodetriangulering, har jeg i alle tilfælde også valgt at konsultere nyere videnskabelig litteratur af andre forfattere. Dette med en underlæggende tanke om at øge validiteten af min undersøgelse. I de enkelte tilfælde, hvor jeg referer til lærebøger, har jeg valgt nyere lærebøger af anerkendte forlag og forfattere, hvoraf flere anvendes på HD F og cand.merc-uddannelserne på Copenhagen Business School og matematikstudiet på Københavns Universitet. Der henvises til litteraturlisten[3].

Et væsentligt kritikpunkt er, at min undersøgelse grundet den vidtrækkende afgrænsning mister noget såkaldt økologisk validitet, fordi den stærkt afgrænsede situation kun i begrænset omfang ligner den virkelighed, som investorer står overfor. Det vil være oplagt at bruge denne opgave som afsæt til yderligere analyse, som tager højde for et eller flere af aspekterne varierende investeringsmuligheder, humankapital, boligøkonomiske aspekter, renterisiko og inflationsrisiko.

[3]Litteraturlisten er autogenereret med bibliography-kommandoen i LaTeX med stilen plain-dk hvilket bl.a. betyder, at rækkefølgen er alfabetisk efter efternavn, at journalnavne står i kursiv og at titler på bøger står i kursiv.

Kapitel 2

Én-periode-model for investering

I denne opgave undersøger jeg, hvad den optimale aktieandel er for en grådig, risikoavers investor. Problemet undersøges med tre forskellige modeller: Med middelværdi-varians-analysen som er en én-periode-model, en model baseret på outperformancesandsynligheder og senere i kapitel 4 med en intertemporal model. Fælles for modellerne er, at de bygger på på den ene side modellering af investorpræferencer og på den anden side modellering af stokastiske afkast. Beskrivelsen af investorpræferencer i et multiperiode-setup er blot en udvidelse af modellen for præferencer i et én-periode-setup. Behandlingen af præferencesiden vil derfor i stort omfang ske her i kapitlet. For at imødekomme behovet i kapitel 4 vil behandlingen være mere omfattende, end hvad der var nødvendigt alene til middelværdi-varians-analysen.

2.1 Modellering af investorpreferencer

To nøglebegreber indenfor investoradfærd er grådighed og risikoaversion.

Grådighed dækker her over, at investor foretrækker en større formue fremfor en mindre, alt andet lige[1]. At mennesket - særligt i situationer hvor der er meget på spil, evt. sit liv - har en aversion imod risiko er velkendt og intuitivt meningsfuldt. Formalisering af begrebet risikoaversion og erkendelsen af dette som værende nøglen til at løse finansielle problemstillinger kan i stort omfang tilskrives matematikeren Daniel Bernoullis arbejde i forbindelse med hans løsning af St. Petersborg-paradokset. Risikoaversion har siden Bernoullis arbejde været et nøglebegreb indenfor finansiering - i teori og i praksis. Eksempelvis er det i CAPM antagelsen, at risikoaverse investorer kompenseres for den systematiske risko, de tager ved en investering. M.a.o. kompenseres de for den del af risikoen som ikke kan bortdiversificeres. CAPM er et kardinalpunkt i den moderne finansieringsteori og corporate finance og anvendes i ren og modificeret form overalt i verden. Jeg vil i det følgende undersøge, hvordan investorpræferencer kan modelleres og herunder, hvilken rolle risikoaversion spiller. Dette sker som led i bestemmelsen af den optimale aktieandel og dennes afhængighed af investeringshorisonten.

Vi betragter en investor som ønsker at investere en del af sin formue. Investeringsmulighederne antages konstante og består i et aktieindex og et obligationsindex modelleret som en risikofri investering. Valget af én allokering af en investeringsformue mellem aktier og risikofri investering fremfor en anden allokering må for en rationel investor hænge sammen med en forskel i præferencer for de to allokeringer. Jeg vil her forholde mig til to gængse måder at modellere investorpræferencer på for risikoaverse investorer:

En middelværdi-varians investor hvis præference for en investeringsportefølje alene afhænger af porteføljens forventede afkast $E[r_P]$ og risiko $\sigma_P := \sqrt{\mathrm{Var}(r_P)}$ set over en given tidsperiode[2].

[1] Senere i opgaven beskrives også grådighed i termer af forbrug. Her dækker grådigheden tilsvarende over, at et større forbrug foretrækkes frem for et mindre, alt andet lige.

[2] I litteraturen er det lidt forskelligt, om investors valg antages kun at afhænge af det forventede afkast og risiko på dette, eller om investors valg antages kun at afhænge af den forventede slutformue og risikoen herpå. De to sæt antagelser kommer ud på et, da de følger af hinanden, jf. ligningerne (2.4) og (2.5) i afsnit (2.1.2).

En forventet nytte-maksimerende investor hvis præference for investeringsportefølje afhænger af porteføjens afkastfordeling og a priori af første moment samt alle de centrale momenter (orden $n = 2, 3, 4, ...$) for investeringsafkastet.

Sidstnævnte modellering af investorpræferencer tager afsæt i Von Neumann-Morgensterns forventet nytteteori og er derfor mere generel og teoretisk velfunderet end middelværdi-varians-analysen [12]. Middelværdi-varians-analysen er den mest anvendte model i praksis både for investorer i risikofyldte aktiver og for virksomheder, som skal træffe beslutninger, som indebærer afvejning af risiko og forventet afkast. Middelværdi-varians-analysens store udberedelse skyldes især, at den er enkel at forstå og anvende, intuitiv og ikke mindst, at den er en væsentlig forudsætning for den meget tiltalende og enkle model til bestemmelse af afkastkravet for risikofyldte aktiver, CAPM [6, 30]. Under visse omstændigheder vil de to modeller for investorpræferencer være sammenfaldende - dette er eksempelvis tilfældet, hvis nyttefunktionen er kvadratisk i formuen (og dermed også kvadratisk i afkastet), se bl.a. Markowitz (1959) [17, p. 208] og Munk (2016) [20, p. 209]. Ved sammenligning af de to tilgange skal man holde sig for øje, at der er to aspekter i spil:

- Præferencesiden: Spørgsmålet om hvorvidt et givent sæt indifferenskurver kan udledes fra forventet-nytte-teori og omvendt. Dvs. om modellerne er overlappende og overensstemmende, eller om de står i modsætning til hinanden.

- Karakteren af de tilgængelige investeringer: For investeringer hvis afkastfordeling er entydigt karakteriseret alene af middelværdi og varians, kan man anvende middelværdi-varians-analyse, uanset hvilken udformning investors nyttefunktion har [7]. Normalfordeling af afkast er ønskværdigt og antages ofte, da en normalfordeling netop er entydigt bestemt af alene dens middelværdi og varians.

2.1.1 Investorpræferencer i middeværdi-varians-analyse

I middelværdi-varians-analysen antages investor at være rationel, grådig og risikoavers og at basere sit porteføljevalg alene på baggrund af forventet afkast og risiko (og ikke højere ordens centale momenter som eks. kurtosis og skævhed). Middelværdi-varians investoren ønsker det højst mulige forventede afkast for et givent niveau af risiko (variansen på det forventede afkast), og den lavest mulige risiko for et givent niveau af forventet afkast [3]. Mere generelt er der et trade-off mellem forventet afkast og risiko forstået på den måde, at investor for at påtage sig større risiko kræver en kompensation i form af et højere forventet afkast. I og med at investors præference for en portefølje (per antagelse) er givet alene ved porteføljens forventede afkast og risiko, kan præferencen modelleres ved hjælp af et sæt indifferenskurver i et $(\sigma, E[r])$-diagram. Se figur (2.1). En indifferenskurve udtrykker en samling af forskellige porteføljer, som investor er indifferent mellem at holde. Indifferenskurverne er ikke-overlappende og numereret, så et højere nummer svarer til, at investor har højere præference for porteføljerne på denne indifferenskurve[4].

Kort fortalt er middelværdi-varians-løsningen på én-periode problemet blot, at investor skal vælge den portefølje, som i $(\sigma, E[r])$-planen ligger på den højeste indifferenskurve.

Et hyppigt optrædende eksempel på et indifferenskurvesæt er det, som følger af antagelsen om at investor har en lineær afvejning af forventet afkast og risiko givet ved beslutningskriteriet

$$\max \ \left(E[r] - \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2\right). \tag{2.1}$$

Se figur 2.1. γ er her en konstant, som måler investors risikoaversion, idet den bestemmer hvor højt risiko vægtes relativt til forventet afkast i præferencebetragtningen - populært sagt hvor hårdt investor straffer risiko på en investering

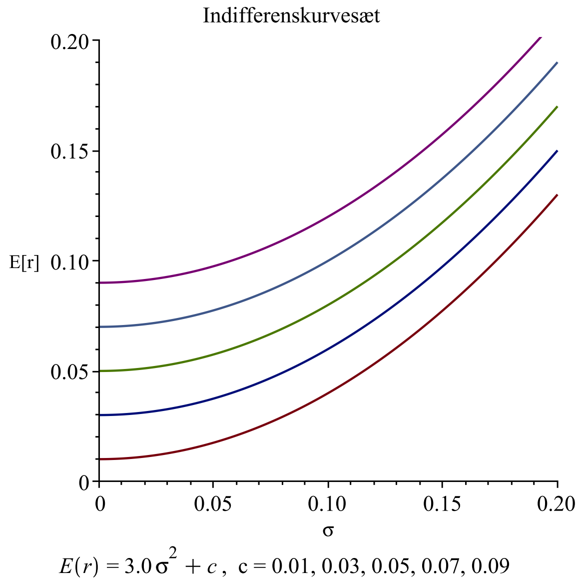
[3] Dette er formaliseret i Middelværdi-varians-kriteriet (M-V), se Bodie, Kane, Marcus (2011) p. 192.[2]

[4] Se appendix (A.1) for en formalisering af begrebet.

[3, 20]. For en risikoavers investor gælder derfor, at $\gamma > 0$. Denne model for investors præferencer svarer til en præferencefunktion $f(\sigma, E[r]) = E[r] - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2$, $\sigma \geq 0$. Da f kun afhænger af middelværdi og varians (eller standardafvigelse), vil dens niveaumængder være niveaukurver, som er indifferenskurver i $(\sigma, E[r])$-planen. En indifferenskurve svarende til præferenceniveauet $c \in Vm(f)$ er derfor givet ved $f(\sigma, E[r]) = c$, ensbetydende med

$$E[r] = \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2 + c. \tag{2.2}$$

En investor med beslutningskriteriet (2.1) vil have indifferenskurver beskrevet ved (2.2). Hver af disse indifferenskurver er altså en parabel med toppunkt (minimum) i $(0, c)$, og dermed konveks og med positiv hældning i hele det relevante domæne ($\sigma \geq 0$).



Figur 2.1: Udvalgte indifferenskurver i indifferenskurvesættet for en investor med beslutningskriteriet max $\left(E[r] - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\right)$ og risikoaversionsparameter $\gamma = 6$
Kilde: Egen tilvirkning.

Forskellige investorer har forskellig afvejning af varians og forventet afkast og dermed også forskellige indifferenskurver. Denne modellering af investorpræferencer peger ikke på en entydig afvejning af risiko og forventet afkast for en rationel investor - tværtimod er modellen rig nok til at indeholde en mangfoldighed af investorer med forskellige indifferenskurver.

2.1.2 Investorpræferencer i forventet nytte-teori

I forventet nytte-teori modelleres investorpræferencer ved en nyttefunktion, som udtrykker, hvilken nytteværdi investor har af at hans formue (eller forbrug) har en given størrelse. Hvis man betragtede størrelsen af formuen som mål i sig selv for værdien af denne (og ikke anvendte det mere abstrakte nyttebegreb), ville man ikke kunne modellere det empiriske faktum, at værdien af en krone i en hvis forstand synes at være større for en fattig investor end for en rig. Med nyttebegrebet kan denne situation modelleres som aftagende marginalnytte. Erkendelsen, af at nyttebegrebet er nøglen til at beskrive dette fundamentale karaktertræk for investorer, går helt tilbage til matematikeren Daniel Bernoullis løsning af St. Petersborg-paradokset.

Givet at investor opfylder nogle få aksiomer, som populært sagt blot udtrykker, at investor er rationel, da vil investors præference for investeringer kunne udtrykkes ved en nyttefunktion, som kun afhænger af størrelsen af den formue, de genererer, $u(W)$. Når afkastet og dermed slutformuen W er stokastisk, er $u(W)$ også en stokastisk variabel, som til hvert muligt niveau af slutformuen W knytter en nytteværdi. Investors rangordning (formelt udtrykt gennem en præferencerelation) af to forskellige stokastiske investeringer kan oversættes til et spørgsmål om ordning i de reelle tal af investeringernes forventede nytteværdier, $E\left[u(W)\right]$. Den optimale investeringsbeslutning er den, som maksimerer den forventede nytte,

$$\max E\left[u(W)\right]. \tag{2.3}$$

Se Munk (2013) [21, Kap. 5] for en udførlig, aksiomatisk behandling af forventet nytteteori og for præcis gennemgang af forudsætningerne for gyldigheden af en forventet-nytte-repræsentation af investorpræferencer.

2.1.3 Validiteten af middelværdi-varians-analysen

Validiteten af middelværdi-varians-analysen står og falder dermed specielt med antagelsen om, at investors porteføljevalg kun afhænger af middelværdi og varians på afkastet. Kan denne antagelse godtgøres? Jeg vil her vise, at der er to måder, hvorpå MV-antagelsen kan holde:

i Investors nyttefunktion har en form, som gør, at den forventede nytte kun afhænger af middelværdi og varians på slutformuen.

ii Afkastene er flerdimensionalt normalfordelte

Hver af disse ting er i sig selv nok til at sikre MV-antagelsen og dermed validiteten af middelværdi-varians-analysen i det konkrete tilfælde. *i* lyder tillokkende, men som forklaret nedenfor er det i praksis normalfordelingsantagelsen, som man må hænge sin hat på i MV-analysen.

Udgangspunktet er, at forventet nytteteori er en valid ramme til beskrivelse af investorpræferencer. For at undersøge hvorledes forventet nytteteori relaterer sig til middelværdi-varians-analysen, kan det først og fremmest bemærkes, at forventningsværdi og risiko på slutformuen i en én-periode-setting relaterer sig til forventningsværdi og risiko på afkast på simpel vis. Lader vi W_0 betegne den initiale formue, og r det stokastiske afkast på en investering, fås $W = (1+r))W_0$ og dermed

$$E\left[W\right] = E\left[(1+r))W_0\right] = W_0\left(1 + E\left[r\right]\right) \tag{2.4}$$

$$E\left[\left(W - E\left[W\right]\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left[W\right] = \mathrm{Var}\left[(1+r))W_0\right] = W_0^2\mathrm{Var}\left[r\right] \tag{2.5}$$

Den forventede nytteværdi $E\left[u(W)\right]$ kan relateres til forventningsværdien $E\left[W\right]$ og variansen $E\left[\left(W - E\left[W\right]\right)^2\right]$ ved at lave en Taylorudvikling af nyttefunktionen $u(W)$ omkring den forventede slutformue $E[W]$ og derpå tage forventningen på begge sider af udtrykket[5]. Taylorudviklingen er:

$$u(W) = u\left(E[W]\right) + u'\left(E[W]\right)\left(W - E[W]\right) + \frac{1}{2}u''\left(E[W]\right)\left(W - E[W]\right)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}u^{(n)}\left(E[W]\right)\left(W - E[W]\right)^n.$$

Dernæst tages forventningen på begge sider. Ved anvendelse af den grundlæggende egenskab $E[k \cdot X + Y] = k \cdot E[X] + E[Y]$, at $E\left[(W - E[W])\right] = E[W] - E[W] = 0$ samt at $E\left[(W - E\left[W\right])^2\right] =: \mathrm{Var}\left[W\right]$ fås

$$E\left[u(W)\right] = u\left(E[W]\right) + \frac{1}{2}u''\left(E[W]\right)\mathrm{Var}\left[W\right] + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}u^{(n)}\left(E[W]\right)E\left[(W - E[W])^n\right] \tag{2.6}$$

Den forventede nytte afhænger således af første moment $E[W]$ og andenordens-centralmomentet $\mathrm{Var}\left[W\right]$ men også af alle de centrale momenter af højere orden, $E\left[(W - E[W])^n\right]$, $n \in \{3, 4, 5, ...\}$.

Den typiske investor er grådig og risikoavers. Grådigheden udtrykkes ved en voksende nyttefunktion, dvs. $u'(W) > 0$. Risikoaversionen kan gennem et klassisk lotteriargument[6] vises at hænge sammen med aftagende marginalnytte, dvs. at $u'(W)$ er aftagende og dermed $u''(W) < 0$. Sammenholdes dette med 2.3 og 2.6 ses, at den forventede nytte i modellen er voksende i $E[W]$ og aftagende i $\mathrm{Var}[W]$.

For at relatere $E[u(W)]$ direkte til middelværdi-varians-analysens $E[r]$ og $\mathrm{Var}(r)$, udtrykkes sammenhængen i r. Ved at anvende 2.4 og 2.5 fås

$$E\left[u(W)\right] = u\left(W_0\left(1 + E\left[r\right]\right)\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2u}{dW^2}\right|_{W=W_0(1+E[r])} W_0^2\mathrm{Var}\left[r\right] + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nu}{dW^n}\right|_{W=W_0(1+E[r])} W_0^n E\left[(r - E[r])^n\right] \tag{2.7}$$

Ovenstående konklusion om $E[u(W)]$ for en grådig, risikoavers én-periode-investor gælder altså også i variablen r: Da $W_0\left(1 + E\left[r\right]\right)$ er voksende i $E[r]$ fås, at den

[5] Jeg følger her Munk (2013) [21, Kap. 5]. Det antages, at nyttefuntionen opfører sig tilpas 'pænt' til at den er uendelig ofte differentiabel og sumfunktion for sin Taylorrække. Se Solovej (2001) [32, Kap. 5] for en matematikfaglig uddybning.

[6] Se Munk (2016) [20, Kap. 7] og von Neumann og Morgenstern (1944) [23].

forventede nytte $E[u(W(r))]$ er voksende i $E[r]$ og aftagende i Var$[r]$. Dette stemmer overens med middelværdi-varians-analysen og med almindelig 'bondelogik'. Den forventede nytte afhænger generelt set af første moment og andenordenscentralmomentet, hhv. $E[r]$ og Var $[r]$, men også af alle de centrale momenter af højere orden, $E\left[(r-E[r])^n\right]$, $n \in \{3,4,5,...\}$. Porteføljevalg og allokering til aktivklasser kan således generelt set ikke ske alene på basis af forventet afkast og risiko.

Der skal altså gælde noget særligt, specifikt for en konkret nyttefunktion, som gør, at den forventede nytte kun afhænger af middelværdi og varians. Det er tilsyneladende særdeles sparsomt med eksistensen af forskellige typer af nyttefunktioner, hvor maksimering af den forventede nytte i en én-periode-model reducerer til at være at et middelværdi-varians-problem uanset afkastfordelingen. Eller også er de bare vanskelige at opdage. Et eksempel er en kvadratisk nyttefunktion,

$$u(W) = a + bW - cW^2,$$

hvor a, b og c er konstanter [3, Kap. 2.1.2]. Den har dog meget urealistiske egenskaber - bl.a. er den aftagende til højre for sit toppunkt - hvorfor jeg nøjes med blot at nævne den som et eksempel. Generelt set synes det umuligt at godtgøre MV-antagelsen med en passende nyttefunktion. Heldigvis er der en anden 'redningsplanke': normalfordeling af afkast.

Hvis afkastene er flerdimensionalt normalfordelte vil også porteføljeafkastene være det, da det er en vægtet sum af afkast for enkeltaktiverne. Da en normalfordelings højere momenter kan udtrykkes som funktioner af kun middelværdi og varians, vil afkastfordelingen for porteføljeafkastene være karakteriseret alene ved middelværdi og varians. Den forventede nytte (2.7) vil derfor kun afhænge af middelværdi og varians, og MV-forudsætningen er dermed opfyldt.

I middelværdi-varians-analysen er det derfor normalt at antage normalfordelte afkast. Man skal stadig antage noget om investors præferencer for at bestemme den optimale aktieandel (eller portefølje generelt). I afsnittet (2.1.1) arbejde jeg ud fra middelværdi-varians-kriteriet (2.1). I afsnit (2.1.5) vil jeg vise, at der findes en nyttefunktion, som under antagelse af normalfordeling af afkast er i overensstemmelse med dette kriterium.

2.1.4 CARA-nytte

Jeg vil her vise, at under antagelse af normalfordelte afkast findes der en nyttefunktion $u(W)$, hvor maksimering af forventet nytte er ensbetydende med middelværdi-varians-kriteriet (2.1). Dernæst vil jeg diskutere denne nyttefunktion. Den negative eksponentielle nyttefunktion defineres som

$$u(W) = -e^{-aW} \tag{2.8}$$

Den første- og andenafledede af u er hhv.

$$\begin{aligned} u'(W) &= ae^{-aW}, \\ u''(W) &= -a^2 e^{-aW}. \end{aligned}$$

At investor er grådig og risikoavers modelleres med hhv. en voksende og konkav nyttefunktion, hvilket er ensbetydende med $a > 0$.

Den absolutte risikoaversion er konstant,

$$ARA(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = a, \tag{2.9}$$

hvorfor den negative eksponentielle nyttefunktion også betegnes $CARA$ nyttefunktion (constant absolute risk aversion). Den relative risikoaversion er proportional med formuestørrelsen,

$$RRA(W) = -W\frac{u''(W)}{u'(W)} = aW. \tag{2.10}$$

$$E\left[u(W)\right] = -E\left[e^{-aW}\right] \tag{2.11}$$

Dette udtryk kan nemt evalueres, hvis W er normalfordelt. Antag normalfordelte afkast. Dermed er også porteføljeafkastene normalfordelte hvoraf følger, at slutformuen (efter én-periode-investeringen) er normalfordelt. Lad initialformuen være W_0 og porteføljeafkastet normalfordelt $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Da er slutformuen normalfordelt med $W \sim \mathcal{N}(W_0\,(1+\mu)\,, W_0^2\sigma)$, jf. (2.4) og (2.5). Jf. Munk (2013) [21, Appendix B] er forventningsværdien af e^{-aW} lig

$$\begin{aligned} E\left[u(W)\right] &= e^{-aW_0(1+\mu)+\frac{1}{2}a^2W_0^2\sigma^2} \\ &= e^{\left(1+\mu-\frac{1}{2}aW_0\sigma^2\right)(-aW_0)}. \end{aligned}$$

Maksimering af den forventede nytte kan omformuleres til et spørgsmål om maksimering af en linarkombination af forventet afkast og risiko:

$$\max E\left[u(W)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \max \mu - \frac{1}{2}aW_0\sigma^2 \tag{2.12}$$

og da $aW_0 = RRA(W_0)$ ensbetydende med

$$\max \mu - \frac{1}{2}RRA(W_0)\sigma^2. \tag{2.13}$$

Dette er konstistent med middelværdi-varians-kriteriet (2.1). Validiteten af middelværdi-varians-analysen hænger i dette tilfælde på antagelsen om normalfordelte afkast. Det eneste, vi har vist, er at givet normalfordelte afkast så kan den lineære afbalancering af forventet afkast og varians forklares med en CRRA-nyttefunktion. Vi har ikke undersøgt implikationerne af CRRA-nyttefunktionen for andre afkastfordelinger. Rent teknisk er normalfordelingsantagelsen vigtig, idet den gør det let at evaluere $E\left[-e^{-aW}\right]$.

Vi kan dog også bruge undersøgelsen her til at vurdere, hvorvidt denne modellering af investorpræferencer i det helt taget er rimelig. Betydningen af en konstant absolut risikoaversion er, at investor uanset sin formuestørrelse er villig til at betale det samme beløb, $f(a)$, for at undgå et fair lotteri i absolute termer[7] [20]. Dette virker ikke synderligt intuitivt eller realistisk. Jo fattigere vi er, desto mere katastrofalt er det for os at tabe x kroner, og vi er derfor villige til at betale mere 'i forsikring' for at undgå sådan et lotteri. Selvom lotteriet er fair, laver det ikke om på, at vores marginalnytte ved tab er større end

[7] Dvs. med mulighed for at tabe et fast beløb, $\pm x$ kroner.

ved gevinster (pga. aftagende marginalnytte). Voksende relativ risikoaversion betyder, at investor, i takt med, at hans formue vokser, er villig til at betale en stadig større brøkdel af sin formue for at undgå et fair lotteri, hvor han risikerer at tabe en given, konstant andel af sin formue.

I kapitel (2.2.2) vil jeg analysere på den optimale aktieandel (og også optimale position i aktier i kroner-ører) for en investor med CARA-nytte.

2.1.5 CRRA-nytte

Intuitivt virker det mere realistisk, at investor, i takt med at han bliver mere velhavende, bekymrer sig mindre om 'håndører' og måske har samme bekymring for at miste en given brøkdel af sin formue (som nu er et større beløb i absolutte termer). Sådanne investorpræferencer svarer til en aftagende absolut risikoaversion og en konstant relativ risikoaversion. Antag en konstant relativ risikoaversion $\eta > 0$, dvs.

$$RRA(W) = -W\frac{u''(W)}{u'(W)} = \eta$$

eller

$$u''(W) = -\eta \cdot W^{-1}u'(W). \tag{2.14}$$

En løsning til denne ligning er $CRRA$-nyttefunktionen

$$u(W) = \frac{1}{1-\eta}W^{1-\eta} \tag{2.15}$$

Vi må kræve, at $\eta \neq 1$. Da $u'(W) = W^{-\eta} > 0$ og da vi kræver, at $W \geq 0$ ses, at $\eta > 0$ er i overensstemmelse med kravet om en konkav nyttefunktion $u''(W) < 0$. Grundet egenskaberne diskuteret ovenfor foretrækkes denne nyttefunktion ud fra en betragtning om realisme. Der er bare det aber dabei, at den ikke egner sig til middelværdi-varians-analyse. Den absolutte risikoaversion er gående mod uendelig for formuen gående mod nul,

$$ARA(W) = RRA(W)/W = \eta/W \to \infty \text{ for } W \to 0,$$

Dette hænger sammen med, at marginalnytten er gående mod uendelig,

$$u'(W) = W^{-\eta} \to \infty \text{ for } W \to 0.$$

Fortolkningen er, at vores marginale tab ved at tabe de sidste enheder af formuen bliver uendeligt stort, og derfor er vi uendelig risikoaverse overfor situationer, hvor vi risikerer at tabe hele formuen. Hvis vi antager normalfordeling af afkastene, er der en endelig sandsynlighed for afkast på under 100% og dermed for negativ formue. Begrænset hæftelse findes ikke i en verden med normalfordelte afkast. Sammen med ovenstående betyder dette, at investor skal placere alt i den risikofri investering og dermed have en aktieandel på 0. Det kræver selvfølgelig formelt set et bevis. I en MV-kontekst er CRRA-nyttefunktionen derfor uegnet. CRRA-nyttefunktionen er imidlertid velegnet til en intertemporal model med normalfordelte logafkast. Se kapitel (4).

2.2 Middelværdi-varians-analyse og den optimale portefølje

Formålet med dette kapitel er at bestemme den optimale aktieandel for en investor, bestemt udfra middelværdi-varians-analyse. Problemet er enkelt: Investor kan over en enkelt periode investere i et stokastisk aktieindeks og i en risikofri obligation. Investeringsbeslutningen kan ikke omgøres i løbet af perioden. Investor ønsker at bestemme den optimale andel, som han skal placere i aktieindekset.

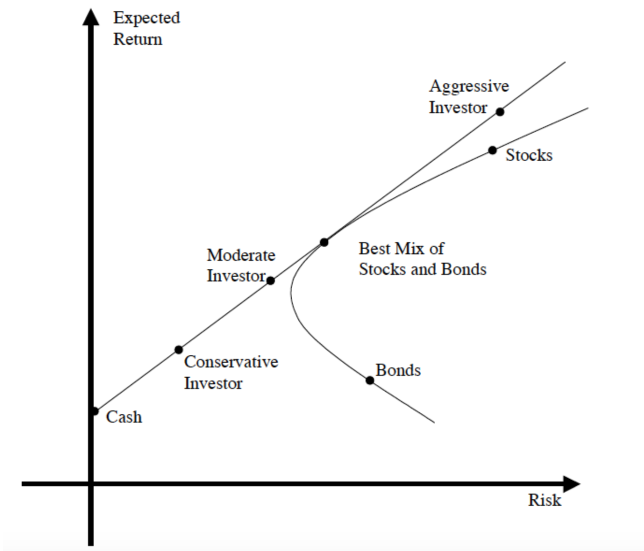
Antagelsen om kun ét riskofyldt aktiv kan umiddelbart virke meget restriktiv. Men et hovedresultat ved middelværdi-varians-analysen, Tobins separationssætning, siger, at selv med mange risikofyldte aktiver reduceres problemet for alle investorer til et spørgsmål om allokering mellem én risikofyldt portefølje og det risikofrie aktiv. Jeg vil derfor i det følgende ikke begrænse analysen til en verden med kun ét risikofyldt aktiv.

Porteføljeproblemet er tofoldigt og omfatter

- Karakterisering af den efficiente rand., mængden af mulige, efficiente porteføljer, der kan investeres i. Se figur 2.2 og figur 2.3.

- Karakterisering af investorpræferencer, udtrykt ved et indifferenskurvesæt. Se figur 2.1.

og sidst løsning af problemet ved at sammenholde disse. Hovedresultatet af denne undersøgelse, som jeg vil lave i det følgende, er opsummeret i ligningen (2.20).



Figur 2.2: Stiliseret figur som viser mulighedsområdet for investering uden risikofrit aktiv udspændt af allokering til to brede aktivklasser, aktier og obligationer. Viser endvidere den efficiente rand med et risikofrit aktiv, kapitalmarkedslinjen (CML), og angiver hvorledes forskellige investorpræferencer fører til forskellig placering på CML. Kilde: Campbell (2001) [3, Kap. 1].

I en verden med ét risikofrit aktiv[8] og et antal risikofyldte aktiver siger Tobins to-fonds-separationssætning, at enhver risikoavers én-periode middelværdi-varians-investor vil vælge en kombinationsportefølje bestående af en hvis andel placeret i det risikofrie aktiv og resten i den såkaldte tangentportefølje af

[8] Det er ikke nødvendigt at antage, at der kun er ét risikofrit aktiv. Er der flere risikofri aktiver, vil aktivet med det højeste afkast dominere de øvrige. Ingen rationel investor vil investere i de inferiøre risikofrie aktiver, og det er således heller ikke muligt at gå kort i disse - dvs. låne risikofrit til en rente som er lavere end den højeste risikofri rente (da der ingen modpart er til en sådan position). Dermed vil der effektivt set kun eksistere ét risikofrit aktiv

risikofyldte aktiver [36] [5, p. 84 og p. 293] [2, p. 225]. Når først tangentporteføljen er bestemt, er porteføljeproblemet derfor reduceret til et simpelt problem om allokering mellem kun to aktiver. Tangentporteføljen kan bestemmes ved middelværdi-varians-analyse givet den risikofri rente, varians-kovariansmatricen for de risikofyldte aktiver samt deres forventede afkast[9]. Jeg antager, at vi befinder os i en normal økonomi, hvor tangentporteføljen ligger på den øvre gren af mulighedsområdet[10].

Udfordringen i at lave gode estimater af de forventede afkast og varians-kovariansmatricen ud fra historiske afkastdata ofte suppleret med struktur i form af indexmodeller, skal jeg her ikke forklejne. Jeg vil afgrænse mig fra at beskrive denne del, men henvise til Bodie (2014) og Elton (2014) for bestemmelse af kovarianser i indexmodeller [2, 5] og ikke mindst diskussionen i Munk (2014) om den store følsomhed, som investors valg af portefølje har overfor usikkerhed på disse estimater [20].

Tangentporteføljen er karakteriseret ved at være den portefølje, som har den største Sharpe Ratio

$$\lambda := \frac{E[r] - r_f}{\sigma}$$

blandt mulige porteføljer af udelukkende risikofyldte aktiver. At en portefølje er mulig kan beskrives kvantitativt ved, at porteføljevægtene summer til en, $\sum_i \omega_i = 1$. Bestemmelse af tangentporteføljen er således et spørgsmål om bestemmelse af ekstremum under bibetingelser. Med kun den ene bibetingelse, at porteføljevægtene summer til en, er problemet muligt at løse vha. Lagrange-optimering eller alternativt med Blacks metode. En beskrivelse af Blacks metode findes i Elton (2014) [5, Kap. 6] og i Black (1972) [1]. En udførlig udledning af en generel løsning af problemet vha. Lagrange-optimering findes i Munk (2016) [20, Kap. 7]. I praksis tilføjes ofte yderligere bibetingelser såsom restriktioner

[9] Dvs. at andelen, som hver af de risikofyldte aktiver indgår med i tangentporteføljen, bestemmes, hvorefter tangentporteføljens risiko og forventede afkast ($\sigma_{\tan}, E[r_{\tan}]$) kan bestemmes.

[10] For en diskussion af den mere teoretiske, unormale situation, hvor tangentporteføljen ligger på den *nedre* gren, henviser jeg til Munk (2016) [20, Kap. 7]

ang. kortsalg, begrænsninger i forhold til, hvor stor vægt enkelte aktiver må have i porteføljen, Safety-first kriterier og VaR-kriterier. Sådanne bibetingelser komplicerer optimeringsproblemet betydeligt, og man må her ofte forlade sig på numerisk løsning af konkrete problemer fremfor analytisk udledning af generelle løsningsformler [5, Kap. 6].

Tobins separationssætning betyder, at enhver effecient portefølje $(\sigma_C, E[r_C])$ er en kombinationsportefølje beliggende på kapitalmarkedslinjen (CML), udspændt af det risikofrie aktiv $(0, r_f)$ og tangentporteføljen $(\sigma_{\tan}, E[r_{\tan}])$,

$$\text{CML:} \qquad E[r_C] = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\sigma_{\tan}} \cdot \sigma_C + r_f.$$

Givet investors sæt af indifferenskurver og givet de nødvendige input til bestemmelse af CML, er mean-varians-løsningen på én-periode-investeringsproblemet simpel: Investor skal vælge kombinationsporteføljen, som ligger i punktet i $(\sigma, E[r])$-planen, hvor CML tangerer en indifferenskurve[11] [2, Kap. 7].

Lad os vende tilbage til situationen med en investor som følger beslutningskriteriet

$$\max \left(E[r] - \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2\right).$$

Der er tale om maksimering af $f(\sigma, E[r]) = E[r] - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2$ under bibetingelsen, at porteføljen ligger på CML. Ved at indsætte bibetingelsen i f kan maksimeringsproblemet reduceres til et maksimeringsproblem for en funktion af kun én variabel, uden bibetingelser:

$$f(\sigma, E[r]) = E[r] - \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2 = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\sigma_{\tan}} \cdot \sigma_C + r_f - \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2 =: \tilde{f}(\sigma).$$

Førsteordensbetingelsen for $\max f(\sigma)$ er, at

$$0 = \frac{d}{d\sigma}\tilde{f}(\sigma) = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\sigma_{\tan}} - \gamma\sigma,$$

dvs. den præferencemaksimerende portefølje har risikoen

$$\sigma^* = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\gamma\sigma_{\tan}}.$$

[11] Se appendix for et bevis for denne påstand.

For at bestemme vægtene, som tangentporteføljen og det risikofrie aktiv indgår med i denne portefølje, bemærker vi, at kombinationsporteføljens afkast er det vægtede gennemsnit af afkastene for tangentporteføljen og det risikofrie aktiv, og at variansen er summen af varianserne af de vægtede afkast

$$r = \omega r_{\tan} + (1 - \omega)\, r_f$$

$$\sigma^2 = Var(r) = Var(\omega r_{\tan}) + (1 - \omega) \cdot Var(r_f) = \omega^2 \sigma^2_{\tan}.$$

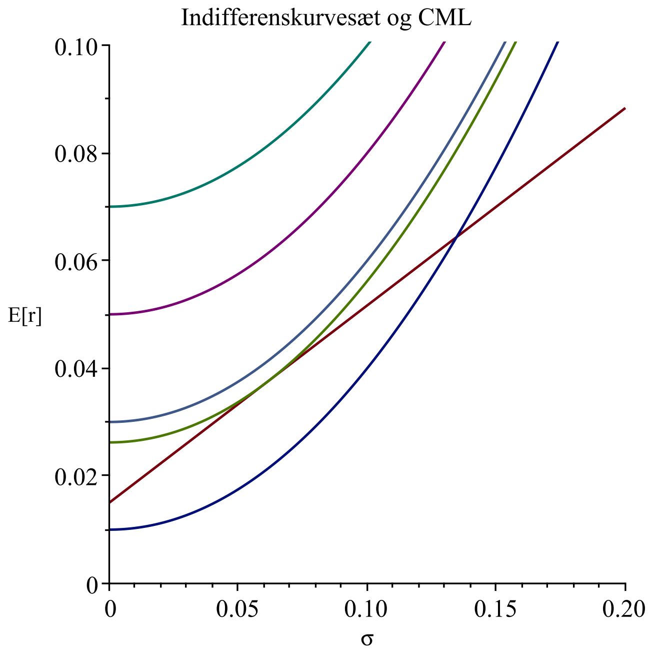
Af sidste ligning fås, at $\sigma = |\omega|\sigma_{\tan}$. For at undgå at skulle argumentere for fortegnet for ω, er det hensigtsmæssigt at skifte til denne variabel, inden der differentieres[12] - for vi kan altid uden videre gå den anden vej fra ω til σ, da $\sigma > 0$. Førsteordensbetingelsen for maksimering af

$$h(\omega) = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\sigma_{\tan}} \cdot \sigma_C + r_f - \tfrac{1}{2}\gamma\omega^2\sigma^2_{\tan}$$

giver hovedresultatet for vores middelværdi-varians-analyse af den optimale aktieandel:

$$\omega^* = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\gamma\sigma^2_{\tan}} = \frac{\lambda_P}{\gamma\sigma_{\tan}}. \tag{2.16}$$

Dette er den optimale aktieandel for investor[13]. Investor maksimerer således sin forventede nytte ved at vælge en kombinationsportefølje med andelen ω^* placeret i tangentporteføljen og $(1 - \omega^*)$ i det risikofrie aktiv. Jeg vil diskutere den optimale aktieandel nedenfor i kapitel 2.2.3. Først vil jeg give et konkret eksempel på bestemmelse af den optimale aktieandel indenfor middelværdi-varians-analysen.



Figur 2.3: Udvalgte indifferenskurver i indifferenskurvesættet for en investor med beslutningskriteriet max $\left(E[r] - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\right)$ og antaget risikoaversionsparameter $\gamma = 6$. Endvidere antages $r_f = 0.015$ og en tangentportefølje $(\sigma_{\tan}, E[r_{\tan}]) = (0.15, 0.07)$, som bestemmer den viste CML. Indifferenskurverne vist er $E(r) = \frac{1}{2}\sigma^2 + c$ for $c = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$, samt for indifferenskurven som tangerer CML, $c_{opt} = 0.026204$. Kilde: Egen tilvirkning.

2.2.1 Eksempel på bestemmelse af optimal aktieandel

Lad os betragte et konkret eksempel, illustreret på figur 2.3. Investor antages at handle ud fra beslutningskriteriet max $\left(E[r] - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\right)$, hvormed indifferenskurverne, som vist, bliver givet ved $E[r] = \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 + c$. Antag, at den risikofri rente er $r_f = 0.015$ og tangentporteføljen $(\sigma_{\tan}, E[r_{\tan}]) = (0.15, 0.07)$. Risikoen på den præferencemaksimerende portefølje er da $\sigma^* = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\gamma\sigma_{\tan}} = \frac{0.07-0.015}{6 \cdot 0.15} = 0.06111$. Dernæst kan det forventede afkast af den præferencemaksimerende

[12] Se eks. Campbell (2001) [3, Kap. 2.1] eller Munk (2014) [20, p. 198] hvor f fra begyndelsen udtrykkes i ω.

[13] At ekstremumspunktet er et (lokalt) maksimum for $\tilde{f}$ og ikke et minimum eller saddelpunkt følger af andenordensbetingelsen, at den andenafledte af $\tilde{f}$ (mht. σ) i σ^* er negativ og at $\tilde{f}$ er kontinuert i en omegn omk. σ^* [34]. Da $\tilde{f}''(\sigma) = -\gamma < 0\ \forall\sigma$ (og dermed også at $\tilde{f}''$ er kontinuert i en omegn af σ^*), gælder specielt andenordensbetingelsen for et lok. max., at $\tilde{f}''(\sigma^*) = -\gamma < 0$, men også at $\tilde{f}'(\sigma) > 0$ for $\sigma < \sigma^*$ og $\tilde{f}'(\sigma) < 0$ for $\sigma > \sigma^*$ hvoraf det af monotoniforholdene ses, at ekstremumspunktet er et *globalt maksimum*. Mere lavpraktisk kunne man nå samme konklusion ved at bemærke, at $\tilde{f}$ er et andengradspolynomium i σ med negativ σ^2-koefficient. Da $\tilde{f}$ antager globalt max for $\sigma = \sigma^*$, antager præferencefunktionen f også globalt max i $(\sigma^*, E[r]^*)$.

portefølje $E[r^*]$ bestemmes vha. CML:

$$E[r^*] = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\sigma_{\tan}} \cdot \sigma^* + r_f = \frac{0.07 - 0.015}{0.15 \cdot 0.06111} + 0.015 = 0.03741.$$

Vi har nu bestemt risiko og forventet afkast af den præferencemaksimerende portefølje. Hvis vi ønsker at bestemme, hvilken indifferenskurve denne portefølje ligger på, skal vi løse ligningen $E[r^*] = \frac{1}{2}\gamma\left(\sigma^*\right)^2 + c$ mht. c. Dvs. $c = \frac{2 \cdot 0.03741}{6 \cdot 0.06111^2} = 0.02620$, og $E[r] = \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 + 0.03741$ er således den højeste indifferenskurve, som investor kan nå op på givet antagelserne. På figur 2.3 er specielt plottet CML og denne indifferenskurve, og det ses, at de tangerer hinanden i den nyttemaksimerende portefølje med

$$(\sigma^*, E[r^*]) \approx (6.1\%, 3.7\%).$$

Andelen, som den pågældende investor skal placere i tangentporteføljen, er da

$$\omega^* = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\gamma\sigma_{\tan}^2} = \frac{0.07 - 0.015}{0.15 \cdot 0.06111^2} = 0.40741 \approx 40\%.$$

Dette er den optimale aktieandel for investor, som giver investor den bedste afvejning mellem forventet afkast og risiko. For yderligere tolkning af den optimale aktieandel henviser jeg til kapitel 2.2.3. Andre investorer med andre præferencer vil - forudsat at de er middelværdi-varians investorer - generelt set vælge andre porteføljer, dog beliggende på samme CML og derfor med samme Sharpe-Ratio.

2.2.2 Optimal portefølje for en investor med CARA-nytte

Analysen i kapitel (2.1.4) viser, at forventet nyttemaksimering med CARA-nyttefunktionen er i overensstemmelse med $\max\left(E[r] - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\right)$ såfremt $\gamma = RRA(W_0) = aW_0$. Vi havde i forvejen etableret en intuitiv tolkning af gamma som værende et mål for, hvor hårdt risiko straffes. Kravet for overensstemmelse er, at dette mål er den relative risikoaversionsparameter. Den optimale aktieandel i tilfældet med normalfordelte afkast og CARA-nytte er,

$$\omega^* = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{aW_0\sigma_{\tan}^2} \tag{2.17}$$

Det er her overraskende, at aktieandelen aftager i formuen. Men det skyldes netop den aftagende relative risikoaversion (som følger af den konstante absolutte risikoaversion). Ved at se på ikke den optimale aktieandel men den optimale værdi i kroner-øre som investors aktiebeholdning skal have, fås en anden tolkning,

$$W_0 \cdot \omega^* = \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{a\sigma_{\tan}^2}. \tag{2.18}$$

Investor skal optimalt set have den samme position i kroner-øre i aktieindekset uanset størrelsen af hans formue. Hvis investors formue bliver større, skal aktieandelen være mindre, så produktet holdes konstant på det optimale niveau $\left(E[r_{\tan}] - r_f\right)/a\sigma_{\tan}^2$. Fortolkningen heraf er, at dette er i tråd med en konstant absolut risikoaversion.

Fordelen ved CARA-nytten er, at præferencesiden i middelværdi-varians-analysen dermed baseres på forventet nytteteori. Dette øger i sig selv validiteten af MV-analysen. Men en stor ulempe er, at CARA-nytten pga. den konstante absolutte risikoaversion resulterer i et tilsyneladende urealistisk porteføljevalg, idet aktieandelen er faldende med formue, og at aktiepositionen i kroner-øre er konstant i formuen. Dette forhold taler for en lav validitet forstået på den måde, at metoden 'rammer ved siden af målet' og ikke beskriver den investor, vi ønsker at beskrive, men en anden. Af den grund kan der argumenteres for at beholde ad hoc beslutningskriteriet (2.1),

$$\max \left(E[r] - \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2\right), \tag{2.19}$$

for en risikoaversionsparameter γ, som ikke nødvendigvis er lig aW_0 for konstanten $a = ARA(W_0)$. Jeg vil her og i resten af middelværdi-varians-analysen i opgaven foretage netop det valg, at investorpræferecen er givet ved (2.1).

2.2.3 Optimal aktieandel for investor

Aktieindekset omtalt i begyndelsen af kapitlet kan vi vælge til at være tangentporteføljen. Omvendt, hvis vi er givet en verden med et aktieindeks og ingen andre risikofyldte aktiver, så bliver dette indeks til tangentporteføljen. Idet vi lader $\mu := E[r_{\text{tan}}]$ og $\sigma := \sigma_{\text{tan}}$ betegne hhv. forventet afkast og risiko på aktieindekset, kan vi altså skrive

$$\omega^* = \frac{\mu - r_f}{\gamma\sigma^2} = \frac{\lambda}{\gamma\sigma}. \tag{2.20}$$

Investors optimale aktieandel er if. modellen voksende i afkastet på aktieindekset, alt andet lige. Den er aftagende i den risikofri rente, alt andet lige. Disse ting kan opsummeres ved at sige, at den optimale aktieandel er voksende i merafkastet, *excess return*, $\mu - r_f$, alt andet lige. Dette er intuitivt forventeligt. I alt andet lige ligger specielt, at det er for samme risiko. Vokser merafkastet, uden at risikoen på aktieindekset vokser, så vokser belønningen som investor får for at påtage sig risiko pr. risikoenhed. Derfor er det optimale for investor at påtage sig større risiko ved at øge aktieandelen.
Den optimale aktieandel er aftagende i γ. Jf. (2.1) udtrykker γ populært sagt, hvor hårdt risiko straffes af investor. Jo større γ, desto større tab af (nytte)værdi har hver enhed risiko, som tages. γ er dermed et udtryk for risikoaversionen. At den optimale aktieandel falder, når investors risikoaversion vokser, er også forventeligt. Det passer med den velkendte tendens, at mange risikoaverse investorer søger i 'sikker havn' med en forholdsvis stor obligationsandel.

Vælger investor en større eller mindre aktieandel end ω^*, vil investor ikke opnå en optimal afvejning mellem forventet afkast og risiko på porteføljen. Ved en mindre aktieandel end ω^* vil risikoen falde - men ikke nok til at kompensere for faldet i forventet afkast. Ved en større aktieandel end ω^* vil det forventede afkast vokse, men ikke nok til at kompensere for den øgede risiko.

Specielt siger (2.20) intet om investeringshorisontens betydning. I den traditionelle middelværdi-varians-analyse, vi har lavet her, investeres over én tidsperiode, og investeringsbeslutningen kan ikke omgøres i løbet af denne. At slutte fra konklusioner om enkeltperiodeinvesteringer til multiperiodeinvesteringer er på ingen måde trivielt.

2.2.4 Kritik af middelværdi-varians-analysen

Da nyttefunktioner generelt set ikke har en form som i sig selv garanterer, at investor alene baserer sit valg på middelværdi og varians af afkastet (eller slutformuen), er man i middelværdi-varians-analysen generelt set nødt til at antage normalfordelte afkast. Denne antagelse er problematisk af to grunde. For det første er der en endelig sandsynlighed for afkast under 100%, hvilket er uoverensstemmende med den begrænsede hæftelse som en ejer af en aktie (og dermed også af et aktieindeks) har. Worst case er, at aktien er værdiløs. Med normalfordelingsantagelsen risikerer man et vilkårligt stort tab og at ende med en negativ formue, som numerisk set kan være vilkårlig stor! Vores model er dermed hvad dette angår ikke en god beskrivelse af virkeligheden. Det andet problem er, at hvis afkastene antages uafhængigt normalfordelte over en hvis periodelængde, Δt, så vil afkastene set over andre periodelængder *ikke* være normalfordelte. Det kan forklares ved, at afkastet over eks. længere periodelængder - flerperiodeafkastet - beregnes som det geometriske gennemsnit af enkeltperiodeafkastene. Et geometrisk gennemsnit er ikke lineært i enkeltperiodeafkastene og er dermed ikke en sum af normalfordelte stokastiske variable. Det er velkendt, at en sum af uafhængige normalfordelte stokastiske variabel er en normalfordelt stokastisk variabel - men fordelingen af flerperiodeafkastet er langt mere kompliceret. Betragt de tre normalfordelte enkeltperiodeafkast $r_{t,t+\Delta t}$, $r_{t+\Delta t,t+2\Delta t}$ og $r_{t+2\Delta t,t+3\Delta t}$. Flerperiodeafkastet fra t til $t+3\Delta t$ er givet ud fra det geometriske gennemsnit,

$$r_{t,t+3\Delta t} = (1 + r_{t,t+\Delta t})\,(1 + r_{t+\Delta t,t+2\Delta t})\,(1 + r_{t+2\Delta t,t+3\Delta t}) - 1, \qquad (2.21)$$

og er ikke en linearkombination af de normalfordelte enkeltperiodeafkast.

Man kan så stille spørgsmålet: Over hvilken periodelængde er afkastene normalfordelte? Kan man med større ret hævde, at det er de daglige afkast end de ugentlige eller månedlige? Kun en af dem kan være det. Dette er et argument for, at det ikke er rimeligt at antage normalfordeling.

Middelværdi-varians-analysen er i sin formulering en én-periode-model. Er dette en realistisk beskrivelse af det problem, investorer står i? For den typiske investor vil investeringsbeslutningen unægteligt hænge sammen med forbrugsvalg og omvendt. I stort omfang investerer investor for at finansiere fremtidige forbrug. Investeringen er et redskab til at flytte forbrug i tid. Og når investor forbruger er det også med tanke på, hvad den heraf følgende reduktion af formuen har af konsekvenser for slutformuen og fremtidige forbrug. Dette taler imod en model, hvor investor kun bekymrer sig om størrelsen af formuen på et givent tidspunkt (langt) ude i fremtiden. En sådan investor har specielt også nytte af det forbrug, som afholdes undervejs.

For en ikke-kort investeringshorisont vil en investor typisk justere sin portefølje løbende, i takt med at han får ny information. Selv hvis vi accepterer antagelsen om konstante investeringsmuligheder, vil der jo komme ny information, som tiden går, i og med at priser og dermed afkast realiseres. Investor må i virkeligehedens verden antages at reagere på denne information. Hvis aktiebeholdningen har outperformet obligationerne helt astronomisk over en periode, vil investors aktieandel være steget markant. Så vil investor måske overveje at sælge ud i aktiebeholdningen, så han opnår samme aktieandel og dermed risiko som tidligere. En anden investor, som har været meget heldig, vil måske efterfølgende vælge en højere aktieandel, da han nu har råd til at tage støre risici. En tredje investor i samme situation vil måske derfra vælge en meget lav aktieandel og bare 'køre den sikkert hjem'. I MV analysen har investor ikke mulighed for at reagere på information indenfor perioden. Modellen er derfor særlig problematisk til at beskrive investering over længere perioder.

Endelig er det en svaghed, at investorpræferencer i middelværdi-variansanalysen generelt set ikke kan funderes i forventet nytteteori. Vi har derfor ikke fra et teoretisk synspunkt fast grund under fødderne - vi kan ikke være sikre på, at ad hoc formuleringer af investorpræferencer som eks. (2.1) rent faktisk repræsenterer konsistente, rationelle præferencer for forbrugsplaner. Det kan derfor være usikkert, i hvilken grad teorien kan bruges normativt til at sige, hvad en rationel investor *bør* gøre - og i hvilken grad den blot udtrykker, hvad investor gør.

Kapitel 3

Outperformancesandsynlighed som beslutningskriterium

For en investor med lang tidshorisont har jeg argumenteret for, at Markowitz middel-varians-analyse er uhensigtsmæssig. Men hvordan skal investor så vælge sin allokering mellem aktieindekset og den risikofri investering? Et bud på et svar på dette spørgsmål udspringer af at se på sandsynligheden for, at aktieindekset outperformer den risikofri investering over forskellige tidshorisonter. Bestemmelse af sådanne outperformancesandsynligheder kræver, at vi sætter en struktur på udviklingen i aktieindekset.

3.1 Modellering af afkastdynamikken

Jeg vil i de to følgende underkapitler opstille modeller for afkastdynamikken for obligations- og aktieindekset. Obligationsindekset er hurtigt klaret, da jeg som allerede nævt modellerer det som en risikofri investering. Resultatet er afkastdynamikken beskrevet af hhv. (3.1) og (3.2) sammen med (3.16).

3.1.1 Afkastdynamik for obligationsindekset

At jeg her i opgaven afgrænser mig til at modellere et obligationsindeks som en risikofri investering betyder, at afkastdynamikken bliver deterministisk og meget enkel: En investering af en initial formue W_0 i det risikofri aktiv med konstant afkast (kontinuert tilskrevet rente) r til tidspunkt $t = 0$, vil til tidspunktet T være vokset til

$$W_T = W_0 e^{rT}. \tag{3.1}$$

Denne ligning beskriver afkastdynamikken for obligationsindekset i vores model.

3.1.2 Afkastdynamik for aktieindekset

Lad X_t betegne prisen på aktieindekset til tidspunkt t. Investeres W_0 i aktieindekeset til $t = 0$, vil formuen til $t = T$ have størrelsen

$$W_T = \frac{X_T}{X_0} W_0 \tag{3.2}$$

For at komme videre med dette udtryk, må vi antage noget om udviklingen i aktieprisen X_t.

Jeg ønsker en model for afkastdynamikken for aktieindekset, som kan fange følgende generelle empiriske karakteristika for aktiepriser:

- Variabilitet
- En tendens til vækst over tid
- En tendens til procentuelle ændringer fremfor absolutte ændringer
- En tendens til at bedste prognose for aktiekursen et lille tidsskridt senere er den nuværende kurs
- En tendens til større variabilitet over større tidshorisonter
- Umulige at forudsige
- Antager værdier i et kontinuum

- Antager en a priori forskellig værdi i ethvert tidspunkt i et kontinuert tidsinterval

Dette kan modelleres med en passende kontinuert-tids stokastisk proces som kan antage stokastiske værdier. For at beskrive aktiepriser, som vi oplever dem i praksis, ville det være nok at kræve, at processen antog værdier i en tællelig (måske endda endelig) mængde og i diskret tid (for tilstrækkelig små tidsenheder). Det er også lettere at opstille og fortolke diskret-tids-processer med diskrete værdier. Hvorfor så overhovedet lave kontinuerte modeller kunne man med rette spørge? Det viser sig at tillade en mere elegant matematisk behandling, da der kan anvendes calculus. Ligesom differentialligninger kan være betydelig lettere at håndtere end differensligninger i deterministiske tilfælde, er det også gældende for stokastiske problemstillinger [4].

Som beskrevet indledningsvis i opgaven vil jeg afgrænse mig fra at undersøge effekten af varierende investeringsmuligheder. Jeg antager således konstante investeringsmuligheder[1].

En diskret-tids-model, som opsamler ovenstående karakteristika, er

$$\Delta X = \mu X \Delta t + \sigma X \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{3.3}$$

hvor X er aktiekursen, μ og σ er konstanter, Δt længden på tidsskridtet over hvilket aktiekursen kan ændre sig, og ϵ er en standardnormalfordelt stokastisk variabel, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$. Jeg vil først motivere modellen og dernæst udlede konsekvenserne af den. Behandlingen er delvis inspireret af Hull (2012) [10, Kap. 13].

Betragt først en risikofri investering. Investor kræver et afkast som i absolutte termer er proportionalt med størrelsen på den investerede formue. Investeres et dobbelt så stort beløb, kræves et dobbelt så stort absolut afkast. Thi ellers - hvis afkastet var mindre end det dobblete - ville investor placere halvdelen i en anden investering med samme risiko, og dermed effektivt få det dobbelte

[1] Modellen (3.3) kan genereliseres til varierende investeringsmuligheder ved at lade μ og σ afhænge af tiden i, dvs. $\Delta X = \mu_i X \Delta t + \sigma_i X \epsilon \sqrt{\Delta t}$.

afkast. Det er ikke muligt for investor at få et større absolut afkast ved blot at opsplitte investeringen i et større antal mindre, tilsvarende investeringer, med samme risiko. Et sådant arbitrageargument viser, at det absolutte afkast over tidsintervallet fra t_i til t_{i+1} er proportionalt med investeringens størrelse, mao. med aktiekursen. Dvs. $\Delta X_{i,i+1} = X_{i+1} - X_i \propto X_i$.

Investeres der i dobbelt så lang tid, ønsker investor sig kompenseret dobbelt så meget og derudover også for rentes-rente-effekten. I et meget kort tidsinterval, hvor rentes-rente-effekten er forsvindende lille (gående mod nul), må det absolutte afkast være proportionalt med tiden, hvori investor giver afkald på den investerede kapital, Δt, mao. $\Delta X_{i,i+1} \propto t$ og dermed $\Delta X_{i,i+1} \propto X_i \cdot \Delta t$. Da investeringen antages risikofri, er der ikke risiko (standardafvigelse på afkastet) eller andre yderligere variable som påvirker det absolutte afkast, og vi har, at

$$\Delta X_{i,i+1} = \mu \cdot X_i \cdot \Delta t \tag{3.4}$$

hvor μ er en proportionalitetsfaktor. Dette er ensbetydende med, at det relative afkast i meget korte tidsintervaller (gående mod nul) er proportionalt med tiden, $\Delta X_{i,i+1}/X_i = \mu \cdot \Delta t$.

I grænsen $\Delta t \to 0$ bliver denne differensligning til differentialligningen[2]

$$dX = \mu X dt, \tag{3.5}$$

som let løses ved separation af de variable. Med begyndelsesbetingelsen $X(t = t_i) = X_i$ fås løsningen som er den velkendte sammenhæng for en risikofri investering,

$$X = X_i e^{\mu(t-t_i)}. \tag{3.6}$$

Den momentane ændring i X pr. tidsenhed kaldes på engelsk *drift rate*, da den angiver, hvor meget aktieprisen 'driver' over tid. Af ovenstående fås, at driftraten er $\frac{dX}{dt} = \mu X$. Det observeres også, at μ er det kontinuert tilskrevne forventede afkast på aktieindekset.

[2]En mere omstændig formulering for dette begyndelsesværdiproblem er integralligningen $\int_{X(t_i)}^{X(t)} \tilde{X}^{-1} d\tilde{X} = \int_{t_i}^{t} \mu d\tilde{t}$ med begyndelsesbetingelsen $X(t_i) = X_i$. Løsningen er $X = X_i e^{\mu(t-t_i)}$.

Et aktieafkast er ikke deterministisk men stokastisk i sin natur. Vi ønsker at tilføje modellen en stokastisk komponent, som kan forklare den variabilitet, der observeres i aktiekurser. Dette kan gøres ved at tilføje et stokastisk led til (3.1.2). Lad os for en stund betragte en investering *uden drift*, dvs. med drift rate nul, som vi kan forestille os som et slags lotteri. Et simpelt arbitrageargument tilsvarende ovenfor giver, at det absolutte afkast skal være proportionalt med investeringens størrelse[3]. Afkastet kan dermed meget uformelt udtrykkes

$$\Delta X_{i,i+1} \;= X_i \cdot \text{'Stokastisk variabel}_i\text{'},$$

hvor der for hvert $i \in \{0, 1, 2, 3, ..., N\}$ er en passende stokastisk variabel, som beskriver den 'støj' som driver ændringer i aktiekursen. For hvert i er X_i en stokastisk variabel; mere præcist den stokastiske variabel som angiver aktiekursen til tiden $t = t_i$. Familien

$$(X_i)_{i\in\{0,1,2,3...,N\}}$$

af stokastiske variable indekseret af tallene $\{0, 1, 2, 3..., N\}$ kaldes da en *stokastisk proces i diskret tid*[4] [41, 37, 31]. Da venstresiden udtrykker ændringen i en størrelse, X, fra $t = t_i$ til $t = t_{i+1}$, er det oplagt også at udtrykke højresiden som en ændring i en størrelse, mao.

$$\Delta X_{i,i+1} \;= X_i \cdot \Delta Z_{i,i+1} \tag{3.7}$$

hvor $\Delta Z_{i,i+1} := Z_{i+1} - Z_i$ for en passende stokastisk proces $(Z_i)_{i\in\{0,1,2,3...,N\}}$. En proces Z_i som kan sikre, at udviklingen i aktiekursen får de søgte egenskaber er en såkaldt *random walk*, som i grænsen $\Delta \to 0$ går mod den stokastiske proces i kontinuert tid som betegnes *Brownsk bevægelse*. En random walk opfører sig pænt i den forstand, at det er let at slutte fra succesive ændringer over korte perioder til den samlede ændring over hele den periode de strækker sig over.

[3]Dette betyder, at når driftleddet inkluderes, så vil det absolutte afkast altså samlet set være proportionalt med aktiekursen. Dette er helt rimeligt i og med, at det er overensstemmende med, at man ikke kan skabe højere afkast samlet set ved at lave aktiesplit eller ved at investor på anden vis opdeler aktieinvesteringen i flere eller færre ens dele.

[4]Se Øksendal (2003) [41, Kap. 2] for yderligere præcisering og formalisering af begreberne stokastisk variabel og stokastisk proces.

En random walk er en proces

$$(Z_i)_{i\in\{0,1,2,3\ldots,N\}}$$

defineret ved, at ændringerne har flg. egenskaber

i Ændringen $\Delta Z_{i,i+1}$ i løbet af en kort tidsperiode $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ er

$$\Delta Z_{i,i+1} = \epsilon_{i,i+1}\sqrt{\Delta t} \tag{3.8}$$

hvor $\epsilon_{i,i+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$

ii Værdien af $\Delta Z_{i,i+1}$ for to forskellige korte tidsperioder er uafhængige

Da ændringen over længere tidsperioder er en sum af ændringen over de korte tidsperioder, er det en sum af uafhængige normalfordelte stokastiske variable. Ændringen over længere tidsperioder er dermed også normalfordelt.

Af antagelsen følger, at ændringen $\Delta Z_{i,i+1}$ selv er normalfordelt med

$$\Delta Z_{i,i+1} \sim \mathcal{N}(0,\Delta t).$$

Givet en værdi af Z_i til et konkret tidspunkt i, da vil værdien en kort tidsperiode senere, dvs. til tiden $i+1$, være bestemt alene af Z_i og den realiserede værdi af $\epsilon_{i,i+1}$, hvis afkastfordeling vi kender. Da ændringen bestemt af $\epsilon_{i,i+1}$ er uafhængig af tidligere (og senere) perioders ændringer, er Z en proces, hvor kun dens aktuelle niveau er relevant for dens fremtidige værdi. Sådan en proces kaldes en *Markov proces*. Ved at antage denne proces antages derfor, at der ikke er momentum i aktiemarkedet. Derudover har processen som nævnt en form der gør, at multiperiode-ændringer opfører sig pænt samt at standardafgivelsen skalerer op med kvadratroden af tiden.

Jeg vil grundet opgavens begrænsede omfang her ikke gå ind i de nærmere detaljer, men blot postulere, at der i grænsen $\Delta t \to 0$ fås en kontinuert proces

$$(X_i)_{i\in[0,T]}$$

med tilsvarende engenskaber som ovenfor. Derved fås en model for en stokastisk aktiekurs uden drift rate,

$$\Delta X_{i,i+1} = \sigma X_i \epsilon_{i,i+1} \sqrt{\Delta t} \tag{3.9}$$

hvor σ er en proportionalitetskonstant, som udtrykker aktieprisens følsomhed overfor de stokastiske chock drevet af $\epsilon_{i,i+1}$. I den kontinuerte grænse fås

$$dX = \sigma X \epsilon \sqrt{dt} \tag{3.10}$$

Ved at tillade såvel en konstant, ikke-stokastisk drift og en følsomhed overfor stokastiske choks fås den endelige model for prisdynamikken for aktieindekset,

$$dX = \mu X dt + \sigma X \epsilon \sqrt{dt} \tag{3.11}$$

En stokastisk proces, som følger denne model, siges at have geometrisk Brownsk bevægelse. Dette er en kombination af ligningerne (3.5) og (3.10). Prisdynamikken karakteriseres således af de to parametre μ og σ, som beskriver hhv. det forventede afkast (med kont. tilskrivning) og volatiliteten. Grådige, risikoaverse investorer vil kræve en kompensation for at påtage sig risiko. Derfor må vi forvente, at det forventede afkast μ afhænger af risikoen σ, så højere risiko resulterer i højere forventet afkast. Der kan også argumenteres for, at μ må afhænge af den risikofrie rente r. Investorer har med den risikofrie rente en alternativ investeringsmulighed. Investors kompensation for at påtage sig risiko skal derfor ske i form af noget, der ligger udover den risikofrie rente. Det er med andre ord merafkastet (excess return), som investor sammenholder med risikoen. Dermed afhænger det forventede afkast af den risikofrie rente. Behandlingen nedenfor er generel og gælder således også i tilfælde, hvor μ afhænger af σ og den risikofrie rente.

I det følgende vil jeg for at lette notationen skrive X_i for $X_{i,i+1}$. I diskret tid og udtrykt i termer af den relative ændring,

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{3.12}$$

Da højresiden af (3.12) er lineær i $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ fås, at hele højresiden er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi $\mu\Delta t + \sigma\Delta t E[\epsilon_i] = \mu\Delta t$ og varians $\text{Var}(\mu\Delta t + \sigma\Delta t\epsilon_i) = \sigma^2\Delta t\text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2\Delta t$.[5] Det relative afkast over et kort tidsinterval er derfor normalfordelt med

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} \sim \mathcal{N}\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right). \tag{3.13}$$

Da det samlede afkast over flere perioder *ikke* er summen af afkastene men derimod beregnes med udgangspunkt i et produkt, vil det generelt set *ikke* være normalfordelt[6]. Det kan vises, at (3.13) er ensbetydende med, at værdien af aktieindekset, X_i, til ethvert fremtidigt tidspunkt er lognormalfordelt. Vi er således interesseret i dynamikken for $\ln(X_i)$. En ændring i denne størrelse er $\Delta\ln(X_i)$, og i kontinuert formulering, $d\ln(X_i)$. For en deterministisk funktion $x = x(t)$, bestemmes dynamikken for $\ln(x)$ let ved hjælp af kædereglen for differentiation af sammensatte funktioner:

$$\frac{d\ln(x)}{dt} = \frac{d\ln(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$
$$d\ln(x) = \frac{1}{x}dx$$

Calculus er udviklet til at håndtere deterministiske problemer og kan som udgangspunkt ikke anvendes på funktioner af variable, som er stokastiske processer.

Itô's Lemma generaliserer kædereglen til funktioner af stokastiske processer[7]. Itô's Lemma er opskrevet i appendix A.3. I vores tilfælde er $\mu_i = \mu X_i$,

[5] Der henvises til Sørensen (2003) [35, Kap. 5] for en udførlig matematisk behandling af normalfordelingen.

[6] Det samlede afkast fra t til $t + n\Delta t$ er

$$r_{t,t+n\Delta t} = (1 + r_{t,t+\Delta t})(1 + r_{t+\Delta t,t+2\Delta t})\ldots\left(1 + r_{t+(n-1)\Delta t,t+n\Delta t}\right) - 1.$$

At én-periode-afkastene $r_{t+i\Delta t,t+(i+1)\Delta t}$ er normalfordelte og uafhængige betyder ikke, at $r_{t,t+n\Delta t}$ nødvendigvis er normalfordelt. Se Munk (2016) [20, Kap. 2] for en diskussion om flerperiodeafkast.

[7] Se Munk (2013) [21, Kap. 2] og Hull (2012) [10, Kap. 13] for en beskrivelse af Itô's Lemma i samme kontekst som her. En mere udførlig, matematisk behandling kan bl.a. findes i Øksendal (2003) [41, Kap. 4]. På samme måde som differentialformen $d\ln(x) = \frac{1}{x}dx$ er et uformelt, praktisk udtryk for en (deterministisk) integralligning, kan udtrykket $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dz_t$ vises at være et uformelt udtryk for en stokastisk differentialligning. Øksendal definerer stokastiske differentialligninger og viser på dette veldefinerede grundlag Itô's Lemma.

$\sigma_i = \sigma X_i$ og $y_t := \ln(X_t) = g(X_t, t)$, så Itô's Lemma giver, at

$$\begin{aligned}
dy_t &= \left(\frac{\partial g}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial g}{\partial X}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(X_t, t)\sigma_t^2\right)dt + \frac{\partial g}{\partial X}(X_t, t)\sigma_i dz_t \\
&= \left(0 + \frac{1}{X_t}\mu X_t + \frac{1}{2}(-1)\frac{1}{X_t^2}(\sigma_t X_t)^2\right)dt + \frac{1}{X_t}(\sigma X_t)dz_t \\
&= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t
\end{aligned}$$

Dermed gælder der for ethvert $t' > t \geq 0$, at

$$\begin{aligned}
y_{t'} - y_t &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t) + \sigma(z_{t'} - z_t) \\
\ln(X_{t'}) - \ln(X_t) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t) + \sigma(z_{t'} - z_t) \\
\ln\left(\frac{X_{t'}}{X_t}\right) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t) + \sigma(z_{t'} - z_t) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Da (3.14) er lineær i den stokastiske variabel $(z_{t'} - z_t) \sim \mathcal{N}(0, (t' - t))$, følger at log-afkastet over tidsrummet fra t til t' (logaritmen til fremskrivningsfaktoren) er normalfordelt, og at log-priserne på aktieindekset er normalfordelt med

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{X_{t'}}{X_t}\right) &\sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t), \sigma^2(t' - t)\right) \\
\ln(X_{t'}) &\sim \mathcal{N}\left(\ln(X_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t), \sigma^2(t' - t)\right). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Specielt fås for aktieinvestering over en tidsperiode fra tiden $t = 0$ til investeringshorisonten T, at

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right) &\sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right) \\
\ln(X_T) &\sim \mathcal{N}\left(\ln(X_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right) \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

At logafkastene er normalfordelt med middelværdi og varians som givet i (3.16) vil vi gøre brug af både i beregning af outperformancesandsynligheder i sektion 3.2 og i den intertemporale model i kapitel (4).

3.2 Outperformancesandsynlighed

Med afkastmodelleringen på plads er det nu muligt at se på sandsynligheden for, at aktieindekset over en tidshorisont fra $t = 0$ til $t = T$ outperformer obligationsindekset. Denne sandsynlighed, som jeg her vil betegne OPSSH, skrives

$$\text{OPSSH} = P\left(W_0 \frac{X_t}{X_0} > W_0 e^{rT}\right)$$

Ved at omskrive udtrykket indeni parentesen og ved at udnytte (3.16) kan vi opnå at det er et spørgsmål om evaluering af fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen i et passende argument,

$$\begin{aligned}
\text{OPSSH} &= P\left(W_0 \frac{X_t}{X_0} > W_0 e^{rT}\right) \\
&= P\left(\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) > rT\right) \\
&= P\left(\frac{\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}} > \frac{rT - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) \\
&= P\left(X > \frac{r - \left(\mu - \sigma^2/2\right)}{\sigma}\sqrt{T}\right) \\
&= P\left(X \leq \frac{\mu - \sigma^2/2 - r}{\sigma}\sqrt{T}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu - \sigma^2/2 - r}{\sigma}\sqrt{T}\right) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

hvor $X := \frac{\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ og Φ er fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen. Da Φ er en voksende funktion og $\sigma > 0$, vil outperformancesandsynligheden være voksende i T hvis og kun hvis

$$0 < \mu - \sigma^2/2 - r.$$

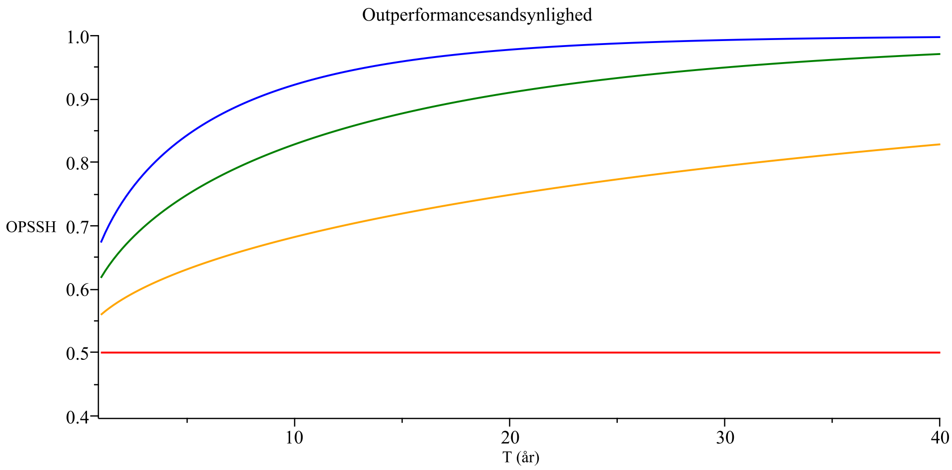
Manipulering af uligheden giver

$$\begin{aligned}
rT &< \left(\mu - \sigma^2/2\right)T \\
rT &< E\left[\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right)\right] \\
r &< E\left[\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right)T^{-1}\right] \\
r &< E\left[r_{\text{aktieindeks}}\right] \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

hvor $r_{\text{aktieindeks}}$ er afkastet på aktieindekset udtrykt med kontinuert tilskrivning, defineret ved.

$$\frac{X_T}{X_0} = e^{r_{\text{aktieindeks}} T}.$$

Da investor er grådig og risikoavers, kræver investor et højere forventet afkast på investering i det stokastiske aktieindeks end på den risikofrie investering, m.a.o. er (3.18) opfyldt. Φ er dermed voksende i T og outperformancesandsynligheden voksende i T.

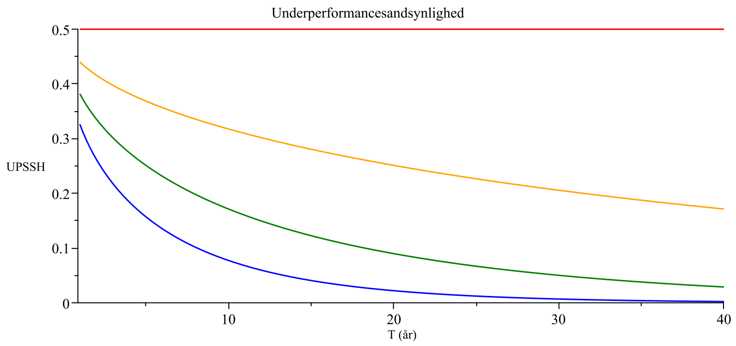


Figur 3.1: Outperformancesandsynlighed som funktion af investeringshorizont T, vist for forskellige niveauer af aktieindeksets drift rate, μ. Kilde: Egen tilvirkning.

For $\left(\mu - \sigma^2/2\right) \to r$ svarende til en equity premium gående mod nul fås outperformancesandsynligheden $\Phi(0) = 1/2$, som er det viste grænsetilfælde. Som diskuteret ovenfor er kun positive risikopræmier på egenkapitalinvesteringer meningsfulde og i overensstemmelse med, hvad der observeres i markedet.

Figur (3.1) viser hvordan outperformancesandsynligheden er voksende i horisonten T for alle meningsfulde værdier af r, μ og σ. En alternativ måde at afbillede samme resultat er som underperformancesandsynligheder - sandsynligheden for at aktieindekset underperformer obligationsindekset, UPSSH $=$ $1 -$ OPSSH. Denne størrelse spiller lidt samme rolle som risiko, idet investor ønsker en så lav værdi af denne størrelse som muligt, alt andet lige. Figur (3.2) viser, at risikoen for at det 'går galt' med aktieinvesteringen i den forstand, at den klarer sig dårligere end obligationsinvesteringen er aftagende mod nul i investeringshorisonten T, hvilket også ses af udtrykket

$$\lim_{T\to\infty} \text{UPSSH} = 1 - \lim_{T\to\infty} \Phi\left(\frac{\mu - \sigma^2/2 - r}{\sigma}\sqrt{T}\right) = 1 - 1 = 0.$$



Figur 3.2: Underperformancesandsynlighed som funktion af investeringshorizont T, vist for forskellige niveauer af aktieindeksets drift rate, μ. Kilde: Egen tilvirkning.

En intuitiv forståelse for situationen kan fås med udgangspunkt i følgende betragtninger[8]:

- Forskellen på det forventede afkast på aktier og obl. er lineært i T.

- Standardafvigelsen på forskellen på aktieafkastet og obl.afkastet er lineært i $\sqrt{T}$.

Da $\frac{X_T}{X_0}$ er lognormalfordelt, er det enklere at betragte logaritmen til det absolutte afkastet end afkastet selv. Den til tidspunkt $t = T$ forventede forskel på logaritmen til formuen ved en aktieinvestering og en obligationsinvestering er

$$E\left[\ln\left(W_0 \frac{X_T}{X_0}\right) - \ln\left(W_0 e^{rT}\right)\right] = E\left[\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right)\right] - rT = \left(\mu - \sigma^2/2 - r\right) T$$

Variansen af samme differens er

$$\mathrm{Var}\left[\ln\left(W_0 \frac{X_T}{X_0}\right) - \ln\left(W_0 e^{rT}\right)\right] = \mathrm{Var}\left[\ln\left(\frac{X_T}{X_0}\right)\right] = \sigma^2 T$$

og standardafvigelsen dermed $\sigma_{\text{diff.}} = \sigma\sqrt{T}$. Den forventede forskel på log-formuestørrelsen vokser proportionalt med tiden, men usikkerheden på samme størrelse vokser kun proportionelt med $\sqrt{T}$. En oplagt intuitiv, uformel tolkning er, at tendensen at aktier klarer sig bedre end obligationer på lang sigt 'vinder' over den usikkerhed, som er forbundet hermed.

[8]Jeg læner mig her op af Jagannathan (1996) [11].

Undersøgelsen ovenfor tyder på, at investorer med lang tidshorisont skal holde større aktieandel end investorer med kort tidshorisont. Præmisserne er flg.

1. At større aktieandel giver højere forventet afkast.
2. At risikoen for at aktierne klarer sig dårligere end obligationerne kan blive vilkårlig lille ved blot at gøre investeringshorisonten tilstrækkelig stor.

hvor altså den første er en empirisk kendsgerning og den anden er vist ovenfor.

3.3 Kritik af outperformancesandsynlighed som beslutningskriterium

Hvis man som investor - eller investeringsrådgiver - heraf slutter, at investorer med lang tidshorisont skal holde en større aktieandel, så er der yderligere to præmisser, som man implicit har antaget:

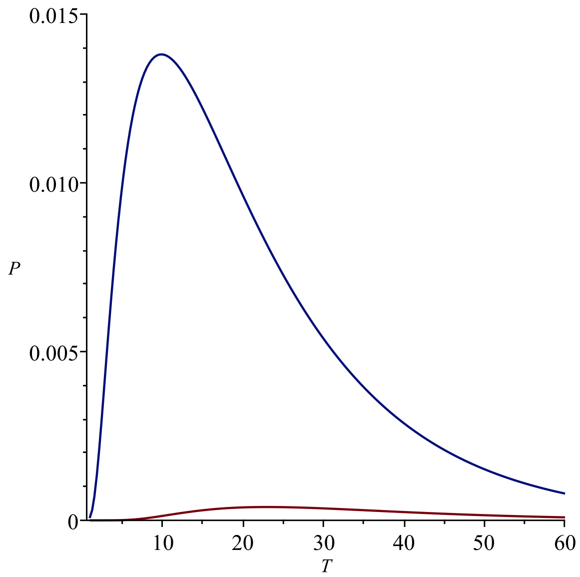
3. At investor ikke kan rebalancere løbende.
4. At det eneste investor bekymrer sig om, udover forventet afkast, er underperformancesandsynligheden.

Generelt set har investor i et eller andet omfang mulighed for at rebalancere løbende og den første antagelse er derfor ikke i god overensstemmelse med virkeligheden. Den fjerde præmis er meget tvivlsom. En almindelig investoradfærd er at have meget høj marginalnytte, når man er fattig. For en ikke-fattig investor betyder det, at nyttetabet pr. krone formue tabt er lille for de første kroner tabt af formuen, men enormt (muligvis gående mod uendelig) for de sidste kroner i formuen. Investor bekymrer sig derfor ekstremt meget for muligheden for meget store tab. Populært sagt: At sandsynligheden for at det går (endnu) bedre end en obligationsinvestering er gående mod 1 for $T \to \infty$ ikke nok, hvis de tab, man trods alt risikerer, er tilpas store.

Lad os belyse situationen med et stort tab med et eksempel. På en ren aktieinvestering er sandsynligheden for et massivt tab, her defineret som et negativt afkast på -80%, if. modellen lig

$$P\left(r_{\text{aktier}} \leq 50\%\right) = \Phi\left(\frac{\ln(0.20) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right)$$

fremgår sammen med sandsynligheden for et tab af 50% af formuen af figur (3.3). En investor med 20 års investeringshorisont på en bunden aktieinvestering



Figur 3.3: Sandsynligheden for et aktieafkast på -50% eller derunder (blå) samt sandsynligheden for et aktieafkast på -80% eller derunder (rød). Kilde: Egen tilvirkning.

i en verden hvor $\mu = 0,09$, $\sigma = 0,20$ vil med en sandsynlighed på $1,0\%$ tabe over halvdelen af formuen og med sandsynlighed $0,04\%$ tabe over 80%. M.a.o. vil en ud af hundrede sådanne investorer tabe over halvdelen af formuen og en ud af 2500 tabe over 80% af formuen. Sandsynligheden for at tabe hele formuen er ikke veldefineret i modellen, men den er gående mod nul, uanset hvilken (fast) tidshorisont vi betragter, idet

$$\lim_{r_{\text{aktier}} \to -100\%} \Phi\left(\frac{\ln\left(1 - r_{\text{aktier}}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0.$$

Det lyder ikke så skidt for investor, men jf. diskussionen ovenfor, så må aktieinvesteringens fordelagtighed være et spørgsmål om, hvor hurtigt denne sandsynlighed går mod nul for $r_{\text{aktier}} \to -100\%$ kontra hvor hurtigt nytteværdien af formuen aftager for $r_{\text{aktier}} \to -100\%$.

En model for investoradfærd hvor outputperformance er beslutningskriterium for valg af aktieandel medtager slet ikke dette aspekt. En nytteteoretisk model kan som skitseret netop tage højde for dette aspekt.

Kapitel 4

En multiperiode-model til beskrivelse af allokeringsproblemet

4.1 En intertemporal model

Investorer kan rebalancere deres portefølje løbende, hvorfor Markowitz middelværdi-varians-analyse er uhensigtsmæssig til at beskrive allokeringsproblemet. Endvidere kan de fleste investorers investeringsbeslutning argumenters for at hænge sammen med livslang opsparing og livslangt forbrug. En bedre antagelse for investoradfærd er, at det ikke er formuen i sig selv, som skaber nytte for investor, men derimod det løbende forbrug som muliggøres af formuen. Jeg vil i det følgende tage udgangspunkt i formulering af en diskret-tids-model, da nyttefunktionen og især budgetligningen er mest intuitiv i dette setup. Efterfølgende oversættes til en kontinuert-tids-model, da denne tillader (stokastisk) calculus og derfor er mere hensigtsmæssig i løsningen af allokeringsproblemet.

4.2 En let spiselig analogimodel

Jeg vil her tillade mig et uprætentiøst, uformelt eksempel til at illustrere den finansielle problemstilling. Vi vinder 30 års forbrug af islagkager! Det viser sig, at der ikke er tale om et ubegrænset forbrug, men om et samlet, stort antal islagkager, vi kan forbruge uden modydelse i en periode på 30 år. Vi må selv vælge, hvor mange af islagkagerne vi forbruger hvert år[1]. Lad os for nemhedens skyld antage, at vores appetit efter islagkager nulstilles hvert år. Vi er desuden grådige og umættelige, idet vi foretrækker flere fremfor færre islagkager - uanset hvor mange islagkager vi er oppe på.

Spiser vi dem alle det første år? Formentlig ikke. Vi har forholdsmæssigt større glæde af hver af de første islagkager end vi har af islagkage nummer 17 på et år. Dette taler for at sprede forbruget ud, så vi spiser lige mange islagkager hvert år. Dette kan forklares ved, at nyttefunktionerne for hver af de enkelte års forbrug har aftagende marginal nytte.

Selv hvis der ingen risiko er for, at vi ikke får islagkagerne, så har vi måske en lille tendens til i større omfang at ville have dem her og nu fremfor senere. Dette kunne tale for at forbruge lidt flere de første år og færre de sidste år. Dette svarer til en tidsmæssig diskontering.

Hvis vi kan kvantificere disse effekter - og hvis ingen andre ting spiller ind på vores lyst til at spise islagkager - så er det muligt at beregne en deterministisk løsning for, hvor mange islagkager vi skal spise hvert af de 30 år for at få mest ud af det - dvs. for at få den højeste samlede nytte.

Men isproducenten tilbyder at belønne os for at udskyde vores forbrug. For hvert år vi udskyder forbruget, ligger producenten en hvis procentdel oveni mængden af is, der i alt er til rådighed for os. Det er derfor at betragte som en risikofri investering af islagkagerne. Dette trækker vores optimale forbrug i en retning, hvor der forbruges lidt mindre i starten og mere i slutningen, end

[1] dog under rimelige forudsætninger som at vi ikke kan forbruge samme islagkage to gange, at vi ikke kan forbruge mere, end der er tilbage, at vi ikke kan forbruge et negativt antal osv.

hvad der ellers ville være tilfældet (dvs. alt andet lige). Vores isforbrugsproblem er stadig deterministisk: Vi kan med 'brute force' gennemtænke- og regne alle mulige scenarier og gøre op, hvor stor samlet nytte, enhvert af de mulige fordelinger af islagkager over de 30 år giver os. Vi vælger den fordeling - dvs. det forbrug hvert af årene - som giver den højeste samlede nytteværdi[2]. Vi ved allerede nu præcis hvor mange islagkager, vi skal spise hvert år de næste 30 år.

Isproducenten tilbyder os desuden den besynderlige mulighed at investere hver af islagkagerne, således, at deres antal/størrelse følger virksomhedens aktiekurs. Aktiekursen antages at bevæge sig i et endeligt gitter med én bevægelse årligt. Går det godt for virksomheden, får vi flere - går det skidt, får vi færre. Der er en risiko forbundet med at investere - men vi kan konstatere, at det forventede afkast på islagkagerne er tilpas højt til at kompensere for denne risiko. Hvor mange islagkager skal vi spise hvert af årene? Hvor mange skal vi udskyde mod fast betaling? Hvor mange skal vi investere? Vi vil ikke risikere at tabe for mange - men omvendt har vi også nok islagkager til, at vi godt vil risikere nogle (få) af dem mod udsigten til at kunne få mange flere. Måske tænker vi, at vi de første år har mange år til at vende et tab til en gevinst, og at vi derfor godt kan tage lidt større risiko her. Hvis det begynder at gå meget galt har vi jo også altid den mulighed at 'tage tabet' og derfra tage en beslutning, som gør, at vi ikke risikerer at tabe yderligere islagkager. I takt med at vi nærmer os det 30. år, forestiller vi os måske, at vi vil skrue ned for risikoen - for hvor meget får vi ud af at vinde en hel masse iskager, som skal forbruges (yderligere) på ganske få år i forhold til hvor ærgerligt det er at miste dem, vi har.

Det store spring i kompleksiteten skyldes tilføjelsen af det stokastiske element. Vi kan med 'brute force' møjsommeligt gennemgå samtlige mulige kombinationer af forbrug, risikofri investering og risikofyldt investering for samtlige mulige baner aktiekursen kan følge. Problemet er dog, at alt afhængig af hvilken

[2]Hvis vi er tilstrækkelig sofistikerede, regner vi ikke nytteværdien ud for samtlige fordelinger af islagkager, men løser det som et matematisk maksimeringsproblem, og når samme løsning

bane aktiekursen ender med at følge, vil det være et forskelliget antal islagkager, som vil være optimalt at forbruge og allokere mellem invsteringerne til forskellige tidspunkter. Hvis aktiekursen viser sig at tage én bane, ville ét valg have være bedst - en anden bane, et andet valg. Vi har her brug for begrebet forbrugsplan. En forbrugs- og investeringsplan er en plan, for hvad vi vil gøre i hvert handlingstidspunkt, givet at aktiekursen har bevæget sig i en bestemt bane indtil handlingstidspunktet. En fast plan for hvordan vi vil gøre i alle mulige scenarier. Sådan en plan kunne være: Spis $1/(30-n)$ af beholdningen i år n, hvor n er antal år, der er gået fra start, invester resten i en 60/40 portefølje bestående af 60% i risikofri inv. og resten i den risikofyldte. En anden plan er: Spis samtlige islagkager det først år. Gør intet de næste. En tredje plan er: Spis hver år 1/20 af alle islagkagerne, invester resten på en måde så andelen i den risikofri investering falder lineært fra 100% til 0% over perioden. Planen er altså en beslutningsregel, som entydigt fastlægger forbrug og allokering for enhver periode - men muligvis udfra oplysninger som først er kendt ved begyndelsen af den pågældende periode (såsom antallet af islagkager i beholdningen). Vi ved ikke hvilken af planerne, som ender med at være bedst evalueret ex post fra tidspunk $t = 30$ år. Men alligevel rangordner vi planerne ex ante - den med at spise alle islagkager det første år er helt klart et eksempel på en dårlig plan. Islagkagerne antages at smage lige godt, uanset hvordan vi er 'nået dertil' - kun antallet vi forbruger hvert år har betydning. For hver plan kan vi med 'brute force' bestemme nytteværdien, som planen resulterer i for samtlige mulige scenarier for aktiekursen, og vi kan bestemme forventningsværdien. Vores præferencer for planerne kan repræsenteres ved den forventede nytte for planen[3]. En entydig løsning til forbrugs- og investeringsproblemet består i forbrugs- og investeringsplan, som giver den største forventede nytte. Som iselskere er vi interesseret i at vælge den optimale plan.

[3]Både eksistensen af forventningsværdi og forventet nytte-repræsentation kræver, at visse tekniske egenskaber skal være opfyldt, men jeg vil her ikke gå ind i denne problemstilling men blot antage, at de er opfyldt.

En investor med livslang opsparing står overfor en lignende problemstilling. Han kan ex ante ikke vide, hvilken række af beslutninger som ex post vil vise sig at have givet størst nytte. Men kan - givet at han har en fuldstændig viden om, hvordan økonomien kan udvikle sig - opstille alle tænkelige forbrugsplaner, ordne disse efter deres forventede nytte, og vælge planen som giver den højeste foventede nytte. I praksis kan investor ofte være nødt til at gå mere raffineret til værks end sådan en løsning 'by brute force'. Det vil jeg sigte mod her med afsæt i især artiklen af Merton (1969) [18] og bøgerne af Munk (2013, 2014) [21, 19].

4.3 Forventet nytteteori i et multiperiode-setup

Nytteteorien kan håndtere forbrug over tid med en multiperiode-nyttefunktion[4]

$$U\left(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_T\right).$$

Forbruget afholdt over en periode afhænger implicit af forbruget afholdt over tidligere perioder og det forventede fremtidige forbrug. Det afhænger også af de realiserede afkast på investeringen i tidligere perioder samt forventningen om afkast i senere perioder. Dette formaliseres i budgetligningen, som jeg vil opstille nedenfor i afsnittet (4.4).

En simpel form, som en multiperiode-nyttefunktion kan antage, er en additiv tidsseparabel form, som i en diskret-tids model er på formen

$$U\left(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_T\right) = \sum_{t=0}^{T} u_t\left(c_t\right) \tag{4.1}$$

hvor $u_t\left(c_t\right)$ er nytteværdien målt til tidspunkt $t = 0$ af forbruget c_t afholdt til tidspunkt t. For enhver af t-værdierne mellem $t = 0$ og $t = T$ er $u_t\left(c_t\right)$ en én-periode nyttefunktion, som afhænger af forbruget over den pågældende periode, dog med den 'krølle', at den måler nytten set fra tidspunkt $t = 0$. Denne nyttefunktion beskriver den samlede nytte af de fremtidige forbrug, set

[4] For en mere udførlig, aksiomatisk behandling henvises til Munk (2014) [19, Kap. 2]

fra tidspunkt $t = 0$. Tidsseparabiliteten betyder, at nytten, som investor får ved forbrug i en periode, er uafhængig af, hvad der er forbrugt tidligere, og hvad der forventes forbrugt senere. Tidsadditiviteten betyder, at investors samlede nytte ved forbrug i flere tidsperioder er summen af nytten af de enkelte perioders forbrug. Specielt antagelsen om tidsseparabiliteten kan diskuteres og kritiseres - bl.a. kan man argumentere for at investorer opbygger vaner som gør, at den nytteværdi de har af forbrug en given tidsperiode afhænger af tidligere perioders forbrug. En stor fordel ved at antage additiv tidsseparabilitet er, at det rent beregningsteknisk reducerer kompleksiteten betydeligt.

A priori kan nytteværdien af et givent forbrug være forskellig til forskellige tidspunkter, dette er udtrykt ved, at vi for $t \neq t'$ kan have, at funktionerne u_t og $u_{t'}$ er forskellige. Der er her to aspekter i spil: Da nytteværdien betragtes fra tidspunkt $t = 0$ vil den tidsmæssige forskydning i sig selv kunne give anledning til en forskellig nytteværdi for ens forbrug. M.a.o. er der tale om en tidsmæssig diskontering. Men det kunne også tænkes, at nytteværdien betragtet lokalt i tid er forskellig. Jeg vil dog her i opgaven antage den simpleste form, at der udelukkende er tale om en tidsmæssig diskontering, som udtrykker, at investor alt andet lige har større værdi af et forbrug nu fremfor senere. Én-periode-nyttefunktionerne (set fra $t = 0$) er da ens bortset fra en tidsmæssig diskonteringsfaktor, $e^{-\delta t}$, $\delta > 0$.

$$U(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_T) = \sum_{t=0}^{T} e^{-\delta t} u(c_t) . \tag{4.2}$$

For en investor med hele sin forventede levetid som investeringshorisont kan ønsket om at efterlade arv påvirke beslutningen om løbende forbrug og investering. Nytteværdien af den formue som er tilbage ved slutningen af investeringshorisonten, T, kan medtages i modellen ved eksplicit at tilføje et led til multiperiode-nyttefunktionen, som beskriver dette. Jeg vil her modellere nytten set fra tidspunkt $t = 0$ af den efterladte formue som

$$e^{-\delta T} \bar{u}(W_T) . \tag{4.3}$$

Første faktor udtrykker tidsmæssig diskontering. Der antages samme diskonteringsfaktor som for nytten af forbrug. Modellen muliggør en nyttefunktion for terminalformuen, som er anderledes end nyttefunktionen for forbruget. Investors vægtning af nytten af forbrug kontra nytten af terminalformue afspejles af selve disse nyttefunktioner. Senere i opgaven vil jeg behandle et tilfælde, hvor begge nyttefunktioner er af CRRA-typen men med vægte, som kan kontrollere investors generelle vægtning af nytte som følge af forbrug i forhold til terminalformue.

I en kontinuert-tids-formulering bliver multiperiode-nyttefunktionen (som beskriver den samlede nytte set fra tidspunkt $t = 0$)

$$\int_0^T e^{-\delta s} u\left(c_s\right) ds + e^{-\delta T} \bar{u}\left(W_T\right) \tag{4.4}$$

hvor$(c_s)_{s\in[0,T]}$ er en *forbrugsproces*, dvs. for hvert $s \in [0,T]$ er c_s en stokastisk variabel.

De fremtidige forbrug er i mange tilfælde stokastiske. At de fremtidige forbrug er stokastiske betyder ikke, at investor ikke har sin frie vilje - det betyder blot, at hvordan investor i fremtiden vælger at forbruge (og har mulighed for at forbruge) afhænger af, hvordan den investerede formue udvikler sig. Til tiden t' er c_t kendt for alle $t \leq t'$ men ukendt for alle $t > t'$, idet disse forbrug afhænger af de stokastiske afkast på fremtidige investeringer[5]. Men investor kender de konstante investeringsmuligheder og alle de (uendelig mange) måder økonomien kan udvikle sig på og kan derfor lave forbrugs- og investeringsplaner og rangordne disse efter forventet nytte.

4.4 Budgetligningen

Opstilling af budgetligningen er mest simpel og intuitiv i en diskret-tids-model, hvor investor for hvert tidsskridt, Δt, kan vælge sit forbrug og rebalancere

[5] Dette kan formaliseres vha. sandsynlighedsregning på målteoretisk grundlag ved at kræve, at forbrugsprocessen er tilpasset en informationsfiltrering $\mathbf{F} = (\mathcal{F})_{t\in\mathcal{T}}$ på et filtreret sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbf{F})$. Jeg vil i denne opgave ikke gå ned i denne underlæggende matematiske beskrivelse, men nøjes med at henvise til Munk (2014) [19] og Øksendal (2003) [41].

porteføljen. Budgetligningen for en kontinuert-tids-model kan derefter fås ved at tage grænseovergangen $\Delta t \to 0$. Jeg følger her Merton (1969) [18].

Jeg antager, at beslutningen om forbrug og investering sker i begyndelsen af hvert tidsinval. Til tidspunkt t_0 er formuen W_{t_0}. Investor vælger her sit forbrug for perioden fra t_0 til $t_0 + \Delta t$. Forbruget kan karakteriseres ved en forbrugsrate, c_{t_0}, som udtrykker forbrug pr. tidsenhed. Forbruget i perioden fra t_0 til $t_0 + h$ er dermed $c_{t_0} \cdot \Delta t$. Den del af formuen, som forbruges, bortfalder (der kan i modellen ikke købes varige goder). Den del af formuen, som ikke forbruges, $W_{t_0} - c_{t_0} \cdot \Delta t$, investeres. Investor vælger en allokering mellem aktieindekset og obligationsindekset, og dermed et stokastisk afkast på porteføljen, $r_P(t_0)$. Formuen ved begyndelsen af næste periode, dvs. tidspunktet $t = t_0 + \Delta t$, er dermed

$$W(t) = (1 + r_P(t_0))\left[W_{t_0} - c_{t_0} \cdot \Delta t\right]. \tag{4.5}$$

hvor $t = t_0 + \Delta t$. I det følgende betragtes allokering til to brede aktivklasser, hvor den første er et aktieindex og den anden et obligationsindex modelleret som en risikofri investering. Lad ω_{i,t_0} og $X_{i,t}$ betegne hhv. andelen af investeringen allokeret til aktivklasse i i perioden fra t til $t+\Delta t$ og prisen på aktiv til tidspunkt t. Da er porteføljeafkastet over perioden t_0 til $t_0 + \Delta t$ det vægtede afkast af aktivklassernes afkast,

$$r_P(t_0) = \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,t_0}\left(\frac{X_{i,t}}{X_{i,t_0}} - 1\right) = \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,t_0}\frac{X_{i,t}}{X_{i,t_0}} - 1. \tag{4.6}$$

Budgetbetingelsen sammenfatter (4.5) og (4.6), og kan dermed udtrykkes

$$W_t = \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,t_0}\frac{X_{i,t}}{X_{i,t_0}}\left[W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t\right] \tag{4.7}$$

I det følgende betegner aktiv $i = 1$ aktieindekset og $i = 2$ obligationsindekset og $\omega_t = \omega_{1,t}$. Afkastmodelleringen fra kapitel 3.1 anvendes. Dermed er $\frac{X_2(t)}{X_2(t_0)} = e^{rT}$ og $\frac{X_1(t)}{X_1(t_0)}$ er lognormalfordelt. Af (3.14) fås

$$\frac{X_t}{X_{t_0}} = e^{\ln\left(\frac{X_t}{X_{t_0}}\right)} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\left(z_t - z_{t_0}\right)}.$$

I løsningen af nyttemaksimeringsproblemet får vi brug for et udtryk for formuetilvæksten, $W_t - W_{t_0}$, over tidsrummet fra t_0 til $t = t_0 + \Delta t$. W_t er givet ved (4.7), og det er smart - omend det umiddelbart virker omstændigt - at skrive W_{t_0} på en tilsvarende form,

$$\begin{aligned} W_{t_0} &= 1 \cdot [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t] + c_{t_0}\Delta t \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2} \omega_{i,t_0}\right) \cdot [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t] + c_{t_0}\Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,t_0} \cdot 1 \cdot [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t] + c_{t_0}\Delta t, \end{aligned} \tag{4.8}$$

hvor vi har brugt, at porteføljeandelene summer til en. Ved at trække (4.8) fra (4.7) fås nu, at

$$\begin{aligned} W_t - W_{t_0} &= \sum_{i=1}^{2} \omega_{i,t_0} \left(\frac{X_{i,t}}{X_{i,t_0}} - 1\right) [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t] - c_{t_0}\Delta t \\ &= \left\{ \omega_{t_0} \left(e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\left(z_t - z_{t_0}\right)} - 1 \right) + (1 - \omega_{t_0}) \left(e^{r\Delta t} - 1\right) \right\} \\ &\quad \cdot [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t] - c_{t_0}\Delta t \end{aligned} \tag{4.9}$$

At fratrække W_{t_0} på begge sider af budgetligningen ændrer ikke på indholdet i ligningen, så jeg vil i det følgende referere til (4.9) som budgetligningen.

I en kontinuert-tids-model træffer investor til hvert øjeblik beslutninger om forbrug og investering. Denne situation kan ses som grænsetilfældet af ovenstående diskret-tids-model, hvor $\Delta t \to 0$. For at få tidsafhængigheden af $(z_t - z_{t_0})$ eksplicit udtrykt, kan vi opskrive denne faktor som $(z_t - z_{t_0}) = \epsilon_t \sqrt{t - t_0} = \epsilon_t \sqrt{\Delta t}$, hvor ϵ_t er standardnormalfordelt. Der laves en Taylorudvikling af eksponentialfunktionerne omkring nul, hvorefter vi ser bort fra led af orden højere end 1 i Δt. For at gøre det overskueligt ser jeg på leddene hver for sig.

Leddet som fås ved Taylorudvikling af første del af den krøllede parentes er[6]

$$l_1 = \omega_{t_0}\left(1 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon_t\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon_t\sqrt{\Delta t}\right)^2 \right.$$
$$\left. + O(\Delta t^{3/2}) - 1\right) \cdot [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t]$$

Uanset hvilket led $c_{t_0}\Delta t$ ganges ind på, bliver produktet heraf af orden højere end 1 i Δt, og produktet forsvinder derfor i grænsen $\Delta t \to 0$. Derfor kan vi fjerne $c_{t_0}\Delta t$. $O(\Delta t^{3/2})$ leddet - eller rettere sagt leddene, for det dækker jo over uendelig mange led i Taylorudviklingen. I kvadratet bliver kun kvadratet på andet led af orden 1 eller mindre. Alle led, som bortfalder i grænsen $\Delta t \to 0$, sammenfattes i udtrykket $o(\Delta t^1)$, som netop betyder led af orden højere end 1 i Δt . Det kan bemærkes, at den omstændige omskrivning af W_{t_0} netop giver det ettal som går ud med ettallet fra Taylorudviklingen af eksponentialfunktionen.

$$l_1 = \omega_{t_0}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon_t\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_t^2}{2}\epsilon_t^2\Delta t\right) \cdot W_{t_0} + o(\Delta t^1)$$

Leddet som fås ved Taylorudvikling af anden del af den krøllede parentes er

$$\begin{aligned} l_2 &= (1-\omega_{t_0})\left(1 + r\Delta t + (r\Delta t)^2 + O(\Delta t^2) - 1\right) \cdot [W_{t_0} - c_{t_0}\Delta t] \\ &= (1-\omega_{t_0})\, r\Delta t \cdot W_{t_0} + o(\Delta t^1) \end{aligned}$$

Budgetligningen (4.9) kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} W_t - W_{t_0} &= \left[\left\{\omega_{t_0}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\epsilon_t^2\right) + (1-\omega_{t_0})\, r\right\}W_{t_0} - c_{t_0}\right]\Delta t \\ &\quad + \omega_{t_0}\sigma W_{t_0}\epsilon_t\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t^1) \\ &= \left[\left\{\omega_{t_0}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\epsilon_t^2 - r\right) + r\right\}W_{t_0} - c_{t_0}\right]\Delta t \\ &\quad + \omega_{t_0}\sigma W_{t_0}\epsilon_t\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t^1) \end{aligned}$$

Differentialformen fås nu ved at lade $\Delta t \to 0$,

$$dW_t = \left[\left\{\omega_{t_0}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\epsilon_t^2 - r\right) + r\right\}W_{t_0} - c_{t_0}\right]dt + \omega_{t_0}\sigma W_{t_0}\epsilon_t\sqrt{dt}. \tag{4.10}$$

[6] Her er l_1 blot en notation, som skal læses 'led 1' eller 'første led'.

Ved sammenligning med Merton (1969) [18] og Munk (2014) [19] ses, at σ-leddene i første parentes bortfalder. Differentialformen bliver

$$dW_t = \left[\left\{ \omega_{t_0} \left(\mu - r \right) + r \right\} W_{t_0} - c_{t_0} \right] dt + \omega_{t_0} \sigma W_{t_0} \epsilon_t \sqrt{dt}. \tag{4.11}$$

Denne differentialform vil jeg vende tilbage til i forbindelse med udledningen af Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) ligningen senere i opgaven. Se (4.20).

4.5 Formulering af nyttemaksimeringsproblemet

Vi betragter situationen, hvor investor med initialformue $W_0 > 0$ til tidspunkt $s = 0$ har et kontinuert forbrug og investering med rebalancering frem til en tidshorisont T. Investor har ingen nytteværdi af forbrug efter tidspunkt T, dog har investor set fra tidspunkt T nytteværdien $\bar{u}\left(W_T\right)$ af den del af formuen, som til tidspunkt T ikke er forbrugt. Det antages, at forbrugene er ikke-negative, $c_s \geq 0$, at investor ikke på noget tidspunkt bruger hele sin formue, hvorfor $W_s > 0$, samt at budgetligningen (4.10) er opfyldt.

Set fra tidspunkt $s = 0$ handler investor således, at hans forventede nytte maksimeres under ovenstående bibetingelser. Den højeste nytte, set fra tidspunkt $s = 0$, som investor kan opnå over hele hans levetid (som defineret i modelsetup'et) er

$$\sup_{\left(c_s, \omega_s\right)_{s \in [0,T]}} E \left\{ \int_0^T e^{-\delta s} u \left(c_s\right) ds + e^{-\delta T} \bar{u} \left(W_T\right) \right\}, \tag{4.12}$$

Her skal supremum'et tages over alle de nuværende og fremtidige mulige valg af forbrug c_s og allokering af den resterende formue mellem aktier og obligationer, udtrykt ved aktieandelen ω_s, som er mulige givet bibetingelserne. Investor skal til tiden $s = 0$ kun vælge $c_{=0}$ og $\omega_{s=0}$, men under hensyntagen til de forventede fremtidige valg. Forventningsværdien skal tages til tiden $s = 0$.

Investor står til tiden $s = 0$ og skal tage en beslutning om sit forbrug $c_{s=0}$ og sin allokering af den resterende formue mellem aktier og obligationer, $\omega_{s=0}$, over det næste (infinitesimale) tidsinterval. Det eneste, der er kendt for investor er initialformuen $W_{s=0}$ samt modelsetuppet her, inkl. nyttefunktionen og afkastfordelingen. Specielt er afkastet på aktieindeksinvesteringen ukendt. Investor skal træffe valg om $c_{s=0}$ og $\omega_{s=0}$ velvidende at viden om afkastet bliver tilgængelig en (infinitesimalt) tidsperiode senere. Dermed bliver også størrelsen af formuen kendt på baggrund af hvilken investor skal træffe en ny beslutning om forbrug og allokering for det næste (infinitesimale) tidsrum. Til tiden $s = 0$ kan investor kun gætte på, hvad formuestørrelsen og dermed disse beslutninger vil være til dette senere tidspunkt[7]. Yderligere et (infinitesimalt) tidsskridt længere fremme gentager situationen sig. Investor skal altså nu og her til $s = 0$ træffe en konkret beslutning om $c_{s=0}$ og $\omega_{s=0}$ baseret på forventninger om et uendeligt antal ukendte fremtidige aktieindeksafkast og et uendeligt antal fremtidige beslutninger om forbrug og allokering, som afhænger heraf.

En entydig løsning af nyttemaksimeringsproblemet er den entydigt bestemte forbrugs- og investeringsplan, som maksimerer investors forventede nytte og dermed integralet i (4.13). Det er derfor en beslutningsproces som giver, hvordan investor til hvert tidspunkt skal forbruge og allokere mellem aktivklasserne, i termer af den information som er tilgængelig på det pågældende tidspunkt.

4.6 Løsning af nyttemaksimeringsproblemet

Ved at udnytte at problemet (4.13) har den såkaldte dynamiske programmeringsegenskab, kan det løses vha. dynamisk programmering. Jeg vil her i det helt overordnede billede følge Merton (1969) [18]; dog er formuleringen af det dynamiske programmeringsproblem og også udledningen af HJB-ligningen i denne artikel noget ad hoc hvis ikke ligefrem tvivlsom. For at øge validiteten af min undersøgelse, vil jeg lave en lidt anden, grundigere opstilling og behandling af det dynamiske programmeringsproblem. Det viser sig, at trods denne afvigelse i behandlingen, så vil de to tilgange fra et vist punkt af være identiske og derfor også være i overensstemmelse hvad angår løsningerne. I den del af min

[7] Udlægningen her baserer sig på Samuelson (1969) [28].

undersøgelse, hvor jeg afviger fra Merton henter jeg delvis inspiration i Munk (2013 og 2014) [21, 19]. Lad J_t være defineret ved

$$J_t := \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t,T]}} E_t\left\{ \int_t^T e^{-\delta(s-t)} u\left(c_s\right) ds + e^{-\delta(T-t)} \bar{u}\left(W_T\right) \right\}, \tag{4.13}$$

og underlagt de samme bibetingelser som (4.13) for $s \in [t, T]$. Specielt ses, at J_0 er det oprindelige problem (4.13). For et senere tidspunkt, $t \in]0, T[$, beskriver J_t det tilsvarende problem, som investor befinder sig i til tidspunkt t. J_t er den maksimale forventede nytte set fra tidspunkt t som investor kan opnå. Endvidere ses, at

$$J_T = \bar{u}\left(W_T\right).$$

J_t har en såkaldt optimal substruktur, som gør det muligt med dynamisk programmering at relatere problemet med at bestemme den indirekte nytte J_{t_0} til et tidspunkt, t_0, til det simplere problem at bestemme den indirekte nytte på et tidspunkt nærmere terminaltidspunktet, eks. $J_{t_0+\Delta t}$. Det er muligt at udtrykke J_{t_0} i $J_{t_0+\Delta t}$ for vilkårlige $t_0 \in [0, T]$ og $\Delta t \in [0, T - t_0]$. Lad $t := t_0 + \Delta t$. Da fås

$$\begin{aligned} J_{t_0} &= \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,T]}} E_{t_0}\left\{ \int_{t_0}^T e^{-\delta(s-t_0)} u\left(c_s\right) ds + e^{-\delta(T-t_0)} \bar{u}\left(W_T\right) \right\} \\ &= \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,T]}} E_{t_0}\left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)} u\left(c_s\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0+\Delta t}^T e^{-\delta(s-t_0)} u\left(c_s\right) ds + e^{-\delta(T-t_0)} \bar{u}\left(W_T\right) \right\}, \end{aligned}$$

hvor første lighedstegn er definitionen af J_{t_0}, og andet lighedstegn fås ved at opsplitte integralet, jf. indskudssætningen for integraler. De to sidste led ligner de led, som indgår i $J_{t_0+\Delta t}$, men der mangler forventningsoperatoren set fra tidspunkt $t_0 + \Delta t$, og der mangler supremum over alle forbrugs- og investeringsplaner for tidsintervallet $[t_0 + \Delta t, T]$. Endelig er den tidsmæssige tilbagediskontering skæv. Ved at anvende sætningen om itererede forventninger, kan den søgte forventningsoperator fås. Munk har en enkel og klar beskrivelse af det intuitive indhold i sætningen:

> "Loosely speaking, the theorem says that what you expect today of some variable that will be realized in two days is equal to what you expect today that you will expect tomorrow about the same variable."citat, Munk (2013) [21].

Sætningen kan formuleres som

$$E_{t_0}[X] = E_{t_0}[E_{t_0+\Delta t}[X]]. \tag{4.14}$$

Ved anvendelse af sætningen fås,

$$\begin{aligned}J_{t_0} = \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,T]}} & E_{t_0}\Bigg\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)}u(c_s)\,ds \\ & + E_{t_0+\Delta t}\Bigg\{\int_{t_0+\Delta t}^{T} e^{-\delta(s-t_0)}u(c_s)\,ds + e^{-\delta(T-t_0)}\bar{u}(W_T)\Bigg\}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Ved almindelige regneregler kan vi opnå, at den tidsmæssige tilbagediskontering inde i den inderste krøllede parentes sker med udgangspunkt i tidspunkt $t_0+\Delta t$,

$$\begin{aligned}J_{t_0} = \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,T]}} & E_{t_0}\Bigg\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)}u(c_s)\,ds \\ & + e^{-\delta\Delta t}E_{t_0+\Delta t}\Bigg\{\int_{t_0+\Delta t}^{T} e^{-\delta(s-(t_0+\Delta t))}u(c_s)\,ds + e^{-\delta(T-(t_0+\Delta t))}\bar{u}(W_T)\Bigg\}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Da kun udtrykket i den inderste krøllede parentes afhænger af forbrug og allokering for tidspunkter i intervallet $[t_0+\Delta t, T]$, kan supremum over disse forbrug og allokeringer flyttes ind på denne parentes,

$$\begin{aligned}J_{t_0} = \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,t_0+\Delta t]}} & E_{t_0}\Bigg\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)}u(c_s)\,ds \\ & + e^{-\delta\Delta t}\sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0+\Delta t,T]}} E_{t_0+\Delta t}\Bigg\{\int_{t_0+\Delta t}^{T} e^{-\delta(s-(t_0+\Delta t))}u(c_s)\,ds \\ & + e^{-\delta(T-(t_0+\Delta t))}\bar{u}(W_T)\Bigg\}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Vi har dermed opnået at få J_{t_0} udtrykt i $J_{t_0+\Delta t}$,

$$J_{t_0} = \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,t_0+\Delta t]}} E_{t_0}\Bigg\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)}u(c_s)\,ds + e^{-\delta\Delta t}J_{t_0+\Delta t}\Bigg\} \tag{4.15}$$

Dette er Bellman-ligningen i kontinuert tid. Se eks. Munk (2013) [21, Kap. 6.6] hvor Bellman-ligningen er udledt i diskret tid. Bellman-ligningen beskriver, hvordan den optimale forbrugs- og investeringsplan set fra tidspunkt t_0 kan omformuleres til et spørgsmål om forbrug og investering i kun det næste (infinitesimale) tidsinterval samt forbrug- og investeringsvalg set fra tidspunkt $t_0 + \Delta t$ for resten af perioden. Det intuitive indhold her er, at investor til tidspunkt t_0 ved, at han i fremtiden vil tage en optimal investeringsbeslutning. Samuelson (1969) [28] forklarer, hvordan man i en diskret tidsmodel dermed kan starte bagfra, én periode før terminaltidspunktet. Løse forbrugs- og investeringsproblemet her (da det er et én-periode-problem). Derved kendes den optimale plan for tidspunkt $T - 1$, hvorefter den optimale plan for tidspunkt $T-2$ kan bestemmes osv. Bellman-ligningen beskriver på mere generel vis denne rekursive sammenhæng.

Det overordnede mål er med udgangspunkt i Bellman-ligningen at komme frem til den optimale investeringsplan, som beskriver den optimale plan for valg af aktieandel, som investor skal følge. Et vigtigt skridt på vejen er at udlede Hamilton-Jacobi-Bellman-ligningen (HJB). Det vil jeg gøre i det følgende. Resultatet er HJB ligningen (4.22).

Det viser sig at være smart at manipulere med Bellman-ligningen, så der kommer til at optræde et led af typen $E_{t_0}\left\{J_{t_0+\Delta t} - J_{t_0}\right\}/\Delta t$ inde i supremumparantesen. Ved anvendelse af Itô's Lemma antager ligningen form af en (ikke-lineær) partial differentialligning i J. Ved at gange Bellman-ligningen (4.15) med $e^{\delta \Delta t}$, trække J_{t_0} fra, dividere med Δt og derefter tage grænseværdien $\Delta t \to 0$ fås

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(e^{\delta \Delta t} - 1\right) J_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \sup_{(c_s,\omega_s)_{s\in[t_0,t_0+\Delta t]}} E_{t_0}\left\{ e^{\delta \Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)} u\left(c_s\right) ds + J_{t_0+\Delta t} - J_{t_0} \right\} \quad (4.16)$$

hvor leddet J_{t_0} er blevet flyttet ind i supremumparantesen og ind under forventningsoperatoren. Venstresiden er et $0/0$ udtryk, og giver ved anvendelse af

L'Hopitals regel

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(e^{\delta \Delta t} - 1 \right) J_{t_0} = J_{t_0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{d}{d\Delta t} \left(e^{\delta \Delta t} - 1 \right)}{\frac{d}{d\Delta t} \Delta t}$$
$$= \delta J_{t_0}. \tag{4.17}$$

Det første led inde i supremumparantesen på højresiden kan bestemmes ved ombytning af grænseovergange (limes ind under sup og ind under forventningsværdi). Der fås et 0/0 udtryk, som kan bestemmes vha. L'Hopitals regel,

$$\begin{aligned} h_1 &:= E_{t_0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\delta \Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)} u\left(c_s\right) ds}{\Delta t} \\ &= E_{t_0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{d}{d\Delta t} \left(e^{\delta \Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e^{-\delta(s-t_0)} u\left(c_s\right) ds \right)}{\frac{d}{d\Delta t} \Delta t} \\ &= E_{t_0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\delta \Delta t} e^{-\delta(t_0+\Delta t - t_0)} u\left(c_{t_0+\Delta t}\right) + \delta e^{\delta \Delta t} \cdot 0}{1} \\ &= E_{t_0} u\left(c_{t_0}\right) \\ &= u\left(c_{t_0}\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ved at flytte grænseovergangen $\Delta t \to 0$ ind i supremumparentesen, fås leddet

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_{t_0} \left\{ J_{t_0+\Delta t} - J_{t_0} \right\}}{\Delta t}.$$

Dette led udtrykker den forventede ændring i processen (J_t) per tidsenhed til tidspunktet t_0 og udtrykker dermed driftraten for processen (J_t). Vha. Itô's Lemma kan en infinitesimal ændring i processen (J_t) opskrives på en form, hvor driftraten kan identificeres. Fra appendix A.3 og (4.11) fås

$$\begin{aligned} J_t &:= J(W_t, t) \\ dW_t &= \left[\left(\omega_{t_0} \left(\mu - r \right) + r \right) W_{t_0} - C_{t_0} \right] dt + \omega_{t_0} \sigma W_{t_0} \epsilon_t \sqrt{dt} \\ &= \tilde{\mu}_t dt + \tilde{\sigma}_t \epsilon_t \sqrt{dt} \\ dJ_t &= \left(\frac{\partial J_t}{\partial t} + \frac{\partial J_t}{\partial W} \tilde{\mu}_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2} \tilde{\sigma}_t^2 \right) dt + \frac{\partial J_t}{\partial W} \tilde{\sigma}_i dz_t. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Jeg anvender her den mere kompakte notation J_t for $J\left(W_t, t\right)$, $\frac{\partial J_t}{\partial t}$ for $\frac{\partial J}{\partial t}\left(W_t, t\right)$ og tilsvarende for alle andre afledede funktioner. Heraf fremgår det, at driftsraten for J_t må være

$$\begin{aligned}\mu_{J_t} &:= \frac{\partial J_t}{\partial t} + \frac{\partial J_t}{\partial W}\tilde{\mu}_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\tilde{\sigma}_t^2 \\ &= \frac{\partial J_t}{\partial t} + \frac{\partial J_t}{\partial W}\left[\left(\omega_{t_0}\left(\mu - r\right) + r\right) W_{t_0} - C_{t_0}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_{t_0}^2\sigma^2 W_{t_0}^2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ligningen (4.16) er derfor ensbetydende med

$$\delta J_{t_0} = \sup_{\left(c_{t_0}, \omega_{t_0}\right)} \left\{u\left(c_{t_0}\right) + \mu_{J_t}\right\}, \tag{4.21}$$

og helt konkret,

$$\begin{aligned}\delta J_{t_0} = \sup_{\left(c_{t_0}, \omega_{t_0}\right)} \Bigg\{ & u\left(c_{t_0}\right) + \frac{\partial J_t}{\partial t} \\ & + \frac{\partial J_t}{\partial W}\left[\left(\omega_{t_0}\left(\mu - r\right) + r\right) W_{t_0} - C_{t_0}\right] \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_{t_0}^2\sigma^2 W_{t_0}^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Denne ligning kaldes Hamilton-Jacobi-Bellman-ligningen (HJB). Jeg henviser til Munk (2014) [19] for en udledning af HJB-ligningen i et mere generelt tilfælde.

Maksimeringen kan opsplittes i separate led,

$$\begin{aligned}\delta J_{t_0} &= \sup_{c_{t_0}} \left(u\left(c_{t_0}\right) - C_{t_0}\frac{\partial J_t}{\partial W}\right) \\ &\quad + \sup_{\omega_{t_0}} \left(\frac{\partial J_t}{\partial t}\omega_{t_0}\left(\mu - r\right) W_{t_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_{t_0}^2\sigma^2 W_{t_0}^2\right) \\ &\quad + \frac{\partial J_t}{\partial t} + \frac{\partial J_t}{\partial W} r W_{t_0} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ved at trække δJ_{t_0} fra på begge sider og flytte udtrykket indeni supremum-parantesen fås et udtryk, som er parallelt med (men ikke identisk med) Merton (1969) [18],

$$0 = \sup_{\left(c_{t_0}, \omega_t\right)} \varphi\left[\omega_t, C_t, W_t, t\right] \tag{4.24}$$

hvor

$$\begin{aligned}\varphi\left[\omega_t, C_t, W_t, t\right] := \Big\{ & -\delta J_t + u\left(c_t\right) + \frac{\partial J_t}{\partial t} \\ & + \frac{\partial J_t}{\partial W}\left[\left(\omega_t\left(\mu - r\right) + r\right) W_t - C_t\right] \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_t^2 \sigma^2 W_t^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

er en funktion, som har meget til fælles med Mertons ϕ.

Førsteordensbetingelsen mht. c_t for et maksimum er, at

$$0 = \varphi_c\left[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t\right] = \frac{\partial}{\partial c}\left(u\left(c_t\right) - C_t \frac{\partial J_t}{\partial W}\right),$$

og dermed at

$$u'\left(c_t\right) = \frac{\partial J_t}{\partial W}. \tag{4.26}$$

Denne betingelse kaldes *foldningsegenskaben*. Fortolkningen er, at investor skal vælge sit forbrug c_t, således at marginalnytten af at forbruge en enhed mere præcist svarer til marginal-levetidsnytten ved istedet at investere en enhed mere (således at W bliver en enhed større). Hvis investor i stedet var på et forbrugsniveau, hvor marginalnytten af forbrug var større end marginalnytten af investering, ville investor få mere ud af at forbruge den næste krone end han ville miste ved ikke at investere den. Dette virker intuitivt helt rimeligt [19, Kap. 6].

Førsteordensbetingelsen mht. ω_t for et maksimum er, at

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_\omega\left[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t\right] \\ &= \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\partial J_t}{\partial t}\omega_t\left(\mu - r\right) W_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_t^2\sigma^2 W_t^2\right), \\ &= \frac{\partial J_t}{\partial t}\left(\mu - r\right) W_t + \frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_t \sigma^2 W_t^2 \end{aligned}$$

og dermed, at

$$0 = \frac{\partial J_t}{\partial t}\left(\mu - r\right) + \frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\omega_t \sigma^2 W_t. \tag{4.27}$$

De nødvendige og tilstrækkelige betingelser for at vendepunktet for $\varphi[\omega_t, C_t, W_t, t]$ er et maksimum er, at

$$\varphi_{\omega\omega} < 0 \tag{4.28}$$

$$\varphi_{CC} < 0 \tag{4.29}$$

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_{\omega\omega} & \varphi_{\omega C} \\ \varphi_{C\omega} & \varphi_{CC} \end{bmatrix} > 0 \tag{4.30}$$

Da nyttefunktionen antages at være konkav, mao. $u''(C_t) < 0$,er første betingelse opfyldt:

$$\varphi_{CC} = u''(C_t) < 0. \tag{4.31}$$

Anden betingelse,

$$\varphi_{\omega\omega} = \frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2} \omega_t \sigma^2 W_t^2 < 0, \tag{4.32}$$

holder hvis og kun hvis J_t er strengt konkav i W_t, dvs. $\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}$. Det er derfor også en betingelse for løsningen af problemet, at J_t bliver strengt konkav. Givet konkaviteten af både nyttefunktionen og den indirekte nytte, holder tredje betingelse også,

$$\varphi_{\omega\omega}\varphi_{CC} - \varphi_{C\omega}\varphi_{\omega C} = \varphi_{\omega\omega}\varphi_{CC} - 0 > 0. \tag{4.33}$$

4.6.1 Om løsning for en generel nyttefunktion

Analysen ovenfor viser, at en grådig og risikoavers investor i det givne modelsetup maksimerer sin forventede levetidsnytte ved at vælge en investeringsstrategi (c_t^*, ω_t^*) som sikrer, at

- Førsteordensbetingelserne $0 = \varphi_C[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t] = 0 = \varphi_\omega[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t]$ er opfyldt.
- Funktionen φ antager værdien nul, $\varphi[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t] = 0$.
- Randbetingelsen $J_T = \bar{u}(W_T)$ er opfyldt.
- At J_t antager reelle værdier og er strengt konkav i W_t, dvs. $\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}$.

- At løsningen indebærer reelle, ikke-negative forbrug, $C_t \geq 0$, og reelle, strengt positive størrelser af formuen, $W_t > 0$.

Ligningerne som de to førsteordensbetingelser giver er algebraiske og giver som beskrevet ω_t^* og C_t^* udtrykt i den ukendte indirekte nyttefunktion, $J_t = J\left[W\left(t\right), t\right]$. Den partielle, ikke-lineære differentialligning $\varphi\left[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t\right] = 0$ udtrykker en sammenhæng mellem forskellige partielt afledede af den indirekte nyttefunktion og de øvrige størrelser. Dette ligningssystem er ikke løst i form af lukkede formeludtryk for en generel, konkav nyttefunktion. Kun for få nyttefunktioner er der udledt analytiske løsninger, jf. Munk (2014) [19, Kap. 6].

Som beskrevet i indledningen vil jeg afgrænse mig til at undersøge tilfældet, hvor investors præferencer er beskrevet af en CRRA-nyttefunktion.

4.6.2 Løsning i tilfældet CRRA-nytte

Af ligningerne (4.26) og (4.27) fås hhv. det optimale forbrug, C_t^*, og den optimale aktieandel, ω_t^*, udtrykt i den ukendte indirekte nyttefunktion, $J_t = J\left[W\left(t\right), t\right]$.

Jeg antager en én-periode-nyttefunktion for forbrug samt en terminalnyttefunktion for terminalformuen givet ved CRRA-nyttefunktioner, multipliceret med vægte, ϵ_1 og ϵ_2 hvis forhold giver investors generelle vægtning af nytten af forbrug kontra nytten af terminalformue,

$$\begin{aligned} u\left(c_t\right) &= \epsilon_1 \frac{1}{\gamma} c_t^{\gamma} \\ \bar{u}\left(W_T\right) &= \epsilon_2 \frac{1}{\gamma} W_T^{\gamma}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

som også kan udtrykkes

$$\begin{aligned} u\left(c_t\right) &= \epsilon_1 \frac{1}{1-\eta} c^{1-\eta} \\ \bar{u}\left(W_T\right) &= \epsilon_2 \frac{1}{1-\eta} W_T^{1-\eta}. \end{aligned}$$

hvor $\eta = 1 - \gamma = RRA(c_t)$ er den relative risikoaversionskoefficient, som netop er konstant for en investor med CRRA-nyttefunktion, jf. (2.14) i kapital (2.1.5).

Specielt antages altså samme relative risikoaversionskonstant på forbrug og terminalformue.

Indsættelse af nyttefunktionen (4.34) i ligningen for foldningsegenskaben (4.26) og løsning mht. forbruget giver det optimale forbrug

$$c_t^* = \left[\frac{1}{\epsilon_1}\frac{\partial J_t}{\partial W}\right]^{1/(\gamma-1)}. \tag{4.35}$$

Indsættelse af nyttefunktionen i den anden førsteordensbetingelse, (4.27), og løsning mht. aktieandelen, giver den optimale aktieandel

$$\omega_t^* = -\frac{(\mu - r)\,\partial J_t/\partial W}{W\sigma^2 \partial^2 J_t/\partial W^2}. \tag{4.36}$$

Dette er et hovedresultat i min undersøgelse. Efter at have bestemt den indirekte nyttefunktion vil jeg vende tilbage til aktieandelen, som udtrykkes helt eksplicit med (4.49) og derefter diskuteres.

Indsættelse af disse optimale værdier af forbrug og aktieandel i $\varphi\left[\omega_t^*, C_t^*, W_t, t\right]$ gør, at funktionen antager sin maksimumværdi nul, m.a.o.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi\left[\omega_t^*, c_t^*, W_t, t\right] \\
&= -\delta J_t + \epsilon_1 \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\frac{\partial J_t}{\partial W}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{\partial J_t}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial J_t}{\partial W}\left[\left(-\frac{(\mu - r)\,\partial J_t/\partial W}{W\sigma^2 \partial^2 J_t/\partial W^2}(\mu - r) + r\right) W_t - \left[\frac{1}{\epsilon_1}\frac{\partial J_t}{\partial W}\right]^{1/(\gamma-1)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_t}{\partial W^2}\left(-\frac{(\mu - r)\,\partial J_t/\partial W}{W\sigma^2 \partial^2 J_t/\partial W^2}\right)^2 \sigma^2 W_t^2.
\end{aligned}$$

Ligningen kan reduceres til [8]

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\partial J_t}{\partial W}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \epsilon_1^{1/(1-\gamma)}\frac{1-\gamma}{\gamma} + \frac{\partial J_t}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial J_t}{\partial W} rW - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\frac{\left[\partial J_t/\partial W\right]^2}{\partial^2 J_t/\partial W^2} - \delta J_t.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

[8]Her er flg. omskrivning benyttet,

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} - \left[\frac{1}{\epsilon_1}\right]^{1/(\gamma-1)} &= \left[\frac{1}{\epsilon_1}\right]^{1/(\gamma-1)}\left(\epsilon_1\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\right]^{1} - 1\right) \\
&= \epsilon_1^{1/(1-\gamma)}\frac{1-\gamma}{\gamma}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Denne ligning er HJB ligningen med de indsatte førsteordensbetingelser. Ligningen er en ikke-lineær, partiel differentialligning, som ikke umiddelbart kan løses analytisk. I et forsøg på at transformere ligningen til en simplere ligning, er det her sædvanlig praksis at komme med et gæt på en form, som funktionen J_t antager og så undersøge konsekvenserne af denne form. Merton (1969) [18] hiver - populært sagt - en testløsning (trial solution) op af hatten, som viser sig brugbar. Munk (2014) [19] kommer med et kvalificeret gæt som baserer sig på et argument om lineariteten af formuedynamikken og omskrivning af den forventede nyttefunktion. Jeg vil her forsøge at komme med et andet argument, som er mere simpelt i sit udgangspunkt, men som ellers følger samme idé som Munks. Først observeres at begge én-periode-nyttefunktioner er potensfunktioner med samme eksponent γ. Hvis argumentet skaleres op (uanset om det er forbrug eller terminalformue) med en faktor k, vil nytteværdien heraf blive skaleret op med en faktor k^γ. Uden at vide hvordan en opskalering af tidspunkt t-formuen med en faktor, k, vil påvirke investors forbrugs- og investeringsplan, kan et simpelt gæt være, at den indirekte nytteværdi samlet set skalerer op med samme faktor, k^γ. Fortolkningen heraf er, at gøres tidspunkt t-formuen k gange større, så bliver investors forventede levetidsnytte set fra tidspunkt t lige så mange gange større som:

- Investors nytte af forbrug i én (infinitesimal) tidsperiode ville blive større ved et k gange så stort forbrug,

eller som

- Investors nytte af terminalformuen ville blive større ved en k gange så stor terminalformue.

Idet der er antaget en form af nytte for forbrug og terminalformue, som skalerer ens, virker det rimeligt, at den indirekte nytte skalerer på samme måde (givet lineariteten af integralet).

I så fald er

$$\frac{J(kW,t)}{J(W,t)} = \frac{u(kW)}{u(w)} = \frac{\bar{u}(kW)}{\bar{u}(w)} = \frac{\epsilon_i \frac{1}{\gamma}(kW)^\gamma}{\epsilon_i \frac{1}{\gamma}(W)^\gamma} = k^\gamma \tag{4.39}$$

hvor jeg har været nødsaget til at ændre notationen for argumentet for J for at kunne vise en ændring kun i formuen og ikke i tiden. Heraf fås

$$J(W,t) = \left(\frac{1}{k}\right)^\gamma J(kW,t) \tag{4.40}$$

Det er oplagt at prøve at evaluere udtrykket ved terminaltidspunktet T, da vi her ved, at venstresiden skal være $J(W(T),T) = \epsilon_2 \frac{1}{\gamma} W_T^\gamma$. For at kunne relatere dette til højresiden er det smart at vælge skalafaktoren $k = 1/W$, så første faktor på højresiden bliver W_T^γ, samt at sætte faktoren $1/\gamma$ udenfor.

$$J(W,t) = \frac{1}{\gamma} W^\gamma J(1,t) \cdot \Big(\gamma J(1,t)\Big) = \frac{1}{\gamma} W^\gamma \cdot b(t) \tag{4.41}$$

hvor funktionen $b(t) := \gamma W(1,t)$. Evaluering i terminaltidspunktet T giver, at $b(T) = \epsilon_2$. Dette efterlader os med en testløsning,

$$\bar{J}(W,t) = b(t)\frac{1}{\gamma}W^\gamma.$$

Det er nu muligt at gå tilbage til den simple notation, hvor kun det ene argument vises for J, og hvor formuen til tidspunkt t skrives W_t . Denne notation anvendes i resten af opgaven. Testløsningen bliver med denne notation

$$\bar{J}_t = b(t)\frac{1}{\gamma}W_t^\gamma, \tag{4.42}$$

for en ukendt funktion $b(t)$, som opfylder randbetingelsen $b(T) = \epsilon_2$.

Det viser sig, at HJB-ligningen, som er en ikke-lineær partiel differentialligning ved indsættelse af denne testløsning reducerer til en ordinær differentialligning. Testløsningen (4.42) er - omend den står på en lidt anden form - identisk med den i Munk (2014) men adskiller sig fra Mertons (1969). Det er Mertons lidt alternative formulering af det dynamiske programmeringsproblem som gør, at han har brug for en ekstra tidsafhængig faktor her for at randbetingelsen ved terminaltidspunktet T giver, at $b(T)$ bliver lig en konstant[9].

[9] I Merton (1969) er $B\left[W(T),T\right] := \epsilon^{1-\gamma}e^{-\rho T}\frac{[W(T)]^\gamma}{\gamma}$. Med testløsningen $\bar{I}_t\left[W_t,t\right] = b(t)\frac{1}{\gamma}e^{-\rho t}\left[W_t\right]^\gamma$ giver randbetingelsen, at $b(T) = \epsilon^{1-\gamma}$. Faktoren $e^{-\rho t}$ i testløsningen går ud med den tilsvarende faktor i B.

Indsættelse af testløsningen(4.42) i HJB-ligningen med de indsatte førsteordensbetingelser, (4.38), giver flg. ligning i funktionen $b(t)$,

$$\begin{aligned}0 = &\left[\frac{b(t)}{\gamma}\gamma W^{\gamma-1}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \epsilon_1^{1/(1-\gamma)} \frac{1-\gamma}{\gamma} \\ &+ \frac{b'(t)}{\gamma}[W_t]^\gamma + \frac{b(t)}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(W_t^\gamma) \\ &+ \frac{b(t)}{\gamma}\gamma[W_t]^{\gamma-1} rW_t - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\frac{\left[\frac{b(t)}{\gamma}\gamma[W_t]^{\gamma-1}\right]^2}{\frac{b(t)}{\gamma}\gamma(\gamma-1)[W_t]^{\gamma-2}} \\ &- \delta\frac{b(t)}{\gamma}[W_t]^\gamma . \end{aligned} \tag{4.43}$$

Løsningen af denne ligning er omfattende og omfatter bl.a. løsning af en Bernoulli-differentialligning. Jeg henviser til min løsning i appendix A.4. Givet at den indirekte nytte kan skrives som (4.42) for en passende funktion $b(t)$, har vi nu fundet ud af, at funktionen $b(t)$ skal være givet ved (A.17) for at HJB-ligningen er opfyldt. Dette betyder, at testløsningen og dermed vores kandidat til den indirekte nyttefunktion er

$$\bar{J}_t = \epsilon_1 \left\{ \frac{1}{\nu_0} \left[1 + \left(\nu_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^{1/(\gamma-1)} - 1 \right) e^{\nu_0 (t-T)} \right] \right\}^{1-\gamma} \frac{1}{\gamma} W_t^\gamma \tag{4.44}$$

Vi skal nu undersøge, om $\bar{J}(W,t)$ udover at løse HJB-ligningen også opfylder de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for at være løsning til investeringsproblemet, se kapitel (4.6.1).

Det er klart udfra løsningen, at $\bar{J}(W,t)$ kun antager reelle værdier (og ikke komplekse).

At formuen på alle tidspunkter er ikke-negativ følger af at indsætte udtrykkene for det optimale forbrug og den optimale aktieandel i formuedynamikken dW (4.11) og observere, at W_t følger en geometrisk Brownsk process (ligesom aktiepriserne gør i vores model). Fra (3.15) haves at W_t er log-normalfordelt. Dermed er specielt $W_t > 0$. At det optimale forbrug (4.35) er ikke-negativt ses ved

$$\begin{aligned}
c_t^* &= \left[\frac{1}{\epsilon_1}\frac{\partial \bar{J}_t}{\partial W}\right]^{1/(\gamma-1)} \\
&= \left[\frac{1}{\epsilon_1} b(t) W_t^{\gamma-1}\right]^{1/(\gamma-1)} \\
&= \epsilon_1^{1/(1-\gamma)} b(t)^{1/(\gamma-1)} W_t \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

hvor ulighedstegnet følger af at $\epsilon_1 > 0$, $b(t)^{1/(\gamma-1)} \geq 0$ og $W_t \geq 0$. Første ulighed følger pr. definition, da nytteværdien af forbrug er positiv. Andet ulighed kan ved monotoniundersøgelse vises at holde for alle endelige værdier af terminaltidspunktet T, se eks. Munk (2014) [19].

At $\bar{J}_t$ er strengt konkav i W ses af følgende,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{J}_t}{\partial W^2} &= b(t)\left(\gamma-1\right) W_t^{\gamma-2} \\
&< 0,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

hvor ulighedstegnet følger af at $b(t) \geq 0$, $W_t \geq 0$, og da vi har antaget, at $\gamma < 1$ og dermed $\gamma - 1 < 0$.

At $\bar{J}_t$ opfylder randbetingelsen følger per konstruktion af $\bar{J}_t$, men kan fint tjekkes:

$$\begin{aligned}
\bar{J}_T &= \epsilon_1 \left\{ \frac{1}{\nu_0}\left[1 + \left(\nu_0\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} - 1\right) e^{\nu_0(T-T)}\right]\right\}^{1-\gamma} \frac{1}{\gamma} W_T^{\gamma} \\
&= \epsilon_1 \left\{ \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} \right\}^{1-\gamma} \frac{1}{\gamma} W_T^{\gamma} \\
&= \epsilon_2 \frac{1}{\gamma} W_T^{\gamma} \\
&= \bar{u}\left(W_T\right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$\bar{J}_t$ løser HJB-ligningen og opfylder kravene for at være en løsning til investeringsproblemet. Det optimale forbrug er

$$\begin{aligned} c_t^* &= \left[\frac{1}{\epsilon_1} b(t) W_t^{\gamma-1}\right]^{1/(\gamma-1)} \\ &= \nu_0 \left[1 + \left(\nu_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} - 1\right) e^{\nu_0(t-T)}\right]^{-1} W_t, \end{aligned}$$

og dermed

$$c_t^* = \nu_0 \left[1 + \left(\nu_0 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^{1/(1-\gamma)} - 1\right) e^{-\nu_0(T-t)}\right]^{-1} W_t. \tag{4.48}$$

Den optimale aktieandel er

$$\begin{aligned} \omega_t^* &= -\frac{(\mu - r)\, \partial J_t / \partial W}{W_t \sigma^2 \partial^2 J_t / \partial W^2} \\ &= -\frac{(\mu - r)}{W_t \sigma^2} \frac{k \cdot \gamma W_t^{\gamma-1}}{k \cdot \gamma (\gamma - 1) W_t^{\gamma-2}} \end{aligned}$$

og dermed

$$\omega_t^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 (1 - \gamma)\,.} \tag{4.49}$$

Den optimale forbrugs- og allokeringsplan for investor er således, $(c_t^*, \omega_t^*)_{t \in [0,T]}$ med c_t^* og ω_t^* givet som ovenfor.

4.7 Optimal aktieandel for investor

I lyset af problemets stokastiske natur ville det være forventeligt, at den optimale plan for såvel forbrug som allokering ville være således, at det optimale forbrug og allokering til hvert tidspunkt afhang af formuens størrelse til det pågældende tidspunkt. Men overraskende viser det sig, at den optimale allokering kvantificeret ved aktieandelen er konstant over tid. Uanset hvordan aktiekursen (økonomien) udvikler sig, og formuen udvikler sig, og uanset at tiden går, så skal den rationelle investor holde den samme aktieandel,

$$\omega_t^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 (1 - \gamma)}, \tag{4.50}$$

eller udtrykt i den relative risikoaversionskoefficient,

$$\omega_t^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 \eta}. \tag{4.51}$$

Specielt afhænger aktieandelen ikke af investeringshorisonten. Dette er i modstrid med det gængse investeringsråd om, at investorer med lang investeringshorisont skal holde en større aktieandel. Inden for rammerne af denne model kan investeringsrådet dermed forkastes. Alt andet lige skal en investor med lang investeringshorisont if. modellen holde præcis samme aktieandel, som hvis vedkommende havde haft en kort investeringshorisont.

Den optimale aktieandel er uafhængig af investors formue. Dette hænger sammen med antagelsen om CRRA-nytte og dermed antagelsen om en konstant relativ risikoaversion. Når aktieandelen er konstant i formuen betyder det, at positionen i aktieindekset målt i kroner-øre er voksende i formuen.

Rebalancering af porteføljen spiller en væsentlig rolle. Hvis aktieafkastet over en (infinitesimal) periode er større end det risikofrie obligationsafkast, så vil aktiebeholdningen vokse sig forholdsmæssigt større over denne periode. For fortsat at holde den optimale aktieandel, skal investor sælge et antal aktier og investere denne kapital rikofrit, så andelen af aktier igen udgør ω_t^*. I og med at modellen her er en kontinuert-tids-model, skal denne rebalancering ske kontinuert i tid. I og med at vi med rebalanceringen løbende har nedbragt det absolutte antal af aktier, betyder det, at vi sælger aktieindekset, når det er opadgående. Omvendt skal vi if. modellen købe op i aktieindekset, når det er nedadgående, igen for at holde aktieandelen på den optimale værdi, ω_t^*. Dette er den velkendte *"sell winners, buy loosers"* strategi. Denne strategi adskiller sig markant fra en alternativ strategi om at købe aktier, som er i en opadgående trend. Sidstnævnte baserer sig på en præmis om, at der er momentum i aktiekursen. I afkastmodelleringen her i opgaven har jeg antaget, at aktieafkast over en periode er uafhængig af aktieafkast over alle andre perioder. Dermed er der i modellen ikke den autokorrelation (korrelation af aktiekurser over tid), som er nødvendig for at forklare momentum i kurserne. Det giver derfor mening, at den optimale strategi ikke indeholder momentum-effekter. Lad os betragte en investor, som i øjeblikket lider et tab på sin lange position i aktieindekset. If.

modellen skal han løbende købe op i aktieindekset for at holde den optimale aktieandel. Undlader han at købe op, vil hans aktieandel være alt for lav, hvorfor han samlet set eksponeres for en for lav risiko og ultimativt får en forventet nytte, som er lavere end det maksimale niveau, han ville nå ved at følge den optimale investeringsstrategi og købe op.

Aktieandelen er aftagende i investors risikoaversion, udtrykt ved den relative risikoaversionskonstant $\eta = 1-\gamma$. At investorer med høj risikoaversion alt andet lige skal have en lavere aktieandel og højere obligationsandel er helt i tråd med almindelig intuition.

Endvidere fås en afhængighed af merafkast og risiko, som er helt tilsvarende resultatet fra middelværdi-varians analysen, se (2.2.3). Jo højere det forventede merafkast (excess return) er for aktieindekset, desto højere aktieandel skal investor have, alt andet lige. Og jo højere aktievolatilitet, desto lavere aktieandel, alt andet lige. Disse to egenskaber er væsentlige for validiteten af modellen og undersøgelsen. Vi ville have meget vanskeligt ved at acceptere en model, som ikke var i overensstemmelse hermed.

Den optimale aktieandel afhænger ikke af ϵ_1 og ϵ_2, og dermed ikke af, hvordan investor generelt set vægter forbrug i forhold til terminalformue. En investor, som udelukkende har nytte af terminalformuen (og ikke af forbrug), skal altså holde samme aktieandel som en investor, der har nytteværdi af såvel forbrug som terminalformue.

4.8 Kritik af løsningen

Jeg har i analysen af det intertemporale problem antaget, at investors tidshorisont T var givet, og dermed at den var både velkendt og fast. Som beskrevet er det oplagt at se tidshorisonten som investors levetid i og med, at det i modellen antages, at nytteværdien af forbrug er nul for $t > T$. Idet den optimale aktieandel for investor er konstant og uafhængig af investeringshorisonten, er det derfor ikke et problem, at investor ikke kender sin levetid. Men det kunne jo være, at investor har en tidshorisont for terminalformuen, som er kortere end investors levetid, og hvor investor også har nytte af forbrug efter denne tidshorisont. Eks. en investor som forventer, at han om 20 år skal betale for universitetsuddannelse for sit barn. Eller en investor som ved sin pension om 10 år ønsker at have penge til en dyr jordomrejse, hvor nytten heraf falder udenfor den almindelige nytte som investor har af forbrug. Modellen, der er anvendt i denne opgave, er formentlig ikke en god model til at beskrive sådanne investorer. Man kan ikke uden videre overføre konklusionen om den konstante, optimale aktieandel - det kræver en nærmere analyse af situationen.

Hver af de mange afgrænsninger beskrevet i kapitel 1 reducerer den såkaldte økologiske validitet af modellen, idet de reducerer graden, med hvilken modellen approksimerer den virkelige verden. Listen omfatter bl.a. betydningen af løbende indkomst, tidsvariende investeringsmuligheder, human kapital, renteusikkerhed, inflationsusikkerhed, afkastdynamik med mulighed for momentumeffekter, boligøkonomiske aspekter og præference ang. minimumsformue (eksistensmimimum). Hvordan disse ting spiller ind og ikke mindst følsomheden, som den optimale aktieandel har overfor hver af disse ting, kræver særskilte analyser.

Lad os som et enkelt eksempel betragte human kapital, nutidsværdien af al fremtidige lønindkomst. En investor må antages at bekymre sig om risiko og afkast på sin samlede (effektive) position. Ved fravær af indkomst for investor antages hans optimale aktieandel at være 20%. Dersom humankapitalen kan modelleres som svarende til en position, som er en kombination af aktier og risikofri investering, betyder det, at investor skal regne disse dele med i hhv. sin effektive aktiebeholdning og risikofri inv. Antag som eksempel at humankapitalen til ethvert tidspunkt svarer til en kombinationsportefølje af 50% aktier og 50% risikofri inv. Som tiden går, falder investors humankapital. Investor ønsker en risiko på sin samlede (effektive) position svarende til en aktieandel på 20%. Initialt skal investor investere mindre end 20% af sin investeringsportefølje i

aktier for at opveje, at humankapitalens del af formuen har en aktieandel på over 20%. Ved pension skal investors position i markedet være 80/20, da der ikke længere skal kompenseres for en 'skævhed' stammende fra humankapitalen. Dette betyder, at investor i løbet af sit arbejdsliv skal *øge* aktieandelen i investeringsporteføljen, i takt med at humankapitalen afvikles. Dette går stik imod det gængse investeringsråd. Tager investor ikke hensyn til sin humankapital og holder initialt en 80/20 sammensætning i sin finansielle portefølje, så vil investor i virkeligheden være overeksponeret for risiko.
Antager man at investor ønsker en risiko svarende til 80% aktier livet igennem, bliver konklusionen dog modsat: Så skal investor løbende nedbringe sin finansielle position i aktier, i takt med at der skal kompenseres mindre for humankapitalens for lille risiko. Dette er ikke en stringent behandling, men det sætter alligevel konklusionen om en konstant aktieandel i perspektiv. Eksemplet viser, at det tyder på, at inddragelse af humankapital kan forventes at resultere i en tidsafhængig optimal aktieandel.

Det begrænser anvendeligheden af resultatet, at vi på præferencesiden har antaget CRRA-én-periode-nyttefunktioner, og dermed ikke løst problemet for enhver form for investorpræference. CRRA-nytte er med dens konstante relative risikoaversion i overvejende omfang en god model for den gængse investors præferencer. I det omfang, at den virkelige nyttefunktion kan opfattes som en mindre afvigelse fra CRRA-nyttefunktionen, kan man forvente, at den optimale aktieandel ligeledes kun er en mindre afvigelse i forhold til det resultat, vi her har opnået.

På trods af disse kritikpunkter må den intertemporale model siges, at være en fornuftig model og dermed anvendelig i praksis. Den har egenskaber, som er i overensstemmelse med, hvad man intuitivt vil forvente: At aktieandelen er voksende i det forventede merafkast og aftagende i investors risikoaversion, alt andet lige.

Kapitel 5

Konklusion og perspektivering

Ifølge middelværdi-varians-analysen er den optimale aktieandel for en grådig, risikoavers investor givet ved

$$\omega^* = \frac{\mu - r_f}{\gamma\sigma^2}. \tag{5.1}$$

Den optimale aktieandel er voksende i det forventede merafkast og aftagende i investors risikoaversion. Modellen håndterer investors afvejning af afkast og risiko. Middelværdi-varians-analysen er en én-periode-model og forholder sig ikke til den problemstilling, at investor kan have en investeringshorisont, som er længere end denne periode og heller ikke til, at investor kunne tænkes at ville rebalancere sin portefølje i løbet af perioden. Det er på ingen måde givet, at en investor med en 10-årig investeringshorisont på en simpel måde skulle kunne bryde investeringsspørgsmålet ned til et spørgsmål om eksempelvis ti uafhængige 1-årige én-periode-problemer. Af denne grund er middelværdi-varians-analysen uegnet til at undersøge, hvorledes den optimale aktieandel afhænger af investeringshorisonten.

Sandsynligheden for at aktieindekset outperformer et obligationsindeks kan bestemmes for forskellige investeringshorisonter, T. Outperformancesandsynligheden er, givet en række forudsætninger om afkastdynamikken, lig med

$$OPSSH = \Phi\left(\frac{\mu - \sigma^2/2 - r}{\sigma}\sqrt{T}\right),$$

hvor Φ er fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen. Outputsandsynligheden er voksende i T. Ud fra en tankegang om at større sandsynlighed for outperformance alt andet lige må betyde, at det er optimalt med en større aktieandel, kunne det tyde på, at investor med længere tidshorisont skal vælge en større aktieandel. Men denne tankegang fejler ved ikke at tage højde for, at sandsynligheden for meget store tab ligeledes vokser. At investor kun skulle bekymre sig om outperformancesandsynlighed (og ikke ting som risikoen for store tab) er en alt for simpel beskrivelse af investors præferencer til at være en god model for virkelige investorer. Som en model til at beskrive valg af optimal aktieandel må validiteten derfor siges at være meget lav. Modellen mangler dét vigtige element som består i investors afvejning af upside og downside.

Den intertemporale model tager højde for investors afvejning af afkast og risiko over tid. Resultatet af undersøgelsen er, at den optimale aktieandel til ethvert tidspunkt er

$$\omega^* = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 (1 - \gamma)}, \tag{5.2}$$

hvor $1 - \gamma = \eta$ er den konstante relative risikoaversion. Som i middelværdivarians-analysen er den optimale aktieandel også her overordnet set voksende i det forventede merafkast og aftagende med investors risikoaversion. Det er bemærkelsesværdigt, at den optimale aktieandel ikke afhænger af tidshorisonten. Den afhænger heller ikke af formuestørrelsen, hvormed den så implicit ville afhænge af tidshorisonten. Den optimale aktieandel for investor er således konstant. Den intertemporale model har i modsætning til de to andre modeller høj validitet i forhold til at kunne svare på spørgsmålet om aktieandelens afhængighed af tidshorisonten. Modellen er funderet i forventet nytteteori og tager i sin konstruktion højde for det tidsmæssige perspektiv.

Hovedkonklusionen på undersøgelsen i denne opgave er flg.:

> En investor med lang tidshorisont skal *ikke* have en større aktieandel end en tilsvarende investor med en kortere tidshorisont. Den optimale aktieandel er konstant og givet ved $\omega^* = (\mu - r) / \left(\sigma^2 (1 - \gamma)\right)$.

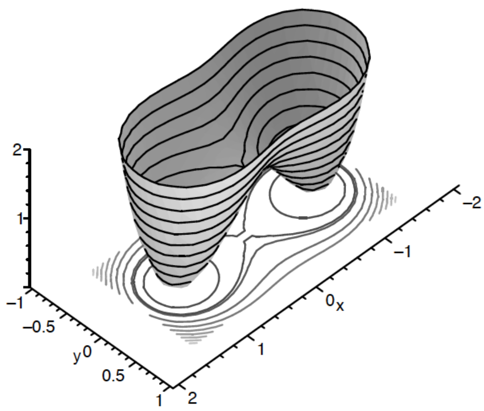
Resultatet (5.2) må dog forventes at være følsomt overfor tilføjelsen af de ting, jeg har afgrænset mig fra at beskrive. Et simpelt argument, beskrevet i kapitel 4.8, viser, at inkludering af humankapital vil kunne ændre den optimale aktieandel både i opadgående og nedadgående retning afhængig af investors risikoprofil. En valid konklusion kræver en mere stringent behandling, som ligger uden for rammerne af denne opgave. Men eksemplet sætter konklusionen om en konstant aktieandel i perspektiv og motiverer, at inddragelse af humankapital kan forventes at resultere i en optimal aktieandel, som er tidsafhængig. Tilsvarende kan inddragelse af ting som løbende indkomst, tidsvariende investeringsmuligheder, renteusikkerhed, inflationsusikkerhed, boligøkonomiske aspekter og præference ang. minimumsformue (eksistensmimimum) forventes at ændre på, hvad der er den optimale aktieandel, og herunder om og hvordan den afhænger af investeringshorisonten.

Bilag A

Bilag

A.1 Formalisering af begrebet indifferenskurver

I og med at investors præference for en portefølje (per antagelse) er givet alene ved porteføljens forventede afkast og risiko, kan præferencen modelleres som en funktion af to variable $f(\sigma, E[r])$. Funktionsværdien $f(\sigma, E[r])$ udtrykker indexnummeret på den indifferenskurve, som porteføljen ligger på og kan afbildedes som en tredimensionel flade i et standardafvigelse-middelværdi-præference diagram. I $(\sigma, E[r])$-planen kan man danne niveaukurver for denne flade. En ni-



Figur A.1: Eksempel på graf og niveaukurver for en funktion af to variable, $f(x,y) = ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2)$. Der er her ikke tale om en funktion, som udtrykker økonomiske præferencer af nogen art. Funktionen er valgt udelukkende for at illustrere niveaukurver. Kilde: Solovej (2001) [32, Kap. 1.2].

veaukurve består af de sammenhørende værdier for risiko og forventet afkast, som alle giver samme præferenceniveau, og som investor dermed har identiske præferencer for og er indifferent imellem, dvs.

$$f(\sigma, E[r]) = c$$

for et præferenceniveau $c \in Vm(f)$. Niveaukurverne kaldes derfor indifferenskurver og har den fordel, at de kan repræsenteres i $(\sigma, E[r])$-planen. Her kan også de mulige investeringer repræsenteres ved deres varians og forventede afkast - igen givet antagelsen om at kun disse to størrelser er af betydning i enhver investors vurdering af investeringens fordelagtighed. Niveaukurverne kan om ikke nummereres så indekseres, så et højere nummer svarer til større præference.

A.2 Tangentpunktet mellem CML og en indifferenskurve

Bevis for at det optimale valg for en middelværdi-varians investor er punktet i $(\sigma, E[r])$-planen, hvor CML tangerer en indifferenskurve

Dette kan vises ved anvendelse af Lagranges metode. Se bl.a. Solovej (2001) [32] for en udelukkende matematikfaglig gennemgang af Lagranges metode. Indifferenskurver er per konstruktion niveaukurver for en funktion $f = f(\sigma, E[r])$, der rangordner investors præference for investeringer med forskellig risiko og forventet afkast. For et indexeret indifferenskurvesæt hvor indenummeret rangordner investors præferencer for forskellige indifferenskurver, kan $f(\sigma, E[r])$ opfattes som indexnummeret tilhørende den indifferenskurve som en bestemt portefølje $(\sigma, E[r])$ ligger på. M.a.o. er det bare numre på indifferenskurven. Nyttefunktioner afhænger i forventet nytteteori af formuen (eller forbrug), og det er forventningsværdien af denne, som kan afhænge af σ og højere ordens momenter. Det kan dog vises, at funktionen f hænger sammen med en nyttefunktion. Jeg vil her anvende de løse begreber preferencefunktion for f og preferenceniveau for ethvert $c \in Vm(f)$. Da vil $f(\sigma, E[r]) = c$ beskrive den indifferenskurve i $(\sigma, E[r])$-planen, som svarer til præferenceniveauet c. Investor ønsker at maksimere præferenceniveauet og dermed maksimere f. Tobins separationssætning giver, at det er nok at maksimere f over mængden af punkter på CML, da disse porteføljer dominerer alle andre mulige porteføljer. CML kan omformuleres til $g(\sigma_C, E[r_C]) := E[r_C] - \frac{E[r_{\tan}] - r_f}{\sigma_{\tan}} \cdot \sigma_C = r_f$. Ved at lade funktionen g være defineret som vist her, kan CML beskrives som en niveaukurve for g. At investor er præferencemaksimerende betyder, at vedkommende vælger en portefølje, som er et ekstremumspunkt for f på niveaumængden for g. Anvendelse af Lagranges metode kræver, at f og g er kontinuert differentiabel. Af definitionen af g ses, at g er kontinuert differentiabel. Hvad angår f må det stå som en antagelse, at nyttefunktionen skal være 'pæn' i den forstand, at den har partielt afledede $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}$

og $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial E[r]}$ overalt i sin definitionsmængde, og at disse funktioner er kontinuerte. Da giver Lagranges metode, at de mulige kandidater er de porteføljer, som opfylder, at $\nabla g\left(\sigma_C, E[r_C]\right) = 0$ eller $\nabla f\left(\sigma_C, E[r_C]\right) = \lambda \nabla g\left(\sigma_C, E[r_C]\right)$. Første ligning giver $\nabla g\left(\sigma_C, E[r_C]\right) = \left(-\frac{E[r_{\tan}]-r_f}{\sigma_{\tan}}, 1\right) = (0,0)$ og har ingen løsning. Anden ligning $\nabla f = \lambda \nabla g$ udtrykker, at de to gradienter ∇f og ∇g er parallelle. Dermed er også niveaukurverne for f og g parallelle [32, Sætning 1.2.14] i de punkter, som er kandidater til at være præferencemaksimerende porteføljer. M.a.o. er indifferenskurverne og CML parallelle i de punkter, som er kandidater som præferencemaksimerende porteføljer. Eksistens og entydighed afhænger af den konkrete udformning af indifferenskurverne (og CML). Dette spørgsmål vil jeg ikke gå ind i her men blot nøjes med at bemærke, at det specielt har at gøre med konveksiteten af og den positive hældning på indifferenskurverne, som følger af aftagelserne om risikoaversion og om ikke-mætning.

A.3 Itô's Lemma

Itô's lemma generaliserer kædereglen i differentialregningen til tilfældet hvor en funktion afhænger af en stokastisk Itô-proces og tiden. Jeg gengiver her formuleringen fra Munk (2014) [19]. Lad $X_t = (X_t)_{t\geq 0}$ være en Itô-proces som antager reelle værdier, og som har dynamikken

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dz_t,$$

hvor μ_t og σ_t er processer som antager reelle værdier, og z er en en-dimensional standard Brownsk bevægelse. Lad $g(X, t)$ være en reel funktion som er to gange kont. diff. i X og kont. diff. i t. Itô's Lemma siger nu, at processen $Y_t = (Y_t)_{t\geq 0}$ defineret ved

$$Y_t := g(X_t, t)$$

er en Itô-proces med dynamik

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial g}{\partial X}(X_t, t)\,\mu_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(X_t, t)\,\sigma_t^2\right) dt + \frac{\partial g}{\partial X}(X_t, t)\,\sigma_i dz_t. \tag{A.1}$$

A.4 Løsning af HJB-ligningen i termer af b(t)

Jeg vil her løse HBJ-ligningen (4.43) i termer af $b(t)$, m.a.o. undersøge hvad der skal gælde om $b(t)$ for at testløsningen er en løsning til HJB-lignignen.

Ved at samle led som indholder faktorerne $b'(t)$, $b(t)$ og $[b(t)]^{\gamma/(\gamma-1)}$ og dividere med $[W_t]^\gamma$ fås

$$0 = b'(t) \cdot \frac{1}{\gamma} + b(t) \cdot \left\{ r - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{\delta}{\gamma} \right\} + [b(t)]^{\gamma/(\gamma-1)} \epsilon_1^{1/(1-\gamma)} \frac{1-\gamma}{\gamma} \tag{A.2}$$

Isolering af $b'(t)$ og lidt omarrangering giver

$$b'(t) = b(t) \cdot \left\{ \delta - \gamma \left[\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2 (1-\gamma)} + r \right] \right\} - (1-\gamma) \epsilon_1^{1/(1-\gamma)} [b(t)]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{A.3}$$

Lad $\bar{\mu}$ betegne konstanten i den krøllede parentes, dvs.

$$\bar{\mu} := \left\{ \delta - \gamma \left[\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2 (1-\gamma)} + r \right] \right\}.$$

Da kan (A.3) udtrykkes

$$b'(t) = \bar{\mu} \cdot b(t) - (1-\gamma) \epsilon_1^{1/(1-\gamma)} [b(t)]^{-\gamma/(1-\gamma)} \tag{A.4}$$

svarende til ligning (23) i Merton (1969) [18] eller som

$$b'(t) + (-\bar{\mu}) \cdot b(t) = (\gamma - 1) \epsilon_1^{1/(1-\gamma)} [b(t)]^{-\gamma/(1-\gamma)} \tag{A.5}$$

I og med at terminalværdibetingelsen[1] $b(T) = \epsilon_2$ skal være opfyldt, har vi at gøre med et begyndelsesværdiproblem (IVP).

Denne ordinære differentialligning er en *Bernoulli-differentialligning*,

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot [y(x)]^n , \tag{A.6}$$

hvor $n \in \mathbb{R}$ og $p, q : I \mapsto \mathbb{R}$ er kontinuerte. Disse betingelser er tydeligvis opfyldt af (A.5). En Bernoulli-differentialligning kan løses ved

[1] man vil nok i matematisk litteratur kalde det en begyndelsesværdibetingelse på trods af dens tidsmæssige beliggenhed

- Først at transformere den til en førsteordens lineær ordinær differentialligning.

- Dernæst at løse den 1. ord. lin. ODE ved at transformere den til en totalafledet eller ved anvendelse af den såkaldte *Panserformel* [25].

Først divideres på begge sider af (A.5) med $\epsilon_1^{1/(1-\gamma)}\,[b(t)]^{-\gamma/(1-\gamma)}$, hvorved der fås

$$\epsilon_1^{1/(\gamma-1)} b(t)^{\frac{\gamma}{(1-\gamma)}} b'(t) + \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} b(t)^{1+\frac{\gamma}{1-\gamma}} \left(-\bar{\mu}\right) = (\gamma - 1) \tag{A.7}$$

Udtrykket er kompliceret, men der er en sammenhæng mellem første og andet led, idet den afledte af $\epsilon_1^{1/(\gamma-1)} b(t)^{1+\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ er lig med faktoren på $b'(t)$ i første led. Dette motiverer flg. transformation. Lad funktionen ν være defineret ved

$$\nu(t) := \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} b(t)^{1+\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \tag{A.8}$$

Da er

$$\nu'(t) := \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} b(t)^{\frac{\gamma}{(1-\gamma)}}, \tag{A.9}$$

og Bernoulli-differentialligningen kan udtrykkes i ν som

$$\left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-1} \nu'(t) + \nu(t) \left(-\bar{\mu}\right) = (\gamma - 1)\,. \tag{A.10}$$

Bibetingelsen $b(T) = \epsilon_2$ giver flg. bibetingelse for ν,

$$\begin{aligned}
\nu(T) &= \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} b(T)^{1+\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\
&= \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} \epsilon_2^{1+\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\
&= \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} \epsilon_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\
&= \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} \epsilon_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\
&= \epsilon_1^{1/(\gamma-1)} \left(\epsilon_2^{-1}\right)^{/(\gamma-1)} \\
&= \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Problemet er altså transformeret til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned}\nu'(t) &= \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(-\bar{\mu}) \cdot \nu(t) + \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(\gamma - 1) \\ \nu(T) &= \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)}, \end{aligned} \tag{A.12}$$

hvor differentialligningen er en førsteordens lineær ordinær differentialligning med konstante koefficienter.

Løsningen, som fås ved at transformere til en totalafledet eller bare ved brug af den såkaldte Panserformel [25, Kap. 6], er

$$\nu(t) = k \cdot e^{\frac{1}{1-\gamma} \cdot \bar{\mu} \cdot t} - \frac{\gamma - 1}{\bar{\mu}}, \tag{A.13}$$

hvor k er en integrationskonstant, som er fastlagt af begyndelsbetingelsen (terminalværdibetingelsen). Indsættelse af begyndelsesbetingelsen $\nu(T) = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)}$ giver, at

$$k = e^{-\frac{\bar{\mu}}{1-\gamma}T} \left(\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} + \frac{\gamma - 1}{\bar{\mu}} \right). \tag{A.14}$$

Løsningen er dermed

$$\nu(t) = e^{-\frac{\bar{\mu}}{1-\gamma}T} \left(\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} + \frac{\gamma - 1}{\bar{\mu}} \right) \cdot e^{\frac{1}{1-\gamma} \cdot \bar{\mu} \cdot t} - \frac{\gamma - 1}{\bar{\mu}}. \tag{A.15}$$

Lader vi konstanten ν_0 være defineret ved $\nu_0 := \frac{\bar{\mu}}{1-\gamma}$, kan løsningen forenkles til

$$\nu(t) = e^{-\nu_0 T} \left(\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} - \nu_0^{-1} \right) \cdot e^{\nu_0 t} + \nu_0^{-1} \tag{A.16}$$

Vi kan nu transformere tilbage til $b(t)$. Af (A.8) samt løsningen (A.16) følger, at

$$\begin{aligned} b(t) &= \epsilon_1 \nu(t)^{1-\gamma} \\ &= \epsilon_1 \left\{ e^{-\nu_0 T} \left(\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} - \nu_0^{-1} \right) \cdot e^{\nu_0 t} + \nu_0^{-1} \right\}^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

og dermed

$$b(t) = \epsilon_1 \left\{ \frac{1}{\nu_0} \left[1 + \left(\nu_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/(\gamma-1)} - 1 \right) e^{\nu_0 (t-T)} \right] \right\}^{1-\gamma}. \tag{A.17}$$

1.6

Litteratur

[1] Fischer Black. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *The Journal of Business*, 45, No. 3.:444-445, 1972.

[2] Zvi Bodie, Alex Kane og Alan J. Marcus. *Investments and Portfolio Management, 10th Edition.* McGraw-Hill, 2014.

[3] John Y. Campbell og Louis Viceira. *Strategic Asset Allocation - Portfolio Choise for Long-Term Investors.* Oxford University Press, 2002.

[4] Jaksa Cvitanic og Fernando Zapatero. *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets.* The MIT Press. Massachusetts Institute of Technology, 2004.

[5] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown og William N. Goetzmann. *Modern Portfolio Theory And Investment Analysis, 9th.* Wiley, 2014.

[6] Eugene F. Fama og Kenneth R. French. The capital asset pricing model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18, No. 3.:25-46, 2004.

[7] Allen Franklin. Admissible mean standard deviation indifference curves. *Economic Letters*, 12:11-17, 1983.

[8] Roger Gibson. *Asset Allocation: Balancing Financial Risk, Third Edition.* McGraw-Hill, 1996.

[9] Daniel Hedelund. Danske bank: Ny it-løsning vil forandre investeringsområdet. *finanswatch.dk*, 2016.

[10] John C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives - Global Edition, Eigth Edition.* Pearson, 2012.

[11] R. Jagannathan og N.R. Kocherlakota. Why should older people invest less in stocks than younger people. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 20 No. 3.:11-23, 1996.

[12] David Jonstone og Dennis Lindley. Mean-variance and expected utility: The borch paradox. *Statistical Science*, 28, No. 2.:223-237, 2013.

[13] Guiso L og Paiella M. Risk aversion, wealth, and background risk. *J Eur Econ Assoc*, 6 (6):1109–1150, 2008.

[14] Douglan J. Lamdin. *Consumer Knowledge and Financial Decisions: Lifespan Perspectives*. Springer, 2012.

[15] John L. Maginn, Donald L. Tuttle, Dennis W McLeacey og Jerald E. Pinto. *Managing Investment Portfolios: A Dynamic Process, Third Edition*. John Wiley and Sons, Inc., 2007.

[16] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, No. 1.:77-91, 1952.

[17] Harry M. Markowitz. *Portfolio Selection - Effecient Diversification of Investments*. New York: John Wiley and Sons, Inc. , London: Chapman and Hall, Ltd., 1959.

[18] Robert C. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continous-time case. *The Review of Economics and Statistics*, 51, No. 3.:247-257, 1969.

[19] C. Munk. Asset allocation. lecture notes from copenhagen business school, 2014.

[20] Claus Munk. Financial markets and investments. lecture notes from copenhagen business school. 2016.

[21] Claus Munk. *Financial Asset Pricing Theory*. Oxford University Press, 2013.

[22] Claus Munk og Carsten Sørensen. Skal investorer med lang investeringshorisont have større aktieandel? *Finans/Invest*, 7:10-16, 2001.

[23] J. von Neumann og O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton., 1944.

[24] J. von Neumann og O. Morgenstern. *The theory of risk aversion. Essays in the Theory of Risk Bearing, pp 90-109*. Markham, Chicago, 1971.

[25] Knud Erik Nielsen og Esper Fogh. *Vejen til Matematik A2, 2. udgave*. Forlaget HAX, 2011.

[26] J.W. Prat. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32 (1-2):122136, 1964.

[27] J. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32:122-136, 1964.

[28] Paul A. Samuelson. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics*, 51 No. 3.:239-246, 1969.

[29] William Shakespeare. *Samlede skuespil i ny oversættelse- Henry 5 - Henry IV, 1-2 - Købmanden i Venezia - Richard II - Stor ståhej for ingenting*. Gyldeldal A/S, 2016.

[30] William F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19, No. 3.:425-442, 1964.

[31] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I.* Springer, 2003.

[32] Jan Phillip Solovej. *Supplement til Matematik 1GB.* Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 2001.

[33] Jennifer Speake. *Oxford Directory of Proverbs, Sixth Edition.* Oxford University Press, 2015.

[34] James Stewart. *Calclus Early Transcendentals, 6e.* 2008.

[35] Michael Sørensen. *En Introduktion til Sandsynlighedsregning, 4. udgave.* Afdeling for anvendt matematik og statistik, Københavns Universitet, 2003.

[36] James Tobin. Liquidity preferences as behaviour towards risk. *Review of Economic Statistics*, 25, 1958.

[37] Anders Tolver. *An Introduction to Markoc Chains - Lecture notes for Stochastic Proceesses.* Department of Mathematical Sciences, 2016.

[38] Giovanni Torriano. *Italian Proverbial Phrases.* A. Warren, London, 1662.

[39] Lous A. Vitt. *Encyclopedia of Retirement and Finance.* Greenwood Press, 2003.

[40] R. Zhang, T.J. Brennan og A. W.Lo. The origin of risk aversion. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the Unites States of America*, 111, No. 50:17777-17782, 2014.

[41] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations, 6th. Ed.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.