

HD Finansiering
Copenhagen Business School

Prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer

Vejleder: Peter Toftager

Udarbejdet af: Niklas Bille Bjergsted

Maj 2018

Indholdsfortegnelse

1.	Indledning	2
1.1.	Problemidentifikation & Problemformulering	2
1.2.	Struktur & Metode	3
1.2.1.	Data	5
1.2.2.	Afgrænsning	5
2.	Generelt om obligationsteori	6
2.1.	Afdragsprincipper og danske realkreditobligationer	6
2.2.	Kurs, effektiv- og vedhængende rente	7
2.3.	Nulkuponrenter	9
2.4.	Rentestrukturens udseende	10
2.5.	Rentestrukturen og renteinstrumenter	11
3.	Rentestrukturmodeller	15
3.1.	Bootstrapping, interpolation og polynomial	16
3.2.	Nelson & Siegel inkl. Extended version – Nelson, Siegel & Svensson	21
3.1.	Stokastiske rentestrukturmodeller	24
3.2.	Vasicek	26
3.3.	Cox, Ingersoll & Ross	33
3.4.	Afsluttende om rentestrukturmodellerne	35
4.	Prisfastsættelse af optionselementet	37
4.1.	Optionstyper og metoder til prisfastsættelse	38
4.2.	Konfigurerings til renteoptioner	39
4.3.	Jamshidian	41
4.4.	Least-Squares Monte-Carlo	44
4.4.1.	Generelt om regressionsanalyse	45
4.4.2.	Varians reduktionsmetoder	48
5.	Rentebinomialmodel	57
5.1.	Black, Derman & Toy – BDT	59
6.	Model benchmarking	65
6.1.	Test af modelforudsætninger	65
6.2.	Fordelingsfunktioner	66
6.3.	Modellernes kalibrering til markedsdata samt empiriske resultater og argumenter	72
6.4.	Option Adjusted Spread - OAS	75
7.	Konklusion	78
8.	Litteraturliste	81
9.	Appendiks	85
10.	Bilag	96

1. Indledning

Det danske realkreditmarked er blandt verdens største, og en stor andel af de danske realkreditobligationer der handles, er konverterbare. Markedet for konverterbare danske realkreditobligationer er således både af stor volumen og af stor betydning, hvilket ligeledes resulterer i at prisfastsættelse af obligationerne har stor vigtighed.

En konverterbar dansk realkreditobligation består af en inkonverterbar obligation, samt en tilhørende option. Prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer kræver således både prisfastsættelse af obligationer og optioner.

Prisfastsættelse af renteprodukter er oftest mere krævende end prisfastsættelse af f.eks. aktier. Dette skyldes, at prisfastsættelse af obligationer baserer sig på prisfastsættelse af et kendt fremtidigt cash flow på kendte tidspunkter, og prisen ikke blot afhænger af et stokastisk element, men også et element af mean-reversion. Derudover kræver prisfastsættelse af renteoptioner kendskab til den underliggende rentestruktur og prisstrukturen udledt heraf.

Optionselementet, tilhørende danske konverterbare realkreditobligationer, indeholder amerikansk lignende forhold og er kendetegnet ved at kunne excercises 4 gange årligt. Der er således tale om Bermuda renteoptioner. Optioner med mulighed for førtidig excercise har været genstand for enormt fokus fra økonomer, matematikere og statistikere, der alle har forsøgt at fremfinde valide prisfastsættelsesmodeller siden optionernes indtog i 1970'erne. Der er dags dato fortsat ikke fundet en closed-form solution for prisfastsættelse af den sande værdi på denne typer af optioner, til trods for udvikling af mange modeller, hvilket gør emnet utrolig interessant.

Denne opgave har til formål at vise, hvordan et udvalg af modeller kan anvendes, implementeres, korrigeres og udvides til benyttelse af prisfastsættelse af real-life konverterbare danske realkreditobligationer.

1.1. Problemidentifikation & Problemformulering

I Danmark udgør mængden af realkreditobligationer ca. 75 % af den samlede obligationsmængde. Dette gør Danmark til et af de lande i verden, hvor der er størst andel af realkreditobligationer målt imod den samlede obligationsmængde. Dette medvirker derfor også til, at realkreditobligationer har utrolig stor betydning for den generelle økonomi i Danmark. Alle mennesker i det danske samfund er således eksponeret for danske realkreditobligationer i mere eller mindre grad, da de danner funding i både almene boligbyggerier, andelsboligforeninger samt villaer, lejligheder og erhvervsejendomme. Samtidig med dette, anvendes de af pensionskasser til investering af pensionsmidler. Prisfastsættelse af disse obligationer har således utrolig stor betydning for folks fremtidige økonomi, hvorfor det kan skabe udfordringer, såfremt obligationerne ikke er prissat korrekt. Investorer over det meste af verden er således også interesseret i de danske realkreditobligationer. Investering i danske realkreditobligationer har dermed påvirkning på mange

danskere, hvorfor det er essentielt, at investorerne ligeledes har værktøjer til at kunne prisfastsætte denne type af obligationer korrekt.

Med baggrund i ovenstående, er det opgavens formål at besvare følgende:

Hvilken prisfastsættelsesmodel bør investorer vælge til prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer?

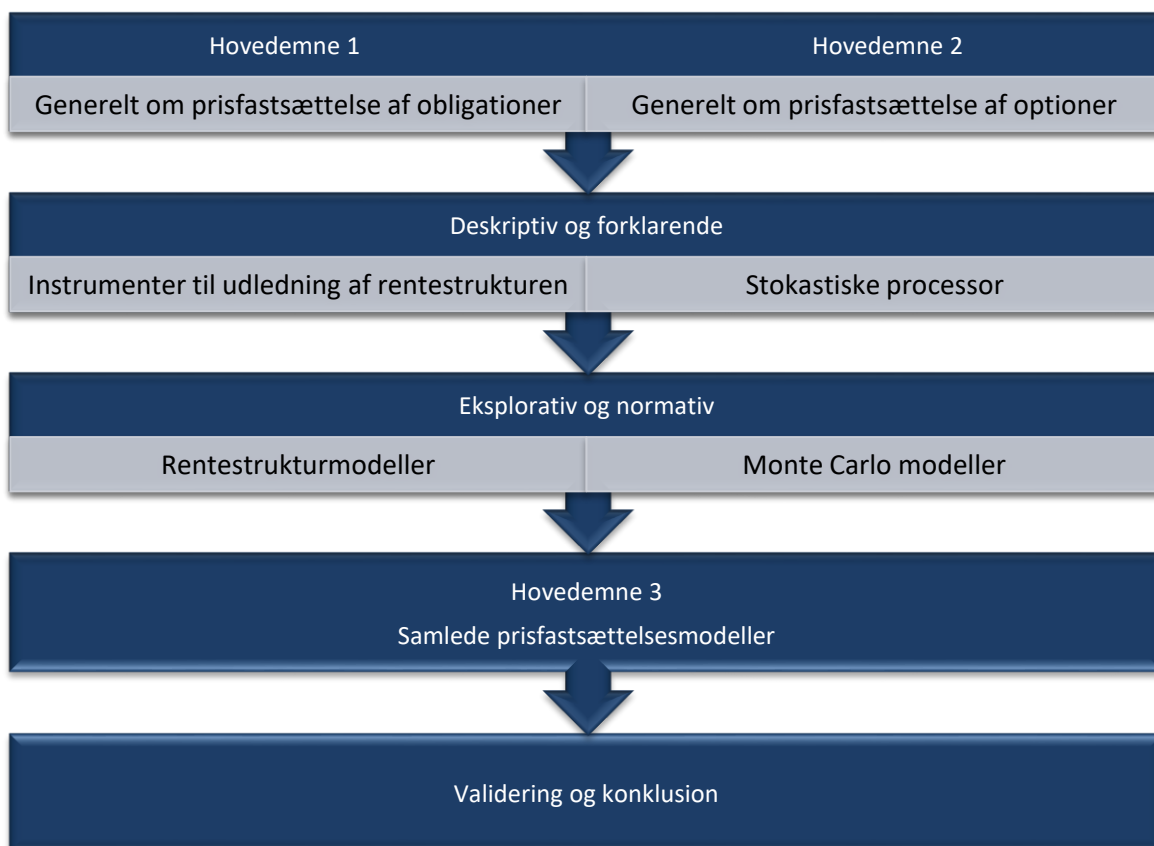
For at underbygge ovenstående problemformulering, findes følgende arbejdsspørgsmål relevant:

- Hvordan anvendes og implementeres modellerne
- Hvilke fordele og ulemper er der ved modellerne
- Hvordan valideres modellerne og modelresultaterne
- Hvorfor foretrækkes den i konklusionen valgte model

Konklusionen vil blive draget på baggrund af et bestemt udvalg af modeller. Modeluniverset er nærmere beskrevet under afgrænsningen.

1.2. Struktur & Metode

Til at besvare ovennævnte problemformulering, struktureres opgaven på nedenstående vis. Derudover benyttes nedenstående modeller til at fremfinde en valideret konklusion på problemet.



Opgaven er således inddelt i tre hovedemner – Rentestrukturmodeller til prisfastsættelse af obligationer, metoder til prisfastsættelse af renteoptioner og samlede prisfastsættelsesmodeller, der kombinerer rentestrukturmodellerne og metoderne til prisfastsættelse af renteoptionerne.

Indledningsvis beskrives elementær obligationsteori, og der forklares hovedprincipperne bag prisfastsættelse af obligationer. Der vælges instrumenter til udledning af en nulkuponrentestruktur, og argumenteres for, hvorfor netop disse instrumenter er valgt, da de ligger til grund for alle de kommende rentestrukturmodeller.

Med baggrund i instrumenterne implementeres de første modeller til prisfastsættelse af obligationer. Der anvendes en bootstrappet rentekurve med lineær interpolation og en med polynomiumfunktion som interpolation. Det vises efterfølgende, hvordan modellen kan optimeres ved at fitte polynomiumsfunktion til den udledte rentestruktur. Efterfølgende vises og implementeres Nelson & Siegels rentestrukturmodel samt den udvidet og meget anvendte Nelson, Siegel & Svenson rentestrukturmodel. Afslutningsvis implementeres stokastiske rentestrukturmodeller og der anvendes normativ metode til kalibrering af modellerne til renteinstrumenterne. På den måde vises, forklares og implementeres der både generelle, avancerede og stokastiske rentestrukturmodeller. Herudover vises det hvordan alle modellerne kan kalibreres og optimeres.

Herefter indledes der med forklaring om generel optionsteori, samt hvilke metoder der kan anvendes for prisfastsættelse af optioner, og hvilke specielle karakteristika man skal være opmærksom på ved prisfastsættelse af optioner tilhørende danske realkreditobligationer. Efterfølgende vises to modeller der begge bygger på stokastiske rentestrukturer, til prisfastsættelse af det underliggende aktiv, og efterfølgende Monte Carlo simulering, dog med hver sine karakteristika. Der anvendes eksplorativ og til dels normativ metode til implementering af modellerne.

Der vil efterfølgende blive vist en model, der kan prisfastsætte obligation og tilhørende option under samme forudsætninger, og hvordan dette kan udnyttes til udbygning af de tidligere anvendte modeller. Herefter benchmarkes modellerne op imod hinanden, og bliver blandt andet målt på empiriske studier foretaget i opgaven, matematiske udtryk samt andre empiriske studier, som kan underbygge modelresultater og argumenter.

Modellerne implementeres via beregninger i excel, og det samlede excelark vedlægges opgaven. Der er ikke anvendt programmering i VBA til implementering af modellerne, hvorfor de er beregnet via excels indbyggede formler og værktøjer. I opgaven vil de blive opstillet i deres matematiske formel.

Excels solver, goal-seek og data-tabel funktioner har været anvendt til optimering af modellerne og forhøjelse af antal simuleringer i Monte Carlo simulationen. I den engelske udgave af excel har NORMSINV, NORMDIST, RAND, IF, MAX og LINEST funktionerne været brugt til især optionsberegningerne

Da problemformuleringen tager udgangspunkt i konkrete obligationer, vil der blive hentet data og beregnet på real-life scenarier.

1.2.1. Data

Der er hentet data fra konverterbare realkreditobligationer udstedt af BRFKredit, Nordea Kredit og Realkredit Danmark, med udløb i år hhv. 2030 og 2040. Obligationerne afdrages efter annuitetsprincippet. Data er hentet fra de officielle kurslister på www.nasdaqomxnordic.com, dataene er hentet d. 18/12-2017. Obligationsudstederne er tilfældig valgt blandt de danske realkreditinstitutter.

Til udledning af rentestrukturmodellerne er der indhentet data for de valgte instrumenter via Nordea Analytics, ligeledes d. 18/12-2017. Dette gælder Nordea DKK SWAP & Nordea DKK DEPO instrumenter baseret på Cibur3.

Til brug for Vasiceks kortrentemodell og rentestrukturmodell, er der indhentet data for Cibur3 og T/N renten ligeledes d. 18/12-2017, og et år tilbage, for beregning af volatiliteten. Data ligeledes hentet fra www.nasdaqomxnordic.com og den historiske Cibur3 rente de seneste 30 år er hentet fra Danmarks statistik, statistikbanken.

1.2.2. Afgrænsning

I opgaven anvendes et modelunivers, der tager udspring i de modeller, der er blevet arbejdet med på HD F-studiet. Derudover er der anvendt to modeller, der ikke er gennemgået på HD F-studiet. Der er valgt, at inddrage den stokastiske rentestrukturmodell udviklet af Cox, Ingersoll & Ross (refereret til som CIR), da denne modell er en direkte overbygning af Vasicek's rentestrukturmodell, som er gennemgået på studiet, og dermed er nærliggende at benchmarke op imod hinanden. Derudover har det tidligere været den mest refererede rentestrukturmodell i videnskabelige artikler¹. Til prisfastsættelse af optionen anvendes et specialtilfælde af Monte-Carlo simulering, udviklet af Longstaff & Schwartz, udover de på studiet gennemgåede metoder for stokastiske processer og binomialtræer. Dette giver en ekstra dimension af sammenligningsgrundlag for validering af den optimale modell.

Nogle af grundstenene inden for prisfastsættelse af optioner såsom den partielle differentialligning og Ito's lemma vil ikke blive udledt, til trods for at det har en sammenhæng med de stokastiske processer som bliver behandlet i opgaven.

Ved anvendelse af GARCH-modellen for volatilitetsberegning, er der ikke taget højde for autokorrelation.

Der vil være forskel i valg af rentetilskrivningskonvention på tværs af rentestrukturmodellerne, da der anvendes den konvention modellerne oprindeligt er blevet udgivet med baggrund i. Dette vil der ikke blive taget højde for, når der drages konklusion på baggrund af modelresultaterne. I opgaven anvendes der ACT/360 datoberegningsmetode.

¹ Rogers (1995): "Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use?", *Mathematical Finance*, IMA Volume 65, 93-116

Der er hentet data d. 18/12-2017, hvilket ikke falder på en obligationsterminsdato. Nogle af beregningerne foretages med afrundet løbetid, hvor det vurderes ikke at have stor betydning for resultaterne. I beregningerne, hvor det har betydning, er der i så vidt udstrækning, det har været muligt, korrigeret herfor. Se vedlagte excelark.

Da obligationernes bagvedliggende prepayment modeller ikke er offentliggjorte, er det ikke muligt at beregne en komplet og korrekt ydelsesrække for obligationerne. Der vil blive lavet appendiks for ydelsesberegningerne, og ydelsesrækkerne fremgår ligeledes af vedlagte excelark.

2. Generelt om obligationsteori

Der vil, i dette indledende kapitel, blive beskrevet de grundliggende hovedtræk for obligationer. Derudover vil danske realkreditobligationers specielle karakteristika blive beskrevet. Dette vil bidrage med indsigt i de bagvedliggende dynamikker, som har betydning for prisfastsættelse af obligationerne. Afsnittet vil blive fulgt op af rentestrukturteori der benyttes til prisfastsættelse af obligationer.

2.1. Afdragsprincipper og danske realkreditobligationer

En obligation er et værdipapir, investorer kan købe på børsen som del af en investerings- eller hedgingstrategi. Obligationer er en del af 'Fixed Income' kategorien, da investorer kender værdipapirets løbende afkast samt udløbsdato for afkastet. Ved investering i obligationer er afkastet kendt som følge af, at obligationen udløber til kurs 100, og de fleste obligationer er kuponbærende obligationer. Dette betyder at obligationen udover at udløbe til kurs 100, også udbetaler en løbende kuponrente til investoren indtil udløb. Ved investering i obligationer købes obligationen til den prissatte kurs på børsen.

Udover den eventuelle løbende rentekupon kan obligationer have forskellige afdragsprofiler for tilbagebetaling af hovedstolen, hvor de tre mest benyttede afdragsprofiler for obligationer er annuitet, serie og stående. De mest benyttede afdragsprofiler i Danmark er annuitet og stående, hvorfor der vil blive fokuseret på disse afdragsprofiler i det efterfølgende.

Afdragsprofil efter annuitet følger princippet om konstante ydelser over hele løbetiden, hvor ydelsen angives ved:

$$Y = RG_0 * \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} \quad (1)$$

Annuitetsprincippet bygger på en konstant ydelse, hvor ydelsen består af afdrag og rente. Renterne bliver tilskrevet af restgælden, hvorfor renteandelen i ydelsen vil blive mindre efterhånden som restgælden bliver afdraget.

Stående lån følger princippet om ingen tilbagebetaling af hovedstolen før udløb, hvor hele hovedstolen forfalder til betaling. Investor modtager derfor kun eventuel kuponrente frem til udløb, og hele ydelsen vil dermed bestå af rente.

De danske realkreditobligationer, der analyseres i denne opgave, afdrages efter annuitetsprincippet, hvorfor (1) anvendes til beregning af ydelserne, se eksempel i appendiks 1.

På det danske obligationsmarked findes en blanding af stats-, realkredit- og erhvervsobligationer.

På det danske obligationsmarked udgør realkreditobligationer ca. 75 % af den samlede mængde, hvor statsobligationer til sammenligning udgør ca. 20 %². Realkreditobligationerne udstedes af realkreditinstitutterne, som bruger fundingen til at yde finansiering af fast ejendom.

Danske realkreditobligationer betegnes som meget sikre investeringer, hvilket blandt andet er et resultat af realkreditinstitutternes høje ratings, som ligeledes bidrager til at markedet er et af de mest likvide obligationsmarkeder i Europa.

Der udstedes et bredt udvalg af forskellige obligationer fra realkreditinstitutterne med forskellige løbetider, kuponrenter og afdragsprofiler. Løbetiderne varierer fra 1-30 år hvoraf størstedelen amortiseres som enten annuitet eller stående.

Derudover skelnes der imellem inkonverterbare og konverterbare obligationer. En konverterbar obligation er karakteriseret ved, at investor tager en lang position i en tilsvarende inkonverterbar obligation, og en kort position i en call option med den inkonverterbare obligation som det underliggende aktiv. Når man tager en kort position i et finansielt aktiv svarer det til at man sælger aktivet. Call optionen ses typisk at være en Bermuda option med 4 årlige exercise muligheder til kurs 100. Dermed kan prisen på den konverterbare obligation skrives som:

$$P_{konverterbar} = P_{inkonverterbar} - P_c \quad (2)$$

Investorer har dermed risiko for, at modparten excersicer optionen ved $P > 100$, hvilket giver investor en kursrisiko, hvis obligationen er købt over kurs 100. Typisk vil denne situation, opstå når renterne er faldet, hvilket samtidig betyder, at kurserne er steget. Investor har dermed også en genplaceringsrisiko, da man sandsynligvis skal ud at placere sig til en lavere rente.

2.2. Kurs, effektiv- og vedhængende rente

Da investorerne kender deres afkast ved investering i obligationer, som følge af den kendte kuponbetaling, løbetid og kurs 100 ved udløb, kan værdien af obligationen findes ved at inddrage disse elementer. Ved at tilbagediskontere alle fremtidige betalinger med den effektive rente til tidspunkt 0, findes prisen på obligationen som:

$$PV = \sum_{t=1}^N Y_t * (1 + r)^{-t} \quad (3)$$

² Hansen, Stine Luise (2017): "Mere realkredit på obligationsmarkedet i Danmark end i Sverige", Finansdanmark

Hvor Y_t angiver ydelsesbetalingen på det givne tidspunkt. Den effektive rente er den rente der netop sikrer, at tilbagediskontering af alle fremtidige betalinger giver prisen på obligationen. Summering af betalingerne kan dermed erstattes med fremtidsværdien, og den effektive rente kan udledes³:

$$PV = FV * (1 + r)^{-t} \quad (4)$$

$$r = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \quad (5)$$

Ovenstående angiver den effektive rente ud fra obligationsmarkedskonventionen som benyttes af officielle børser til angivelse af den effektive rente. Konventionen bygger på at løbende rentetilskrivninger geninvesteres til samme effektive rente, og den effektive rente dermed er konstant over tid. Dette forudsætter ligeledes en flad rentestruktur, og angiver den effektive rente som en gennemsnitsrente, hvilket typisk ikke ses empirisk. Denne udfordring kan løses ved at benytte nulkuponrenter som alternativ til den effektive rente, når fremtidige cash flows tilbagediskonteres.

Når alle de fremtidige betalinger er blevet tilbagediskonteret for at finde prisen på obligationen, skal der tages højde for de vedhængende renter i kursen på obligationen.

Hvis ikke obligationen handles på en terminsdato, vil sælger af obligationen have ret til kuponbetaling for den del af terminsperioden, sælger har holdt obligationen siden seneste terminsdato. Hvis der handles på en terminsdato, vil der således ikke være nogen vedhængende renter.

$$v = \frac{R * D}{D' * N} \quad (6)$$

Hvor R angiver kuponrenten, D angiver antallet af dage fra seneste termin til valør, D' angiver antallet af dage i en hel termin og N angiver antallet af terminer årligt⁴⁵.

Når vedhængende rente og værdien af obligationen er kendt, kan kursen findes via:

$$k = PV + v \quad (7)$$

³ Flor, Larsen & Munk (2012): Indledende obligations- og rentestrukturanalyse

⁴ Christensen, Michael (2014): Obligationsinvestering, 8. udgave, Jurist- & Økonomiforbundets forlag

⁵ Se appendisk 2 for beregning af vedhængende rente

2.3. Nulkuponrenter

En nulkuponobligation har ingen kuponbetaling, hvorfor den effektive rente på denne obligation, udelukkende består af kursreguleringsgevinst. På en kuponbærende obligation, består den effektive rente af både den direkte rente + kursregulering⁶.

$$\text{nulkuponobligation} \rightarrow r_z = \frac{100 - pv}{pv} \quad (8)$$

$$\text{kuponbærende obligation} \rightarrow r_c = \frac{c}{pv} + \frac{100 - pv}{pv} \quad (9)$$

En nulkuponobligation vil således kun have én betaling, hvilket er tilbagebetaling af hovedstolen på udløbstidspunktet. Nulkuponrenten kan dermed defineres som den effektive rente på en nulkuponobligation med udløb på tidspunkt t .

Som vist i (3) findes prisen på obligationen ved at tilbagediskontere alle fremtidige cash flows med den effektive rente, da netop denne rente skaber sammenhængen $PV \rightarrow FV$. Dette forudsætter at alle fremtidige cash flows tilbagediskonteres med den samme rente. Denne tilbagediskonteringsrente er forskellig for hver obligation, hvorfor værdien af den samme ydelse på samme tidspunkt kan have forskellige værdier, afhængig af hvilken effektiv rente der tilhører obligationen og bruges som tilbagediskonteringsrente. Dette har sin svaghed, da værdien af samme ydelse, der forfalder på samme tidspunkt ude i fremtiden, reelt set burde have samme værdi, uagtet hvorfra betalingen stammer. Nulkuponrenter kan afhjælpe dette problem, ved at bruges som tilbagediskonteringsrente. Dermed forudsætter, det at værdiansættelse ud fra nulkuponrenter sker på fair prisfastsættelse og ingen-arbitrage argumentet.

Der eksisterer ikke et dansk nulkuponobligationsmarked, hvorfor nulkuponrenterne ikke kan aflæses direkte i markedet. Der kan beregnes syntetiske nulkuponrenter via observerede kuponbærende obligationspriser i markedet, eller observerede priser på renteinstrumenter – hvilket vil blive anvendt senere. Herfra kan der udledes en nulkuponrentestruktur, der kan bruges til prisfastsættelse af fremtidige cash flows fra forskellige obligationer med samme diskonteringsrente på samme tidspunkt. Udledning af nulkuponrenter har således stor betydning for prisfastsættelse af obligationer.

⁶ Christensen, Michael (2014): Obligationsinvestering, 8. udgave, Jurist- & Økonomiforbundets forlag

2.4. Rentestrukturens udseende

Ved at tage et kig på hvilke obligationer, man kan købe på børsen, ses det, at den effektive rente ofte stiger i takt med at løbetiden på obligationen stiger, og at renten dermed er en funktion af tiden. Der er fremtrædende renteteorier, som prøver at forklare denne sammenhæng:

- Forventningshypotesen af Irving Fischer
- Likviditetspræferenceteorien af John Hicks
- Markedssegmenteringshypotesen af Culbertson
- Preferred habitat hypotesen af Modigliani og Richard Sutch

Forventningshypotesen

Bygger på et no-arbitrage argument, hvor forwardrenterne forventes at være lig med de fremtidige spotrenter. Da forwardrenterne forventes at være identiske med de fremtidige spotrenter, må forwardrenterne kunne udregnes ud fra de nuværende nulkuponrenter, da der ellers vil være arbitrage muligheder:

$$f_{t,t+1} = \frac{(1 + y_{t+1})^{t+1}}{(1 + y_t)^t} - 1 \quad (10)$$

Hvis rentestrukturen er stigende, vil forwardrenterne ligeledes være stigende, og investorer vil stille større krav til deres genplaceringer i de korte renter, hvilket skaber en stigende rentestruktur.

Likviditetspræferenceteorien

John Hicks antager i sin teori, at långivere ønsker at udlåne deres midler i en kort periode, hvorimod låntagere ønsker at låne i en lang periode. For långivers side er der en øget risiko for, at låntager ikke kan tilbagebetale det lånte beløb, i takt med at løbetiden stiger. Man vil dermed som långiver kræve en større risikopræmie, når løbetiden stiger. Dermed vil forwardrenterne reelt overstige de fremtidige forventede spotrenter, da der skal tillægges en risikopræmie for hver løbetid, og rentestrukturen vil være stigende.

$$f_{t,t+1} = \frac{(1 + y_{t+1})^{t+1}}{(1 + y_t)^t} + c_{t,t+1} - 1 \quad (11)$$

Markedssegmenteringshypotesen

Culbertson argumenterer for at de forskellige investerings aktører på markedet har forskellige præferencer for løbetid, hvilket skaber en efterspørgsel efter obligationer med bestemte løbetider. Pensionskasser kan have præference for langsigtede obligationer til at afdække deres risiko for langsigtede forpligtelser. Pengeinstitutter kan derimod have præference for korte obligationer til at afdække deres korte indlåns forpligtelser.

Prefered habitat hypotesen

Denne teori viderebygger markedssegmenterings hypotesen hvor Modigliani og Richard Sutch argumenterer for, at pensionskasser kan lokkes ned i en mellemlang obligationsinvestering, hvis afkastet er højt nok. Dermed bygger rentestrukturen ikke udelukkende på udbud og efterspørgsel, men bliver igen afhængig af de fremtidige spotrenter.

Alle ovenstående teorier har forhold, der kan sættes spørgsmålstegn ved, og nogle af teorierne er samtidig modsigende. Et eksempel herpå kan være pensionskasserne, som ønsker at investere i langsigtede obligationer for at risikofærdække deres udbetalinger, hvilket skaber en stor efterspørgsel efter lange obligationer, men dermed også at de kan være villige til at se bort fra en eventuel stor risikopræmie ved langsigtede investeringer.

Nu hvor de indledende termer er på plads, kan det vises, hvordan disse funktioner kan bruges til prisfastsættelse af obligationer.

2.5. Rentestrukturen og renteinstrumenter

I det forrige afsnit blev der belyst argumenter for rentestrukturens udseende, og at renten er en funktion af tiden. Der vil i dette afsnit blive vist, hvilke modeller der kan bruges til udledning af rentestrukturen, og hvordan disse modeller kan bruges til prisfastsættelse af obligationer, samt hvordan disse anvendes.

Til prisfastsættelse af obligationer er der brug for en nulkuponrentestruktur. Som tidligere beskrevet har hver obligation forskellig effektiv rente, hvorfor denne ikke kan bruges til at værdiansætte andre obligationer med. Ved at udlede en nulkuponrentestruktur får man en struktur, hvor alle ydelser, på tværs af obligationer, kan tilbagediskonteres med den samme rente. Der vil i det efterfølgende tages udgangspunkt i, at obligationerne prisfastsættes ud fra deres betalingsrække $y_1, y_2, y_3 \dots y_t$.

Det blev vist tidligere at prisfastsættelse af obligationen sker ud fra tilbagediskontering af alle ydelserne med den effektive rente. Når nulkuponrenterne erstatter den effektive rente som diskonteringsrenten, fås:

$$PV = \sum_{t=1}^N Y_t * (1 + r)^{-t} = \sum_{t=1}^N Y_t * (1 + y_t)^{-t} \quad (12)$$

Hvor y_t repræsenterer nulkuponrenten til tidspunkt t .

Ved at introducere diskonteringsfaktorer, fås der et begreb som kan bruges til tilbagediskontering af ydelser, og dermed angiver prisen for pengene på tidspunkt t , på tværs af obligationer, og dermed fås:

$$PV = \sum_{t=1}^N Y_t * (1 + y_t)^{-t} = \sum_{t=1}^N Y_t * d_t \quad (13)$$

Sammenhængen mellem diskonteringsfaktorer og nul kuponrenterne er dermed givet ved:⁷

$$d_t = (1 + y_t)^{-t} \Leftrightarrow y_t = d_t^{-1/t} - 1 \quad (14)$$

Der er i det ovenstående vist, hvordan man kommer fra nul kuponrenter til diskonteringsfaktorer, og dermed implicit også hvordan man kommer fra diskonteringsfaktorer til nul kuponrenter. Da hverken diskonteringsfaktorer eller nul kuponrenter kan observeres direkte i markedet, skal de beregnes ud fra observerbare priser i markedet. Der skal dermed ske en udvælgelse af instrumenter, som skal indgå i udarbejdelsen af rentestrukturen, hvor likviditets- og kreditspændet er ens for alle instrumenterne. Ved ikke at anvende instrumenter med samme kreditrisiko, kræves der korrigering herfor, når man skal prisfastsætte de ønskede obligationer. I udvælgelsesprocessen ønsker man instrumenter, som er meget likvide, og dermed ikke er udsat for anomale prisændringer⁸.

Til bestemmelse af rentestrukturen skal der udvælges instrumenter, som dækker over en tidsperiode, tilsvarende tidsperioden for de obligationer man ønsker at prissætte. De fleste obligationer har en løbetid ≤ 30 år, hvorfor der vil skulle findes instrumenter med løbetid op til 30 år, for at kunne bestemme rentestrukturen for hele denne periode. Derudover skal der findes instrumenter, som dækker et så stort spænd af tidsrummet som muligt, for at undgå så lidt interpolation som muligt. Det vil sandsynligvis ikke være muligt at finde instrumenter med udløbstidspunkter, der dækker alle fremtidige dage de næste 30 år, hvorfor der imellem udløbstidspunkterne vil blive brugt interpolation. Lineær interpolation forudsætter en lineær sammenhæng imellem to kendte punkter. Denne metode er ikke perfekt, da de ukendte punkter, imellem de to kendte, ikke er observerbare, og dermed muligvis ikke følger en lineær sammenhæng. Desto længere der er imellem de to kendte punkter, desto større usikkerhed vil der være ved brug af lineær interpolation. Desto flere kendte punkter der kan opnås, desto mindre usikkerhed vil der dermed blive skabt via lineær interpolation. Et punkt via lineær interpolation vil således kunne opnås via nedenstående, hvor renten y er en funktion af tiden t

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} * (t - t_1) \quad (15)$$

⁷ Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

⁸ Hull, John (2017): Fundamentals of Futures and Options Markets, 8th edition, Pearson

I ovenstående tilfælde repræsenterer y renten, der ønskes bestemt imellem to kendte renter - y_1 og y_2 . t repræsenterer tidspunktet tilhørende for den rente, der ønskes udledt, og t_1 samt t_2 angiver tiden tilhørende renterne y_1 og y_2 .

Der udvælges danske instrumenter til udledning af rentestrukturen, som følge af at rentestrukturen bruges til prisfastsættelse af danske obligationer. Der kan på tværs af landegrænser være forskelle i kreditspændet, hvilket kan skabe udfordringer, idet obligationerne der prisfastsættes antages at have et kreditspænd, der er lig med kreditspændet på de instrumenter, der ligger til grund for rentestrukturen. Derudover kan der være forskelle i de forskellige landes systemer for den bagvedliggende sikkerhed, hvor den i Danmark er kendt for tinglyste realkreditpantebreve, der sikrer investorer en høj sikkerhedsværdi.

Instrumenterne, der bruges til udledning af rentestrukturen, vil være baseret på CIBOR, da der ved lån til CIBOR uden tillæg, er krav om en rating på minimum AA. Dette stemmer overens med de danske realkreditobligationer, som typisk har AA eller AAA rating, hvorfor kreditspændet er det samme på tværs af disse instrumenter. Der benyttes ikke statsobligationer til udledning af rentestrukturen, da det vil kræve en korrektion for det kreditspænd, der er på instrumenter med AA rating, og til rating på de danske statsobligationer⁹. Derudover findes der swap-rates med flere udløbstidspunkter end statsobligationer, hvorfor det minimerer brugen af lineær interpolation, og samtidig optimerer minimeringsfunktionerne for modellerne. Både CIBOR og realkreditobligationsmarkedet er meget likvidt, hvorfor der ikke skal korrigeres for nogen likviditetspræmie¹⁰.

Rentestrukturmodellerne vil således tage udgangspunkt i disse renteinstrumenter og forsøge at replikere den tilhørende nulkuponrentestruktur for renteinstrumenterne, og efterfølgende anvendes til prisfastsættelse af realkreditobligationerne. Modellerne vil blive implementeret i deres risikoneutrale form, da der ikke skal korrigeres for likviditet og kreditrisiko.

Til udledning af rentestrukturen vil der blive brugt deposits til den korte del af rentestrukturen og swaprates til den lange del af rentekurven, alle baseret på CIBOR. Data er indsamlet d. 18/12-2017 fra Nordea Analytics, og følgende instrumenter bruges til rentestrukturen:

⁹ Hull, John (2015): Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edition, Pearson

¹⁰ Nielsen, Gyntelberg, Sangrill (2012): "Liquidity in Government Versus Covered Bond Markets", BIS, no. 392

Instrument	Rate	Udløbsdato
Nordea DKK DEPO 1W	-0,40%	27-12-2017
Nordea DKK DEPO 6M	-0,16%	18-06-2018
Nordea DKK SWAP 1Y	-0,15%	18-12-2018
Nordea DKK SWAP 2Y	-0,07%	18-12-2019
Nordea DKK SWAP 3Y	0,07%	18-12-2020
Nordea DKK SWAP 4Y	0,22%	18-12-2021
Nordea DKK SWAP 5Y	0,36%	18-12-2022
Nordea DKK SWAP 6Y	0,49%	18-12-2023
Nordea DKK SWAP 7Y	0,62%	18-12-2024
Nordea DKK SWAP 8Y	0,74%	18-12-2025
Nordea DKK SWAP 9Y	0,86%	18-12-2026
Nordea DKK SWAP 10Y	0,96%	18-12-2027
Nordea DKK SWAP 12Y	1,14%	18-12-2029
Nordea DKK SWAP 15Y	1,33%	18-12-2032
Nordea DKK SWAP 20Y	1,49%	18-12-2037
Nordea DKK SWAP 25Y	1,55%	18-12-2042
Nordea DKK SWAP 30Y	1,57%	18-12-2047

Tabel 1; Renteinstrumenter; Egen tilvirkning, data hentet fra Nordea Analytics jf. dataafsnit

Deposits

De danske deposits refererer til en CIBOR rente med bestemt udløbstidspunkt, som de danske prime-banker tilbyder hinanden som udlånsrente, uden at der bliver stillet nogen form for kollateral. Disse instrumenter bruges til at estimere den helt korte del af rentestrukturen.

SWAP rates

Den lange ende af rentestrukturen estimeres ved hjælp af Nordeas DKK Swaprenter. En renteswap er en aftale imellem to parter om bytning af rentebetaling, hvor den ene part betaler en fast rente og den anden part en variabel rente igennem swapaftalens løbetid. Swapaftalen bliver indgået med en fastsat hovedstol som aftalegrundlag. I aftalegrundlaget bliver det ligeledes bestemt, hvor tit der sker renteudveksling, samt hvilken referencerente det variable ben følger. I praksis byttes der ikke hovedstol, hvorfor der ikke sker betaling af afdrag. Dette er refereret til som en "Plain vanilla renteswap".

Renteswappens værdi vil ved indgåelse af kontrakten være 0 kr. for begge parter, og kontrakten vil altid være et nul sums spil, hvilket betyder at det, som den ene part har til gode, skylder den anden part. For parten, der betaler den variable rente, vil positionen i renteswappen være lig med en lang position i en variabel obligation tilsvarende swapaftalen, og kort i en obligation svarende til det faste ben i swapaftalen. Da værdien ved indgåelse altid vil være 0, kan swapaftalen betegnes som en obligation, hvor det faste bens rente fastsættes således, at kursen er 100 ved indgåelse af swapaftalen. Den variable rente i Nordea DKK SWAP fastsættes efter 6 måneder CIBOR.

For parten der betaler den variable rente, kan ydelsen angives ved:

$$Y_t = \frac{1}{m} * (\tilde{S}_t - S_t) \quad (16)$$

Hvor m angiver renteswapaftalens antal årlige betalinger, kaldet aftalens tenor. $\tilde{S}_t$ angiver den variable betaling, som på $t = 0$ kan betegnes som værende stokastisk for $t > 1$ idét betalingen kun kendes 1 termin frem. S_t angiver den faste betaling. For $S_t > \tilde{S}_t$ vil $Y_t < 0$.

Den faste rente til tidspunkt t , S_t , kan som nævnt findes ved $t = 0$ som den rente der giver en identisk værdi for begge ben af swapaftalen, hvorfor renten kan udledes som¹¹:

$$\frac{S_t}{m} = \frac{1 - a_n(0)}{\sum_{t=1}^n d_t(0)} \quad (17)$$

Hvor $d_t(0)$ er diskonteringsfaktoren til tid 0, for betalinger på kalendertidspunkt t , og a_n angiver en annuitetsydelse i n terminer.

Da værdien af swapaftalen ved indgåelse er 0 for begge parter, svarer dette til en obligation, der handles til kurs pari, hvilket kan udtrykkes ved kursen 1. Udtrykket kan dermed skrives om til:

$$1 = \frac{S_t}{m} * \sum_{t=1}^n d_t(0) + a_n(0) \quad (18)$$

Den faste rente i swapaftalen ses derfor som den CIBOR rente, der bruges til udledning af nulkuponrenterne til rentestrukturen. Af ovenstående ses det, at den faste rente i swapaftalen skal findes via diskonteringsfaktorerne.

3. Rentestrukturmodeller

Der vil i dette kapitel blive set på, hvilke forskellige modeller der kan bruges til estimering af rentestrukturen ud fra førnævnte renteinstrumenter, til formålet at prisfastsætte de danske realkreditobligationer. Der er gennem årene blevet udviklet mange forskellige rentestrukturmodeller, som alle har hver deres karakteristika. Det vil blive belyst, hvilken kategori modellerne hører under, samt hvordan de bruges til udledning af rentestrukturen, og hvilke fordele og ulemper modellerne har. Først gennemgås bootstrappingmetoden, som er en no-arbitrage model. Herefter vil en polynomiumfunktion blive vist, samt hvordan denne implementeres og optimeres. Nelson, Siegel & Svensons meget anvendte rentestrukturmodel implementeres og valideres efterfølgende. Afslutningsvis implementeres og optimeres Vasiceks og CIR stokastiske ligevægts rentestrukturmodeller. Det vil ligeledes blive belyst hvilke forudsætninger der ligger til grund for

¹¹ Jensen, Bjarne Asrup (2013): Rentesregning, 6. udgave, Jurist- og Økonomiforbundets forlag

hver type model, samt hvilke fordele og ulemper modellerne har, når de skal bruges til prisfastsættelse af obligationerne.

3.1. Bootstrapping, interpolation og polynomial

Det ses i (13), hvilken sammenhæng nulkuponrenterne og diskonteringsfaktorerne har. Via bootstrappingmetoden kan man successivt, ved at starte med den obligation eller det renteinstrument der har den korteste løbetid, generere diskonteringsfaktorerne og nulkuponrenterne, til de tidspunkter hvortil der forfalder betaling i de instrumenter, man ligger til grund for sin rentestruktur. Modellen er ikke særlig anvendt empirisk, da det kræver lige så mange obligationer som betalingstidspunkter, hvilket typisk ikke ses i virkeligheden. Derudover forudsætter det, at hver obligation højst har ét tidspunkt, hvor ingen andre obligationer har betalinger.

Diskonteringsfaktorerne kan findes successivt ved at løse følgende formel for d_t :¹²

$$PV_1 = d_1 * Y_{1,1} \quad (19)$$

$$PV_2 = d_1 * Y_{1,2} + d_2 * Y_{2,2} \quad (20)$$

Hvor PV er observerbar i markedet og ydelsen ligeledes er dette. PV_1 repræsenterer den observerede kurs for obligation 1 og $Y_{1,1}$ repræsenterer ydelse 1 for obligation 1. Ligningsystemet kan således bruges successivt for det antal obligationer, man har til rådighed.

Når betingelserne for bootstrapping er opfyldt, kan diskonteringsfaktorerne ligeledes udledes ved at finde den inverse ydelsesmatrice. Lad nedenstående være tilfældet med M forskellige obligationer med N forskellige terminstidspunkter.

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & Y_{1,N} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & Y_{2,N} \\ Y_{M,1} & Y_{M,2} & Y_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_N \end{pmatrix} \quad (21)$$

Dette kan skrives som:

$$P = Y * d \quad (22)$$

Da diskonteringsfaktorerne ønskes isoleret, kan dette ske ved nedenstående, givet at $M = N$:¹³

$$d = Y^{-1} * P \quad (23)$$

¹² Christensen, Michael (2014): Obligationsinvestering, 8. udgave, Jurist- & Økonomiforbundets forlag

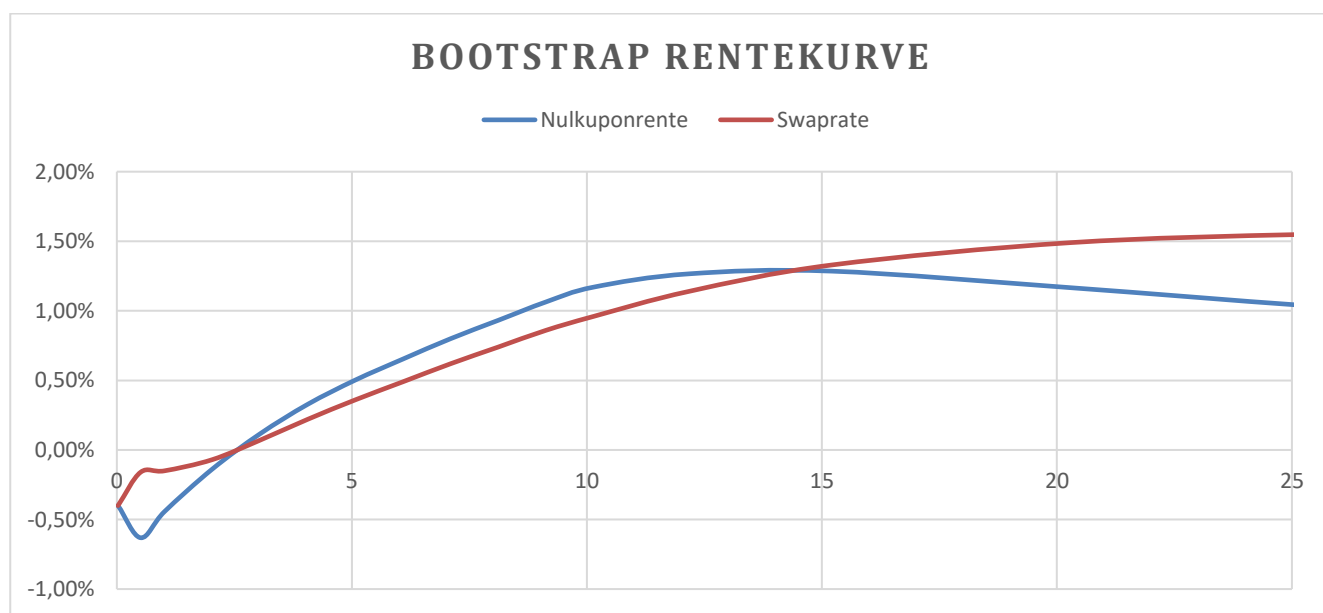
¹³ Lay, David C. (2003): Linear Algebra and its applications, 3rd edition, Pearson

Først inverteres ydelsesmatricen, hvorefter række vektoren multipliceres med den første kolonne vektor, hvorfor d_1 udledes som:

$$d_1 = \sum_{M=1}^M P_1 * Y_{M,1} \quad (24)$$

Det ses typisk, at der er flere betalingstidspunkter end obligationer, hvorfor $N > M$, hvilket betyder at ligningsystemet ikke kan give præcise diskonteringsfaktorer, men derimod flere diskonteringsfaktorer for hvert tidspunkt¹⁴.

Bootstrapping har sin styrke i, at man får den præcise diskonteringsfaktor, og dermed pris, for betalingen på tidspunkt t . Da metoden ikke er dynamisk, kan der kun fremstilles diskonteringsfaktorer på betalingstidspunkterne. Hvis bootstrapping skal bruges til prisfastsættelse af betalinger, der ligger imellem to betalingstidspunkter, udledt via bootstrappingmetoden, er man nødsaget til at komme med det bedste estimat ud fra de data, man har til rådighed. Typisk vil dette ske via lineær interpolation. Som tidligere nævnt forudsætter dette en lineær sammenhæng imellem de to kendte punkter, og da renten er en funktion af tiden, vil der typisk ikke være en lineær sammenhæng. Dette kan medvirke til en usikker værdiansættelse af betalinger, der forfalder imellem to kendte diskonteringsfaktorer.



Figur 1; Bootstrap rentekurve; Egen tilvirkning

Ovenstående viser den bootstrappede rentekurve af Nordea DKK deposits og swaprates, til udledning af nulkuponrenterne som funktion af tiden. Se appendiks for eksempel på beregning af nulkuponrenten. Som det ses er der lineær interpolation imellem punkterne, som er kendetegnet for

¹⁴ Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

metoden. Det ses at nulkuponrentekurven er faldende efter ca. år 15, hvor stigningen i swaprates kurven begynder at aftage.

Bootstrappingmetoden har den fordel at man får de præcise diskonteringsfaktorer til de tilhørende løbetider, men ulempen er at det kun er i præcis disse punkter at diskonteringsfaktorerne kendes, og der dermed er behov for lineær interpolation. Polynomiummetoden forsøger at afhjælpe denne udfordring ved at lade nulkuponrenten være givet ved et b 'te grads polynomium til tidspunkt t :

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_b t^b \quad (25)$$

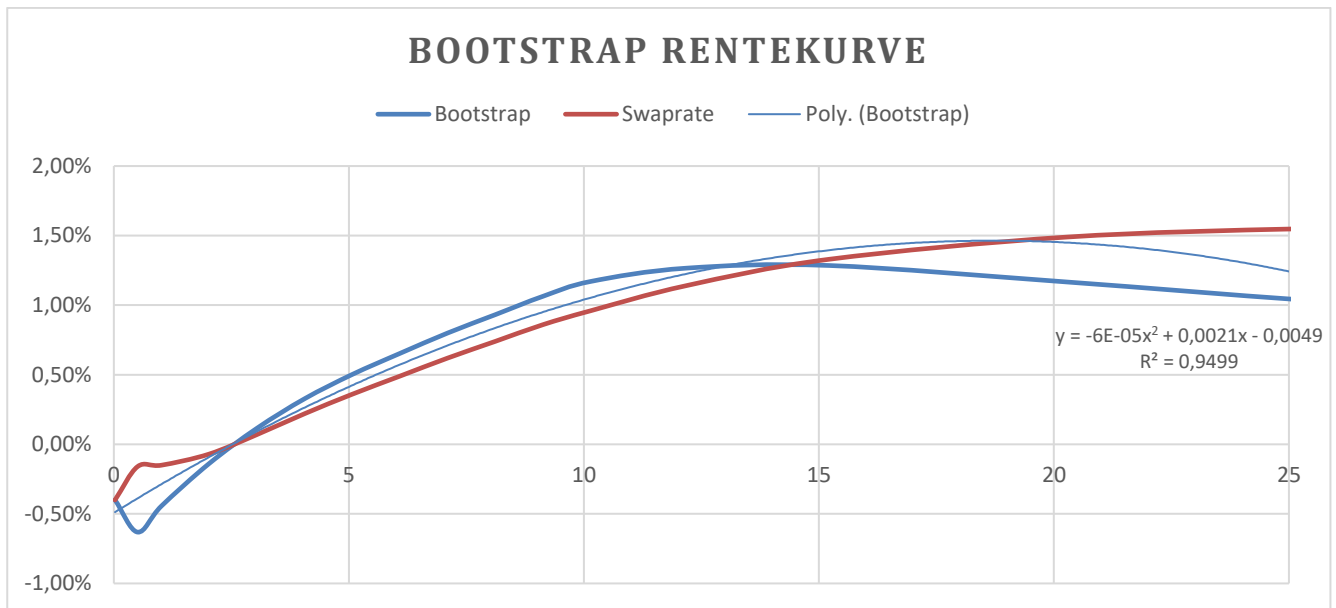
Nulkuponrenterne givet ved polynomiet bruges til prisfastsættelse af obligationen, hvorefter de nye teoretisk beregnede kurser sammenlignes med de observerede kurser. Koefficienterne i polynomiet findes ved at minimere forskellen mellem de observerede kurser og de teoretiske kurser¹⁵:

$$\min_{a_0 \dots a_b} \left(\sum_{i=1}^m |P_i - P_i^{teo}|^p \right)^{1/p} \quad (26)$$

Hvor P_i angiver den observerbare pris i markedet, angivet som diskonteringsfaktoren for renteinstrumentet, og P_i^{teo} angiver den teoretisk modellerede kurs. m angiver antallet af observationer. Ved at lade interpolationen ske som en polynomiums funktion, som erstatning for lineær interpolation, vil man ligeledes afvige fra at ramme, de observerede punkter fuldstændigt. Dette er et resultat af modellens begrænsede fleksibilitet. Dette betyder ligeledes, at modellen ikke kan benyttes til at identificere arbitrage i markedet. Fordelen er, at man får en glat nulkuponrentekurve, og metoden kan anvendes, selvom antallet af betalingstidspunkter er flere end obligationer. Det ses ligeledes, at desto flere led polynomiet består af, jo færre store afvigelser fremkommer, på bekostning af flere små afvigelser. Derudover konvergerer polynomiet mod uendelig, hvilket ikke er optimalt, da det resulterer i, at afvigelserne vokser med løbetiden¹⁶.

¹⁵ Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

¹⁶ Christensen, Michael (2014): Obligationsinvestering, 8. udgave, Jurist- & Økonomiforbundets forlag



Figur 2; Bootstrap rentekurve, inkl. polynomium; Egen tilvirkning

Figur 2 viser den bootstrappede nulkuponrentekurve ud fra renteinstrumenterne, sammenholdt med excels indbyggede polynomiumfunktion, som alternativ til lineær interpolation. Der er i grafen vist et 3. grads polynomium med funktionen:

$$y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 \rightarrow y_t = -0,0049 + 0,0021 * t + (-0,000063 * t^2) \quad (27)$$

Det ses at afvigelserne vokser med tiden, især efter t_{15} vokser afvigelserne. R^2 angiver korrelationskoefficienten og dermed graden af sammenhæng imellem polynomiumskurven og nulkuponrentekurven. Ved at benytte minimeringsfunktionen i (26) kan man tilpasse polynomiumfunktionen til nulkuponrentekurven, ved at fremfinde den funktion som minimere forskellen i de observerede værdier i nulkuponrentekurven til polynomiumskurven. R^2 findes ved at summere alle afvigelserne fra de observerede punkter til polynomiumspunkterne, hvorfor (26) er med til at skabe den højeste R^2 værdi, R^2 angives som:

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} \quad (28)$$

$$SSR = \sum_t^n (y_t^{poly} - y_t^{nulkupon})^2 \quad (29)$$

$$SST = \sum_t^n (y_t^{poly} - y^{poly.gns})^2 \quad (30)$$

Hvor SSR angiver summen af alle de kvadrerede afstande imellem polynomiumsværdien og de observerede værdier. SST angiver summen af de kvadrerede afstande imellem polynomiumsværdien,

og gennemsnitsværdien af hvor polynomiumsfunktionen skærer y-aksen, hvilket svarer til gennemsnits nul kuponrenten ifølge polynomiumsfunktionen.

Såfremt $R^2 = 1$ vil polynomiumsfunktionen skære alle de observerede værdier, hvorfor der ikke vil være nogen afvigelser. Det aflæses således af grafen at for $t(1; 15)$ vil $R^2 > 0,9499$.

Ulempen ved polynomiet ses, at de største afvigelser findes ved $t > 15$ hvilket ligeledes er perioden, hvor der er længst imellem de observerede værdier. Prisfastsættelse af ydelser hvor $t > 15$ kan derfor være ukorrekte. Funktionen vurderes derfor ikke at være passende som diskonteringsrente for prissætning af obligationer, til trods for en høj R^2 værdi.

Anvendelse og modelresultater

Det er nu vist, hvordan der kan udledes diskonteringsfaktorer ud fra bootstrapping, excels tilhørende polynomium, samt en polynomiumsfunktion der er kalibreret via en minimeringsfunktion. De udledte diskonteringsfaktorer kan bruges til prisfastsættelse af cash flow på tilhørende tidspunkt for at finde prisen på obligationen. Herefter kan anvendeligheden af modellen vurderes ved at validere residualsommen, hvor residualsommen findes som:

$$Residualsum = \left(\sum_{i=1}^m |P_i - P_i^{teo}|^p \right)^{1/p} \quad (31)$$

Højere p værdi giver færre store afvigelser, men flere små afvigelse, modsat giver lavere p værdi flere store afvigelser og færre små afvigelser. Der er i funktionen anvendt $p = 2$.

Rentestrukturmodeller			
	Bootstrap, lineær	Bootstrap, polynomium	Polynomium fitted
Residualsum	0	496,00	45,86

Tabel 2; Bootstrap og polynomium, residualsommen; Egen tilvirkning

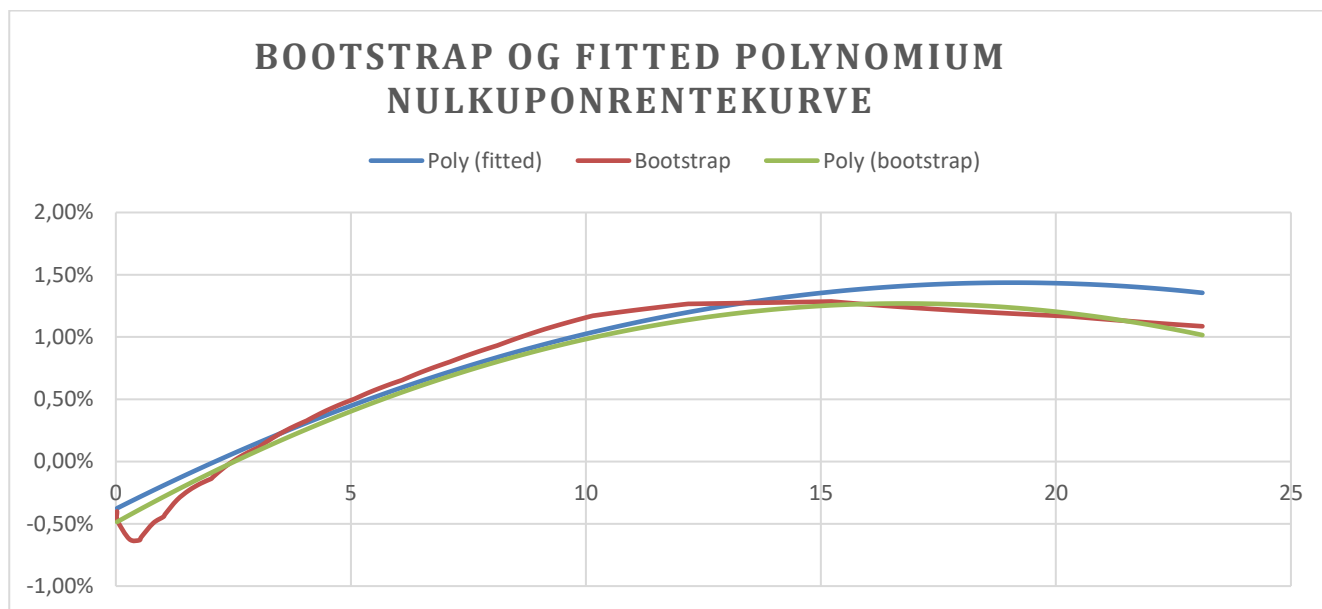
Det bemærkes at den kvadrerede prisfejl er højest for modellen, der anvender bootstrapping med en polynomiumsfunktion som erstatning for lineær interpolation. Den bootstrappede model med lineær interpolation har ingen afvigelse, da modellen netop afspejler de præcise priser i markedet, på bekostning af en lineær sammenhæng imellem de observerede punkter. Da det ses af figur 1, at der ikke er en lineær sammenhæng imellem punkterne, vurderes modellen ikke at være anvendelig.

Det fittede polynomium anvender minimeringsfunktionen i (26), uden at tage højde for den bootstrappede funktion. Residualsommen for denne 3. grads polynomiumsfunktion angiver således den tilbageværende residualsommen efter minimeringsfunktionen er anvendt.

Funktionen for polynomiet efter minimeringsfunktionen er givet som:

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \rightarrow y_t = -0,0038 + 0,001905 * t + 0,00005 * t^2 \quad (32)$$

Se appendiks for eksempel på beregning af nulkuponrenten via ovenstående funktion. Af disse tre rentestrukturer, vil det dermed være den fittede polynomiumsfunktion, hvor minimeringsfunktionen i (26) er anvendt, som vil være mest optimale. Den replikerer ikke renteinstrumenter præcis lige så godt som den bootstrappede rentestruktur, men har derimod bedre forudsætninger for at skabe en komplet rentestruktur, der replikerer den observerede bedst.



Figur 3; Bootstrap og fitted polynomium nulkuponrentekurve; Egen tilvirkning

Det ses af ovenstående graf, der har samlet de tre rentestrukturmodeller, at modellerne passer til preferred habitat teorien. Teorien antyder at institutter som f.eks. pensionskasser kan lokkes ned i mellem-lange obligationer, og rentekurven dermed har et toppunkt.

3.2. Nelson & Siegel inkl. Extended version – Nelson, Siegel & Svensson

I 1987 udgav Nelson & Siegel deres rentestrukturmodel, som minder om polynomiummodellen, men i stedet bygger på antagelse om at nulkuponrentekurven er givet ud fra nedenstående formel til forwardrenter, f_t , hvor nulkuponrenten, y_t , udtrykkes som et gennemsnit af forwardrenterne¹⁷.

$$f_t = \phi_0 + \phi_1 * e^{\frac{-t_1}{\phi_3}} + \phi_2 * \frac{\phi_3}{t_2} * e^{-t_1/\phi_3} \quad (33)$$

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 * \frac{1 - e^{-T}}{T} + \phi_2 * e^{-T} \text{ hvor } T = \frac{t}{\phi_3} \quad (34)$$

Ovenstående ϕ parametre skal estimeres ved at tilpasse rentekurven via en kvadreret minimeringsfunktion, ordinary least squares (OLS). Forskellen imellem de teoretiske priser og de observerede markedspriser minimeres via nedenstående:

¹⁷ Nelson & Siegel (1987): "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *The Journal of Business*, Volume 60, Issue 4, 473-489

$$\min_{\emptyset_0, \emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3} \sum_{i=1}^m [(P_i - P_i^{teo})^2] \quad (35)$$

Det kan udledes at y_t vil konvergere mod $\emptyset_0$ for $t \rightarrow \infty$, mens y_t vil konvergere mod $\emptyset_0 + \emptyset_1 + \emptyset_2$ for $t \rightarrow 0$, under antagelse om at $\emptyset_3 > 0$ ¹⁸.

Modellen er en decay funktion hvor parametrene anvendelse er:

$\emptyset_0$ er en konstant og er den lange komponent, som betragter den lange rente.

$\emptyset_1$ angiver den korte komponent som starter på faktor 1 og går mod 0, $\emptyset_0 + \emptyset_1$ betragtes som den korte rente.

$\emptyset_2$ angiver den mellemlange komponent som starter på 0, stiger og falder derefter mod 0.

$\emptyset_3$ er decay faktoren. Små værdier producerer langsomt fald og virker bedre for estimering af lange løbetider, hvorimod høje værdier medvirker til hurtige fald og virker bedre mod estimering af korte renter. Faktoren påvirker ligeledes hvor $\emptyset_2$ rammer toppunktet.

Rentekurven er en eksponentiel funktion, som vil konvergere mod en bestemt lang rente, hvor parametrene bestemmer, hvor hurtigt modellen konvergerer. Modellen har sin styrke i, at de 3 første led sikrer en meget fleksibel kurve som kan tilpasses rentekurven uafhængig af dens udseende. Rentekurven kan således både have toppunkter og være S-formet.

Som følge af at den mellemlange komponent $\emptyset_2$ har et toppunkt, vil modellen typisk skabe en pukkel i den lange ende af rentekurven, hvilket typisk ikke ses empirisk. Svensson udbyggede derfor modellen med et ekstra parameter i 1994, for at modarbejde denne pukkel, hvor nulkuponrenten er givet ved:

$$y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 * e^{-T} + \emptyset_2 * T * e^{-T} + \emptyset_3 \left(\frac{1 - e^{-T}}{T} - e^{-T} - \frac{T}{2} * e^{-T} \right) \text{ hvor } T = \frac{t}{\emptyset_4} \quad (36)$$

Modellen har modtaget meget ros for sin gode tilpasningsevne efter tilføjelsen af det ekstra led af Svensson i 1994. Det ekstra led kan kategoriseres som et krumningspunkt, hvorfor det er med til at modellere $\emptyset_2$ i den originale model, og dermed modvirke puklen i den lange ende af rentekurven.

Modellen bruges i stort omfang af centralbanker til estimering af deres rentekurver, som følge af modellens evne til at opfange alle former for rentescenarier¹⁹. Som følge af at modellen kalibreres ved hjælp af en minimeringskoefficient, kan modellen som udgangspunkt ikke opfattes som en no-arbitrage model. I det tilfælde at de kvadrerede prisfejl ~ 0 , kan det argumenteres, at modellen kan bruges som en no-arbitrage model, da modellen i dette, næsten præcis kan tilpasses de observerede

¹⁸ Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

¹⁹ Barret, Gosnell & Heuson (1995): "Yield Curve Shifts and the Selection of Immunization Strategies", *The Journal of Fixed Income*, Vol. 5, pp. 53-64

priser i markedet. Når modellen skal anvendes til prisfastsættelse af obligationer, skal det dermed vurderes, hvorvidt resultatet efter brug af minimeringsfunktionen kan accepteres.

Anvendelse og kalibrering af Nelson, Siegel & Svenssons rentestrukturmodel

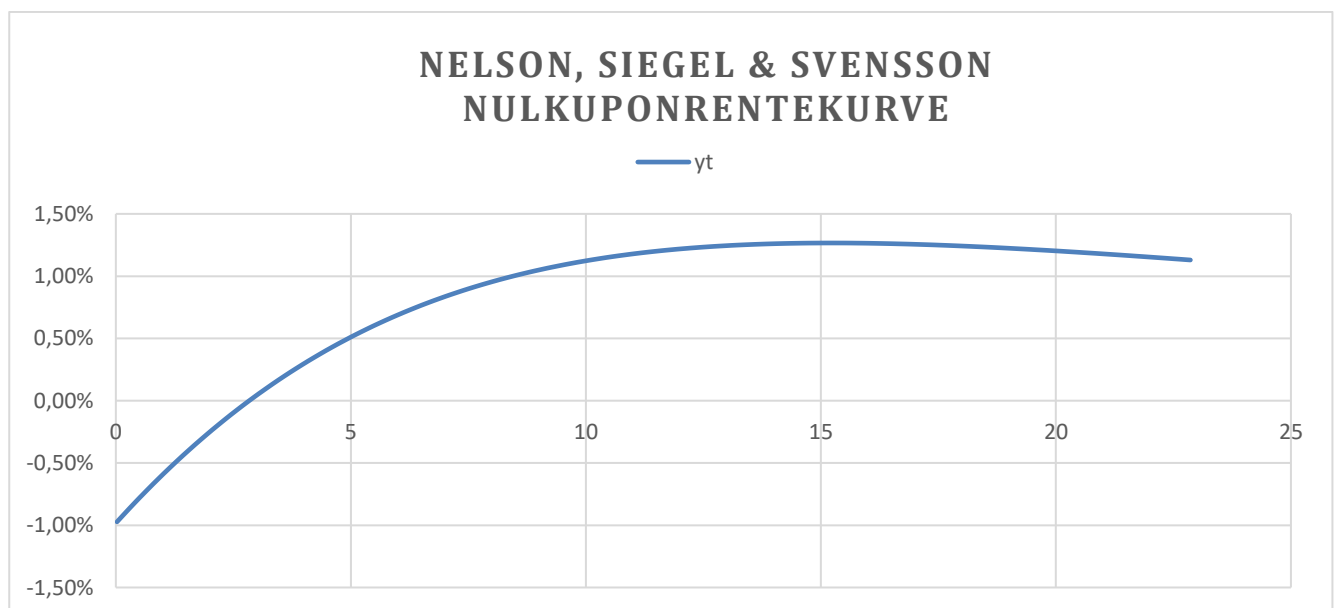
For at kunne anvende modellen til prisfastsættelse af obligationer, skal modellen kalibreres via minimeringsfunktionen i (35), hvor summen af de kvadrerede prisfejl imellem de observerede priser på renteinstrumenterne og modelpriserne minimeres, for at replikere den nuværende cibor rentekurve så godt som muligt. Dette giver nedenstående parametre for modellen:

Modelparametre	
Ø0	-0,0023
Ø1	-0,0076
Ø2	0,0151
Ø3	0,0676
Ø4	5,4480
Residual SWAP	1,25
Residual OBL	91,13

Tabel 3; Modelparametre for NSS; Egen tilvirkning

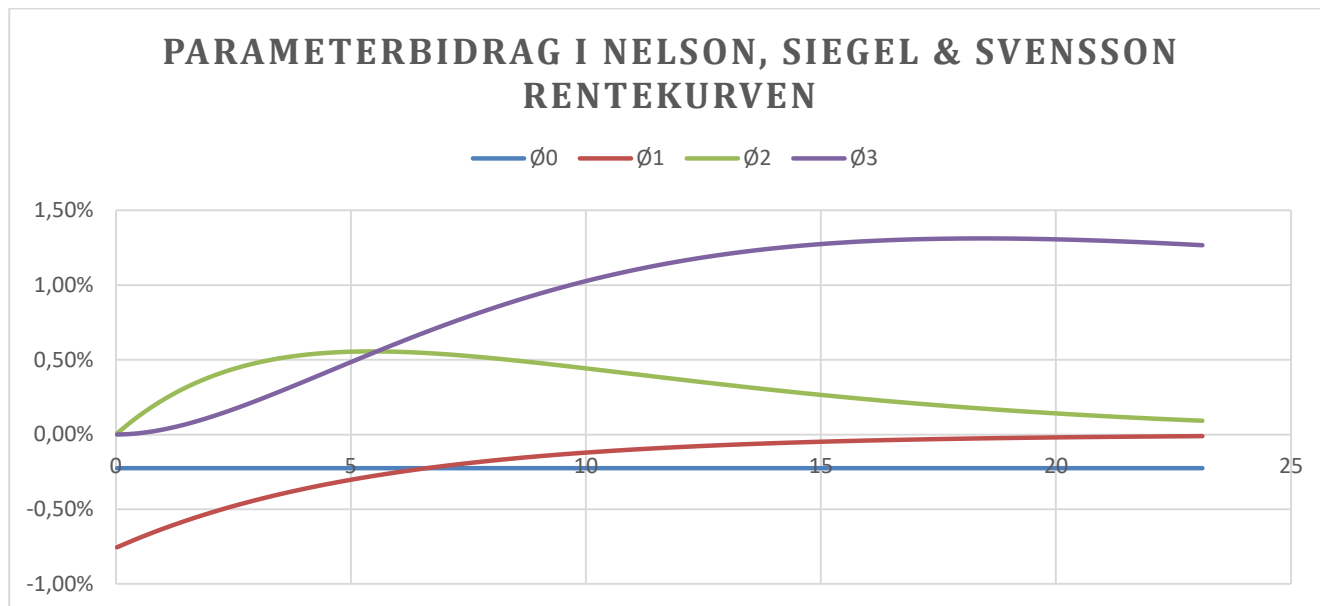
Residualsummen angiver summen af den tilbageværende kvadrerede prisfejl på de observerede priser og modelpriserne, og viser således hvor god modellen er til at replikere den observerede rentestruktur.

Nedenfor vises nulkuponrentekurven for Nelson Siegel Svensson modellen, efter den er tilpasset de observerede renteinstrumenter. Det ses at modellen konvergerer mod en bestemt lang rente, og at modellen er meget fleksibel i sit udtryk. Se ligeledes appendiks for eksempel på beregning af nulkuponrenten.



Figur 4; Nelson, Siegel & Svensson nulkuponrentekurve; Egen tilvirkning

Nedenfor er parameterbidragene skitseret. Det vises her at ϕ_0 angiver den konstante parameter, og ϕ_1 angiver det eksponentielle led i modellen. Det ses at ϕ_2 konvekse hældning er med til at flade rentekurven ud når $t \rightarrow \infty$ og ligeledes bidrager til eventuelle pukler i rentekurven. ϕ_3 bidrager til puklen i den korte ende af rentekurven og bidrager efterfølgende til en konvergens mod den langsigtede rente.



Figur 5; Parametrebidrag i Nelson, Siegel & Svensson rentekurven; Egen tilvirkning

Det er nu blevet gennemgået, hvordan rentestrukturen kan estimeres ved hjælp af en no-arbitrage model som bootstrapping, hvor den store ulempe er, at der sker lineær interpolation imellem de kendte betalingstidspunkter. Dette forsøgte polynomiummodellen at afhjælpe mod at give afkald på no-arbitrage forudsætningen, da det er en minimeringsfunktion, der ikke krydser bootstrapping punkterne, som er de kendte priser til tidspunkt t . Herefter blev Nelson & Siegel inkl. Nelson, Siegel & Svensson gennemgået, som er en mere avanceret model, der ligeledes bygger på en minimeringsfunktion, og ikke er en no-arbitrage model, men til gengæld kan opfange alle typer af rentestrukturer og er meget fleksibel.

3.1. Stokastiske rentestrukturmodeller

Det vil nu blive vist hvordan rentestrukturen kan udledes via dynamiske én-faktor rentemodeller, der er kategoriseret som stokastiske rentestrukturmodeller. Først vises de generelle dynamikkerne bag stokastiske processer. Herefter vises det hvordan disse inkorporeres i stokastiske rentestrukturmodeller som Vasicek og Cox, Ingersoll & Ross, og hvordan disse modeller implementeres til prisfastsættelse af obligationer.

Stokastiske processer

En simulationsteknik, som stokastiske processer, består af processer, hvori der indgår en variabel, hvis værdi er tilfældig (stokastisk). Der vil i det følgende tages udgangspunkt i to former for

stokastiske processer – Binomialfordelte variabler og normalfordelte variabler. En binomialfordelt variabel kan antage to værdier, hvor normalfordelte variabler antager en værdi fra normalfordelingen. Det vil senere blive vist, hvordan man udnytter fordelene ved binomialfordelte variabler. I det følgende afsnit, vil der blive anvendt normalfordelte variabler, som del af simulationsteknikken.

De stokastiske processer kan tage form i diskret eller kontinuert tid, hvor der med kontinuert tid forstås konstante ændringer i processen og ved diskret tid ændringer på fastsatte tidspunkter. Processerne betragtes oftest i kontinuert tid, og er matematiske korrekte, men simuleringerne sker i diskret tid, som følge af at simuleringerne typisk ikke kan udarbejdes ved uendelige små tidsintervaller.

Stokastiske processer er givet ved at have Markov egenskab, hvilket antyder at den fremtidige værdi er uafhængig af den foregående værdi. Fremtidsværdien bliver således udtrykt ved en normalfordeling med middelværdi 0, og varians 1, udtrykt som $N(0,1)$, svarende til standardnormalfordelingen. Når der skal simuleres i diskret tid, udnyttes det at hvis x er et tilfældigt tal imellem 0 og 1, vil den inverse fordelingsfunktion for standardnormalfordelingen, hvor $N(0,1)$ for x , være normalfordelt, og generere et tilfældigt tal fra standardnormalfordelingen. Dette giver nu mulighed for at simulere stokastiske processer fra normalfordelingen.

Processen for ovenstående er kategoriseret som en wiener proces, også nævnt brownsk bevægelse, og udtrykkes i kontinuert tid som:

$$dx = \varepsilon * \sqrt{dt} \quad (37)$$

For at kunne simulere på ovenstående proces, diskretiseres modellen som følge af, at der ikke kan simuleres på uendelige små tidsstep, og istedet indsættes Δt .

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (38)$$

Hvor ε angiver en tilfældig trækning fra den inverterede standardnormalfordeling $N(0,1)^{-1}$ og Δt angiver tidssteppet. En Wiener proces eller Brownsk bevægelse, betegnes som en diffusionsproces, og den endelige akkumulerende værdi for wiener processen i diskret tid kan skrives som:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \varepsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (39)$$

Med middelværdi = 0 og varians = 1, vil ovenstående akkumulerende proces følge en middelværdi på 0.

Ved at tilføje en drift som a samt volatiliteten udtrykt ved b , ændres processen til en generaliserede wiener proces, også nævnt brownsk bevægelse med drift. I kontinuert tid vist som:

$$dx = a * dt + b * dz \text{ hvor } dz = \varepsilon * \sqrt{dt} \quad (40)$$

Det ses, at dz angiver wiener processen i kontinuert tid, og driften ganges på tidssteppet for at angive driftsleddet. Volatiliteten ganges på wiener processen og skaber diffusionsleddet. Efter tilføjelsen af driftsleddet, vil middelværdien ikke længere forventes at være 0.

For at kunne anvende den generaliserede wiener proces, skal modellen diskretiseres. Værdien af processen kan simuleres som:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + a * \Delta t + b * \varepsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (41)$$

Ovenstående kan betegnes som en akkumulerende proces, hvor udviklingen afhænger af driftsleddet $a * \Delta t$ og diffusionsleddet $b * \varepsilon * \sqrt{\Delta t}$. ε angiver fortsat vores tilfældige trækning fra den inverterede standardnormalfordeling.

Modellen kan udvides ved at driftsleddet og diffusionsleddet bliver afhængige af den underliggende proces og af tidssteppet. Denne proces kaldes en Itô proces²⁰ og et specielt tilfælde heraf, er den geometriske browniske bevægelse, som er en udvidelse af den browniske bevægelse med drift, også nævnt den generaliserede wiener proces. Modellen kan i kontinuert tid skrives som:

$$dx = a(x, t) * dt + b(x, t) * dz \text{ hvor } dz = \varepsilon * \sqrt{dt} \quad (42)$$

For at kunne simulere skal modellen diskretiseres, givet ved:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + a * x_t * \Delta t + b * x_t * \varepsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (43)$$

Det ses, at både driftsleddet og diffusionsleddet nu ikke blot afhænger af tidssteppet, men også af den underliggende proces x_t . Dermed bliver funktionen eksponentiel, hvorfor den har navnet geometrisk brownisk bevægelse.

Den generelle teori om stokastiske processer er nu blevet vist, og vil i det efterfølgende blive implementeret via Vasicek og CIR stokastiske rentestrukturmodeller.

3.2. Vasicek

Vasicek modellen er i modsætning til tidligere gennemgåede rentestrukturmodeller, en stokastisk og dynamisk én-faktor model, hvor hele rentestrukturen kan udledes ud fra processen omkring den korte rente. Den korte rente bliver modelleret efter en økonomisk ligevægtsbetragtning, hvormed det antages, at økonomien er i ligevægt under nogle givne forudsætninger. I praksis ses dette ved at modellen har inkorporeret "Mean-reversion", som viser, at rentestrukturen trækkes hen imod

²⁰ Itô processer, Itô's lemma samt udledninger heraf vil ikke blive gennemgået yderligere i opgaven, se evt. afgrænsning

ligevægtspunktet. I modsætning til tidligere gennemgåede modeller, benyttes observerede markedspriser ikke som input i modellen til direkte prisfastsættelse. Vasicek modellen betragtes dermed heller ikke som en no-arbitrage model. Hvor de tidligere anvendte modeller forsøgte at tilpasse sig de observerede markedspriser, har Vasicek modellen ingen afhængighed til observerede markedspriser.

Kort-rente modellen i Vasicek bygger på en Ornstein-Uhlenbeck proces, der betegner en wiener proces med indbygget mean-reversion og er i kontinuert tid givet ved²¹:

$$dr = a(b - r) * dt + \sigma * dz \quad (44)$$

Hvor dr repræsenterer ændringen i renten. Det ses at a , b og volatiliteten er uafhængige af tiden og er konstanter. b angiver ligevægtsrenten som modellen konvergerer imod og a er hastighedsparameteren. Volatiliteten er angivet ved den absolutte rentevolatilitet, som er givet ved:

$$\sigma = \sigma_r * r \quad (45)$$

Modellen er en stokastisk rentestrukturmodel, hvilket er angivet ved det stokastiske led dz , der er en tilfældig trækning fra den inverterede standardnormalfordeling med middelværdi 0 og varians 1, hvorfor modellen i kontinuert tid følger en wienerproces, givet ved:

$$dz = \epsilon * \sqrt{dt} \text{ hvor } \epsilon = random(N(0,1))^{-1} \quad (46)$$

Da modellen skal bruges til prisfastsættelse af obligationer, hvor der ikke kan anvendes uendelig små tidsskridt, som anvendes i kontinuert form, er der behov for, at modellen diskretiseres, ved at anvende tidsstep angivet som Δt . Den diskretiserede Vasicek model er givet ved:

$$\Delta r = a(b - r) * \Delta t + \sigma * \epsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (47)$$

Hvor den akkumulerende proces i diskret tid er givet som:

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r) * \Delta t + \sigma * \epsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (48)$$

Når b skal estimeres i Vasiceks model, der angiver den langsigtede ligevægts kortrente i økonomien, kigges typisk efter anerkendte økonomiske teoretikers økonomiske modeller for ligevægt i økonomierne. Da de økonomiske modeller typisk har mange forudsætninger, kan det være svært at estimere og vurdere de korrekte værdier for både a og b i modellen.

²¹ Vasicek, Oldrich (1977): "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188

Det er nu vist, hvordan den korte rente modelleres, som der er byggestenene i Vasiceks rentestrukturmodel. Modellen bliver først stokastisk når $t > 0$, da den korte nuværende rente r_0 kan observeres i markedet i dag. Det giver den fordel, at der kan udledes en ikke-stokastisk lang rentestruktur ud fra Vasicek modellen, under forudsætning af, at rentestrukturen beregnes ud fra det nuværende renteniveau. Rentestrukturen kan således både udledes via en closed-form solution, samt Monte-Carlo simulering af kort-rente modellen.

Generelt findes prisen på en nul kuponobligation som dens diskonteringsfaktor, hvormed nedenstående viser sammenhængen imellem diskonteringsfaktor og rente ved kontinuert rentetilskrivning:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{-(T-t)*R(t, T)} \\ R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \end{aligned} \quad (49)$$

Ved closed-form solution for Vasicek modellen, er prisen for nul kuponobligationen givet ved:

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T)*r(t)} \quad (50)$$

Hvor P repræsenterer prisen for nul kuponobligationen på tidspunkt t med udløb på tidspunkt T og r angiver den korte rente modelleret via (48). $B(t, T)$ er givet ved:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (51)$$

Hvor a repræsenterer hastighedsparameteren fra kortrente modellen. $A(t, T)$ er givet ved:

$$A(t, T) = e * \frac{(B(t, T) - T + t) * \left(a^2 * b - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 * B(t, T)^2}{4 * a} \quad (52)$$

Hvor b repræsenterer den korte ligevægts rente fra kortrente modellen.

Ved at indsætte udtrykket fra (50), i (49), samt anvende den elementære funktion for differentiering hvor $\ln(x) = \frac{1}{x}$ kan nul kuponrenten udledes som:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} * B(t, T) * r(t) \quad (53)$$

Dermed kan der udledes en hel rentestruktur ud fra ovenstående udtryk, ved blot at fastsætte parametrene r_0, a, b og σ .

Den langsigtede ligevægtsrente kan for Vasicek modellen udledes ved:

$$R_{lige\text{v}\ddot{a}gt}(t, T) = (b - \sigma^2)/(2 * a^2) \quad (54)$$

Det kan herefter vises at $R(t, T)$ konvergerer mod $R_{lige\text{v}\ddot{a}gt}(t, T)$ for $T \rightarrow \infty$.

Da kortrente modellen i Vasicek bygger på en generaliseret wiener proces, antages det ligeledes, at spotrenterne følger en normalfordeling. Herudover ses det, at volatiliteten i modellen antages at være konstant, hvilket er en svaghed ved modellen, da volatiliteten typisk afhænger af tiden. Der kan dog korrigeres herfor ved at bruge en dynamisk volatilitet, som ligeledes kræver kalibrering af modellen.

Når a og b estimeres ud fra økonomiske ligevægts betragtninger, giver modellen et bud på, hvordan et rentescenarie vil se ud, såfremt man bevæger sig fra den nuværende tilstand og til det økonomiske ligevægtpunkt. Når modellens anvendelse er prisfastsættelse af obligationer, ønskes der replikeret en observeret rentestruktur, hvorfor parametrene bør estimeres på anden vis. Dette kan ske ved at erstatte de økonomiske ligevægts betragtninger for a og b , med en minimeringsfunktion for parametrene a og b i kortrentemodellen, som er givet ved:

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^n [(P_i - P_i^{teo})^2] \quad (55)$$

Parameterne estimeres således ved at minimere summen af de kvadrerede prisforskelle de observerede priser og modelpriserne.

I anvendelse af Vasicek modellen, er der benyttet Tomorrow Next (T/N Cibur) renten som den korte rente. T/N Cibur renten angiver, hvilken rente danske pengeinstitutter ønsker at udstede usikret én dags udlån til andre institutter, som minimum har en AA-rating, nøjagtig som ved andre Cibur renter. T/N Cibur renten var pr. d. 18. december 2017 -0,55%.

Volatilitet til Vasicek modellen

For at kunne anvende Vasicek modellen skal der estimeres en volatilitet for den korte rente. Volatiliteten kan estimeres ud fra flere teorier, som har hver deres fordele og ulemper. Der er indsamlet data for 1 år for T/N Cibur²², løbende fra d. 18. december 2016 til d. 17. december 2017. Den historiske volatilitet kan herefter beregnes som:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2}{n - 1}} \quad (56)$$

²² T/N Cibur står for Tomorrow Next Cibur og er 1 dags Cibur renten

Hvor μ_i angiver afkastet på tidspunkt i og $\bar{\mu}$ angiver det gennemsnitlige afkast. Der bliver dermed angivet en volatilitet ud fra, hvorledes det enkelte afkast afviger fra det gennemsnitlige afkast. Den historiske volatilitet for T/N Cibor er givet ved:

$$\sigma = \sqrt{\frac{101,185}{253}} = 63,37\% \quad (57)$$

Den historiske volatilitet har sine ulemper, blandt andet i form, af at afkastet, uanset tidspunkt, har samme vægt ved beregning af volatiliteten. Denne udfordring kan afhjælpes ved at benytte en volatilitet, hvor der lægges større vægt på seneste afkast, fremfor tidligere afkast. EWMA – Exponentially Weighted Moving Average – volatilitetsberegning tager højde for dette, og er givet ved:

$$\sigma_t^2 = \lambda * \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) * \mu_{t-1}^2 \quad (58)$$

Hvor lambda, λ , bestemmer hvilken vægt den seneste observation skal have, givet ved:

$$\alpha = (1 - \lambda) * \lambda^{t-1} \quad (59)$$

Alfa, α , angiver vægten for den enkelte observation. Det ses at højere lambda værdi giver en lavere vægt for de seneste observerede værdier. Da der er tale om en tidsserie, hvor værdien af de foregående tidsrækker er indregnet i t_{-1} , kan EWMA for den nuværende volatilitet udtrykkes ved blot kun at benytte den seneste observerede værdi. Der er markedspraksis for at benytte en lambda på 0,94, hvilket ligeledes er anvendt i nedenstående udregning af EWMA volatilitet for T/N Cibor. EWMA volatiliteten for T/N Cibor er dermed givet som:

$$\sigma_t^2 = 0,94 * 0,004^2 + (1 - 0,94) * 0,0563^2 = 0,000205 \quad (60)$$

$$\sigma_t = \sqrt{0,000205} = 1,43\% \quad (61)$$

Da volatiliteten, og ikke variansen, ønskes estimeret tages kvadratroden for at finde volatiliteten.

I praksis anvendes volatiliteten ofte via en GARCH-estimation. Denne model tilsiger at volatiliteten vil tilnærme sig den langsigtede volatilitet for aktivet, hvorfor der er indbygget mean-reversion i modellen. For at kunne anvende modellen, skal der dermed estimeres en langsigtet volatilitet for aktivet. GARCH-volatilitet beregnes som:

$$\sigma_t^2 = \gamma * \sigma_L^2 + \alpha * \mu_{t-1}^2 + \beta * \sigma_{t-1}^2 \quad (62)$$

Det ses, at parameterne gamma, γ , beta, β , og alfa, α , ganges på hhv. den langsigtede volatilitet, det seneste afkast og volatiliteten på den seneste observerede værdi. Dermed skal summen af gamma, beta og alfa være lig 1²³. Vægtene for gamma, beta og alfa angiver, hvorvidt volatiliteten skal afhænge af det langsigtede volatilitetsniveau, det seneste afkast, og den seneste observerede volatilitet. Det ses at hvis gamma sættes til 0, vil GARCH-modellen angive den samme volatilitet som EWMA volatiliteten. Lambda i EWMA volatiliteten angiver dermed vægten for beta i GARCH-modellen, og 1-lambda angiver vægten for alfa i GARCH-modellen. For udregning af GARCH-volatiliteten, indsættes den historiske volatilitet baseret på det seneste år, som det langsigtede volatilitetsmål for T/N Cibur. GARCH-volatiliteten for T/N Cibur kan da skrives som:

$$\sigma_t^2 = 0,15 * 0,6337^2 + 0,05 * 0,0563^2 + 0,80 * 0,004^2 = 0,0604 \quad (63)$$

$$\sigma_t = \sqrt{0,0604} = 24,58\% \quad (64)$$

Som ved EWMA volatiliteten, ønskes volatiliteten beregnet, hvorfor der tages kvadratroden af variansen. Det bemærkes at GARCH-volatiliteten er højere end EWMA-volatiliteten, hvilket skyldes at der tildeles en vægt på 15 % for gamma, som multipliceres med den langsigtede volatilitet. Parameter vægtende for gamma, alfa og beta på hhv. 15 %, 5 % og 80 % er ikke beregnet, men antaget²⁴. Det bemærkes at de korte renter er præget af stor transaktionshastighed, hvorfor volatiliteten for disse typisk ses at være højere end for de lange renter.

Volatiliteten skal bruges til beregning af Vasicek modellen, hvor inputtet er den absolutte rentevolatilitet, hvorfor volatiliteten skaleres til denne ved:

$$\sigma = \sigma_r * r \quad (65)$$

$$\sigma = 0,2458 * -0,0055 = -0,0014 \rightarrow -0,14\% \quad (66)$$

$$\sigma = -0,0014 * -1 = 0,0014 \rightarrow 0,14\% \quad (67)$$

Da der anvendes numerisk volatilitet, inverteres volatiliteten for at blive et positivt tal.

Anvendelse og kalibrering af Vasicek Modellen

Da anvendelse af Vasicek modellen skal bruges til at prisfastsætte obligationer observeret i markedet, er der ikke behov for modellering af Vasiceks kortrentemodell, da r_0 er kendt, og

²³ Der er udviklet mange forskellige GARCH-modeller, hvorfor gamma, beta og alfa nødvendigvis ikke summerer til 1 i alle GARCH-modellerne.

²⁴ For både EWMA og GARCH volatiliteten, er der anvendt samme parameter som i:

Andresen, Jørgen Just (2016): Finansiell risikostyring, 2. Udgave, Jurist- og Økonomiforbundets forlag

rentestrukturen kan udledes via closed-form solutions. Volatiliteten er beregnet ovenfor jf. GARCH, og modelparameterne konvergenshastighed, a , og mean-reversion level, b , modelleres via minimeringsfunktionen i (55). Da anvendelsesformålet med modellen er prissætning af obligationer, og ikke estimering af rentestruktur udvikling imod den optimale ligevægts økonomi, modelleres modelparameterne til det nuværende obligationsniveau. Minimeringsfunktionen er anvendt, som ved de tidligere modeller, overfor renteinstrumenterne, for at replikere den observerede rentestruktur så optimalt som muligt.

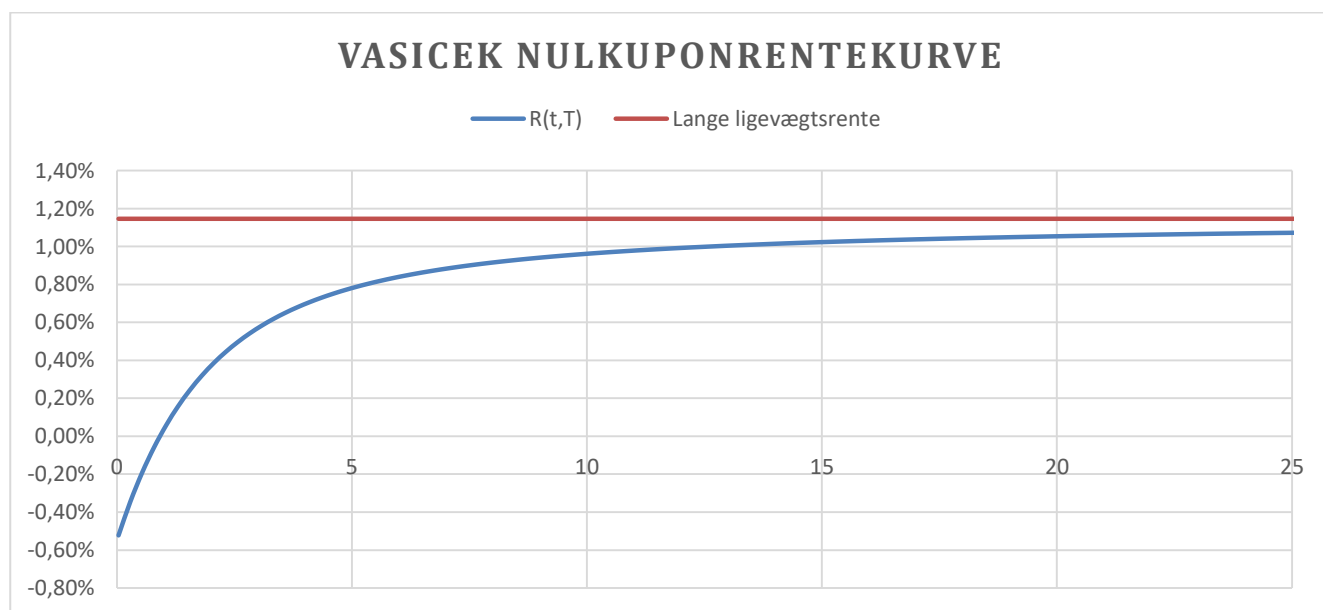
Følgende parametre for Vasicek modellen er estimeret:

Modelparametre	
a	0,92
b	1,15%
σ	0,14%
Residual SWAP	48,38
Residual OBL	136,68

Tabel 4; Modelparametre for Vasicek; Egen tilvirkning

Residual leddet angiver den tilbageværende kvadreret sumforskel imellem de observerede priser på hhv. SWAP renteinstrumenterne og obligationerne, og modelpriserne fundet ved Vasicekmodellen.

Nedenfor ses Vasicek nulkuponrentekurven, hvor det bemærkes, at modellen konvergerer imod den langsigtede ligevægtsrente. Sammenholdt med Nelson, Siegel & Svenssons rentestrukturmodel, har Vasiceks rentestrukturmodel en høj kvadreret prisfejl, hvilket betyder at modellen ikke har kunne tilpasse sig rentestrukturen lige så godt som i Nelson, Siegel og Svenssons model. Deres model har flere parametre end Vasiceks, hvilket betyder at modellen er mere fleksibel, og det kommer til udtryk her.



Figur 6; Vasicek nulkuponrentekurve; Egen tilvirkning

Se appendiks for eksempel på beregning af nulkuponrenten.

3.3. Cox, Ingersoll & Ross

8 år efter Vasicek's udgivelse af sin stokastiske rentestrukturmodel, fremlagde Cox, Ingersoll & Ross en alternative model²⁵. Modellen er ligeledes en stokastisk rentestrukturmodel, der bygger på samme grundprincipper som Vasicek modellen. I kontinuert form fremlægges rentestrukturmodellen som

$$dr = a(b - r) * dt + \sigma * \sqrt{r} * dz \quad (68)$$

Det ses at modellen ligeledes er en én-faktor model med den korte rente som faktoren, hvorfra rentestrukturen kan udledes. Det ses, at driftleddet i processen er identisk med Vasicek modellens, da renten konvergerer imod mean-reversion niveauet b med hastigheden a . Diffusionsleddet er derimod anderledes, da volatiliteten for ændringen i den korte rente i tidsskridtet dt er proportionalt med kvadratroden af den korte rente. Dermed vil volatiliteten stige når renten stiger. I diskret tid er modellen angivet som:

$$\Delta r = a(b - r) * \Delta t + \sigma * \sqrt{r} * \epsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (69)$$

Hvor den akkumulerende proces i diskret tid er givet som:

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r) * \Delta t + \sigma * \sqrt{r} * \epsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (70)$$

Som ved Vasicek modellen, kan der udledes closed-form solutions til beregning af nulkuponsobligationspriser. Sammenhængen mellem pris og rente ved kontinuert rentetilskrivning er identisk og følger (49), og prisen på nulkuponobligationen i modellen følger samme formel som Vasicek modellen:

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T) * r(t)} \quad (71)$$

Da de stokastiske renter følger en anden renteudvikling end i Vasicek modellen, er parametrene $A(t, T)$ samt $B(t, T)$ ligeledes forskellige, og følger:

$$B(t, T) = \frac{2 * (e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a + \lambda) * (e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2 * \gamma} \quad (72)$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2 * y * e^{(a+\gamma+\lambda)*(T-t)/2}}{(\gamma + a + \lambda) * (e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2 * \gamma} \right]^{2*a*b/\sigma^2} \quad (73)$$

²⁵ Cox, Ross & Rubenstein (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, 385-407

Hvor:

$$\gamma = ((a + \lambda)^2 + 2 * \sigma^2)^{1/2} \quad (74)$$

Modellen implementeres i risikofrit univers, hvorfor market risk, λ , = 0. Når modellen anvender rente med kreditspænd, som $r(t)$, kan resten af modellen implementeres som i den risikofri verden²⁶, hvor:

$$B(t, T) = \frac{2 * (e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a) * (e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2 * \gamma} \quad (75)$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2 * \gamma * e^{(a+\gamma)*(T-t)/2}}{(\gamma + a) * (e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2 * \gamma} \right]^{2*a*b/\sigma^2} \quad (76)$$

Hvor:

$$\gamma = (a^2 + 2 * \sigma^2)^{1/2} \quad (77)$$

Det kan bevises, at r kan blive 0 såfremt $\sigma^2 > 2 * a * b$. Såfremt $2 * a * b > \sigma^2$ vil der være en positiv drift stor nok til, at renten ikke kan blive 0, uagtet værdien af volatiliteten. Til trods for at diffusionsleddet kan konvergere imod uendeligt, kan renterne ikke blive negative, da volatiliteten afhænger af renten og sammenholdt med førnævnte to forhold. Dette betyder ligeledes at såfremt renten $r_t = 0$ vil $r_{t+1} \geq 0$.

Som for Vasicek modellen, kan der udledes en langsigtet ligevægtsrente, som $R(t, T)$ konvergerer imod når $T \rightarrow \infty$, givet som:

$$R_{\text{ligevægt}} = \frac{2 * a * b}{\gamma + a} \quad (78)$$

Anvendelse og kalibrering af CIR modellen

Modellen ønskes, ligesom med Vasicek modellen, kalibreret til markedssdata, da formålet med modellen i denne opgave er prisfastsættelse af observerede obligationer. Minimeringsfunktionen fra (55) anvendes således for at tilpasse modellen til renteinstrumenterne. Forudsætninger for modellen er identiske med forudsætningerne for Vasicek modellen, hvorfor der ligeledes anvendes T/N renten som r_0 og den absolutte rentevolatilitet udtrykt som GARCH-volatiliteten.

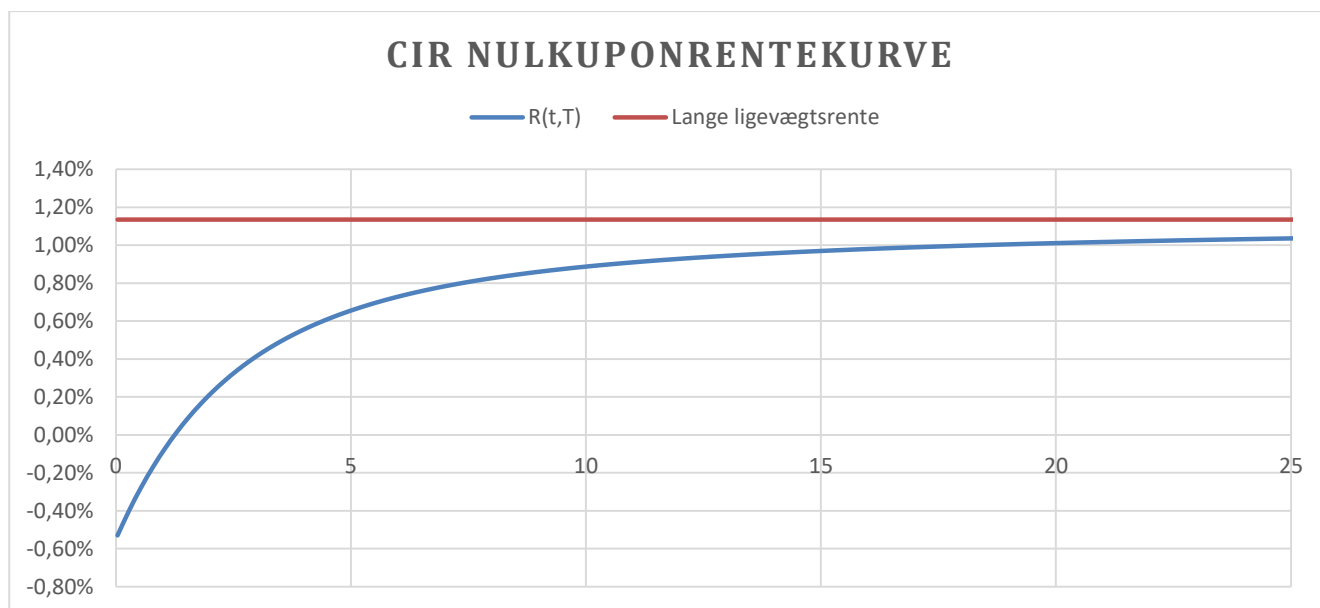
Parametrene for CIR modellen efter anvendelse af (55), er vist nedenfor:

²⁶ Hull, John (2015): Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edition, Pearson

Modelparametre	
a	0,68
b	1,13%
σ	0,14%
Residual SWAP	50,28
Residual OBL	160,60

Tabel 5; Modelparametre for CIR; Egen tilvirkning

Hvor den tilhørende rentestruktur for CIR modellen ser ud som nedenstående:



Figur 7; CIR nulkuponrentekurve; Egen tilvirkning

Rentestrukturen og modelresultaterne i sin helhed er utrolig lig Vasicek modellen. Der vil senere blive set på en sammenligning af modellerne, og hvorledes modellerne kan bruges empirisk. Se appendiks for eksempel på beregning af nulkuponrenten.

3.4. Afsluttende om rentestrukturmodellerne

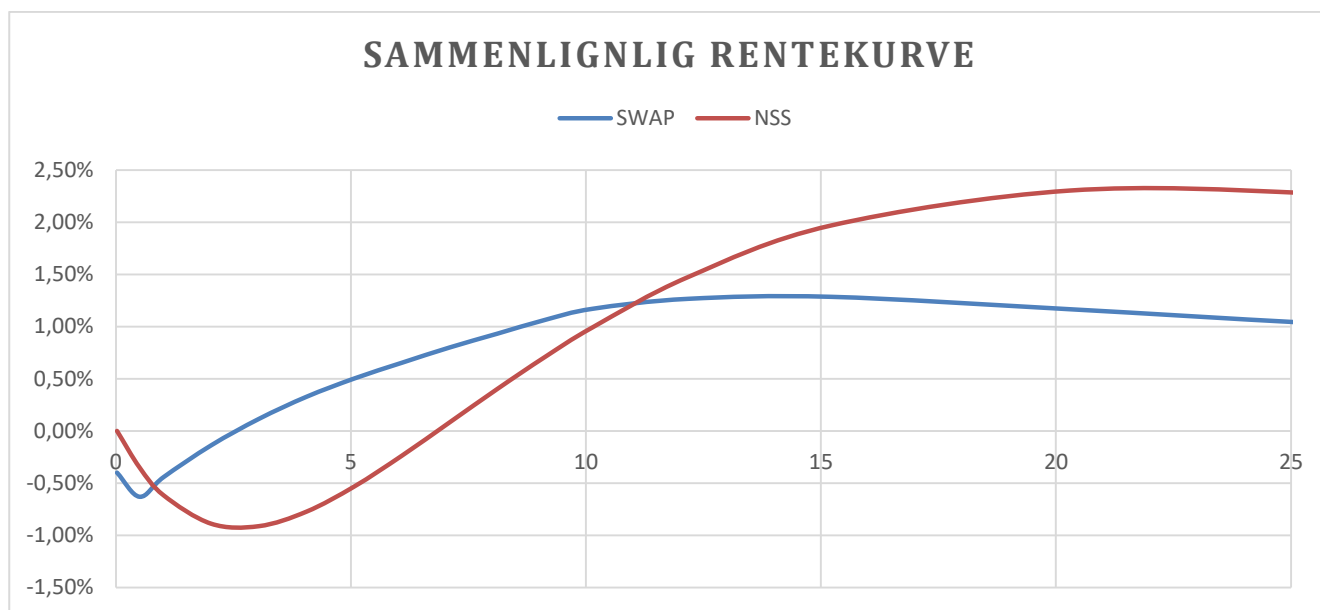
Det er nu vist, hvordan forskellige rentestrukturmodeller kan implementeres. Modellerne er blevet implementeret ved at blive kalibreret til den observerede rentekurve, her valgt Nordeas renteinstrumenter med Cibor renten som underliggende, hvorefter modellerne kan anvendes til prisfastsættelse af de konverterbare realkreditobligationer.

Rentestrukturmodeller						
	Bootstrap, lineær	Bootstrap, poly	Poly, fitted	NSS	Vasicek	CIR
Residual BRF 2040	27,23	32,28	16,26	25,46	41,17	51,13
Residual Nordea 2040	27,98	33,10	16,84	26,18	42,09	52,15
Residual RD 2040	26,97	32,00	16,06	25,21	40,85	50,77
Residual BRF2030	4,05	1,64	2,55	3,83	3,32	1,56
Residual Nordea 2030	5,25	2,44	3,52	5,01	4,42	2,34
Residual RD 2030	5,70	2,75	3,89	5,44	4,83	2,64
Residualsum OBL	97,18	104,22	59,13	91,13	136,68	160,60
Residualsum SWAP	0	496,00	45,86	1,25	48,38	54,58

Tabel 6; Samlet rentestrukturmodeller residualsum; Egen tilvirkning

Som det ses af ovenstående, er der ikke nogen direkte sammenhæng imellem hvor god rentestrukturmodellerne er til at replikere den observerede rentestruktur fra renteinstrumenterne, og evnen til samtidig at replikere obligationskurserne ud fra denne rentestruktur. Dette ses ved at Nelson, Siegel & Svenssons rentestruktur er tættere på at replikere den observerede SWAP rentekurve end den fittede polynomiumsfunction, men polynomiumsfunctionens rentestruktur prissætter realkreditobligationerne tættere på deres observerede kurs. Den bootstrappede rentestruktur replikerer den observerede cibor rentekurve direkte, men prissætter ikke realkreditobligationerne præcis som deres observerede kurs. Dette er blandt andet et resultat af, at obligationerne har flere betalingstidspunkter end der er observerede cibor renteinstrumenter. Derudover er modellen, som diskuteret tidligere, beregnet til replikering kun på de tidspunkter, hvor der er renteinstrumenter, og har sin svaghed ved meget lille fleksibilitet uden for disse punkter, hvor der i ovenstående er anvendt en lineær interpolation og et 3. grads polynomium. I bilag 1 fremgår en sammenligning af alle rentestrukturerne.

Nelson, Siegel & Svenssons rentemodell beviser ovenfor sin store fleksibilitet, som argumenteret for tidligere, ved næsten at kunne replikere de observerede cibor instrumenter fuldkommen. Derfor anvendes denne model nedenfor for at vise en komplet replikeret rentestruktur, der prissætter realkreditobligationerne, sammenholdt med rentestrukturen for cibor instrumenterne.



Figur 8; Rentekurve for SWAP og NSS fitted til Realkreditobligationer; Egen tilvirkning

Ovenstående rentekurve for Nelson, Siegel & Svenson er tilpasset de observerede kurser på realkreditobligationerne med en samlet kvadreret prisfejl, residuals sum på 0,08, hvorfor der kan argumenteres for, at det er så tæt på, man kan komme på en komplet replikering. Rentekurven viser således et stort gap imellem den observerede rentekurve ud fra cibor renteinstrumenterne, og de observerede kurser på realkreditobligationerne. Dette er til trods for, at instrumenterne vurderes at have samme kredit- og likviditetsrisiko. Forskellen må således udtrykke prisen på den tilhørende option, hvor det ses, at investorer med en tidshorisont større end ca. 11 år ønsker en præmie for køb af obligationerne med tilhørende option.

Der vil nu blive set nærmere på, hvordan optionselementet kan prisfastsættes, og herefter følger en gennemgang af de samlede modelresultater og konklusioner herpå.

4. Prisfastsættelse af optionselementet

Der er nu vist, hvordan obligationerne kan prisfastsættes ved hjælp af forskellige rentestrukturmodeller med hver deres forudsætninger. Som nævnt tidligere, består de konverterbare obligationer på det danske realkreditmarked af en inkonverterbar obligation, samt en solgt call option med en strike kurs på 100. De viste rentestrukturmodeller har prisfastsat obligationerne ud fra en tese om at obligationerne er inkonverterbare. Der er således behov for at prisfastsætte optionselementet.

Det vil nu blive vist, hvordan call optionen på de tilhørende danske realkreditobligationer kan værdiansættes, således at rentestrukturmodellerne kan korrigeres for optionspræmien, og prisen for hele den konverterbare obligation kan findes. Der vil blive vist, hvordan optionen kan prisfastsættes ved hjælp af 3 forskellige modeller, samt hvilke fordele og ulemper de forskellige modeller besidder.

4.1. Optionstyper og metoder til prisfastsættelse

På optionsmarkedet findes to typer af optioner, call og put optioner. Europæiske call optioner giver køberen af optionen ret til at købe et givent aktiv, på et givent tidspunkt, til en given pris. Modsat giver europæiske put optioner ret til at sælge et givent aktiv, på et givent tidspunkt, til en given pris. Udover at købe optioner, kan man også sælge optioner. Sælgeren af optionen modtager en optionspræmie fra køberen af optionen, men vil således også være tvunget til at enten købe eller sælge det givne aktiv, på det givne tidspunkt, til den givne pris, til køberen af optionen. På det danske realkreditmarked, består de konverterbare obligationer af en inkonverterbar obligation samt en solgt call option, set fra investors synspunkt. På de fastforrentede obligationer der arbejdes med i denne opgave, er strike kursen på optionerne 100, hvilket betyder at investor kan være tvunget til at sælge obligationen tilbage til køber af optionen til kurs 100.

For køber af optionen vil payoff se således ud:

$$Payoff_{call} = \text{Max}(S_t - X; 0) \quad (79)$$

$$Payoff_{put} = \text{Max}(X - S_t; 0) \quad (80)$$

Hvor S_t angiver værdien af det underliggende aktiv på tidspunkt t , og X angiver strikekursen. Hvornår optionen kan udnyttes af køber afhænger ligeledes af, hvilken type af option der er tale om. For europæiske optioner kan optionen kun udnyttes ved udløbstidspunktet, for amerikanske optioner kan optionen altid udnyttes. For Bermuda optioner kan optionen udnyttes på fastlagte tidspunkter. Så længe den risikofri rente der bruges til prisfastsættelse af optioner er > 0 , vil amerikanske og Bermuda optioner være dyre end europæiske optioner, som følge af den risikoneutrale prisfastsættelse af optioner.

På det danske realkreditmarked kan optionen tilhørende realkreditobligationerne excercises 4 gange årligt, på fastlagte tidspunkter. Dermed er optionselementet tilknyttet obligationerne en Bermuda call option.

Ved værdiansættelse af optioner har det stor betydning, hvorvidt man har med europæiske optioner, eller optioner der har mulighed for førtidig udnyttelse, som amerikanske og Bermuda, at gøre. For europæiske optioner findes der closed-form solutions til prisfastsættelse, i form af Black-Scholes-Merton formelen, som angiver den præcise værdi af optionen, og hvor eneste ubekendte er volatiliteten, der kan estimeres via flere forskellige modeller²⁷.

Black-Scholes-Merton (BSM) modellen kan ikke tage højde for, hvorvidt optionen bliver udnyttet før tid, da det afhænger af værdiudviklingen i det underliggende aktiv og ikke blot slutværdien. Da europæiske optioner kun kan udnyttes ved sluttidspunktet, hvor amerikanske og bermuda optioner

²⁷ Da Black-Scholes-Merton formelen ikke kan anvendes på Bermuda optioner, vil formelen ikke blive vist i opgaven

kan udnyttes før udløb, kan BSM således ikke anvendes til prisfastsættelse af andet end europæiske optioner. Man vil i disse tilfælde få brug for numeriske metoder som binomialmodeller, stokastiske processer eller anden simulationsteknik som Monte-Carlo simulation, for at generere en værdiudvikling for det underliggende aktiv, til brug for værdiansættelse af optionen.

Ved anvendelse af numeriske metoder opnår man en approksimering af værdien på optionen. Det ses at denne approksimering konvergerer mod den sande værdi på optionen, når det anvendte tidsskridt minimeres eller antallet af simuleringer øges, hvorfor disse parametre er af stor betydning ved anvendelse af numeriske metoder til prisfastsættelse af optioner²⁸.

4.2. Konfigurering til renteoptioner

De tidligere gennemgåede stokastiske processer, er velegnede til simulering af værdiudviklingen på det underliggende aktiv for f.eks. aktieoptioner. For optioner på rentebærende produkter, skal modellerne konfigureres som følge af, at renter ikke følger helt samme stokastiske proces som på aktier. På rentemarkedet ser man typisk et niveau hvortil renterne konvergere imod, hvorfor der i processen skal tages højde for dette mean-reversion niveau, netop som vist ved Vasiceks & CIR rentestrukturmodeller. For at kunne anvende stokastiske processer til prisfastsættelse af renteoptioner, skal der således vælges en rentestrukturproces, som kan simulere renteudviklingen, som ligger til grund for prisfastsættelse af den underliggende obligation.

Ved anvendelse af Vasicek modellen til prisfastsættelse af renteoptioner, skal der tages beslutning om, hvordan modellen ønskes benyttet. Rentestrukturmodellen kan simulere den korte rente, hvilket åbner for anvendelse af flere forskellige metoder til udledning af optionsprisen. Da værdien af optionen afhænger af værdien af den underliggende obligation, skal Vasiceks rentesimulering anvendes til prisfastsættelse af den tilhørende obligation, hvorefter optionen kan prisfastsættes.

Når den fremtidige korte rente er simuleret, kan den korte rente anvendes til at simulere hele rentestrukturen på det givne tidspunkt. Ved beregning af obligationens varighed og konveksitet, kan den fremtidige rentestruktur sammenlignes med dagens rentestruktur, for beregning af kursændringen. Obligationens kurs vil således kunne beregnes på det pågældende tidspunkt som funktion af renteændring, varighed og konveksitet. Denne metode vil kræve enorme mængder data som følge af, at der for hver simuleret fremtidig rente, skal udarbejdes en hel tilhørende rentestruktur.

Ved anvendelse af akkumulerende stokastiske diskonteringsfaktorer samt Vasiceks mulighed for closed-form solutions for beregning af diskonteringsfaktorer på udvalgte tidspunkter, kan modellen kalibreres til prisfastsættelse af optioner ved brug af mindre data end førnævnte løsning.

²⁸ Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

Modelparameterne skal estimeres, og er i den anvendte model fastsat som vist nedenfor, med Vasicek som underliggende rentestruktur:

Modelparametre		
	T=23,25	T=13,25
a	0,2	0,2
b	4,33%	4,33%
σ	0,69%	0,69%
dt	0,25	0,25
r0	-0,30%	-0,30%
rK	-3,44%	-3,48%

Tabel 7; Modelparametre for underliggende Vasicek rentestruktur; Egen tilvirkning

a, konvergenshastigheden, er fastsat som 0,20, mean-reversion niveauet, b, er fastsat som 4,33% hvilket er den historiske Cibor3 rente jf. Danmarks Statistik. Volatiliteten er beregnet som GARCH-volatiliteten for Cibor3 renten, med samme forudsætninger som beregning af T/N volatiliteten. Tidssteppet, er fastsat til 0,25 svarende til hvert kvartal, da der på fastforrentede konverterbare danske realkreditobligationer er mulighed for exercise hvert kvartal. Tidssteppet er ligeledes med til at angive Cibor3 renten som den benyttede rente i Vasiceks kortrentemodell. Tidslængden afhænger af obligationens løbetid.

Når modelparametrene er estimeret, kan der udledes en nul kupon diskonteringsfaktor kurve jf. Vasiceks model, givet som:

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T) * r(t)} \quad (81)$$

Hvor P repræsenterer prisen for nul kupon obligationen på tidspunkt t med udløb på tidspunkt T og r er den korte rente tilhørende tidspunkt t. B er givet ved:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (82)$$

Hvor a repræsenterer hastighedsparameteren fra kortrente modellen.

A er givet ved:

$$A(t, T) = e * \frac{(B(t, T) - T + t) * \left(a^2 * b - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 * B(t, T)^2}{4 * a} \quad (83)$$

Hvor b repræsenterer den korte ligevægtsrente fra kortrente modellen.

4.3. Jamshidian

Den underliggende kuponbærende danske konverterbare realkreditobligation kan nu prisfastsættes som:

$$PV = \sum_{t=1}^N Y_t * P(t, T) \quad (84)$$

Optionen tilhørende den danske realkreditobligation, kan nu prisfastsættes som en europæisk call option, ved at lade prisen på optionen være i lighed med en portefølje af optioner på nulkuponobligationer²⁹. For at opfylde betingelserne herfor, kræver det, at $r(t)$ i (81) fastsættes som den rente, der opfylder:

$$PV = \sum_{t=1}^N Y_t * P(t, T) = K \quad (85)$$

Denne rente angives som rK i modellen, når $K = PV = 100$, da exercise kursen på konverterbare danske realkreditobligationer er 100.

Når rK er bestemt, kan prisen på en europæisk call option, med nulkuponobligationen som underliggende, prisfastsættes på tidspunkt t , med udløb på tidspunkt T , som:

$$C(t, T) = L * P(0, S) * N(h) - K * P(0, T) * N(h - \sigma_p) \quad (86)$$

Hvor:

$$h = \frac{1}{\sigma_p} * \ln \left(\frac{L * P(0, S)}{K * P(0, T)} \right) + \frac{\sigma_p}{2} \quad (87)$$

$P(0, S)$ angiver diskonteringsfaktoren på tidspunkt 0, til tidspunkt S , hvor S angiver udløbstidspunktet for nulkuponobligationen. $P(0, T)$ angiver diskonteringsfaktoren på tidspunkt 0, til tidspunkt T , hvor T angiver udløbstidspunktet for optionen. Volatiliteten tilhørende diskonteringsfaktoren P , angives som:

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} * \left(1 - e(-a * (T - t)) \right) * \sqrt{\frac{1 - e(2 * a * T)}{2 * a}} \quad (88)$$

Funktionen $N(h)$ angiver standardnormalfordelingsfunktionen for h og L angiver hovedstolen på den tilhørende nulkuponobligation for tidspunkt (t, T) . Da den europæiske option med den kuponbærende obligation som underliggende betragtes som en serie af korte nulkuponobligationer,

²⁹ Jamshidian, F. (1989): "An exact bond option pricing formula", Journal of Finance, Vol. 44, pp. 205-209

hvor exercise kursen er lig med værdien af den kuponbærende obligation, svarer L til cash flow fra den kuponbærende obligation, på det tilhørende tidspunkt. Exercise kursen, K , svarer således til summen af de tilbagediskonterede cash flows, som vist i (85).³⁰

Modellen har en fordel i, at der angives en volatilitet for hvert tidsstep, hvilket skaber en dynamisk volatilitet. Volatiliteten vil konvergere mod 0 når $t \rightarrow T$. Dette stemmer overens med varighedskonceptet på obligationer, der typisk er et udtryk for obligationens kursfølsomhed, der ligeledes er faldende med løbetiden³¹. Det ses af funktionen, at højere volatilitet bidrager til højere volatilitet for det enkelte udfaldsrum, hvor hurtigere konvergensniveau trækker volatiliteten ned.

Der haves nu en serie af optionspriser på korte nul kuponobligationer, hvor summen heraf udgør prisen på en europæisk call option med kuponbærende obligation som underliggende, givet som:

$$C_E = \sum_{t=1}^N C(t, T) \quad (89)$$

Modellen har nu udarbejdet prisen på en europæisk call option med kuponbærende obligation som underliggende aktiv. Optionen tilhørende de danske konverterbare realkreditobligationer er en Bermuda option, hvorfor modellen skal kalibreres til at kunne prisfastsætte optioner med mulighed for exercise før udløb. Dette gøres ved at ændrer pay-off betingelserne for optionen, således at der i hvert tidsstep gennemløbes, hvorvidt optionen skal exercises. For at kunne vurdere hvorvidt der skal exercises i et givent tidsstep, kræver det, at prisen på det underliggende aktiv kendes i hvert tidsstep. Da der ikke findes closed-form solutions til løsning af prisen på optioner med førtidig exercise, kan den tidligere anvendte prisstruktur fra (81) ikke anvendes. Vasiceks stokastiske kort rentemodell, giver mulighed for Monte-Carlo simulering, og vil således kunne anvendes som underliggende prisstruktur. Vasiceks stokastiske kort rentemodell er i diskret tid givet som:

$$\Delta r = a(b - r) * \Delta t + \sigma * \epsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (90)$$

Modellen beregner den korte rente, og herfra kan der udledes diskonteringsfaktorer. For den anvendte model bruges tidssteppet, Δt , $\Delta t = 0,25$, og der laves simuleringer af CIBOR3 renten frem til år 2040, hvor den længst løbende danske konverterbare realkreditobligation udløber.

Ved Monte-Carlo simulering kan de stokastiske diskonteringsfaktor $d(0, T)$ findes ved at integrere de simulerede værdier af den korte rente. Diskonteringsfaktorerne er givet ved:

$$d(0, T) = e * \left(- \int_0^T r_s * ds \right) \quad (91)$$

³⁰ Hull, John (2015): Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edition, Pearson

³¹ Varighed vil ikke blive nærmere gennemgået

Modellen skal diskretiseres, og da de korte renter er angivet numerisk, kan de findes ved at summering erstatter integreringen:

$$P(0, T) = e * \left(-\Delta t * \sum_{j=i}^N r_{t_{j-1}} \right) \quad (92)$$

Hvor N angiver antallet af skridt i simuleringen. Som følge af at renten bliver tilskrevet til sidst i renteperioden anvendes $r_{t_{j-1}}$ og $-\Delta t$ benyttes da der sker tilbagediskontering.

Da modellen angiver diskonteringsfaktoren på tidspunkt 0 frem til tidspunkt T , betegnes det som akkumulerende diskonteringsfaktorer. Ved at lade t gå fra $t_1 \rightarrow T$ kan de fremtidige priser i hvert tidsstep findes.

Det vides fra tidligere at payoff for call optioner findes som:

$$Payoff_{call} = \text{Max}(S_t - X; 0) \quad (93)$$

Derudover vides det, at værdien af optioner, som ved andre finansielle aktiver, findes ved at tilbagediskontere de fremtidige cash flows. S_t angiver værdien af det underliggende aktiv, og kan dermed erstattes af de tidligere viste diskonteringsfaktorer. Ved at lade værdien af optionen afhænge af den tilbagediskonterede værdi af de fremtidige cash flows fra den højeste værdi af hhv. den europæiske call option på nulkuponobligationer, eller bermuda optionen, i hvert tidsstep, findes værdien ved at sammenlægge formel (86), (92) og (93). Den endelige prisfastsættelsesmodel for Bermuda optionen, via simulationsteknik, med den danske konverterbare realkreditobligation som underliggende aktiv, findes da som:

$$\begin{aligned} C_{BM} &= \sum_{t=1}^N \text{Max} \left[L * P(0, S) * N(h) - K * P(0, T) * N(h - \sigma_p); e * \left(-\Delta t * \sum_{j=i}^N r_{t_{j-1}} \right) - 1; 0 \right] \\ &= \sum_{t=1}^N \text{Max}[C(t, T); P(0, T) - 1; 0] \end{aligned} \quad (94)$$

Bermuda optionens værdi, C_{BM} , er således en funktion af den højeste værdi i hvert tidsstep af enten en serie af optioner med nulkuponobligationer som underliggende, eller den akkumulerende stokastiske diskonteringsfaktor - fratrullet exercise prisen på 1, svarende til kurs 100.

Optionsværdien kan ikke være negativ, hvorfor minimumsværdien er 0.

Modellen har sine begrænsninger ved at man på tidspunkt $t = 0$ prisfastsætter optionen på den tilhørende obligation, via stokastiske processer. Man antager derved, at man kender fremtiden, men denne er stokastisk, hvorfor man blot kan simulere gisninger om fremtiden. Øges antallet af

simuleringer, vil man konvergere imod den sande værdi, såfremt man har benyttet sig af korrekte modelparametre. Computerkraft og datamængder sætter begrænsninger på antallet af simuleringer. Der er i mine modeller brugt 30 simuleringer på den korte rente og de tilhørende stokastiske diskonteringsfaktorer.

Ved anvendelse af simulationsteknikken, benyttes Vasiceks stokastiske rentemodell til simulering af den fremtidige renteutvikling, og dermed også de fremtidige diskonteringsfaktorer. Modellen indeholder en mean-reversion proces, hvortil renteutviklingen konvergerer imod. Med det nuværende meget lave renteniveau i markedet, vil mean-reversion niveauet i modellen ligge højere end det nuværende renteniveau, og dermed vil rentemodellen konvergere imod stigende renter. Fra elementær renteteori vides det, at kurserne må falde, når renterne stiger, som følge af geninvesteringsgevinsterne. Dette medvirker til lave fremtidige priser på det underliggende aktiv i Vasiceks rentemodell. Da optioner, der kan excercises før tid, prissættes ud fra, hvorvidt der er positivt pay-off ved exercise i hvert tidsstep, vil denne mulighed for førtidig indfrielse have tæt på ingen værdi. Netop valget af modelparametre, og især mean-reversion niveauet, er derfor essentielt for denne model, og samtidig også dens største svaghed. Man forudsætter at man kender fremtiden, da renten skal konvergere imod dette niveau, hvorfor modellen kun vil konvergere imod den sande optionspris, hvis modelparametrene er korrekte.

Optionspriserne er lavet ud fra 1500 simuleringer og giver følgende resultater:

Jamshidian & Simulationsteknik		
	2030	2040
Options værdi	0,198	2,412

Tabel 8; Modelresultater for Jamshidian & Simulationsteknik; Egen tilvirkning

Udfordringen ved anvendelse af simulationsteknik til prisfastsættelse af optioner med førtidig exercise mulighed, er som følge af at man beregningsmæssigt arbejder sig frem i tid, og dermed forudsætter at man kender fremtiden³².

4.4. Least-Squares Monte-Carlo

Monte-Carlo simulation kan anvendes på mange forskellige måder. En metode, der har fået stor anerkendelse for sin evne til prisfastsættelse af optioner med mulighed for førtidig exercise, er Francis Longstaff og Eduardo Schwartz Least-Squares metode³³. Modellen bygger på en regressionsanalyse af de forventede fremtidige payoffs, til at fastsætte det optimale exercise tidspunkt, i sammenhæng med Monte Carlo simulation.

Ved almindelig simulation, hvor payoff ofte beregnes som et gennemsnit af de summerede og simulerede payoffs, vil man ofte estimere et for højt payoff, da man antager, at man kender

³² Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

³³ Longstaff & Schwartz (2001): "Valuing American Options by Simulation: A simple Least-Squares Approach", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147

fremtiden. Least-Squares Monte-Carlo bygger ligeledes på stokastisk simulation, men forsøger at eliminere ulempen ved at skulle simulere frem i tid, samtidig med at prisfastsættelse af optioner med førtidig exercise sker ved at arbejde sig tilbage i tid.

4.4.1. Generelt om regressionsanalyse

Inden modellen bliver implementeret og anvendt, bliver de bagvedliggende regressionsdynamikker diskuteret.

Simpel lineær regressionsanalyse bruges til at angive sammenhængen imellem to variabler, og dermed hvorledes udviklingen af første variabel afhænger af udviklingen af den anden variabel. Et eksempel herpå kan være, hvorledes udviklingen i obligationspriserne afhænger af udviklingen i aktiepriserne. For at kunne beskrive udviklingen, anvendes en simpel lineær regressionsmodel, udtrykt som en formel. Modellen er en simpel regressionsmodel som følger af, at der er én forklarende/uafhængig variabel, angivet som udviklingen i aktiepriserne, til at forklare udviklingen i den afhængige variabel, angivet som udviklingen i obligationspriserne.

Ved at implementere udviklingen i hhv. obligationspriserne og aktiepriserne i et scatter-plot diagram, med obligationspriserne af Y-aksen og aktiepriserne i X-aksen, kan der tegnes en lineær sammenhæng imellem udviklingen i de to variabler. Da regressionsmodellen ønskes udviklet til brug for estimering af fremtidig udvikling i obligationspriserne, givet udviklingen i aktiepriserne, ønskes den lineære sammenhæng udtrykt som den lineære sammenhæng, der bedst repræsenterer sammenhængen imellem de to variabler. Den lineære sammenhæng imellem to variabler er ofte udtrykt som:³⁴

$$\hat{y} = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad (95)$$

Når der skal opnås den optimale lineære regressionsmodel, anvendes "Ordinary Least Squares" (OLS) metoden.

Alle observationernes afstand til den lineære regressionslinje måles, hvorefter de summeres og kvadreres. OLS forsøger at minimere denne, og dermed minimere den samlede afstand fra observationerne til regressionslinjen. ε angiver fejleddet, der ikke kan forklares af den forklarende variabel, og ønskes dermed minimeret.

α og β er givet som:

$$\beta = r * \left(\frac{S_y}{S_x} \right) \quad (96)$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta \bar{x} \quad (97)$$

³⁴ Lind, Marchal & Wathen (2015): Statistical Techniques in Business & Economics, 16th edition, McGraw-Hill

Hvor r angiver korrelationskoefficienten imellem x og y , og S_y samt S_x angiver standardafvigelsen for hhx. x og y . $\bar{y}$ og $\bar{x}$ angiver gennemsnittet for hhv. y og x . Korrelationskoefficienten er angivet som:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{(N - 1) * S_x * S_y} \quad (98)$$

Den lineære regressionslinje via ordinary least squares metoden, er den linje der giver den laveste residuals sum, givet som:

$$Residualsum(SSE) = \sum_{i=1}^N (y - \hat{y})^2 \quad (99)$$

Hvor y angiver den observerede y værdi, og $\hat{y}$ angiver den beregnede y værdi på regressionslinjen.

Den totale variation i regressionsmodellen kan inddeles i to kategorier – variation fra den uafhængige variabel, aktiepriserne og variation fra residualerne. Variation fra residualerne er beregnet som den totale residuals sum nævnt ovenfor.

Variation som følge af den uafhængige/forklarende variabel, er givet som:

$$SSR = \sum_{i=1}^N (\hat{y} - \bar{y})^2 \quad (100)$$

Hvor $\hat{y}$ angiver y estimeret på baggrund af regressionsmodellen, og $\bar{y}$ angiver middelværdien for de observerede y værdier.

Den samlede variation i regressionsmodellen er således udtrykt som:

$$SS = SSR + SSE \quad (101)$$

Dermed kan der udledes et udtryk, for hvor stor en andel af udviklingen i y der forklares af udviklingen i x , hvilket refereres til som R^2 og er givet som:

$$R^2 = \frac{SSR}{SS} \quad (102)$$

Da ordinary least squares regressionslinjen minimerer variationen som følge af residualerne, og dermed den samlede residuals sum SSE, vil denne regressionslinje ligeledes give den højeste R^2 . Det sidste vigtige nøgletal, standard error of estimate, angiver standardafvigelsen for forskellen imellem de observerede værdier og den tilhørende værdi på regressionslinjen, og er givet som:

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} \quad (103)$$

Når de observerede værdier i højere grad ligger i samme afstand fra regressionslinjen, vil standard error of estimate formindskes.

Den simple lineære regression kan udvides til en multipel lineær regressionsanalyse, hvor den afhængige variabel nu afhænger af udviklingen i flere forklarende variabler. Regressionslinjen følger nu da blot:

$$\hat{y} = a + \beta_1 * X_1 + \beta_2 * X_2 + \beta_3 * X_3 + \varepsilon \dots \alpha + \beta_k * X_k + \varepsilon \quad (104)$$

Ved anvendelse af multiple regressionsanalyse skal der laves en mindre justering til nøgletallet R^2 som følge af, at denne har tendens til at stige som følge af tilføjelsen af flere forklarende variabler. Det justerede nøgletal følger da:

$$R_{jus}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{SSE}{n-(k+1)}\right)}{\left(\frac{SS}{n-1}\right)} \quad (105)$$

I Longstaff & Schwartz Least-Squares Monte-Carlo model, anvendes en least-squares metode til et sæt vægtede Laguerre Polynomier. Dette er et special tilfælde af multipel regression, og ikke multipel lineær regression. Polynomium funktioner er kendt fra udledning af rentestrukturen, hvor nulkuponrenten blev udledt som funktion af:

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_b t^b \quad (106)$$

Basisfunktion

Longstaff og Schwartz model forsøger via regression at fremfinde det optimale exercise tidspunkt, dette tidspunkt defineres som "Optimal stopping time". Tidspunktet angiver det tidspunkt hvor optionen vil miste værdi, såfremt der ikke excercises og $t \rightarrow T$. Der arbejdes derfor med en forventet fremtidig værdi, og sandsynligheden for at denne værdi vil være større eller mindre end det cash flow, der genereres for optionsejeren, ved at excercise optionen på nuværende tidspunkt.

Den oprindelige model anbefaler at der som basisfunktion vælges et sæt af vægtede Laguerre polynomier, hvor modellen vil konvergere imod den sande værdi, når antallet af basisfunktioner øges, der er givet som:³⁵

$$L_n(X) = \exp\left(-\frac{X}{2}\right) * \frac{e^x}{n!} * \frac{d^n}{dX^n} * (X^n * e^{-X}) \quad (107)$$

I implementering af modellen vil der blive benyttet en standard polynomium basisfunktion, givet som:

$$Y = \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X^2 \quad (108)$$

Derudover vil modellen blive udvidet med to varians reducerende teknikker, for at forbedre effektiviteten af modellen.

4.4.2. Varians reduktionsmetoder

Som nævnt er Monte-Carlo simulering et utrolig stærkt værktøj til værdiansættelse, hvor antallet af simuleringer og valget af tidsstep har stor betydning for resultaterne i Monte-Carlo simulering, til prisfastsættelse af finansielle kontrakter. Det ses at når antallet af simuleringer øges, og valget af tidssteppet nærmer sig kontinuert tidsform, vil resultaterne konvergere imod den sande værdi. Longstaff og Schwartz illustrerer dette ved³⁶:

$$V(X) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N LSM(\omega_i; M, K) \quad (109)$$

Hvor $V(X)$ angiver den sande værdi af optionen med mulighed for førtidig exercise, N angiver antallet af simuleringer, ω angiv den stokastiske prisstig, M antallet af basisfunktioner i regressionsfunktionen og K antallet af exercise muligheder. $LSM(\omega_i; M, K)$ angiver det tilbagediskonterede cash flow fra optionen, når reglen om at exercise, såfremt det fremtidige cash flow er mindre end det nuværende, er opfyldt. Det ses, at modellen vil konvergere imod den sande værdi når $N \rightarrow \infty$. Longstaff & Schwartz beskriver, at antallet af basisfunktioner vil opnå sit maksimale bidrag til den sande værdi indenfor en rimelig grænse, hvorfor antallet af basisfunktioner ikke skal opfylde $M \rightarrow \infty$. Dermed bliver valget af tidsskridt og antallet af simuleringer det eneste værktøj, der kan regulere modellens konvergenshastighed, når antallet af basisfunktioner har opnået sit maksimale bidrag.

³⁵ Longstaff & Schwartz (2001): "Valuing American Options by Simulation: A simple Least-Squares Approach", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147

³⁶ Longstaff & Schwartz (2001): "Valuing American Options by Simulation: A simple Least-Squares Approach", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147

For at imødegå udfordringerne med øget dataforbrug og beregningstid, når antallet af simuleringer øges, og tidsskridtet mindskes, kan Monte-Carlo simulationen udvides med forskellige metoder for at øge effektiviteten.

Antithetic

Da det vides at normalfordelingen er symmetrisk omkring 0, kan dette udnyttes i Monte-Carlo simulering for nedbringelse af tids- og dataforbrug. Hvis X er en normalfordelt variabel med 0 i middelværdi og 1 i varians, må $-X$ ligeledes være normalfordelt. Dermed vides det også, at når der trækkes et tilfældigt tal fra normalfordelingen, ϵ , må $-\epsilon$ ligeledes være en simuleret værdi fra normalfordelingen.

Da wienerprocessen i Vasiceks rentemodell, der ligger til grund for Monte-Carlo simuleringen, anvender en tilfældig trækning fra en normalfordeling, kan antithetic metoden forbedre hastigheden i simuleringen. For hver rentesti der er simuleret, hvor ϵ angiver den tilfældige trækning fra normalfordelingen, laves der en kopieret rentestig, blot hvor den tilfældige trækning er ændret til $-\epsilon$. Hvis optionsværdien beregnet på baggrund af resultatet fra den første simulering angives som y_1 , og resultatet fra den anden simulering angives som y_2 , vil $\bar{y}$ angive gennemsnittet:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (110)$$

Ved at anvende $\bar{y}$, vil man dermed kunne spare halvdelen af simuleringerne. Den endelige simuleret værdi af optionen vil således være et gennemsnit af alle $\bar{y}$ værdierne.

Udover at forbedre simulationsteknikken via reducere i beregningstiden, vil simuleringen med brug af antithetic metoden ligeledes konvergere hurtigere imod den sande værdi. Variansen findes som:

$$Var = \frac{Var_1 + Var_2 + 2Cov_{1,2}}{4} \quad (111)$$

Dermed bliver variansen mindre, når kovariansen, $Cov_{1,2}$, er negativ. Da antithetic variabelen altid vil repræsentere 1 – den originale variabel, vil kovariansen altid være negativ³⁷. Når variansen formindskes, bliver resultat udsvingene omkring den sande værdi lavere, og dermed vil antithetic metoden konvergere imod den sande værdi hurtigere end simulering uden brug af antithetic. Se bilag 2 for rentesimulering med og uden brug af antithetic.

Control Variates

³⁷ Sigman, Karl (2007): "Introduction to reducing variance in Monte Carlo Simulations", *Columbia University, Department of Industrial Engineering and Operations Research*

For at forbedre konvergensen i Monte-Carlo simuleringen, kan der udover Antithetic metoden ligeledes implementeres en Control Variate Technique i modellen.

Metoden udnytter, at når der findes en analytisk løsning til prissætning af den europæiske udgave af en tilsvarende option med mulighed for førtidig indfrielse, som man ønsker prissat, kan den analytiske løsning for den europæiske option inddrages for at forbedre sit estimat for prissætning af optionen med førtidig indfrielse. Det kræver således at optionerne er identiske udover muligheden for førtidig exercise.

Der foretages beregning af de to optioner med identisk antal simuleringer og valget af tidsskridt. Der haves nu simuleringsestimat for prisen på de to optioner. Herudover beregnes der nu den sande værdi af den europæiske option, via en closed-form solution som f.eks. Black-School-Merton modellen. Der kan nu opnås et mere korrekt estimat for den sande værdi af optionen med mulighed for førtidig exercise, angivet som P_A :

$$P_A = P_A^* - P_B^* + P_B \quad (112)$$

Hvor P_A^* angiver estimatet for prisen på optionen med mulighed for førtidig exercise opnået via simulering, og P_B^* angiver værdien opnået på den tilsvarende europæiske option via simulering. P_B angiver den korrekte værdi for den europæiske option opnået via closed-form solution.

Ved at antage at man laver samme fejlmargen på den sande options værdi med mulighed for førtidig exercise via simulering, som der er fejlmargen på en tilsvarende europæisk options beregning, kan man approksimere en værdi, der er tættere på den sande for optionen med førtidig exercise ved benyttelse af denne model³⁸.

Anvendelse af Least-Squares Monte-Carlo

Modellen bliver implementeret med Vasiceks stokastiske rentemodell og tilhørende diskonteringsfaktorer til prisfastsættelse af underliggende aktiv, som tidligere er gennemgået og diskuteret. Parametervaluegene for rentestrukturmodellen, herunder a , b , volatilitet og dt , er identisk med tidligere implementeret Vasicek model, hvor modelparametrene fremgår af tabel 7. Den korte rente, $Cibor_3$, bliver simuleret, og ud fra rentestrukturen bliver der beregnet akkumulerende stokastiske diskonteringsfaktorer. Antithetic metoden bliver implementeret i Vasiceks stokastiske kortrente model for varians reduktion og hurtigere konvergens. Den oprindelige Vasiceks stokastiske kort rentemodell i diskret tid er givet som:

$$\Delta r = a(b - r) * \Delta t + \sigma * \epsilon * \sqrt{\Delta t} \quad (113)$$

³⁸ For yderligere argumentation om effekten af Control Variates, se: Hull & White (1988): "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 237-51

Med implementering af Antithetic metoden, bliver modellen konfigureret til nedenstående:

$$\Delta r = a(b - r) * \Delta t + \sigma * \frac{\epsilon + (-\epsilon)}{2} * \sqrt{\Delta t} \quad (114)$$

Ved implementering af regressionsmodellen er der valgt $\Delta t = 0,25$ som følge af, at der på de danske realkreditobligationer kan excercises 4 gange årligt. Dermed er der mulighed for exercise i hvert tidsskridt i modellen. Derudover er der simuleret 30 rentestier via ovennævnte rentestrukturmodel.

Selve regressionsmodellens værdiansættelse af bermuda optionen foregår ved, at det optimale stopping time løses, og der arbejdes tilbage i tid. Optionens payoff ved udløb, T , starter med at blive beregnet, hvor den underliggende Vasicek kortrentemodells rentestruktur og de tilhørende stokastiske diskonteringsfaktorer ligger til grund for prisen på obligationen, der er optionens underliggende aktiv. Herefter betragtes optionens payoff på tid T_{-1} for vurdering af hvorvidt optionen har positivt payoff, kaldet in-the-money, i nogle af de 30 simulerede stier. Når en sti er in-the-money, skal det vurderes, hvorvidt optionen skal excercises på dette givne tidspunkt. Hvis det vurderes at optionen har en forventet højere nutidsværdi ved at lade optionen leve, excercises optionen ikke, til trods for positivt payoff på det givne tidspunkt.

Til at vurdere hvorvidt det forventede fremtidige payoff er større end payoff i det nuværende tidspunkt man befinder sig i, bruges regressionsmodellen, der i modellen er givet som:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X^2 \quad (115)$$

Hvormed der altså udarbejdes en regressionsmodel for hvert tidsstep.

I modellen angiver y , den afhængige variabel, det tilbagediskonterede payoff fra tidssteppet t_1 . Konstanten, α , afhænger af, hvorvidt optionen er in the money på det pågældende tidsstep. Hvis optionen ikke er in-the-money, er der ikke noget dilemma om, hvorvidt optionen skal excercises eller ej, da den i så fald blot skal fortsætte, hvorfor konstanten sættes til 0, hvis optionen ikke er in the money. I modellen angives X , den uafhængige variabel, som prisen på det underliggende aktiv i det givne tidsstep. Hvis optionen ikke er in the money, sættes X til 0, da optionen i så fald ikke har dilemma om exercise tidspunkt i dette tidsstep. Da regressionsmodellen er et 3. grads polynomium, anvendes ligeledes X^2 . Ud fra disse parametre laves en least-squares regressionsmodel, som på $t_{1,25}$ for de korte danske realkreditobligationer, giver følgende output:

$$Y_{1,25} = 129,931 + (-260,47 * X) + 130,544 * X^2 \quad (116)$$

Denne funktion udtrykker dermed funktionen, hvor summen af residualerne er mindst³⁹. Dermed kan det forventede payoff ved at lade optionen fortsætte, beregnes som:

$$\text{Predict payoff}_{sti\ 2} = 129,931 + (-260,47 * 1,00077) + 130,544 * 1,00154 = 0,00027 \quad (117)$$

Herefter kan det forventede payoff ved at lade optionen fortsætte, sammenholdes med det tilbagediskonterede payoff fra t_{+1} . Den højeste værdi af enten den forventede værdi ved at fortsætte med optionen, og det tilbagediskonterede payoff, anvendes. I praksis vil optionen blive exerciset hvis det forventede fremtidige payoff er lavest. Nedenfor er et udklip fra modellen. Teknikken bag er identisk med metoderne angivet under afsnittet "Generelt om regressionsanalyse". For hvert tidsskridt laves nedenstående tabel, som kan ses i vedlagte excel ark, da det fylder for meget til at indsætte i opgaven. Som det ses, anvendes der 30 simuleringstier.

1,25							
IV	ITM	y	Cons	x	x^2	Predic	Payoff
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00077	1	0,0003	1	1,00077	1,00154	0,00027	0,00077
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00065	1	0	1	1,00065	1,0013	0,00018	0,00065
0,00173	1	0,00084	1	1,00173	1,00346	0,00117	0,00173
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00091	1	0,00104	1	1,00091	1,00182	0,00039	0,00091
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00214	1	0,00188	1	1,00214	1,00428	0,00163	0,00214
0,00064	1	0,00026	1	1,00064	1,00129	0,00017	0,00064
0,0041	1	0,00609	1	1,0041	1,00822	0,00443	0,00609
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00143	1	0,00037	1	1,00143	1,00287	0,00087	0,00143
0,00029	1	0	1	1,00029	1,00058	-9E-05	0,00029
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00445	1	0,00369	1	1,00445	1,00892	0,00504	0,00369
0,00293	1	0,00256	1	1,00293	1,00587	0,00264	0,00293
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00303	1	0,00291	1	1,00303	1,00606	0,00278	0,00303
0	0	0	0	0	0	0	0
0,00177	1	0,00078	1	1,00177	1,00354	0,00121	0,00177
0	0	0	0	0	0	0	0
Regressions resultat			129,931	-260,47	130,544		

Tabel 9; Eksempel på Least-Squares Monte Carlo beregning for enkelt tidsstep; Egen tilvirkning

³⁹ Se "Generelt om regressionsanalyse" – se (99) for SSE

Control Variate - Black's model

Ved implementering af Control Variate i modellen, anvendes Black's model⁴⁰ for værdiansættelse af europæiske rente optioner. Modellen er en udvidelse af Black-Scholes-Mertons model for værdiansættelse af europæiske aktie optioner, og anvender forwardkursen som grundlag for prisning af optioner på både råvarer, obligationer og futures kontrakter.

Modellen har sine ulemper, hvorfor den ikke anses for at være en fuldkommen korrekt analytisk løsning på renteoptioner, som Black-Scholes-Mertons model er på aktie optioner. I modellen antages det at obligationspriserne er lognormalfordelte, hvilket kræver at de forklarende variabler, er normalfordelte. En empirisk undersøgelse viser via en regressionsmodel for de forklarende variabler, at renteændringer er den højest korrelerende variabel for ændringer i obligationspriser⁴¹. Renteændringer er generelt ikke normalfordelte, hvorfor obligationspriserne generelt ikke kan være lognormalfordelte. Derudover antages den forventede værdi af det underliggende aktiv, at være dens forwardpris, hvor der antages konstante renter for beregning heraf⁴².

Prisen for en call option jf. Black's model er givet som:

$$c = \exp(-r * T) * F * N(d_1) - \exp(-r * T) * K * N(d_2) \quad (118)$$

Hvor:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2} * \sigma^2 * T}{\sigma * \sqrt{T}} \text{ og } d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T} \quad (119)$$

I formelen angiver r den risikofri nulkuponrente tilhørende optionens udløbstidspunkt. I implementering af modellen, er der anvendt den bootstrappede nulkuponrente tilhørende cibor renteinstrumenterne, der er anvendt under afsnittet om bootstrapping. K angiver strikekursen på optionen, og $N(d_1)$ samt $N(d_2)$ angiver den kumulative standardnormalfordeling for hhv. d_1 og d_2 . F angiver forwardprisen og er givet som⁴³:

$$F = S * \exp((q - r) * T) \text{ hvor } q = \text{coupon} * (100/S) \quad (120)$$

Dermed angives q som kuponrenten på obligationen i procentsats af spotkursen, S .

⁴⁰ Black, Fischer (1976): "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 167-179

⁴¹ Litterman & Scheinkman (1991): "Common Factors Affecting Bond Returns", *Journal of Fixed Income*, vol. 1, pp. 54-61

⁴² Modellen kan udbygges med stokastiske fremtidige renter, hvilket ikke er anvendt her

⁴³ Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

Beregningerne i det vedlagte excel-ark viser følgende priser for europæiske renteoptioner på de tilhørende obligationer, som bruges som control variate.

Black's Model optionspriser	
BRF 2030	0,000
Nordea 2030	0,000
RD 2030	0,000
BRF 2040	11,798
Nordea 2040	11,766
RD 2040	11,810

Tabel 10; Black's model optionspriser; Egen tilvirkning

Det ses i (120) at forwardkursen beregnes ud fra forskellen imellem den observerede nulkuponrente, r , og kuponrenten, q . Som følge af at kuponrenten er 0,50 %, og de observerede kurser samtidig er tæt på 100, viser forwardkurserne faldende priser på de korte obligationer, da nulkuponrenten er 1,59 %. Kuponrenten på de 20-årige obligationer er 2 %, med obligationskurser igen tæt på 100, hvilket er med til at drive obligationspriserne op, hvorfor den tilhørende call option bliver in-the-money. Beregninger fremgår af appendiks.

Modelresultater

Det er nu vist hvordan modellen bliver implementeret. Den endelige Least Squares Monte Carlo model der anvendes, benytter sig af en underliggende rentestruktur fra Vasiceks kortrentemodell. Herfra er der udledt akkumulerende diskonteringsfaktorer jf. (92), der ligger til grund for prisen på det underliggende aktiv - obligationerne. Vasiceks kortrentemodell er udbygget med en Antithetic metode for hurtigere konvergens, og kortrentemodellen følger (114). Der er lavet 30 rentestier med tidskridt $\Delta t = 0,25$, svarende til 3 måneder.

Regressionsmodellen, der ses et udsnit af i tabel 9, er anvendt på den underliggende simulering, hvorfra der udledes en pris på en Bermuda og europæisk option. Herefter er Black's model implementeret for udledning af analytisk løsning på prisfastsættelse af den tilsvarende europæiske option. Der kan nu etableres en Control Variate teknik, og den endelige løsning for prisfastsættelse af optionen på de danske realkreditobligationer, ser således ud:

$$P_{Call} = LSMC_{Bermuda} - LSMC_{Euro} + Black_{Euro} \quad (121)$$

Der er herefter gennemført 1.500 simuleringer for at opnå en bedre konvergens mod den sande værdi.

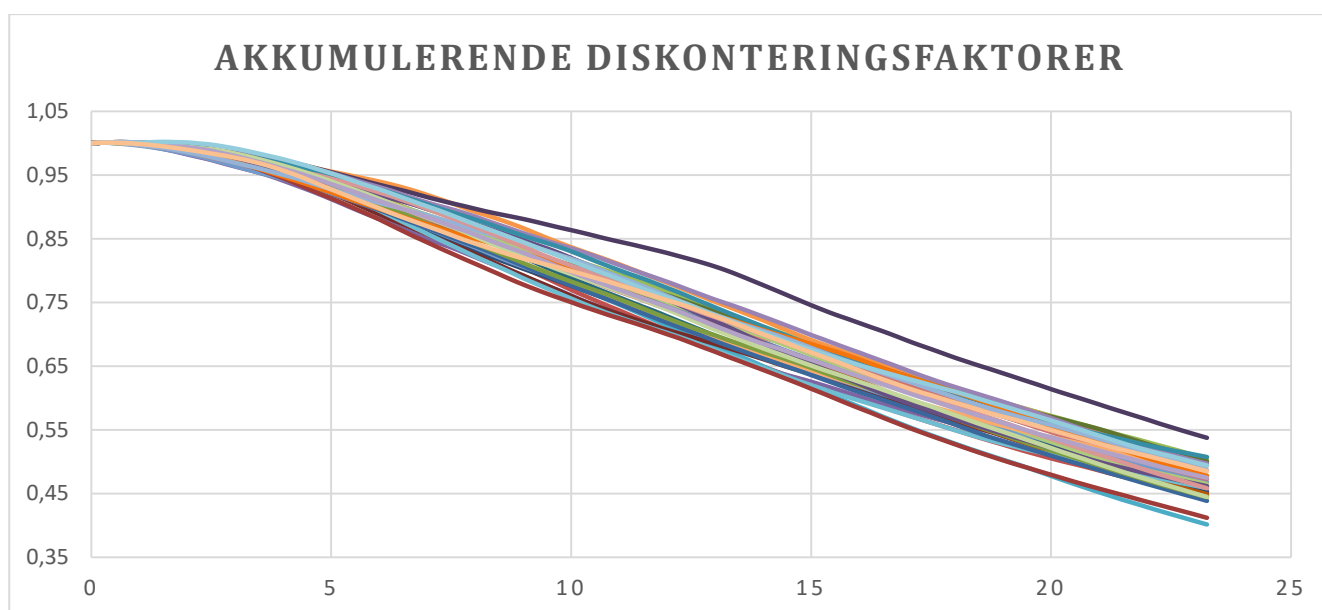
Nedenfor i Tabel 11 ses resultaterne for simulering af optionen tilhørende de valgte obligationer.

Model resultater				
Option:	LSMC Bermuda	LSMC Euro	Black	Resultat
BRF 2030	0,001	0,000	0,000	0,001
Nordea 2030	0,001	0,000	0,000	0,001
RD 2030	0,001	0,000	0,000	0,001
BRF 2040	0,001	0,000	11,794	11,795
Nordea 2040	0,001	0,000	11,766	11,767
RD 2040	0,001	0,000	11,810	11,811

Tabel 11; LSMC modelresultater; Egen tilvirkning

Det er tydeligt, at Blacks optionspris via control variate teknikken har stor indflydelse på prisfastsættelsen af de lange optioner.

Selve Least Squares Monte Carlo modellen giver identisk resultat for optionsprisen på både de korte og lange optioner, tilhørende de respektive obligationer. Dette skyldes at den underliggende rentestruktur bygger på Vasiceks kortrentemodell, hvor de akkumulerende diskonteringsfaktorer kun er højere end strikeprisen på 1, ca. frem til 3 år, se nedenstående figur 9.



Figur 9; Akkumulerende diskonteringsfaktorer; Egen tilvirkning

Vasiceks kortrentemodell bygger på mean-reversion, som tidligere diskuteret, hvorfor modellen vil konvergere imod den langsigtede ligevægtsrente, i modellen valgt som den historiske Cibor₃ rente, og dermed vil de akkumulerende diskonteringsfaktorer konvergere under strike kursen på 100. Ulempen ved modeller som denne stokastiske rentestrukturmodell er, at modellerne har konvergeret imod stigende renter og dermed faldende diskonteringsfaktorer, de sidste mange år. Dette er et resultat af at det nuværende renteniveauet ligger på et historisk lavt niveau, og dermed under det historiske gennemsnit, der fastsættes som mean-reversion niveauet. Det virkelige renteniveau har dog ligget forholdsvis stabilt, og har ikke startet konvergering imod det historiske renteniveau endnu. Dermed følger modellen ikke renteutviklingen de seneste par år, og dermed er den

underliggende rentestruktur med til at undervurdere optionsprisen. Det gælder således, at desto længere optionerne løber, desto mere vil modellen undervurdere optionsprisen på renteoptioner, som følge af mean-reversion, da prismodellen vil konvergere imod faldende diskonteringsfaktorer rundt om det stokastiske element. På kort sigt har det stokastiske element, givet som nedenstående, større betydning, da mean-reversion vil trække modellen mod faldende diskonteringsfaktorer, og dermed optionerne out-of-money, når $t \rightarrow \infty$.

$$\sigma * \frac{\epsilon + (-\epsilon)}{2} * \sqrt{\Delta t} \quad (122)$$

Udover valg af basisfunktion, tidsskridt og antal simuleringer, som Longstaff & Schwartz argumenterer for har betydning for modellens output og vil få modellen til at konvergere imod den sande værdi, vil valget af underliggende rentestruktur altså ligeledes have stor betydning. Det ses at Longstaff & Schwartz eksempel på renteoptioner, hvor der ligeledes er anvendt en Vasicek rentestruktur som underliggende prismodel, lider under samme udfordring⁴⁴.

Blacks model bygger i modsætning til Vasiceks rentemodell ikke på stokastiske renter, men på forwardprisen. Dermed kan der argumenteres for, at modellen fungerer godt som Control Variate, da de udfordringer mean-reversion niveauet medfører bliver udvandet. Det vides dog samtidig at obligationspriserne ikke følger en lognormalfordeling, hvormed Black's model ikke kan anvendes som korrekt analytisk løsning på prisfastsættelse af optionen.

Når modelresultaterne skal valideres, kan nøgletallet R^2 ikke anvendes, da dette nøgletal blot fortæller om residualsummen i selve regressionsmodellen, men ikke hvorvidt modelresultatet konvergerer imod den sande optionspris. Ved at anvende lavere tidsskridt, flere simuleringer eller en mere sofistikeret basisfunktion, vil modellen konvergere imod den sande værdi, men R^2 vil nødvendigvis ikke stige, da nøgletallet blot fortæller, hvor godt basisfunktionen passer. Der må derfor anvendes anderledes metoder til validering af denne model, end ved validering af generelle regressionsmodeller.

Modellen ville kunne valideres imod forskellen imellem de observerede priser for hhv. konverterbare og inkonverterbare obligationer, da prisen for optionen er givet ud fra (2). Der handles dog ikke længere inkonverterbare danske realkreditobligationer med løbetid > 6 år.

Indenfor modellering af forsikringsrisiko, er det almindeligt at validere sine Least Squares Monte Carlo modeller imod generelle stokastiske Monte Carlo modeller⁴⁵. I dette tilfælde vil denne

⁴⁴ Longstaff & Schwartz (2001): "Valuing American Options by Simulation: A simple Least-Squares Approach", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147

⁴⁵ Se blandt andet: Morrison & Tadrowski (2015): "Proxy Model Validation", *Moody's Analytics Research Insuranciers* & Hörig, Murray, Phelan & Leitschkis (2013): "An application of Monte Carlo proxy techniques to variable annuity business: A case study", *Milliam Research Report*

sammenligning gøre korrektheden af resultaterne fra Least Squares Monte Carlo simuleringen tvivlsomme, idet der er stor variation af resultaterne fra forrige stokastiske model, og Least Squares modellen.

Der er nu diskuteret to eksempler på prisfastsættelse af renteoptioner med førtidig exercise mulighed, via simuleringsteknik. Der er ligeledes set på, hvorledes spørgsmålet om optimal stopping time kan løses. Der vil nu blive set på hvordan dette kan løses via simulering af binomialfordelte variabler. Herefter vil modellerne blive sammenlignet og der vil blive diskuteret fordele og ulemper ved modellerne

5. Rentebinomialmodel

I dette afsnit præsenteres binomialmodellen, der blev fremlagt i 1979 af Cox, Ross og Rubenstein⁴⁶. Ligesom bootstrapping metoden, hører modellen til i kategorien for arbitrage-fri modeller, og er således en model, der tilpasser sig den nuværende rentestruktur, istedet for at forsøge at forudsige rentestrukturen. Modellen anvender således markedsdata som input og kalibreres ud fra et no-arbitrage argument, og kommer herefter med et output. Dette er modsat ligevægtsmodellerne, der kun anvender output. Modellen er, ligesom Vasiceks, en én-faktor model, der tilsiger at hele rentestrukturen bestemmes ud fra én faktor, udviklingen i den korte rente.

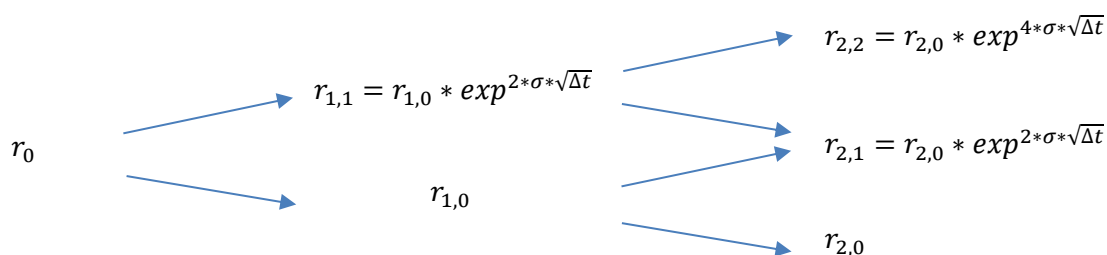
Da den kommende værdi i modellen kan antage to forskellige værdier med sandsynligheden p og $1 - p$, er de fremtidige output værdier binomialfordelte, og derfra navnet binomialmodel. Modellen er yderst anvendelig og kan prissætte både inkonverterbare samt konverterbare obligationer, og dermed også renteoptioner. I modsætning til tidligere anvendte modeller, der enten forsøger at modellere obligationspriser eller optionspriser, kan denne model således prisfastsætte begge dele. Da modellen i dette tilfælde skal anvendes til danske realkreditobligationer, vil værdien der modelleres være den korte rente, og dermed et udtryk for de mulige fremtidige værdier af den fremtidige 1-periodes rente.

Der kan således udarbejdes et rentetræ hvor r_{tj} angiver renten på tidspunkt t i tilstand j . Det forudsættes at logaritmen til 1-periodes renten følger en binomialfordeling med sandsynlighed 0,5, hvorfor forholdende imellem renterne på et givent tidspunkt kan udtrykkes som:

$$r_{t,j+1} = r_{tj} * \exp^{2*\sigma*\sqrt{\Delta t}} \quad (123)$$

Hvor Δt angiver ændringen i tiden og σ angiver volatiliteten tilhørende tidspunkt t . Rentetræet vil således have denne form:

⁴⁶ Cox, Ross, Rubenstein (1979): "Option Pricing: A simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263



Figur 10; Eksempel på rentetræ; Egen tilvirkning

Da rentetræet, og dermed rentestrukturen, nu kan konstrueres, kan der ligeledes konstrueres et tilhørende træ for det aktiv, der ønskes prisfastsat. Lad den konverterbare realkreditobligation være det ønskede aktiv, B , da vil B_0 angive værdien af obligationen på tidspunkt 0, og B^u være værdien af obligationen i tilstand $B_{t+1,j+1}$ og B^d være værdien af obligationen i tilstand $B_{t+1,j}$. Da værdien af aktivet altid prisfastsættes som den tilbagediskonterede værdi af det forventede fremtidige afkast, følger værdien af aktivet nedenstående:

$$B_0 = \frac{p * (B_{t+1,j+1} + Q) + (1 - p) * (B_{t+1,j} + Q)}{1 + r_{t,j}} \rightarrow \frac{p * (B^u + Q) + (1 - p) * (B^d + Q)}{1 + r_{t,j}} \quad (124)$$

Hvor Q angiver betalingen for obligationen og $1 + r_{t,j}$ viser at der sker tilbagediskontering med den tilhørende rente fra rentetræet. Da det vides at obligationen udløber til kurs 100 ved T , foregår metodikken ved at arbejde sig baglæns igennem pristræet.

Binomialmodellen er en no-arbitrage model og kan opbygges på flere måder. Hvis der kan observeres en risikoneutral nulkuponrentestruktur i markedet, samt en tilhørende nulkuponobligation, kan der beregnes et underliggende rentetræ, hvorefter den risikoneutrale sandsynlighed, p , kan beregnes. Værdien af p skal således opfylde at modelprisen = observeret pris, og skrives som:

$$p = \frac{(B_{t+1,j} + Q) - 1 + r_{t,j} * B_0}{(B_{t+1,j} + Q) - (B_{t+1,j+1} + Q)} \quad (125)$$

Der ønskes i denne opgave at prisfastsætte danske realkreditobligationer ud fra observerede renteinstrumenter, hvorfor der vælges en anden metode, hvor p angiver den risikoneutrale sandsynlighed. Da obligationspriser i rentebinomialmodellen prisfastsættes i den risikoneutrale verden, afhænger værdien af udviklingen i den korte rente tilhørende Δt , og investorer kan dermed kun forvente at modtage $r_t * \Delta t$ som afkast når Δt vælges tilpas småt. Derudover kan alle investorer i den risikoneutrale verden forvente samme afkast. Dette giver at $p = \frac{1}{2} = 0,50$. Der sker således en kalibrering af renten i modellen til brug for prisfastsættelse af obligationerne, nøjagtig som ved rentestrukturmodellerne.

Det vides fra (2), at prisen for den konverterbare obligation består af prisen for den tilsvarende inkonverterbare obligation, samt en solgt call option, der har den inkonverterbare obligation som

underliggende aktiv samt en strike kurs på 100. Modellen kan således udarbejdes enten ved først at prisfastsætte en inkonverterbar obligation og efterfølgende optionen ud fra (79), alternativt prisfastsætte den konverterbare obligation direkte i modellen. Det antages, at køber af optionen excerciser optionen såfremt den er in-the-money, hvormed B_o kan skrives som:

$$B_o = \min \left(100; \frac{p * (B_{t+1,j+1} + Q) + (1 - p) * (B_{t+1,j} + Q)}{1 + r_{t,j}} \right) \quad (126)$$

Det ses empirisk, at der ikke altid sker udnyttelse af optionen, når prisen på obligationen > 100, da optionsejerne er alle de mennesker der ejer et konverterbart lån i Danmark, og dermed ikke nødvendigvis opfører sig som rationelle investorer⁴⁷.

5.1. Black, Derman & Toy – BDT

I 1990 udviklede Black, Derman & Troy en model, der i sin diskretiserede version kan anvendes i samhörighed med binomialmodellen udviklet af Cox, Ross & Rubenstein 11 år tidligere⁴⁸. Den oprindelige model er en kort-rente én-faktor stokastisk rentestrukturmodel, som tidligere anvendte Vasicek model, men modellen kan kalibreres til en no-arbitrage model. Modellen blev oprindeligt udgivet i en diskretiseret udgave, og er siden blevet udledt til den kontinuerte stokastiske model, der er givet som:

$$d \ln r = [\theta(t) - a(t) \ln r]dt + \sigma(t)dz \text{ hvor } a(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)} \quad (127)$$

Hvor dz er wiener processen og dt angiver tidsændringen, som vist i tidligere stokastiske modeller. Modellen benytter sig af dynamisk volatilitet, hvilket fremgår ved at $\sigma(t)$ angiver volatiliteten tilhørende tiden. $\theta(t)$ definerer den gennemsnitlige vej, r går med tidsskridtet t og er uafhængig af r . John Hull beviser, at den gennemsnitlige retning approksimeres til at være lig med retningen for den tilhørende forwardkurve⁴⁹, dette kan anvendes senere, når modellen skal implementeres. a angiver mean-reversion niveauet, og modellen konvergerer således imod $\theta(t)/a(t)$ med hastighed a og mean-reversion niveauet er givet som den afledte volatilitet til tidspunkt t delt med volatiliteten tilhørende tidspunkt t . Det ses at renten følger den naturlige logaritme, hvormed renten ikke kan blive negative. Modellen har en svaghed ved at mean-reversion niveauet afhænger af volatiliteten, hvilket betyder at mean-reversion niveauet kun er positiv såfremt volatiliteten tilhørende den korte er aftagende med tiden. Det ses af $a(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}$ at når volatiliteten er konstant, vil mean-reversion

⁴⁷ Svend Jakobsen berørte dette emne første gang i hans Ph.D. Thesis "Prepayment and the Valuation of Danish Mortgage-Backed Bonds", og har efterfølgende skrevet flere artikler om dette emnes påvirkning på prisfastsættelse af danske realkreditobligationer. Emnet vil ikke blive berørt i denne opgave.

⁴⁸ Black, Derman, Toy (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analyst Journal*, 24-32

⁴⁹ se <http://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes/TechnicalNote31.pdf>

niveauet være 0. Modellen kan således implementeres med konstant volatilitet, og vil således være givet som:

$$d \ln r = \theta(t)dt + \sigma(t)dz \quad (128)$$

For at kunne implementere modellen i excel, er der behov for at diskretisere den kontinuerte model. I sin diskretiserede form kan modellen implementeres som:⁵⁰

$$\Delta \ln r = \mu * \ln r * \Delta t + \sigma(t) * \sqrt{\Delta t} * \varepsilon \quad (129)$$

Hvor μ angiver driften som funktion af den korte rente og ændringen i tiden. Det stokastiske led er en binær variabel, der kan antage to værdier, +1 og -1, med den risikoneutrale sandsynlighed p . Ved anvendelse af notationen fra tidligere, $r_{t,j}$, kan den fremtidige rente $r_{t+1,j}$ antage to værdier:

$$\ln r_{t+1,j} = \ln r_{t,j} + \mu * \ln r_{t,j} * \Delta t - \sigma(t) * \sqrt{\Delta t} \quad (130)$$

$$\ln r_{t+1,j+1} = \ln r_{t,j} + \mu * \ln r_{t,j} * \Delta t + \sigma(t) * \sqrt{\Delta t} \quad (131)$$

Ved subtraktion af (130) med (131), gives følgende:

$$\begin{aligned} \ln r_{t+1,j+1} - \ln r_{t+1,j} &= 2 * \sigma(t) * \sqrt{\Delta t} \leftrightarrow \\ r_{t+1,j+1} &= r_{t+1,j} * \exp^{2 * \sigma(t) * \sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \quad (132)$$

(132) er identisk med (123), hvormed det altså bevises at BDT modellen er kompatibel med Cox, Ross & Rubensteins binomialmodel, blot i en lognormal version. Der kan således ud fra ovenstående BDT model, opbygges et komplet rentetræ som en binomialmodel.

Implementering af modellen

Som ved tidligere anvendte rentestrukturmodeller, ligger cibor renteinstrumenter til grund for udledning af rentestrukturen. Modellen er implementeret med *tidsskrid* = $dt = \Delta t = 1$ år hvorfor der er benyttet Cibor swaprates fra 1 til 25 år som baggrund for rentestrukturen. Da modellen bygger på nulkuponrenter, som ved de andre rentestrukturmodeller, er der benyttet de tilhørende diskonteringsfaktorer og nulkuponrenter for renteinstrumenterne. Black-Derman-Toys's binomial rentestrukturmodel er som nævnt en no-arbitrage model, hvormed rentestrukturen skal replikere de observerede markedspriser, der er angivet som diskonteringsfaktoren * 100, da der regnes med nominel 100. Som det fremgår af bilag 3 beregnes der således modelpriser for de tilhørende løbetider, der forsøger at replikere de observerede priser. Ud fra modelpriserne kan der beregnes nulkuponrenter til de tilhørende løbetider, og på den måde skabes en rentestruktur.

⁵⁰ Boyle, Tan & Tian (2001): "Calibrating the Black-Derman-Toy model: some theoretical results", *Applied Mathematical Finance*, 8, 27-48

Binomialmodellen bygges op via et rentetræ, som vist i figur 10, hvor renterne i tilstand $j > 0$ bestemmes via (132). Da modellen ikke er kalibreret fra start, gættes der på nogle nedre renter i hver løbetid, hvormed træet kan beregnes via (132). Det første gæt på hvor renten er i $t > 0$ kan være forwardrenten, som for $t + 1$ kan beregnes som $\frac{d_1}{d_2} - 1$. Den første rente der ønskes et kvalificeret gæt på, som modellen efterfølgende kan kalibreres ud fra, findes i down state, altså $r_{t+1,j}$. Ved antagelse om at den logaritmiske ændring fra renten i t_0 , til forwardrenten, er middelværdien i en normalfordeling med volatiliteten som standardafvigelse, vil et kvalificeret bud på renten i $r_{t+1,j}$ være:

$$r_{t+1,j} = r_0 * \exp\left(\ln\left(\frac{\frac{d_1}{d_2} - 1}{r_0}\right) - \sigma\right) \quad (133)$$

$r_{t+1,j+1}$ kan således inden kalibrering af modellen beregnes ved at indføre (132) i (133):

$$\begin{aligned} r_{t+1,j} &= r_0 * \exp\left(\ln\left(\frac{\frac{d_1}{d_2} - 1}{r_0}\right) - \sigma\right) \\ r_{t+1,j+1} &= r_{t+1,j} * \exp^{2*\sigma(t)*\sqrt{\Delta t}} \\ &= r_0 * \exp\left(\ln\left(\frac{\frac{d_1}{d_2} - 1}{r_0}\right) - \sigma\right) * \exp^{2*\sigma(t)*\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \quad (134)$$

Da den nuværende rentestruktur ønskes replikeret til en no-arbitrage model har $r_0 = -0,44\%$, $d_1 = 1,0045$ og $d_2 = 1,0028$ samt $\sigma = 23,46\%$ findes første bud på renterne i $t + 1$ som:

$$r_{t+1,j} = -0,0044 * \exp\left(\ln\left(\frac{\frac{1,0045}{1,0028} - 1}{-0,0044}\right) - 0,2346\right) \quad (135)$$

$$r_{t+1,j+1} = -0,0044 * \exp\left(\ln\left(\frac{\frac{1,0045}{1,0028} - 1}{-0,0044}\right) - 0,2346\right) * \exp^{2*0,2346*\sqrt{1}} \quad (136)$$

Modellen bryder sammen da $\frac{\frac{d_1}{d_2} - 1}{r_0}$ giver et negativt tal, som der skal tages den naturlige logartime af, hvilket kun kan løses via komplekse tal der har flere forskellige udfaldsrum. Dette giver nogle fundamentale udfordringer for modellen, som diskuteres under validering af modelresultaterne.

Da renteinstrumenterne benytter sig af Cibor3 som underliggende, anvendes volatiliteten beregnet som den historiske volatilitet det seneste år. $\Delta t = 1$ år i modellen, hvorfor det er 1-års volatiliteten, der er benyttet. Der anvendes en statisk volatilitet, da modellen implementeres med udgangspunkt i (128), hvor $\sigma = 0$.

Når der er foretaget første gæt på de nederste renter i alle tidspunkter, kan rentetræet beregnes. Herefter kan der beregnes modelpriser for alle renteinstrumenter iterativt som vist i bilag 4 og appendiks, hvor der arbejdes tilbage igennem træet med (124), hvor $p = 0,50$. Når alle modelpriserne er beregnet, kan de tilhørende nulkuponrenter og dermed rentestrukturen udregnes jf. (132).

Modellen kan før kalibrering kategoriseres som $P = P^{teo} + e$, hvor e angiver residualen. For at modellen kan kategoriseres som en no-arbitrage model, skal $P = P^{teo}$ være opfyldt, hvor P angiver de observerede priser og P^{teo} angiver modelpriserne.

Det vides at

$$\lim_{e \rightarrow 0} P_t^{teo} = P_t \quad (137)$$

Ved hjælp af nedenstående vil $e \rightarrow 0$

$$\min_{r_{N,j}} \sum_{t=1}^T [(P_t - P_t^{teo})^2] \quad (138)$$

Dermed vil modellen konvergere imod no-arbitrage argumentet, når residualsammen, e , går mod 0. Alle de nedre renter for hvert tidsskridt bestemmes altså således, at det minimerer den kvadrerede prisfejl imellem de observerede markedspriser og de teoretiske priser.

Da der ikke er cibor renteinstrumenter med udløbstidspunkter på alle tilsvarende tidsskridt i modellen, er der foretaget interpolation for de manglende tidspunkter. Af bilag 3 fremgår det hvilke tidspunkter der haves renteinstrumenter for, og hvilke tidspunkter hvor der er benyttet interpolation. Ovenstående minimeringsformel er således også kun anvendt for de løbetider, hvor der tilhører et renteinstrument, hvorfor $t = 1 \rightarrow T$ således kun er gældende for løbetider med tilhørende renteinstrument.

Efter kalibrering af modellen med minimeringsfunktionen, kan modellen anvendes til prisfastsættelse af obligationerne og de tilhørende renteoptioner med afsæt i (124). Da obligationerne, der ønskes prisfastsat, afdrages efter annuitetsprincippet, skal dette integreres i den generelle formel for udledning af prisen via binomialmodellen (126).

I implementering af modellen beregnes først prisen på en tilsvarende inkonverterbar obligation, hvor (124) anvendes, og konfigureres til håndtering af annuitetsbetaling, jf. nedenstående:

$$B_{t,j} = \frac{\left(\frac{((A_{t+1} + RG_{t+1} * B_{t+1,j}) * 0,5) + ((A_{t+1} + RG_{t+1} * B_{t+1,j+1}) * 0,5) + R_{t+1}}{1 + r_{t,j}} \right)}{RG_t}$$

$$= \frac{\left(\frac{(2 * A_{t+1} + RG_{t+1} * B_{t+1,j} + RG_{t+1} * B_{t+1,j+1}) * 0,5 + R_{t+1}}{1 + r_{t,j}} \right)}{RG_t} \quad (139)$$

Da Q i (124) angiver betalingen fra obligationen, skal der for obligationerne efter annuitetsprincippet tages højde for både afdrag og rentebetaling, angivet ovenfor som A og R . Ovenfor angiver RG restgælden på obligationen, hvor $RG_{t+1} = RG_t - A_{t+1}$. B_{t+1} kan som nævnt angive 2 værdier, når der er tale om en binomialmodel. Da det netop er vist, at afdraget går fra i restgælden, skal afdraget således tillægges i begge tilstande. Se appendiks for eksempel på beregning.

Modellen anvender værdier i nominelle termer, hvor beregninger tager højde for underliggende restgælden, hvilket der skal korrigeres for. Da $B_{t,j}$ angiver, hvad prisen er på obligationen på dette tidspunkt, hvor restløbetiden er $T-t$, og der er afdraget, da der er tale om annuitetslån, skal restgælden ganges med værdien af obligationen. Der haves nu en pris på restværdien af obligationen i restgældstermer. Hvis man står på tidspunkt t_0 , og man går op i tilstand $t + 1, j + 1$ vil værdien af restgælden være $RG_{t+1} * B_{t+1,j+1}$. Da denne værdi ønskes skalleret op til en værdi i nominel 100, som anvendes på børsen, divideres med den nuværende restgæld.

Prisen på en inkonverterbar obligation er nu fundet, og optionselementet tilhørende optionen kan således prisfastsættes efter (2), der tilsiger at $P_{konverterbar} = P_{inkonverterbar} - P_c$, da $P_{konverterbar}$ kan observeres i markedet. Optionen ønskes dog prisfastsat særskilt i modellen, da det sikre konsistens imellem forudsætningerne for beregning af obligation og option.

Optionen prisfastsættes under antagelse om at investorer udnytter optionen når $B > X$ hvor X angiver strikekursen. Da obligationen udløber til kurs 100, og $X = 100$ vil $B - X = 0$ ved tidspunkt T , altså udløb. (126) udtrykker formelen for prisfastsættelse af den konverterbare obligation, og dermed obligationen inklusiv den tilhørende option med $X = 100$. Det vides fra (79), at payoff for en call option er $Payoff_{call} = \max(S_t - X; 0)$ hvor S_t er det underliggende aktiv, der her skrives som $B_{t,j}$. Som ved andre finansielle instrumenter er værdien af optionen den tilbagediskonterede værdi af fremtidige cash flows, hvor payoff udtrykker fremtidig cash flow for optionen. Værdien af optionen kan således udtrykkes som:

$$C = \max\left(\frac{B_t - X}{1 + r_t}; 0\right) \quad (140)$$

Hvor

$$B_o = \text{Min} \left(100; \frac{p * (B_{t+1,j+1} + Q) + (1 - p) * (B_{t+1,j} + Q)}{1 + r_{t,j}} \right) \quad (141)$$

Dermed kan værdien af optionen findes via en iterativ tilbagegang igennem et optionsværditræ i binomialmodellen, hvor værdien er givet som:

$$C_{t,j} = \text{Max}[(C_{t+1,j} + C_{t+1,j+1}) * 0,5; B_{t,j} - 100; 0] \quad (142)$$

Se appendiks for eksempel på beregning. Prisen for den konverterbare obligation kan herefter findes som:

$$P = B_{t0} - C_{t0} \quad (143)$$

Ved brug af ovenstående, er der opnået følgende modelresultater:

Modelresultater		
Obligationer:	2030	2040
Pris Inkonv.	96,48	104,53
Pris option	0,04	5,04
Pris konv.	96,44	99,49

Modelforudsætninger	
Δt	1 år
σ	23,46%
e	0,094

Tabel 12 & 13; BDT Modelresultater & Modelforudsætninger;

Egen tilvirkning

Rentestrukturen der er udledt via BDT modellen, og ligger til grund for modelresultaterne, er vist i bilag 5.

Det ses, at der efter kalibrering er en samlet kvadreret residuals sum på 0,094 for BDT rentestrukturen, svarende til en modelfejl på

$$\sum_{t=1}^T (P_t - P_t^{teo})^2 = 0,094 \rightarrow \sqrt{0,094} = 0,31\% \quad (144)$$

Det ses af rentestrukturen og af bilag 3 samt 5, at den største residual fremkommer ved $t = 2$. Residualsummen for alle tilhørende tidspunkter, bortset fra $t = 2$ er givet som:

$$\sum_{t=1,}^T [(P_t - P_t^{teo})^2] - (P_2 - P_2^{teo})^2 = 0,015 \rightarrow \sqrt{0,015} = 0,12\% \quad (145)$$

Hvorfor $t = 2$ er ansvarlig for 61% af residuals summen i modellen:

$$1 - \left(\frac{0,12}{0,31} \right) = 61\% \quad (146)$$

Det fremgår af bilag 3 at den nulkuponrente der skal replikeres i $t = 2$ er -0,14% og at modelresultatet er 0,00%. Som nævnt tidligere, anvender BDT modellen lognormalfordelte renter,

hvorfor modellen ikke kan operere med negative renter, hvilket resulterer i en relativ stor prisfejl i modellen, når der observeres negative renter i markedet, der skal replikeres. For $t = 1$ er der ligeledes negativ rente, men da denne er deterministisk, modelleres denne ikke ud fra modellen, men indsættes direkte, og dermed er der ikke nogen prisfejl.

Der er nu gennemgået forskellige rentestrukturmodeller, samt modeller til prisfastsættelse af optioner og en samlet model til prisfastsættelse af begge dele. I det kommende afsnit vil modellerne blive sammenlignet og testet, samt diskuteret fordele og ulemper, for validering af den bedste model.

6. Model benchmarking

I dette afsnit vil der blive fokuseret på benchmarking af de modeller, der har været gennemgået tidligere, med henblik på at nå frem til en foretrukken model, der kan anvendes i konklusionen. Modellerne vil blive sammenlignet, hvorfor modelresultaterne fra tidligere vil blive sammenholdt og valideret til brug for konklusion af, hvilken model der vil blive foretrukket. Der vil derudover ske en analyse af modellerne, til brug for forklaring af eventuelle forskelle i modellerne, og hvorvidt disse forskelle er resultat af eventuel dataanomalier eller der kan findes en matematisk forklaring.

6.1. Test af modelforudsætninger

Ikke alle modellerne har nogle modelforudsætninger, men de modeller, der har, vil blive testet nedenfor.

Bootstrapping forudsætninger:

- Kræver lige så mange obligationer / renteinstrumenter som betalingstidspunkter
- Hver obligation / renteinstrument må maksimalt have ét tidspunkt hvor ingen andre obligationer / renteinstrumenter har betaling

Der ønskes prisfastsættelse af danske realkreditobligationer med udløb i år hhv. 2030 og 2040 og kvartårlige terminer, hvorfor renteinstrumenterne, der ligger til grund for rentestrukturen, ikke kan dække hele dette spektrum. Der er dermed ikke lige så mange renteinstrumenter som betalingstidspunkter, og forudsætningen er ikke opfyldt. Derudover ses det, at renteinstrumenterne har flere end ét tidspunkt, hvor ingen andre obligationer / renteinstrumenter har betaling. Dermed mister modellen sin no-arbitrage egenskab, og der skal ske interpolation. Modellen forkastes på denne baggrund.

Black, Derman & Toy – BDT – forudsætninger:

- Perfekt korrelation på obligationsafkast
- Forventet afkast over en periode er identisk på alle værdipapirer
- Ingen skat eller handelsomkostninger
- Lognormalfordelte renter

Der prisfastsættes danske realkreditobligationer, og den underliggende rentestruktur udledes via Cibor renteinstrumenter. Der er således argumenteret for, at der ikke skal korrigeres for likviditet eller kreditrisiko, og det må dermed antages at være perfekt korrelation på obligationsafkast og afkastene forventes at være identiske. Modellen er blevet implementeret i sin rene form uden skat eller handelsomkostninger.

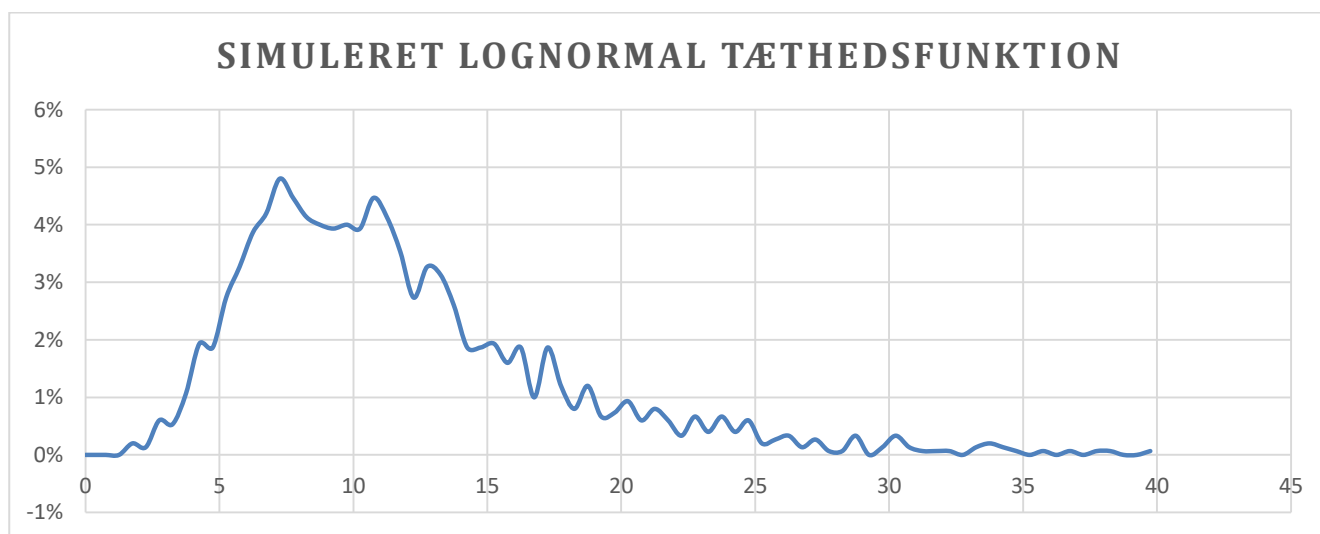
De første 3 betingelser i BDT modellen er således opfyldt. Derudover forudsætter modellen lognormalfordelte renter, hvormed renterne ikke kan være negative. I de andre stokastiske rentemodeller, Vasicek & CIR, er der ligeledes en forudsætning om rentefordeling. Nedenfor ses der på sandsynlighedsfordelingen af renterne i BDT, Vasicek og CIR modellerne, som efterfølgende vil blive sammenlignet med empirisk sandsynlighedsfordeling af renterne. Nelson, Siegel & Svensons rentemodell og polynomium funktionen har ingen betingelser, hvorfor disse modeller vil blive analyseret på anden vis efterfølgende.

6.2. Fordelingsfunktioner

BDT – Sandsynlighedsfordeling

Den oprindelige binomialmodel udviklet af Cox, Ross & Rubenstein med sandsynligheden $p = 0,50$, vil konvergere imod en normalfordeling når $t \rightarrow \infty$ som følge af, at halvdelen af variable vil være på hver sin side af middelværdien. Black, Derman & Toy's videreudvikling af rentebinomialmodellen følger dog ikke den fordeling.

En variabel er lognormal fordelt, hvis dens logaritme eller naturlige logaritme er normalfordelt. BDT processen angivet i diskret tid, vist i (129) som: $\Delta \ln r = \mu * \ln r * \Delta t + \sigma(t) * \sqrt{\Delta t} * \varepsilon$ følger en lognormal fordeling, som resultat af at der tages den naturlige logaritme, $\ln$, af en proces der er normalfordelt. Wiener processen er en tilfældig trækning fra den inverse standard normalfordeling, og er således normalfordelt.



Figur 11; Simuleret log-normal tæthedsfunktion; Egen tilvirkning

Ovenfor er der simuleret en lognormal tæthedsfunktion for at give et grafisk indtryk af, hvordan fordelingsfunktionen for renterne i BDT modellen er.

For at vurdere egnetheden af Vasicek og CIR modellen som værktøj til prisfastsættelse af de danske konverterbare realkreditobligationer, vil der nu blive set på sandsynlighedsfordelingen i hver af de to modeller. Disse vil efterfølgende blive sammenholdt med BDT modellens lognormale fordeling, samt empirisk sandsynlighedsfordeling af renterne.

Vasicek - Sandsynlighedsfordeling

Da $r(t)$ i Vasiceks model følger en Ornstein-Uhlenbeck proces, hvilket er navnet på processen i (44), som Vasiceks rente følger, vil renterne følge en normalfordeling, som tidligere beskrevet under modellens svagheder.

Middelværdien i normalfordelingen udledes fra den tilhørende differentiaalligning⁵¹ og findes som:

$$E[r(t)] = r(t) + \frac{b}{a} * (1 - e^{-a*t}) \quad (147)$$

Da modellen indeholder mean-reversion vil middelværdien gå mod $r(t) + \frac{b}{a}$ når $t \rightarrow \infty$. Da sandsynlighedsfordelingen anvendes i en uendelig og statisk tilstand, vil middelværdien af $r(t)$ afspejle det forventede langsgitete renteniveau, og middelværdien i fordelingen findes som:

$$N(\mu) = b \quad (148)$$

Variansen i normalfordelingen findes som:

$$N(\sigma^2) = Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2 * a} * (1 - e^{-a*t}) \quad (149)$$

Da sandsynlighedsfordelingen vil blive anvendt på en langsigtet horisont hvor $t \rightarrow \infty$, vil der ikke ske diskontering, og dermed bliver:

$$N(\sigma^2) = Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2 * a} \quad (150)$$

Standardafvigelsen kan da findes som:

$$N(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2 * a}} \quad (151)$$

Da modellen følger en normalfordeling, kan middelværdien og standardafvigelsen indsættes i den tilhørende differentiaalligning for at finde normalfordelingen af renterne⁵²:

⁵¹ Vasicek, Oldrich (1977): "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188

⁵² Ványlos, Cho & Glasgow (2014): "Probability Density of the CIR Model", University of Maryland, College Park & Brigham Young University

$$N(r, t) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2*b*r}}} \quad (152)$$

Det vides at den standardiserede tæthedsfunktion for normalfordelingen findes som:

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi * \sigma^2}} * e^{-\frac{(r-b)^2}{2*\sigma^2}} \quad (153)$$

$(r - b)^2$ kan erstattes med $a * (r - b)^2$ når processen har mean-reversion som i Vasicek.

Ved at sammenligne (152) med (153), ses at konstantfaktoren i tæthedsfunktionen, angivet nedenfor, mangler.

$$\left(\frac{2 * \pi * \sigma^2}{2 * b} \right)^{-1/2} \quad (154)$$

Når denne indsættes i (153), findes tæthedsfunktionen i Vasicek modellen som:

$$P_\infty = \sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{1}{\sigma^2} * e^{-\frac{a*(r-b)^2}{\sigma^2}} \quad (155)$$

Denne tæthedsfunktion vil blive anvendt til udledning af grafisk fordeling af renterne i modellen, som vil blive sammenholdt med fordeling af renterne i de andre modeller, og efterfølgende anvendt til hvilken model der passer bedst med den empiriske rentefordeling.

CIR - sandsynlighedsfordeling

Rentemodellen følger et specialtilfælde af Ornstein-Uhlenbeck processen, hvor volatiliteten skalleres i forhold til rentestørrelsen. Som tidligere nævnt medvirker dette til, at modellen ikke kan have negative renter. Sammenholdt med mean-reversion i modellen, vil renten i modellen på lang sigt konvergere imod en gamma-fordeling når $T \rightarrow \infty$. Sandsynlighedsfordeling følger en chi-square fordeling, der er et specialtilfælde af gamma-fordelingen, med k grader af frihed. Det ses at når $r \rightarrow \infty$ vil modellen konvergere fra gamma-fordeling og mod en normalfordeling, men vil aldrig opfylde betingelserne helt for normalfordeling. Årsagen hertil skyldes at chi-square fordelinger konvergerer imod normalfordelinger når $k \rightarrow \infty$ hvor k udledes som:

$$k = \frac{2 * a * b}{\sigma^2} \quad (156)$$

Det ses derfor at når $r \rightarrow \infty$ vil $b \rightarrow \infty$ hvilket gør at $k \rightarrow \infty$ og dermed vil modellen konvergere imod en normalfordeling.

Middelværdien i gamma-fordelingen findes som:

$$\Gamma(\mu) = \frac{2 * a * b}{\sigma^2} * \frac{\sigma^2}{2 * a} = k * \frac{\sigma^2}{2 * a} \quad (157)$$

$$\Gamma(M) = b$$

Som for Vasicekmodellen, ses at middelværdien i gamma-fordelingen, når $T \rightarrow \infty$, vil følge det langsigtede renteniveau b .

Standardafvigelsen i gamma-fordelingen findes som:

$$\begin{aligned}\Gamma(\sigma) &= \sqrt{\frac{2 * a * b}{\sigma^2}} * \frac{\sigma^2}{2 * a} = \sqrt{k} * \frac{\sigma^2}{2 * a} \\ \Gamma(S) &= \sqrt{\frac{b}{2 * a}} * \sigma\end{aligned}\tag{158}$$

Modellens tæthedsfunktion er angivet som:⁵³

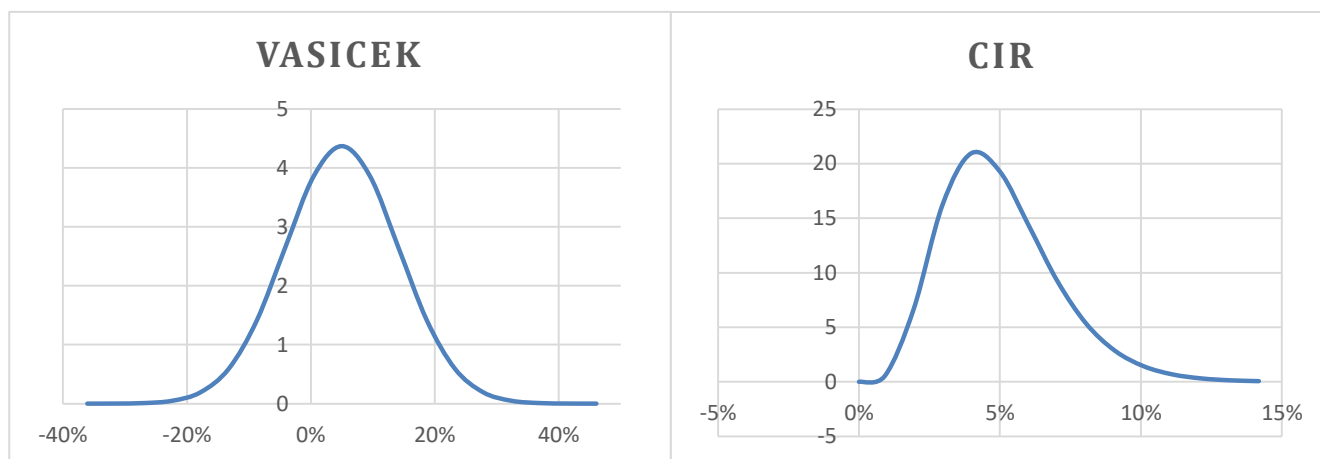
$$\begin{aligned}P_{\infty} &= \frac{\left(\frac{2 * a}{\sigma^2}\right)^k}{\Gamma(k)} * r^{k-1} * e^{-2*a*r/\sigma^2} \\ &= \left(\frac{2 * a}{\sigma^2}\right)^k * r^{k-1} * e^{-2*a*r/\sigma^2 - \ln(\Gamma(k))}\end{aligned}\tag{159}$$

Det er nu vist hvordan middelværdi, standardafvigelse og tæthedsfunktioner for Vasicek og CIR modellerne kan udledes. Dette anvendes nu på nedenstående modelparametre og giver nedenstående resultater, som ligeledes er vist grafisk. Det ses at Vasicek modellen følger en normalfordeling, og CIR modellen følger en gammafordeling. Dette vil efterfølgende blive holdt op imod empiriske resultater for rentens sandsynlighedsfordeling.

Modelparametre		Modelforudsætninger		
a	0,15		μ	σ
b	5,00%	Vasicek	5,00%	9,13%
σ	5,00%	CIR	5,00%	2,04%

Tabel 14 & 15; Vasicek & CIR Modelparametre & Modelforudsætninger; Egen tilvirkning

⁵³ Cox, Ingersoll & Ross (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, 385-407



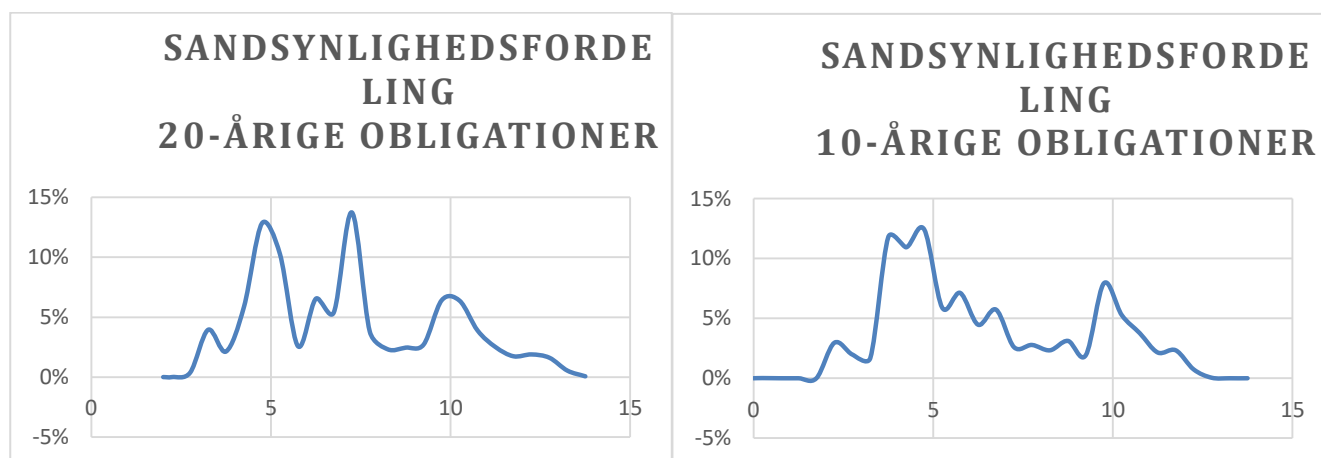
Figur 12 & 13; tæthedsfunktioner for Vasicek & CIR modellerne; Egen tilvirkning

Se appendiks for eksempel på beregninger der ligger til grund for ovenstående.

Sammenligning med empirisk sandsynlighedsfordeling for renter

For vurdering af hvilken rentestrukturmodel der bedst kan tilpasse sig den virkelige rentestruktur, er det nødvendigt at se, hvordan sandsynlighedsfordeling passer med den empiriske sandsynlighedsfordeling af renterne.

For at sammenligne ovenstående sandsynlighedsfordelinger med den empiriske sandsynlighedsfordeling for renterne, er der trukket data for 10 og 20-årige danske realkreditobligationer hos statistikbanken. Fra 1987 til 2012 er der hver dag indberettet den effektive realkreditrente på obligationer, der ligger til funding for realkreditlån med løbetider på 10 og 20 år, som der netop ønskes prisfastsat. Nedenfor er tæthedsfunktionen for sandsynlighedsfordeling vist grafisk for disse obligationer.

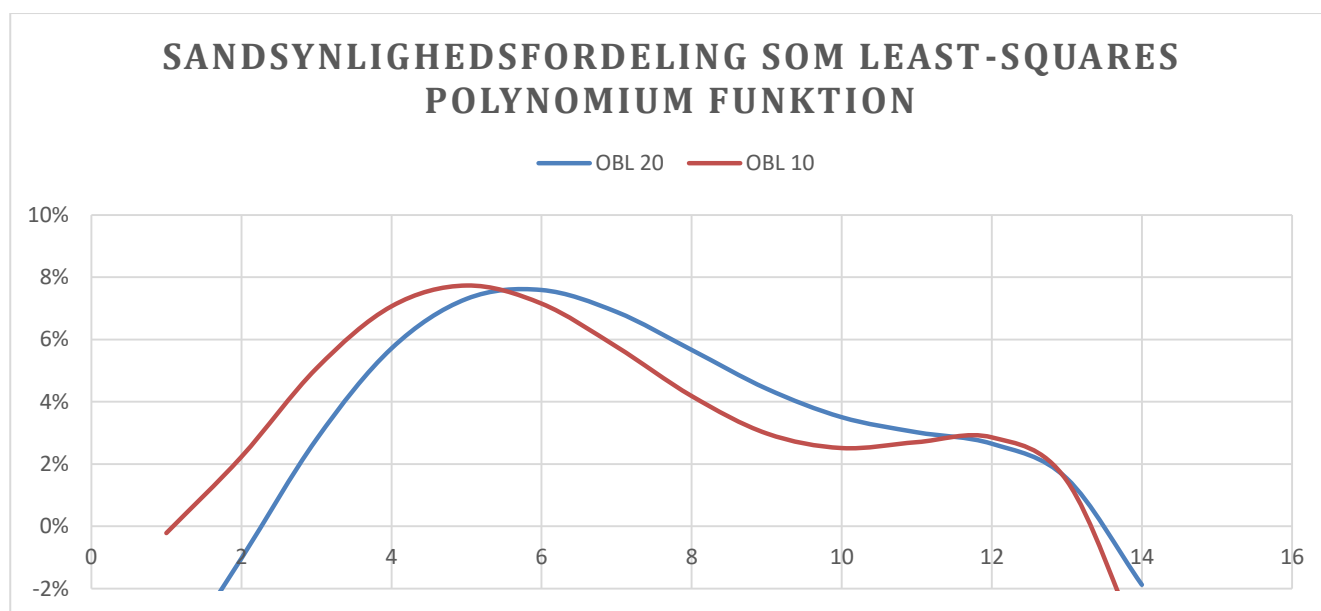


Figur 14 & 15; tæthedsfunktioner for Vasicek & CIR modellerne; Egen tilvirkning

Det ses, at de empiriske renter ikke følger en normalfordeling, da der ikke er lige stor fordeling på hver side af middelværdien. Dette underbygges af normalfraktildiagrammerne i bilag 7, hvor det ses at der ikke er en lineær sammenhæng imellem punkterne. Dette understøttes ligeledes af empiriske

studier⁵⁴. I et studie undersøger ECB sandsynlighedsfordelingen for renter udstedt af banker. I dette studie er der således en stor diversifikation i kreditspænd, hvilket har en indflydelse på rentefordelingen. De konkluderer dog, at renterne ikke er normalfordelte, når der ses på rentefordeling i samme risikoklasser over tid. Samtidig er flere af deres fordelinger højreskæve i udtrykket. Lahiri, Teigland & Zaporowski kommer frem til samme konklusion – at renterne ikke er normalfordelte, til trods for at deres primære emne var sammenhængen imellem rente og inflation. Derudover blev det tidligere vist, at en empirisk undersøgelse viste, via en regressionsmodel, at renteændringer generelt ikke er normalfordelte, og dermed medvirker til at obligationspriserne ikke er lognormalfordelte⁵⁵.

For at give et bedre indtryk af hvilken sandsynlighedsfordeling renterne følger, foretages der en Least-Squares regression, beskrevet nærmere under ”generelt om regressionsanalyse”, med en 5. grads polynomium funktion, som er vist grafisk nedenfor.



Figur 16; Sandsynlighedsfordeling som Least-Squares polynomium funktion; Egen tilvirkning

Polynomiumfunktionerne har R^2 på hhv. 0,48 og 0,57, hvorfor forklaringsgraden af polynomiumsfunktionerne ikke er fyldestgørende. Dette kan ligeledes ses tydeligt ved at holde graferne op imod hinanden. Det giver dog et billede af, at renterne følger en fordeling, som er højreskæv, hvilket både CIR og BDT modellernes tæthedsfunktioner, der følger hhv. chi-square

⁵⁴ Lacroix, Renaud (2007): "Assessing the shape of the distribution of interest rates : lessons from French individual data", ECB samt Lahiri, Teigland & Zaporowski (1988): "Interest Rates and the Subjective Probability Distribution of Inflation Forecasts", *Journal of Money, Credit & Banking* vol. 20, no 2, pp. 233-248

⁵⁵ Litterman & Scheinkman (1991): "Common Factors Affecting Bond Returns", *Journal of Fixed Income*, vol. 1, pp. 54-61

(gamma) og lognormal fordelinger, ligeledes er. Derimod er renterne ikke normalfordelte, hvilket er en antagelse i Vasicek modellen.

På baggrund af denne sammenligning foretrækkes CIR og BDT modellen fremfor Vasicek's model, og anvendelse af Vasicek modellen som den foretrukne, bliver således forkastet.

6.3. Modellernes kalibrering til markedssdata samt empiriske resultater og argumenter

De tilbageværende rentestrukturmodeller, Nelson, Siegel & Svenson (NSS), Polynomiumfunktion, CIR og BDT, vil i dette afsnit blive sammenlignet til brug for beslutning om den foretrukne model.

Èt af de parametre modellerne bliver testet på, er tilpasningsevnen til den observerede rentestruktur.

Rentestrukturmodel resultater				
	Polynomium	NSS	CIR	BDT
Residualsum	45,86	1,25	54,58	0,09

Tabel 16; Rentestrukturmodel resultater; Egen tilvirkning

Ovenfor vises de implementerede rentestrukturmodeller, samt hvorledes rentestrukturen har kunnet blive kalibreret til markedssdata, og hvor godt de har kunnet blive tilpasset. Når det skal vurderes, hvorvidt en rentestrukturmodel er egnet til at prisfastsætte obligationer, er et parameter der kan anvendes, hvorvidt modellen kan replikere den observerede rentestruktur i markedet. Igennem opgaven har dette været anvendt, og vises ovenfor som residualsommen, der er angivet som den summerede kvadrerede prisfejl imellem de observerede priser på cibor instrumenterne, og den tilhørende rentestruktur fra modellen.

Det ses af ovenstående, at der er stor forskel i modellernes tilpasningsevne, og at især NSS og BDT modellerne er utrolig fleksible, og har stor evne til at tilpasse sig den observerede rentestruktur. Af de fire ovennævnte modeller, er CIR og BDT modellerne stokastiske én-faktor rentestrukturmodeller, med mean-reversion indbygget. Modellerne anvender således et stokastisk led samt et punkt, hvortil renterne vil konvergere imod. Polynomiumfunktionen, som blot er en statistisk funktion, samt NSS modellen, anvender ikke mean-reversion, men forsøger at skabe fleksibilitet i modellerne via 2. 3. og 4. grads led. NSS modellen kan således betragtes som en viderebygning på en polynomiumsfunktion, hvor hvert led kan have flere udtryk, som vist i figur 5, hvor parameterbidragene for NSS modellen er udspecificeret og kommenteret. Dette medvirker, at NSS modellen har en stærkere tilpasningsevne end den standardiserede polynomiumsfunktion, hvorfor NSS modellen vil blive foretrukket frem for polynomiumfunktionen.

Flere andre empiriske undersøgelser peger ligeledes på NSS som en fleksibel model, der kan replikere obligationsmarkedet og ligeledes anvendes som forecast-model til fremtidige

rentescenarier⁵⁶. Dette resulterer i, at mange store aktører på de globale fixed-income markeder, såsom centralbanker, portefølje managere mv. anvender modellen⁵⁷. Modellen bliver dog kritiseret for at modelresultaterne er meget følsomme overfor startværdierne af parametrene inden anvendelse af en least-squares kalibrering til markedssdata, hvilket kan bidrage til en høj varians i resultaterne. Dette kan ligeledes resultere i utilregnelige langsigtede renteniveauer, og tilmed negative langsigtede renteniveauer⁵⁸. Dette har resulteret i, at de NSS modeller, der anvendes i praksis, typisk er en variant af den dynamiske NS model udarbejdet af Li & Diebold (2006)⁵⁹, som af flere er bevist at passe bedre til markedssdata⁶⁰. Denne dynamiske model vægter parametrene efter, hvor mange observerede instrumenter, der anvendes i prissætning, og hvor tæt de er på hinanden tidsmæssigt. En rapport fra 2011 konkluderer ligeledes at modellen kan betegnes som en no-arbitrage model ud fra deres beregninger, der er foretaget på et 99 % konfidensinterval⁶¹.

CIR modellen ses ikke at have samme tilpasningsevne til de observerede markedssdata, som NSS og BDT modellerne har, da modellen er begrænset i sit udtryk, især i forhold til NSS modellen. Dette understøttes ligeledes af flere empiriske studier⁶². Flere empiriske studier peger på en bedre, men fortsat ikke tilfredsstillende evne til at tilpasse markedssdata, og er udarbejdet i årene umiddelbart lige efter udgivelsen af modellen i 1985, hvor der sandsynligvis ikke var lige så meget information tilgængeligt om modellen og dens implementeringsmetoder. Til gengæld er modellen konsistent med en økonomi i ligevægt og kan udtrykke, hvordan fixed-income samt derivat produkter burde prissættes. Herudover besidder modellen mean-reversion, hvorfor modellen ikke kan konvergere imod uendelig, som er en teoretisk svaghed ved NSS modellen. Modellen har samtidig en fordelingsfunktion, der afspejler fordelingsfunktionen for empiriske rentefordelinger.

BDT modellen er angivet under kategorien no-arbitrage modeller, hvilket ligeledes afspejles af modellens tilpasningsevnen til den observerede rentestruktur, og er den af rentestrukturmodellerne,

⁵⁶ Se Li, Yue & Diebold (2007): "Global Yield Curve Dynamics and Interactions: A Dynamic Nelson-Siegel Approach", *National Bureau of Economic Research* og Gilli, Grosse & Schumann (2010): "Calibrating the Nelson-Siegel-Svensson Model", *Computational Optimization Methods in Statistics, Econometrics and Finance*, EU Commission

⁵⁷ Se Barret, Gosnell & Heuson (1995): "Yield Curve Shifts and the Selection of Immunization Strategies", *The Journal of Fixed Income*, Vol. 5, pp. 53-64

⁵⁸ Cairns & Pritchard (2001): "Stability of Models for the Term Structure of Interest Rates with Application to German Market Data", *British Actuarial Journal*, Vol. 7, pp. 467-507

⁵⁹ Li & Diebold (2006): "Forecasting the term structure of government bond yields", *Journal of Econometrics*, 130, pp. 337-364

⁶⁰ Se Levant & Ma (2013): "A Dynamic Nelson-Siegel Yield Curve Model with Markov Switching", *University of Alabama*

⁶¹ Se Coroneo, Nyholm & Vidova-Koleva (2011): "How arbitrage-free is the Nelson-Siegel model?", *Journal of Empirical Finance*, vol. 18, pp. 393-407

⁶² Se Lamoureux & Witte (2002): "Empirical Analysis of the Yield Curve: The Information in the Data Viewed through the Window of Cox, Ingersoll and Ross", *The Journal of Finance*, Vol. 57, no. 3, pp. 1479-1520 & Navas, Javier (2005): "Yield Curve Fitting With Term Structure Models: Empirical Evidence From the Euro Market", *University Pablo De Olavide, Sevilla Spain*

der har den bedste tilpasningsevne jf. tabel 16. Denne funktion gør modellen meget attraktiv, og anvendes således blandt andet i portefølje optimeringsscenarier⁶³. Som tidligere påpeget anvender modellen en lognormal fordeling af renterne, hvilket betyder at rentestrukturen ikke kan blive negativ, ej heller de korte renter. Dette er ikke i overensstemmelse med den nuværende observerede rentestruktur, hvilket kan være en årsag til, at modellen ikke er lige så anvendt empirisk som NSS modellen til brug for udledning af hele rentestrukturen. BDT modellen er derimod meget anvendt som værktøj til prisfastsættelse af renteoptioner⁶⁴, og der vil nu blive set nærmere på sammenligning af de forskellige metoder til prisfastsættelse af renteoptionerne.

Der har i opgaven været vist 3 forslag til modeller der kan bruges til prisfastsættelse af renteoptioner, hvor den første model anvender en stokastisk underliggende rentestruktur simuleret via Monte-Carlo simuleringer, hvor der beregnes priser på nulkuponobligationer. Der udregnes teoretiske priser på europæiske call optioner på nulkuponobligationer i hvert tidsskridt jf. Jamshidian, og optionsprisen findes via (94). Derudover er der anvendt Longstaff & Schwartz Least-Squares Monte-Carlo metode og BDT modellen.

Når renteoptioner skal prisfastsættes, er det vigtigt at anvende en prisfastsættelsesmetode, der samtidig kan prisfastsætte den underliggende obligation korrekt, som følge af at det er den observerede markedskurs på obligationen, der afgør, hvorvidt optionen er in-the-money og bliver excerciset, og ikke den teoretiske kurs på obligationen. En forkert prissætning på den underliggende obligation på 1 % vil typisk betyde en væsentlig større fejl prissætningen på den tilhørende option. Det er således afgørende at rentestrukturen, der anvendes til prisfastsættelsen, kan kalibreres til at replikere observeret markedssdata. Simulationsteknikken baseret på Jamshidian og Least-Squares Monte-Carlo metoden bygger begge på stokastiske rentestrukturer, som netop har vist ikke at kunne replikere den observerede rentestruktur særlig godt. Mean-reversion niveauet i den underliggende Vasicek model har også spillet en afgørende rolle, idét det har været medvirkende til, at de stokastiske diskonteringsfaktorer hurtigt får de underliggende obligationer til at gå out-of-money, og dermed undervurderer prisen på den tilhørende option. For LSMC modellen kan dette kalibreres vha. en lower-boundry for payoff'et, hvilket kan gøre modellen mere anvendelig og give en mere korrekt prissætning, holdt op imod observerbare priser⁶⁵.

Flere anerkendte lærebøger foretrækker således stokastiske rentestrukturer til prisfastsættelse af asiatisk lignende optioner og optioner, der afhænger af flere variabler, hvor renteoptioner med

⁶³ Weissensteiner, Alex (2010): "Using the Black-Derman-Toy interest rate model for portfolio optimization", *European Journal of Operational Research*, vol. 202, pp. 175-181

⁶⁴ Simone, Antonio De (2010): "Pricing interest rate derivatives under different interest rate modeling: a critical and empirical comparison", *Journal of Investment Management and Financial Innovations*, vol. 7

⁶⁵ Andersen, Leif (2000): "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multi-Factor Libor Market Model", *Journal of Computational Finance*, vol 3,2, pp. 5-32

førtidig exercise bør prisfastsættes ved hjælp af en eller anden form for rentetræ metode⁶⁶. Flere artikler peger samtidig på modeller, der bedst kan replikere observerede obligationspriser, som det optimale værktøj til underliggende rentestruktur for renteoptions prisfastsættelse⁶⁷. Da BDT modellen er kategoriseret som en no-arbitrage model, samt kan implementeres vha. rentetræer, passer modellen til disse kriterier. BDT modellen har den ulempe, at der ikke findes analytiske løsninger til prisfastsættelse af europæiske optioner, hvilket betyder at beregninger skal foretages via numeriske metoder, hvilket kræver længere beregningstid og mere computerkraft. De optioner, som ønskes prisfastsat i denne opgave, er Bermuda optioner, som der ikke findes nogen analytisk løsning på uagtet modelvalg og kritikpunktet er for så vidt underordnet.

Flere studier påpeger at LSMC modellen har stor parameterfølsomhed overfor valg af basisfunktion, netop som Longstaff & Schwartz selv påpeger. Dette gør modellen kompliceret at arbejde med, da det kræver avancerede basisfunktioner at opnå tilfredsstillende resultater på lange optioner⁶⁸. At der i implementering af modellen er valgt en simpel basisfunktion sammenholdt med den underliggende mean-reversion rentestruktur, gør at modellen undervurderer prisfastsættelsen af renteoptionen. Modellen baseret på Jamshidian forsøger at afhjælpe dette, ved at lade værdien af optionen afhænge af summen af den maksimale værdi af enten det tilbagediskonterede cash flow fra Bermuda optionen, baseret på de stokastiske diskonteringsfaktorer, eller det tilbagediskonterede cashflow fra en serie af europæiske nulkuponobligationer. Da det er vist, at den stokastiske rentestruktur er med til at undervurdere renteoptionens værdi, virker denne metode således mere korrekt end den implementerede LSMC model.

Derudover besidder BDT modellen endnu en egenskab, som de andre renteoptionsmodeller mangler – evnen til at udlede et option adjusted spread (OAS), som kan implementeres på rentestrukturmodellerne for kalibrering til prisfastsættelse af konverterbare obligationer. På baggrund af ovenstående, vurderes BDT modellen at være den mest anvendelige til prisfastsættelse af optionselementet, og der ses nu, hvordan modellen kan bygges sammen med NSS og CIR rentestrukturmodellerne til prisfastsættelse af konverterbare obligationer, da det vurderes fra ovennævnte at disse er de stærkeste rentestrukturmodeller.

6.4. Option Adjusted Spread - OAS

Det blev tidligere vist, hvordan BDT modellens udvidede rentebinomialmodel kunne anvendes til prisfastsættelse af både obligation samt tilhørende option, ud fra den gældende rentekurve for cibor

⁶⁶ Se Wilmott, Paul (2007): Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3-Volume set, 2nd edition, John Wiley & Sons samt Hull, John (2015): Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edition, Pearson

⁶⁷ Bianchetti & Carlicchi (2012): "Interest Rates After The Credit Crunch: Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR", *Intesa Sanpaolo Bank, Italy* samt Henrard, Marc (2014): "Interest Rate Modelling in the Multi-Curve Framework", *Palgrave Macmillan*

⁶⁸ Areal, Rodrigues & Armada (2008): "Improvements to the Least Squares Monte Carlo Option Valuation Method", University of Minho, School of Economics and Management, Portugal

instrumenterne og volatilitetsstrukturen. Dette er yderst anvendeligt, da det sikrer en konsistent prisfastsættelse af begge instrumenter med samme forudsætninger. Modellen er således også i stand til prisfastsættelse af den inkonverterbare obligation under samme forudsætninger, og på den måde udlede en rentekurve der afspejler risikopræmien, investorer er villig til at betale for optionen, kaldet OAS. Denne rentekurve kan implementeres i de tidligere anvendte rentestrukturmodeller, og på den måde justere rentekurverne til prisfastsættelse af konverterbare obligationer.

OAS rentekurven har den ulempe, at der er tale om en parallel forskydning i rentekurven, hvorfor OAS angives som et enkelt spread, der skal tillægges hele rentekurven. Som det ses af figur 8, der forsøger at vise forskellen for ciborrentekurven, der anvendes som base, og realkreditobligationsrentekurven, der varierer spreadet henover løbetiderne. Empiriske artikler har ligeledes haft fokus på dette, se Schwartz & Torus (1992)⁶⁹, Kopprasch (1994)⁷⁰ og Dunn & Spatt (2005)⁷¹, hvilket har resulteret i et dynamisk OAS⁷², der forsøger at udarbejde et flydende OAS, afhængigt af flere faktorer.

For de lange obligationer bliver OAS implementeret via en simpel dynamisk model, baseret på figur 8. OAS angives som én værdi for $t = 0 \rightarrow 10$ og en anden værdi for $t = 11 \rightarrow T$, da rentekurverne i figuren skærer hinanden i cirka $t = 10$. OAS beregnes således som det spread, der tillægges det allerede implementerede BDT rentestrukturtræ, for at modelprisen, på den inkonverterbare obligation minus prisen på call options modelprisen, er identisk med den observerede pris på realkreditobligationen. Dermed konfigureres (139) med tilføjelse af OAS i tilbagediskonteringsrenten, og giver nedenstående:

$$B_{t,j} = \frac{\left(\frac{(2 * A_{t+1} + RG_{t+1} * B_{t+1,j} + RG_{t+1} * B_{t+1,j+1}) * 0,5 + R_{t+1}}{1 + r_{t,j} + OAS} \right)}{RG_t} \quad (160)$$

Af bilag 8 fremgår rentetræet tilføjet OAS. For de korte obligationer, bliver OAS implementeret via den traditionelle metode med komplet parallelforskydning i rentekurven, som følge af at obligationerne har en kortere løbetid. Af bilag 8 fremgår rentetræet inklusiv OAS. Som det fremgår er der et negativt OAS, hvilket logisk set ikke burde kunne lade sig gøre, da optionsværdien minimum er 0. Dette tyder således på, at der kan være forskelle i kredit- og likviditetsrisikoen på de anvendte Cibor renteinstrumenter og realkreditobligationerne, til trods for tidligere argumentation.

⁶⁹ Schwartz & Torus (1992): "Prepayment, Default, and the Valuation of Mortgage Pass-Through Securities", *The Journal of Business*, vol. 65, no. 2, pp. 221-239

⁷⁰ Kopprasch, Robert (1994): "Option-Adjusted Spread Analysis: Going down the Wrong Path?", *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, pp. 42-47

⁷¹ Dunn & Spatt (2005): "The Effect of Refinancing Costs and Market Imperfections on the Optimal Call Strategy and the Pricing of Debt Contracts", *Real Estate Economics*, vol. 33, pp. 595-617

⁷² Cerrato & Djennad (2008): "Dynamic Option Adjusted Spread and the Value of Mortgage Backed Securities", *University of Glasgow, Department of Economics*

En artikel peger på, at hvis man har en forventning om, at fremtidige spot rates stiger mere end de nuværende forward rates tilsiger, kan OAS være negativt for kortere obligationer, da investorer vil søge mod de korte obligationer⁷³. Denne efterspørgsel vil få priserne til at stige på de korte obligationer. Hvis dette betyder, at de observerede priser er højere end modelpriserne for inkonverterbare obligationer, kræves der således et negativt spread på tilbagediskonteringen, for at priserne bliver identiske.

Modelresultater for OAS				
OBL	OAS	Pris ink.	Pris option	Pris konv
2030	-0,50%	99,99	0,47	99,52
2040	0 / 0,80%	102,16	2,39	99,77

Tabel 17; Modelresultater for OAS; Egen tilvirkning

Ovenstående udledte OAS kan således anvendes i samarbejde med de stærkeste rentestrukturmodeller fra tidligere, NSS og CIR, for udledning af en rentestruktur der kan bruges til prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer. For hver model udarbejdes der to nye rentestrukturer, én med tilføjelse af OAS for de korte obligationer, og én med tilføjelse af OAS for de lange obligationer. Herefter prissættes obligationerne på almindelig vis med tilbagediskontering af alle cash flows:

$$\begin{aligned}
 P_B^{2030} &= \sum_{t=0}^N Y * \exp((-y_t + OAS^{2030}) * t) \\
 P_B^{2040} &= \sum_{t=0}^N Y * \exp((-y_t + OAS^{2040}) * t)
 \end{aligned}
 \tag{161}$$

Tilbagediskontering sker med kontinuert rentetilskrivning, da både NSS, CIR og BDT modellen er implementeret med dette. Der opnås nedenstående modelresultater

Modelresultater inklusiv OAS		
Kvadreret residualsum		
	Før OAS	Efter OAS
NSS	91,13	7,18
CIR	160,60	11,80

Tabel 18; Modelresultater inklusiv OAS, Kvadreret residualsum; Egen tilvirkning

Det ses, at den kvadrerede prisfejl på prisfastsættelse af obligationerne falder drastisk efter anvendelse af OAS for begge modeller. Den gennemsnitlige prisfejl på de 6 realkreditobligationer er, 45 bp for NSS modellen og 57 bp for CIR modellen.

⁷³ Asness, Cliff (1993): "OAS Models, Expected Returns, and a Steep Yield Curve", *Journal of Portfolio Management*, vol. 19, no. 4

BDT modellen er således den vigtigste model af de i opgaven gennemgåede modeller til prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer. Modellen er vist, på empirisk studie, at være den bedste til at skabe en rentestruktur, der replikerer Cibor rentestrukturen. Dette medvirker ligeledes til overlegenhed på prisfastsættelse af de tilhørende optioner, da empiriske studier viser vigtigheden af at kunne replikere markedsdata, når renteoptioner skal prisfastsættes. Ønskes der prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer ud fra en rentestruktur teori som NSS eller CIR, kræver det kalibrering af modellerne via et OAS, som ligeledes udledes via BDT modellen, hvorfor modellen ikke kan undværes, uagtet hvilken rentestruktur teori der skal ligge til grund for prisfastsættelsen.

Dette afsnit har set på anvendelsen af de gennemgåede modeller, samt hvilke modelresultater de har produceret, og hvorledes dette har givet anledning til bemærkninger. Herudover er modellernes forudsætninger testet på empirisk data for at se, hvorledes modellerne er anvendelige i et empirisk studie. Herefter er modelresultaterne holdt op imod andre empiriske studier for at underbygge argumenterne om, hvilken model der bør foretrækkes.

7. Konklusion

Der har i opgaven været vist, hvordan udvalgte modeller til prisfastsættelse af obligationer og optioner, gennemgået på HD-F studiet, kan anvendes til prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer. Alle modellerne har været testet på empirisk data og holdt op imod andre empiriske studier, til brug for validering og argumentation. Obligationerne, der er foretaget empirisk studie af, er konverterbare danske realkreditobligationer fra BRFKredit, Nordea Kredit og Realkredit Danmark med udløb i år hhv. 2030 og 2040, hvorfor der i alt er anvendt 6 obligationer.

Rentestrukturmodellerne er blevet vist og udledt, hvorefter de er blevet kalibreret til den gældende Cibor rentestruktur, da det antages at disse renteinstrumenter har samme kredit- og likviditetsrisiko, som realkreditobligationerne der ønskes prisfastsat. Kalibrering er sket ved at minimere den kvadrerede prisfejl på modelpriserne og de observerede priser, hvilket har skabt de bedst tilpassede rentestrukturer for modellerne. Disse rentestrukturer har ageret base for prisfastsættelsen.

Af tabel 6 fremgår det, hvorledes rentestrukturmodellerne har været i stand til at replikere den observerede Cibor rentestruktur. Det ses, at der ingen prisforskel, angivet som residualssum, er ved anvendelse af bootstrapping – hvilket netop er konceptet bag denne metode. Derudover ses det, at Nelson, Siegel & Svenssons rentestruktur har tæt på fuldkommen replikeret rentestrukturen. Dette underbygges af figur 5, der argumenterer for, at modelparametrene er yderst fleksible i deres udtryk. En statistisk funktion udtrykt som et 3. grads polynomium, og de to stokastiske rentestrukturmodeller Vasicek og Cox, Ingersoll & Ross, er de modeller, der er dårligst til at replikere rentestrukturen.

Bootstrapping metoden, der er kategoriseret som en no-arbitrage metode, er således kun en no-arbitrage metode, såfremt der er lige så mange observerede produkter, som der er cash flows, der skal prissættes som følge af, at metoden kun prisfastsætter på netop det tidspunkt, der er observeret. Såfremt der er flere cash flows, der skal prisfastsættes, skal der etableres en sammenhæng imellem punkterne, via interpolation. Af tabel 6 fremgår det, at både ved lineær interpolation og interpolation via en polynomiumsfunction, klarer modellen sig dårligt, når der skal prisfastsættes konverterbare danske realkreditobligationer, der har flere betalingstidspunkter end observerede ciborinstrumenter.

Rentestrukturen udtrykt som en polynomiumsfunction kan sammenlignes med NSS modellen, da begge modeller bygger på en statistisk funktion opbygget omkring 2. 3. og 4. grads led. Som vist i figur 5 kan NSS modellen betegnes som en videreudvikling af en standardiseret polynomiumsfunction, da leddene kan have flere udtryk og dermed gør kurven mere fleksibel. Dette udtrykkes ligeledes ved at NSS modellen kan replikere rentestrukturen bedre, og dermed foretrækkes.

De stokastiske rentestrukturmodeller ved Vasicek og CIR ses at være opbygget på en anderledes måde end de førnævnte modeller. Modellernes styrke ligger i den inkorporerede mean-reversion process, der får modellerne til at konvergere imod en langsigtet rente, og ikke mod ∞ som de andre modeller. Forskellen på de to modeller ligger i volatiliteten, som er statisk i Vasicek modellen, og afhænger af renten i CIR modellen. Dette har ligeledes den betydning at rentefordelingen i Vasicek modellen er normalfordelt og i CIR er gamma-fordelt. Det ses af figur 14, 15 og 16 at den empiriske rentefordeling ligger tættere på en gammafordeling.

Med baggrund i ovenstående, foretrækkes NSS og CIR rentestrukturmodeller. Dette underbygges ligeledes af flere empiriske studier, der foretrækker disse rentestrukturmodeller. Modellerne kan dog ikke stå alene ved prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer, da de ikke kan håndtere prisfastsættelse af renteoptioner med mulighed for førtidig exercise.

Til prisfastsættelse af renteoptionerne er der anvendt to modeller, en simulationsteknik med baggrund i Jamshidians metode og en Least-Squares Monte Carlo metode, begge med Vasiceks stokastiske rentestruktur til brug for den underliggende prisstruktur. Modellerne er implementeret med 30 simulerede rentestier og tilhørende diskonteringsfaktorer, der danner baggrund for prisfastsættelsen af den underliggende obligation tilhørende optionen. Den endelige optionspris er simuleret 1.500 gange for begge modeller, for forbedret konvergering.

Jamshidian beviser, at europæiske optioner på kuponbærende obligationer kan prisfastsættes som en serie af europæiske optioner på tilhørende nulkuponobligationer. John Hull giver inspiration til, hvordan metoden kan udbygges til prisfastsættelse af optioner med førtidig indfrielse, ved at lade payoff afhænge af den højeste værdi af payoff for option tilhørende den europæiske nulkuponobligation, eller en option med førtidig exercise mulighed. Empiriske studier har dog vist,

at simulationsteknik overvurderer værdien af optioner med førtidig exercise mulighed, da det svarer til, at man kender den fremtidige payoff struktur.

Least-Squares Monte Carlo metoden forsøger at afhjælpe denne udfordring, ved at lade en least-squares regressionsanalyse bestemme det forventede fremtidige payoff. Longstaff & Schwartz, der har udviklet modellen, skriver i publikationen, at modellen er parameterfølsom, hvilket især ses i deres eksempel på prisfastsættelse af renteoptioner. Modellen er implementeret med en 3. grads polynomiumfunktion i modsætning til den originale vægtede laguerre polynomiums regression. Da modellen konvergerer imod den sande værdi, når antallet af basisfunktioner øges, er denne implementeringsmetode med til at afholde modellen fra at konvergere imod den sande værdi.

Begge modeller er bygget på Vasiceks stokastiske rentestruktur med indbygget mean-reversion. Dette medvirker til, at den underliggende prisstruktur hurtigt får optionerne til at gå out-of-money, og dermed undervurderer optionsprisen. Flere empiriske studier peger på, at den optimale prisfastsættelsesmetode opnås ved at lade den rentestruktur, der replikere markedet bedst, danne grundlag for den underliggende prisstruktur på den tilhørende obligation.

BDT modellen er den model, udover bootstrapping, der replikere markedet bedst. Modellen kan ligeledes implementeres som et rentetræ, hvilket flere empiriske studier ligeledes peger på, er den mest optimale metode til prisfastsættelse af renteoptioner. Udover at kunne replikere markedet og antage en no-arbitrage form, kan modellen både prisfastsætte obligation og tilhørende option i samme rentetræ og dermed under samme forudsætninger. Empiriske studier foretrækker således denne model, og mine empiriske modelresultater er i overensstemmelse hermed. Derudover har modellen indbygget mean-reversion, hvilket medvirker til at renten ikke konvergerer imod ∞ . Rentefordelingen i modellen er lognormalt, hvilket er tæt på den fordeling de empiriske renter har jf. figur 14, 15 og 16.

Udover ovenstående positive egenskaber, har modellen mulighed for udledning af et option-adjusted-spread (OAS), der kan tilføjes de tidligere udledte rentestrukturer, så de kan anvendes til prisfastsættelse af konverterbare obligationer. OAS udledes som et dynamisk spread afhængig af tiden for de lange obligationer, og et standard parallel forskydende spread for de korte obligationer. Spreadet tilføjes NSS og CIR rentestrukturmodellerne, og det vises at modellerne med dette spread tilføjet, er væsentlig forbedret ift. prisfastsættelse af de konverterbare danske realkreditobligationer.

Af de modeller behandlet i denne opgave, vurderes det at BDT modellen er den foretrukne model til prisfastsættelse af konverterbare danske realkreditobligationer. Dette er baseret på sin no-arbitrage egenskab, lognormal-rentefordeling, mean-reversion proces, mulighed for prisfastsættelse af option og obligation under samme forudsætninger, mulighed for anvendelse i pristræ og mulighed for udledning af OAS. En kombination af BDT modellens udledte OAS tilføjet en NSS eller CIR rentestruktur, vurderes at være det næstbedste alternativ.

8. Litteraturliste

Bøger

- Andresen, Jørgen Just (2016): Finansiell risikostyring, 2. Udgave, Jurist- og Økonomiforbundets forlag
- Bodie, Kane & Marcus (2017): Essentials of investments 10th edition, McGraw-Hill
- Christensen, Michael (2014): Obligationsinvestering, 8. udgave, Jurist- & Økonomiforbundets forlag
- Christensen, Michael (2014): Aktieinvestering, 4. udgave, Jurist- & Økonomiforbundets forlag
- Hull, John (2015): Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edition, Pearson
- Hull, John (2017): Fundamentals of Futures and Options Markets, 8th edition, Pearson
- Jensen, Bjarne Asrup (2013): Rentesregning, 6. udgave, Jurist- og Økonomiforbundets forlag
- Lay, David C. (2003): Linear Algebra and its applications, 3rd edition, Pearson
- Lind, Marchal & Wathen (2015): Statistical Techniques in Business & Economics, 16th edition, McGraw-Hill
- Wilmott, Paul (2007): Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3-Volume set, 2nd edition, John Wiley & Sons

Artikler:

- Andersen, Leif (2000): "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multi-Factor Libor Market Model", *Journal of Computational Finance*, vol 3,2, pp. 5-32
- Areal, Rodrigues & Armada (2008): "Improvements to the Least Squares Monte Carlo Option Valuation Method", University of Minho, School of Economics and Management, Portugal
- Asness, Cliff (1993): "OAS Models, Expected Returns, and a Steep Yield Curve", *Journal of Portfolio Management*, vol. 19, no. 4
- Barret, Gosnell & Heuson (1995): "Yield Curve Shifts and the Selection of Immunization Strategies", *The Journal of Fixed Income*, Vol. 5, pp. 53-64
- Bianchetti & Carlicchi (2012): "Interest Rates After The Credit Crunch: Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR", *Intesa Sanpaolo Bank, Italy*
- Black, Fischer (1976): "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 167-179

- Black, Derman, Toy (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analyst Journal*, 24-32
- Boyle, Tan & Tian (2001): "Calibrating the Black-Derman-Toy model: some theoretical results", *Applied Mathematical Finance*, 8, 27-48
- Cairns & Pritchard (2001): "Stability of Models for the Term Structure of Interest Rates with Application to German Market Data", *British Actuarial Journal*, Vol. 7, pp. 467-507
- Cerrato & Djennad (2008): "Dynamic Option Adjusted Spread and the Value of Mortgage Backed Securities", *University of Glasgow, Department of Economics*
- Coroneom, Nyholm & Vidova-Koleva (2011): "How arbitrage-free is the Nelson-Siegel model?", *Journal of Empirical Finance*, vol. 18, pp. 393-407
- Cox, Ingersoll & Ross (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, 385-407
- Cox, Ross, Rubenstein (1979): "Option Pricing: A simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263
- Dunn & Spatt (2005): "The Effect of Refinancing Costs and Market Imperfections on the Optimal Call Strategy and the Pricing of Debt Contracts", *Real Estate Economics*, vol. 33, pp. 595-617
- Gilli, Grosse & Schumann (2010): "Calibrating the Nelson-Siegel-Svensson Model", *Computational Optimization Methods in Statistics, Econometrics and Finance*, EU Commission
- Henrard, Marc (2014): "Interest Rate Modelling in the Multi-Curve Framework", *Palgrave Macmillan*
- Jamshidian, Farshid. (1989): "An exact bond option pricing formula", *Journal of Finance*, Vol. 44, pp. 205-209
- Hansen, Stine Luise (2017): "Mere realkredit på obligationsmarkedet i Danmark end i Sverige", *Finansdanmark*
- Hörig, Murray, Phelan & Leitschkis (2013): "An application of Monte Carlo proxy techniques to variable annuity business: A case study", *Milliam Research Report*
- Hull & White (1988): "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 237-51
- Kopprasch, Robert (1994): "Option-Adjusted Spread Analysis: Going down the Wrong Path?", *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, pp. 42-47

- Lacroix, Renaud (2007): "Assessing the shape of the distribution of interest rates : lessons from French individual data", ECB
- Lahiri, Teigland & Zaporowski (1988): "Interest Rates and the Subjective Probability Distribution of Inflation Forecasts", *Journal of Money, Credit & Banking* vol. 20, no 2, pp. 233-248
- Lamoureux & Witte (2002): "Empirical Analysis of the Yield Curve: The Information in the Data Viewed through the Window of Cox, Ingersoll and Ross", *The Journal of Finance*, Vol. 57, no. 3, pp. 1479-1520
- Levant & Ma (2013): "A Dynmaic Nelson-Siegel Yield Curve Model with Markov Switching", *University of Alabama*
- Li, Yue & Diebold (2007): "Global Yield Curve Dynamics and Interactions: A Dynamic Nelson-Siegel Approach", *National Bureau of Economic Research*
- Li & Diebold (2006): "Forecasting the term structure of government bond yields", *Journal of Econometrics*, 130, pp. 337-364
- Litterman & Scheinkman (1991): "Common Factors Affecting Bond Returns", *Journal of Fixed Income*, vol. 1, pp. 54-61
- Longstaff & Schwartz (2001): "Valuing American Options by Simulation: A simple Least-Squares Approach", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147
- Morrison & Tadrowski (2015): "Proxy Model Validation", *Moody's Analytics Research Insurancers*
- Navas, Javier (2005): "Yield Curve Fitting With Term Structure Models: Empirical Evidence From the Euro Market", *University Pablo De Olavide, Seville Spain*
- Nelson & Siegel (1987): "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *The Journal of Business*, Volume 60, Issue 4, 473-489
- Nielsen, Gyntelberg, Sangrill (2012): "Liquidity in Government Versus Covered Bond Markets", *BIS*, no. 392
- Rogers (1995): "Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use?", *Mathematical Finance*, IMA Volume 65, 93-116
- Schwartz & Torus (1992): "Prepayment, Default, and the Valuation of Mortgage Pass-Through Securities", *The Journal of Business*, vol. 65, no. 2, pp. 221-239
- Sigman, Karl (2007): "Introduction to reducing variance in Monte Carlo Simulations", *Columbia University, Department of Industrial Engineering and Operations Research*

Simone, Antonio De (2010): "Pricing interest rate derivatives under different interest rate modeling: a critical and empirical comparison", *Journal of Investment Management and Financial Innovations*, vol. 7

Vasicek, Oldrich (1977): "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188

Weissensteiner, Alex (2010): "Using the Black-Derman-Toy interest rate model for portfolio optimization", *European Journal of Operational Research*, vol. 202, pp. 175-181

Undervisningsmateriale:

Bechmann, Ken & Plesner, Søren (2015): Forelæsningsnoter til Advanced Fixed Income and Derivatives

Plesner, Søren (2013): Forelæsningsnotat, Varighed og Konveksitet

Flor, Larsen & Munk (2012): Indledende obligations- og rentestrukturanalyse

9. Appendiks

Bemærk at alle beregninger fremgår af vedlagte excelark. Nedenstående er således ikke udfyldt med alle decimaler, hvorfor afrunding kan forekomme nogen steder.

1. Beregning af annuitetsydelse justeret for løbetid, se excel ark for yderligere beregning

Obligationer med udløb i 2040:

$$Y = RG_0 * \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} \rightarrow Y = 100 * \frac{0,00375}{1 - (1 + 0,00375)^{-92}} * \frac{t_1 - t_0}{90} = 0,1859$$

Obligationer med udløb i 2030:

$$Y = RG_0 * \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} \rightarrow Y = 100 * \frac{0,00125}{1 - (1 + 0,00125)^{-53}} * \frac{t_1 - t_0}{90} = 0,2818$$

2. Beregning af vedhængende rente

Obligationer med udløb i 2040:

$$v = \frac{R * D}{D' * N} \rightarrow v = \frac{0,015 * (t_1 - t_0)}{360} = 0,0033$$

Obligationer med udløb i 2030:

$$v = \frac{R * D}{D' * N} \rightarrow v = \frac{0,005 * (t_1 - t_0)}{360} = 0,0011$$

3. Eksempel på bootstrap beregning

Beregning af løbetid: $T = \frac{Udløbsdato - Startdato}{360}$

Nordea DKK Depo 1W løbetid: $T = \frac{27.12.2017 - 18.12.2017}{360} = 0,03$

Nordea DKK Depo 6M løbetid: $T = \frac{18.06.2018 - 18.12.2017}{360} = 0,51$

Diskonteringsfaktor: $DF_t = 1/(1 + R)^T$

Diskonteringsfaktor: $DF_{0,03} = \frac{1}{(1 - 0,004)^{0,03}} = 1,0001$

$$\text{Diskonteringsfaktor: } DF_{0,51} = \frac{(1-R*DF_{0,03})}{1+R} \rightarrow \frac{(1-(-0,0016)*1,0001)}{1-0,0016} = 1,0032$$

$$\text{Nulkuponrente: } y_t = \left(\frac{1}{DF}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

$$\text{Nulkuponrente: } y_{0,03} = \left(\frac{1}{1,0001}\right)^{\frac{1}{0,03}} - 1 = -0,40\%$$

$$\text{Nulkuponrente: } y_{0,51} = \left(\frac{1}{1,0032}\right)^{\frac{1}{0,51}} - 1 = -0,63\%$$

Med lineær interpolation:

$$\begin{aligned} \text{Diskonteringsfaktor: } DF_{0,29} &= DF_{0,03} + \frac{DF_{0,51}-DF_{0,03}}{t_{0,51}-t_{0,03}} * (t_{0,29} - t_{0,03}) \\ &= 1,0001 + \frac{1,0032 - 1,0001}{0,51 - 0,03} * (0,29 - 0,03) = 1,0018 \end{aligned}$$

$$\text{Nulkuponrente: } y_{0,29} = \left(\frac{1}{1,0018}\right)^{\frac{1}{0,29}} - 1 = -0,62\%$$

4. Eksempel på beregning af polynomium nulkuponrente

Ved anvendelse af minimeringsfunktion i (26), giver følgende udtryk least-squares 3. grads polynomium funktion overfor cibor instrumenterne:

$$y_t = -0,0038 + 0,0019 * t - 0,00005 * t^2$$

$$y_{0,03} = -0,0038 + 0,0019 * 0,03 - 0,00005 * 0,03^2 = -0,38\%$$

$$y_{0,51} = -0,0038 + 0,0019 * 0,51 - 0,00005 * 0,51^2 = -0,28\%$$

$$y_{1,01} = -0,0038 + 0,0019 * 1,01 - 0,00005 * 1,01^2 = -0,19\%$$

5. Eksempel på beregning af Nelson, Siegel & Svensson nulkuponrente

Modellen:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 * e^{-T} + \phi_2 * T * e^{-T} + \phi_3 \left(\frac{1 - e^{-T}}{T} - e^{-T} - \frac{T}{2} * e^{-T} \right) \text{ hvor } T = \frac{t}{\phi_4}$$

Ved anvendelse af minimeringsfunktion i (35), giver følgende udtryk least-squares Nelson, Siegel & Svensson funktion overfor cibor instrumenterne:

$$y_t = -0,0023 - 0,0076 * e^{-T} + 0,0151 * T * e^{-T} + 0,0676 \left(\frac{1 - e^{-T}}{T} - e^{-T} - \frac{T}{2} * e^{-T} \right)$$

$$\text{hvor } T = \frac{t}{5,448}$$

$$y_{0,03} = -0,0023 - 0,0076 * e^{-0,0046} + 0,0151 * 0,0046 * e^{-0,0046} + 0,0676 \left(\frac{1 - e^{-0,0046}}{0,0046} - e^{-0,0046} - \frac{0,0046}{2} * e^{-0,0046} \right) = -0,97\%$$

$$\text{hvor } T = \frac{0,03}{5,448} = 0,0046$$

$$y_{0,51} = -0,0023 - 0,0076 * e^{-0,0928} + 0,0151 * 0,0928 * e^{-0,0928} + 0,0676 \left(\frac{1 - e^{-0,0928}}{0,0928} - e^{-0,0928} - \frac{0,0928}{2} * e^{-0,0928} \right) = -0,78\%$$

$$\text{hvor } T = \frac{0,51}{5,448} = 0,0928$$

$$y_{1,01} = -0,0023 - 0,0076 * e^{-0,1861} + 0,0151 * 0,1861 * e^{-0,1861} + 0,0676 \left(\frac{1 - e^{-0,1861}}{0,29 + 2} - e^{-0,1861} - \frac{0,1861}{2} * e^{-0,1861} \right) = -0,59\%$$

$$\text{hvor } T = \frac{1,01}{5,448} = 0,1861$$

6. Eksempel på beregning af nulkuponrente i Vasicek modellen

Nulkuponrenten i Vasiceks closed-form solution er givet som:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln P(t, T)$$

Hvilket også kan skrives som:

$$R(t, T) = \frac{-\ln P(t, T) * 1}{T - t}$$

Hvor:

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T) * r(t)}$$

Hvor $B(t, T)$ er givet ved:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

Hvor $A(t, T)$ er givet ved:

$$A(t, T) = e * \frac{(B(t, T) - T + t) * \left(a^2 * b - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 * B(t, T)^2}{4 * a}$$

Volatiliteten er estimeret, og vist i opgaveteksten, til 0,14%. Efter anvendelse af minimeringsfunktionen i (55), angives $a = 0,92$ og $b = 0,0115$. $r(t) = -0,55\%$ og er senest observerede Cibur3 rente. Nulkuponrenten udledes ud fra idag, hvorfor $t = 0$.

Nulkuponrente for $t=0,03$

$$B(0; 0,03) = \frac{1 - e^{-0,92(0,03-0)}}{0,92} = 0,0247$$

$$A(0; 0,03) = e * \frac{(0,0247 - 0,03 + 0) * \left(0,92^2 * 0,0115 - \frac{0,0014^2}{2}\right)}{0,92^2} - \frac{0,0014^2 * 0,0247^2}{4 * 0,92} = 0,9999$$

$$P(0; 0,03) = 0,9999 * e^{-0,0247 * (-0,0055)} = 1,00013$$

$$R(0; 0,03) = \frac{-\ln(1,00013) * 1}{0,03 - 0} = -0,53\%$$

Nulkuponrente for $t=0,51$

$$B(0; 0,51) = \frac{1 - e^{-0,92(0,51-0)}}{0,92} = 0,4043$$

$$A(0; 0,51) = e * \frac{(0,4043 - 0,51 + 0) * \left(0,92^2 * 0,0115 - \frac{0,0014^2}{2}\right)}{0,92^2} - \frac{0,0014^2 * 0,4043^2}{4 * 0,92} = 0,9988$$

$$P(0; 0,51) = 0,9988 * e^{-0,4043 * (-0,0055)} = 1,0010$$

$$R(0; 0,51) = \frac{-\ln(1,0010) * 1}{0,51 - 0} = -0,21\%$$

Nulkuponrente for $t=1,01$

$$B(0; 1,01) = \frac{1 - e^{-0,92(1,01-0)}}{0,92} = 0,6594$$

$$A(0; 1,01) = e * \frac{(0,6594 - 1,01 + 0) * \left(0,92^2 * 0,0115 - \frac{0,0014^2}{2}\right)}{0,92^2} - \frac{0,0014^2 * 0,6594^2}{4 * 0,92} = 0,9959$$

$$P(0; 1,01) = 0,9959 * e^{-0,6594 * (-0,0055)} = 0,9996$$

$$R(0; 1,01) = \frac{-\ln(0,9996) * 1}{1,01 - 0} = 0,04\%$$

7. Eksempel på beregning af nulkuponrente i CIR modellen

Nulkuponrenten i CIR closed-form solution er som i Vasicek givet som:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$$

Hvilket også kan skrives som:

$$R(t, T) = \frac{-\ln P(t, T) * 1}{T-t}$$

Hvor:

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T) * r(t)}$$

Hvor $B(t, T)$ er givet som:

$$B(t, T) = \frac{2 * (e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a) * (e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2 * \gamma}$$

Hvor $A(t, T)$ er givet som:

$$A(t, T) = \left[\frac{2 * \gamma * e^{(a+\gamma)*(T-t)/2}}{(\gamma + a) * (e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2 * \gamma} \right]^{2*a*b/\sigma^2}$$

Hvor:

$$\gamma = (a^2 + 2 * \sigma^2)^{1/2}$$

Volatiliteten er estimeret, og vist i opgaveteksten, til 0,14%. Efter anvendelse af minimeringsfunktionen i (55), angives $a = 0,68$ og $b = 0,0113$. $r(t) = -0,55\%$ og er senest observerede Cibur3 rente. Nulkuponrenten udledes ud fra idag, hvorfor $t = 0$.

$$\gamma = (a^2 + 2 * \sigma^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = (0,68^2 + 2 * 0,0014^2)^{1/2} = 068$$

Nulkuponrente for $t=0,03$

$$B(0; 0,03) = \frac{2 * (e^{0,68*(0,03-0)} - 1)}{(0,68 + 0,68) * (e^{0,68*(0,03-0)} - 1) + 2 * 0,68} = 0,0248$$

$$A(0; 0,03) = \left[\frac{2 * 0,68 * e^{(0,68+0,68)*(0,03-0)/2}}{(0,68 + 0,68) * (e^{0,68*(0,03-0)} - 1) + 2 * 0,68} \right]^{2*0,68*0,0113/0,0014^2} = 1,0000$$

$$P(0; 0,03) = 1,0000 * e^{-0,0248*(-0,0055)} = 1,0001$$

$$R(0; 0,03) = \frac{-\ln(1,0001) * 1}{0,03 - 0} = -0,54\%$$

Nulkuponrente for $t=0,51$

$$B(0; 0,51) = \frac{2 * (e^{0,68*(0,51-0)} - 1)}{(0,68 + 0,68) * (e^{0,68*(0,51-0)} - 1) + 2 * 0,68} = 0,4279$$

$$A(0; 0,51) = \left[\frac{2 * 0,68 * e^{(0,68+0,68)*(0,51-0)/2}}{(0,68 + 0,68) * (e^{0,68*(0,51-0)} - 1) + 2 * 0,68} \right]^{2*0,68*0,0113/0,0014^2} = 0,9991$$

$$P(0; 0,51) = 0,9991 * e^{-0,4279*(-0,0055)} = 1,0015$$

$$R(0; 0,51) = \frac{-\ln(1,0015) * 1}{0,51 - 0} = -0,29\%$$

Nulkuponrente for t=1,01

$$B(0; 1,01) = \frac{2 * (e^{0,68*(1,01-0)} - 1)}{(0,68 + 0,68) * (e^{0,68*(1,01-0)} - 1) + 2 * 0,68} = 0,7329$$

$$A(0; 1,01) = \left[\frac{2 * 0,68 * e^{(0,68+0,68)*(1,01-0)/2}}{(0,68 + 0,68) * (e^{0,68*(1,01-0)} - 1) + 2 * 0,68} \right]^{2*0,68*0,0113/0,0014^2} = 0,9968$$

$$P(0; 1,01) = 0,9968 * e^{-0,7329*(-0,0055)} = 1,0008$$

$$R(0; 1,01) = \frac{-\ln(1,0008) * 1}{1,01 - 0} = -0,08\%$$

8. Beregning af optionspris jf. Blacks model

Blacks formel:

$$c = \exp(-r * T) * F * N(d_1) - \exp(-r * T) * K * N(d_2)$$

Hvor:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2} * \sigma^2 * T}{\sigma * \sqrt{T}} \text{ og } d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T}$$

Hvor:

$$F = S * \exp((q - r) * T) \text{ hvor } q = \text{coupon} * (100/S)$$

BRFkredit obligation udløb 2030:

$$F = 99,10 * \exp\left(0,005 * \left(\frac{100}{99,10}\right) - 0,0159\right) * 13,23 = 85,84$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{85,84}{100}\right) + \frac{1}{2} * 0,0069^2 * 13,23}{0,0069 * \sqrt{13,23}} = -6,08$$

$$d_2 = -6,08 - 0,0069 * \sqrt{13,23} = -6,11$$

$$c = \exp(-0,0159 * 13,23) * 85,84 * N(-6,08) - \exp(-0,00159 * 13,23) * 100 * N(-6,11) = 0$$

Nordea obligation udløb 2030:

$$F = 99,38 * \exp\left(0,005 * \left(\frac{100}{99,38}\right) - 0,0159\right) * 13,23 = 86,07$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{86,07}{100}\right) + \frac{1}{2} * 0,0069^2 * 13,23}{0,0069 * \sqrt{13,23}} = -5,98$$

$$d_2 = -5,98 - 0,0069 * \sqrt{13,23} = -6,00$$

$$c = \exp(-0,0159 * 13,23) * 86,07 * N(-5,98) - \exp(-0,00159 * 13,23) * 100 * N(-6,00) = 0$$

RD obligation udløb 2030:

$$F = 99,47 * \exp\left(0,005 * \left(\frac{100}{99,47}\right) - 0,0159\right) * 13,23 = 86,14$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{86,14}{100}\right) + \frac{1}{2} * 0,0069^2 * 13,23}{0,0069 * \sqrt{13,23}} = -5,94$$

$$d_2 = -5,94 - 0,0069 * \sqrt{13,23} = -5,97$$

$$c = \exp(-0,0159 * 13,23) * 86,14 * N(-5,94) - \exp(-0,00159 * 13,23) * 100 * N(-5,97) = 0$$

BRFkredit obligation udløb 2040:

$$F = 99,85 * \exp\left(0,02 * \left(\frac{100}{99,85}\right) - 0,0135\right) * 23,12 = 116,12$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{116,12}{100}\right) + \frac{1}{2} * 0,0069^2 * 23,12}{0,0069 * \sqrt{23,12}} = 4,51$$

$$d_2 = 4,51 - 0,0069 * \sqrt{23,12} = 4,47$$

$$c = \exp(-0,0135 * 23,12) * 116,12 * N(4,51) - \exp(-0,00135 * 23,12) * 100 * N(4,47) = 11,80$$

Nordea obligation udløb 2040:

$$F = 99,78 * \exp\left(0,02 * \left(\frac{100}{99,78}\right) - 0,0135\right) * 23,12 = 116,08$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{116,08}{100}\right) + \frac{1}{2} * 0,0069^2 * 23,12}{0,0069 * \sqrt{23,12}} = 4,49$$

$$d_2 = 4,49 - 0,0069 * \sqrt{23,12} = 4,46$$

$$c = \exp(-0,0135 * 23,12) * 116,08 * N(4,49) - \exp(-0,0135 * 23,12) * 100 * N(4,46) = 11,77$$

RD obligation udløb 2040:

$$F = 99,87 * \exp\left(0,02 * \left(\frac{100}{99,87}\right) - 0,0135\right) * 23,12 = 116,14$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{116,14}{100}\right) + \frac{1}{2} * 0,0069^2 * 23,12}{0,0069 * \sqrt{23,12}} = 4,51$$

$$d_2 = 4,51 - 0,0069 * \sqrt{23,12} = 4,48$$

$$c = \exp(-0,0135 * 23,12) * 116,14 * N(4,51) - \exp(-0,0135 * 23,12) * 100 * N(4,48) = 11,81$$

9. BDT - Nulkuponrente

Eksempel på beregning af nulkuponrente til rentestrukturen, her 3-årig nulkuponobligationspris:

$$B_{t+3} = 100$$

$$B_{t+2,j} = \frac{(100 + 100) * 0,5}{1 + 0,0018} = 99,83$$

$$B_{t+2,j+1} = \frac{(100 + 100) * 0,5}{1 + 0,0028} = 99,72$$

$$B_{t+2,j+2} = \frac{(100 + 100) * 0,5}{1 + 0,0045} = 99,55$$

$$B_{t+1,j} = \frac{(99,83 + 99,72) * 0,5}{1 + 0,0000} = 99,77$$

$$B_{t+1,j+1} = \frac{(99,55 + 99,72) * 0,5}{1 + 0,0000} = 99,64$$

$$B_t = \frac{(99,64 + 99,77) * 0,5}{1 + 0,0000} = 99,71$$

Nulkuponrenterne fremgår af bilag 4, og indsættes i "Model Price" i bilag 3

10. BDT – Prissætning af obligation og option

Eksempel på beregning af obligationskurs via BDT modellen, via nedenstående formel.

$$\frac{\left(\frac{((A_{t+1} + RG_{t+1} * B_{t+1,j}) * 0,5) + ((A_{t+1} + RG_{t+1} * B_{t+1,j+1}) * +0,5)) + R_{t+1}}{1 + r_{t,j}} \right)}{RG_t}$$

Der foretages ikke beregning af hele rentetræet, se excel ark herfor.

$$B_{t+1,j} = \frac{\left(\frac{((7,045 * 100 + 85,95 * 98,01) * 0,5) + ((7,045 * 100 + 85,95 * 95,11) * +0,5)) + 0,437 * 100}{1 + 0,00} \right)}{92,99}$$

$$= 97,328$$

$$B_{t+1,j+1} = \frac{\left(\frac{((7,045 * 100 + 85,95 * 95,11) * 0,5) + ((7,045 * 100 + 85,95 * 90,83) * +0,5)) + 0,437 * 100}{1 + 0,00} \right)}{92,99}$$

$$= 94,009$$

$$B_t = \frac{\left(\frac{((7,010 * 100 + 92,99 * 97,328) * 0,5) + ((7,010 * 100 + 92,99 * 94,009) * +0,5)) + 0,507 * 100}{1 + 0,00} \right)}{100}$$

$$= 96,480$$

Eksempel på beregning af optionspris via (142):

$$C_{t,j} = \text{Max}[(C_{t+1,j} + C_{t+1,j+1}) * 0,5; B_{t,j} - 100; 0]$$

$$C_{t+1,j} = \text{Max}[(0,093 + 0,025) * 0,5; 97,328 - 100; 0] = 0,059$$

$$C_{t+1,j+1} = \text{Max}[(0,025 + 0,005) * 0,5; 94,009 - 100; 0] = 0,0151$$

$$C_t = \text{Max}[(0,059 + 0,0151) * 0,5; 96,480 - 100; 0] = 0,037$$

11. Sandsynlighedsfordeling for Vasicek & CIR modellerne

Modelforudsætninger: $\sigma = 5\%$ $a = 0,15$ $b = 5\%$

Vasicek modellen middelværdi og standardafvigelse, jf. (148) og (151):

$$N(\mu) = b$$

$$N(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2 * a}}$$

$$N(\mu) = 5\%$$

$$N(\sigma) = \frac{0,05}{\sqrt{2 * 0,15}} = 0,0913$$

Tæthedsfunktionen jf. (155):

$$P_{\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{1}{\sigma^2} * e^{-\frac{a*(r-b)^2}{\sigma^2}}$$

Kan ligeledes skrives som:

$$P_{\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} * e^{-\frac{a}{\sigma^2}*(r-b)^2}$$

Antal standardafvigelser fra middelværdien: -1

$$r = N(\mu) + N(\sigma) * -1$$

$$r = 0,05 + 0,0913 * -1 = -4,13\%$$

$$P_{-1} = \sqrt{\frac{0,15}{\pi}} * e^{-\frac{0,15}{0,05^2}*(-0,0413-0,05)^2} = 2,6507$$

Antal standardafvigelser fra middelværdien: +1

$$r = N(\mu) + N(\sigma) * 1$$

$$r = 0,05 + 0,0913 * 1 = 14,13\%$$

$$P_{+1} = \sqrt{\frac{0,15}{\pi}} * e^{-\frac{0,15}{0,05^2}*(14,13-0,05)^2} = 2,6507$$

Viser ligeledes at værdierne er symetrisk omkring middelværdien.

Modelforudsætninger: $\sigma = 5\%$ $a = 0,15$ $b = 5\%$

CIR modellen middelværdi og standardafvigelse, jf. (157) og (158):

$$\Gamma(M) = b$$

$$\Gamma(M) = 5\%$$

$$\Gamma(S) = \sqrt{\frac{b}{2 * a}} * \sigma$$

$$\Gamma(S) = \sqrt{\frac{0,05}{2 * 0,15}} * 0,05 = 0,0204$$

Tæthedsfunktion jf. (156) og (159):

$$P_{\infty} = \frac{\left(\frac{2 * a}{\sigma^2}\right)^k}{\Gamma(k)} * r^{k-1} * e^{-2*a*r/\sigma^2}$$

$$= \left(\frac{2 * a}{\sigma^2}\right)^k * r^{k-1} * e^{-2*a*r/\sigma^2 - \ln(\Gamma(k))}$$

Hvor:

$$k = \frac{2 * a * b}{\sigma^2}$$

$$k = \frac{2 * 0,15 * 0,05}{0,05^2} = 6,00$$

Antal standardafvigelser fra middelværdien: -1

$$r = N(\mu) + N(\sigma) * -1$$

$$r = 0,05 + 0,0204 * -1 = 2,96\%$$

$$P_{-1} = \left(\frac{2 * 0,15}{0,05^2}\right)^6 * 0,0296^{6-1} * e^{-2*0,15*\frac{0,0296}{0,05^2} - \ln(\Gamma(6))} = 16,20$$

Antal standardafvigelser fra middelværdien: +1

$$r = N(\mu) + N(\sigma) * 1$$

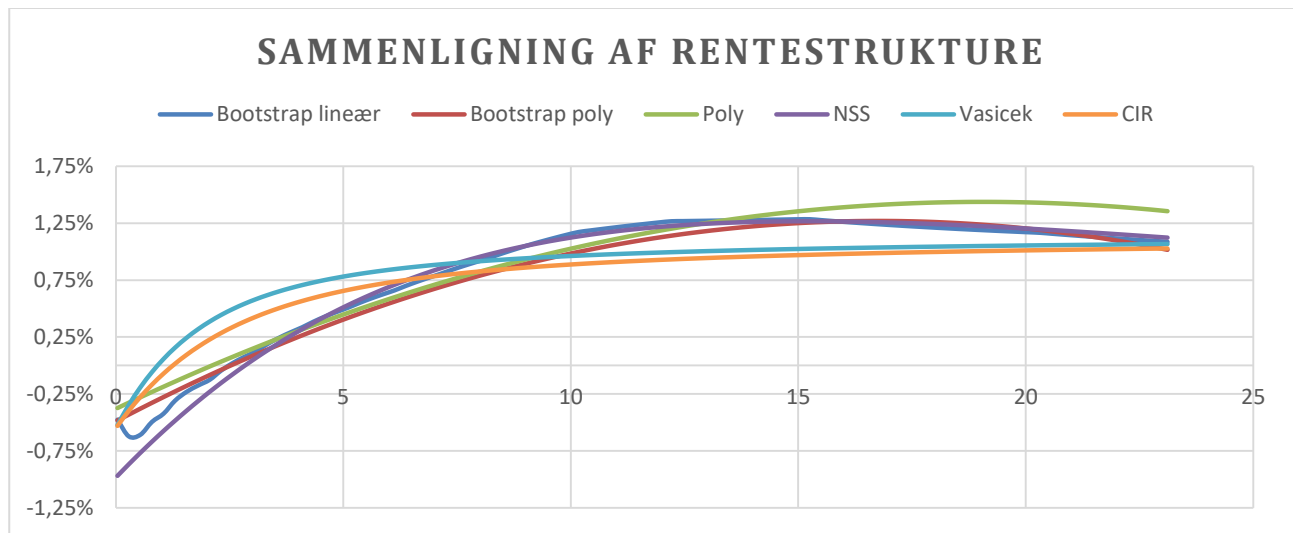
$$r = 0,05 + 0,0204 * 1 = 7,04\%$$

$$P_1 = \left(\frac{2 * 0,15}{0,05^2}\right)^6 * 0,0704^{6-1} * e^{-2*0,15*\frac{0,0804}{0,05^2} - \ln(\Gamma(6))} = 9,22$$

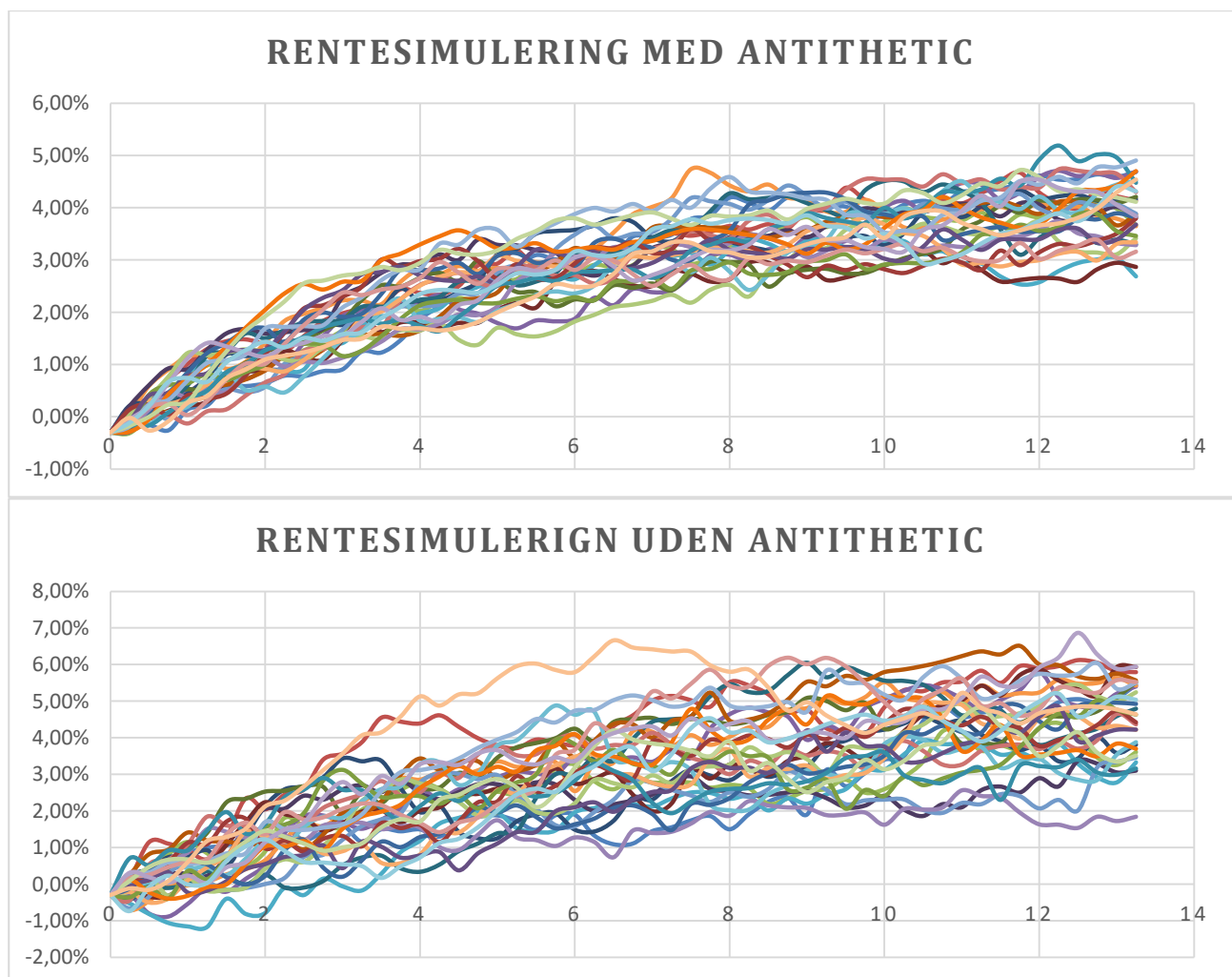
Viser ligeledes at værdierne ikke er symetriske omkring middelværdien.

10. Bilag

Bilag 1 – sammenligning af rentekurverne



Bilag 2 – Rentesimulering med og uden anvendelse af antithetic



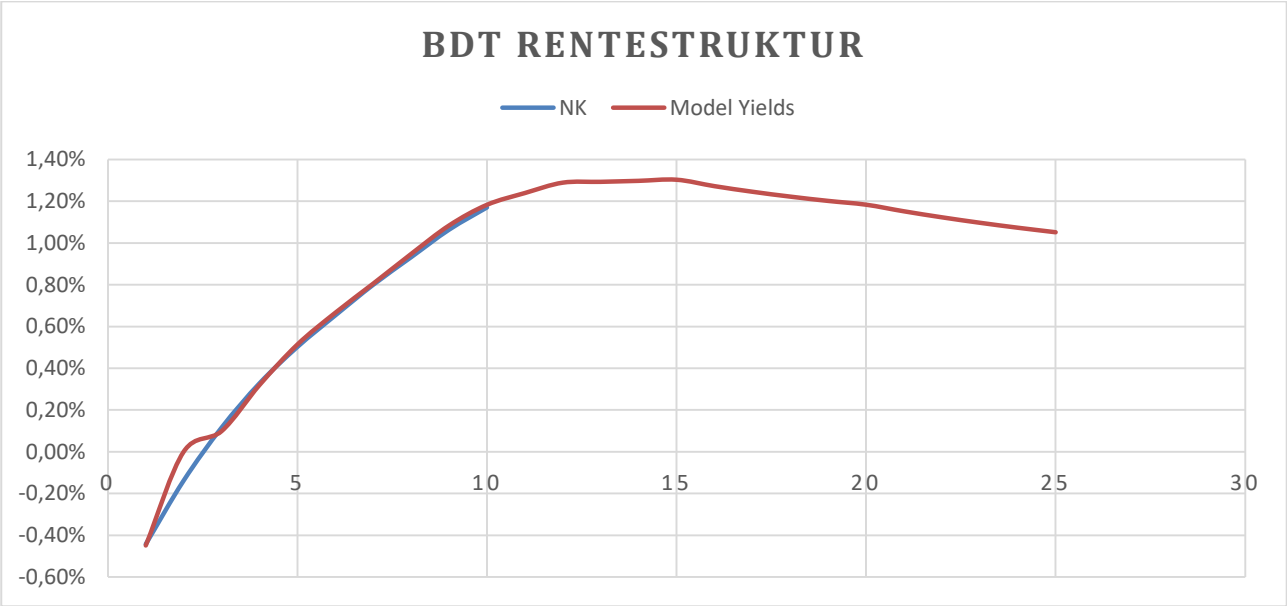
Bilag 3 – Oversigt over BDT modellerne

Instrument	Rate	T	DF	NK	Market Price	Model Price	Model Yields	Lower rate	Squared diff
Nordea DKK SWAP 1Y	-0,15%	1	1,0045	-0,44%	100,45	100,45	-0,45%	0,00%	0,00000
Nordea DKK SWAP 2Y	-0,07%	2	1,0028	-0,14%	100,28	100,00	0,00%	0,00%	0,07882
Nordea DKK SWAP 3Y	0,07%	3	0,9965	0,12%	99,65	99,71	0,10%	0,18%	0,00308
Nordea DKK SWAP 4Y	0,22%	4	0,9868	0,33%	98,68	98,73	0,32%	0,45%	0,00256
Nordea DKK SWAP 5Y	0,36%	5	0,9749	0,50%	97,49	97,47	0,51%	0,46%	0,00043
Nordea DKK SWAP 6Y	0,49%	6	0,9611	0,65%	96,11	96,10	0,67%	0,39%	0,00033
Nordea DKK SWAP 7Y	0,62%	7	0,9450	0,80%	94,50	94,54	0,81%	0,35%	0,00176
Nordea DKK SWAP 8Y	0,74%	8	0,9275	0,93%	92,75	92,73	0,95%	0,32%	0,00017
Nordea DKK SWAP 9Y	0,86%	9	0,9079	1,06%	90,79	90,75	1,08%	0,28%	0,00136
Nordea DKK SWAP 10Y	0,96%	10	0,8886	1,17%	88,86	88,90	1,18%	0,21%	0,00146
Lineær interpolation		11	0,8733		87,33	87,33	1,24%	0,15%	0,00003
Nordea DKK SWAP 12Y	1,14%	12	0,8580	1,27%	85,80	85,75	1,29%	0,10%	0,00237
Lineær interpolation		13	0,8465		84,65	84,62	1,29%	0,08%	0,00086
Lineær interpolation		14	0,8349		83,49	83,48	1,30%	0,05%	0,00010
Nordea DKK SWAP 15Y	1,33%	15	0,8234	1,29%	82,34	82,35	1,30%	0,03%	0,00009
Lineær interpolation		16	0,8168		81,68	81,68	1,27%	0,02%	0,00004
Lineær interpolation		17	0,8102		81,02	81,02	1,25%	0,02%	0,00002
Lineær interpolation		18	0,8036		80,36	80,36	1,22%	0,01%	0,00000
Lineær interpolation		19	0,7970		79,70	79,69	1,20%	0,01%	0,00000
Nordea DKK SWAP 20Y	1,49%	20	0,7903	1,17%	79,03	79,03	1,18%	0,00%	0,00002
Lineær interpolation		21	0,7863		78,63	78,62	1,15%	0,00%	0,00003
Lineær interpolation		22	0,7822		78,22	78,21	1,12%	0,00%	0,00005
Lineær interpolation		23	0,7781		77,81	77,80	1,10%	0,00%	0,00007
Lineær interpolation		24	0,7740		77,40	77,39	1,07%	0,00%	0,00009
Nordea DKK SWAP 25Y	1,55%	25	0,7700	1,04%	77,00	76,99	1,05%	0,00%	0,00012
									0,093865882

Bilag 4 – Iterativ beregning af nul kuponrenterne i BDT modellen

2-Årig NK		100				
	100					
		100				
			100			
				100		
3-Årig NK		99,55				
	99,637		100			
	99,70502498	99,72				
	99,773		100			
		99,83				
			100			
				100		
4-Årig NK		98,09				
	98,443		98,19392			
	98,73196462	98,8		100		
	99,021		99,28549			
		99,24		100		
			99,55187			
				100		
					100	
				97,106		
			95,87439		100	
5-Årig NK		96,2		98,17		
	96,899		97,3881		100	
	97,47050858	97,6		98,847		
	98,042		98,35377		100	
		98,49		99,276		
			98,96533		100	
				99,546		
					100	
						100
				94,002	96,08957089	
			93,37453			100
6-Årig NK		94,16		96,182	97,51763197	
	95,222		95,78168		98,43268172	
	96,09605534	96,29		97,585		100
	96,971		97,33169		99,01383716	
		97,65		98,479		100
			98,31913		99,38085789	
				99,044		100
					99,61181984	
						100

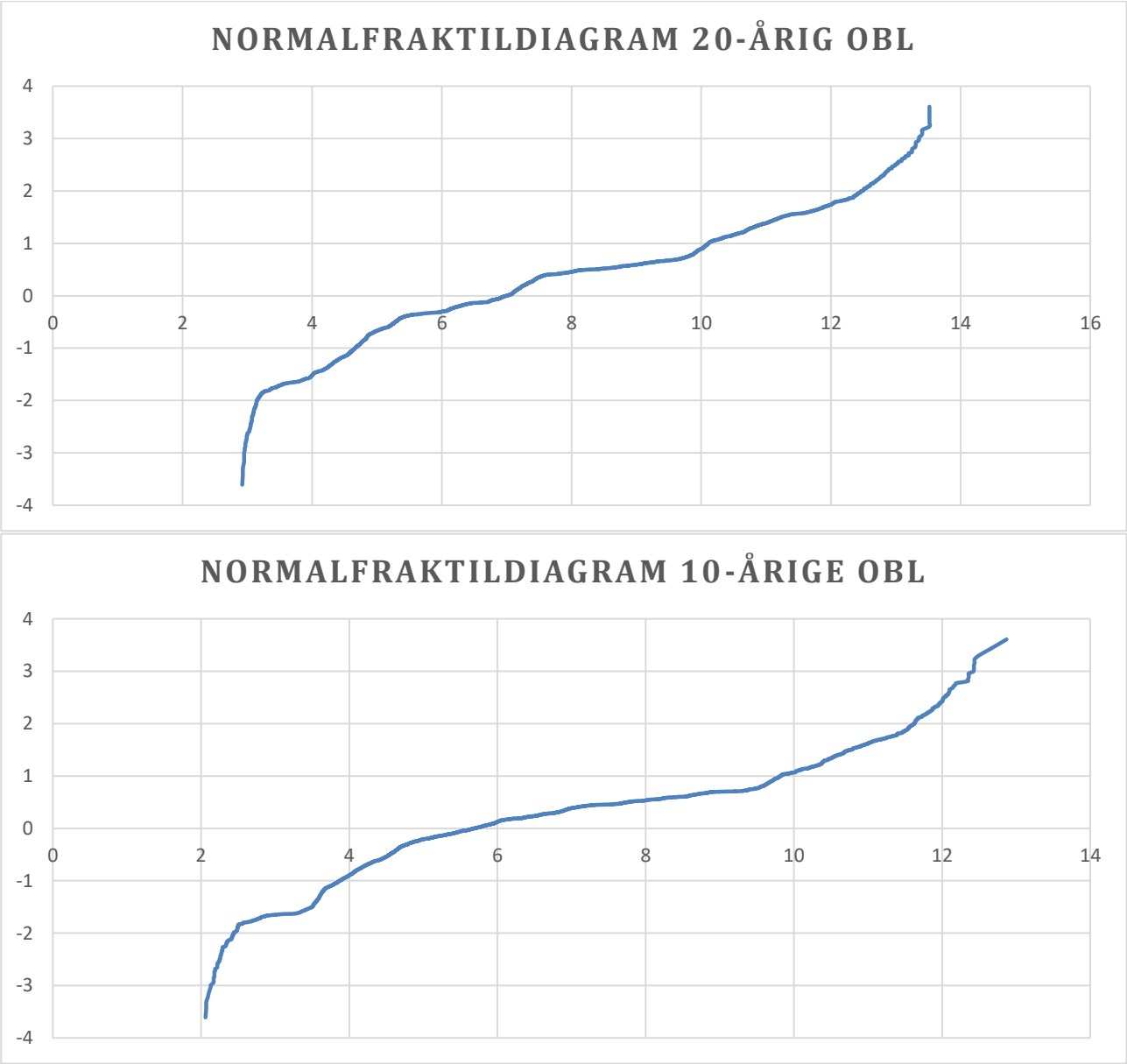
Bilag 5 – BDT rentestruktur



Bilag 6 – Prissætning af kort obligation via BDT modellen, fra excel

[illegible]

Bilag 7 – Normalfraktildiagrammer



[illegible]102