Copenhagen Business School

Cand.merc.(mat.) - Specialeafhandling

Afdækning i komplekse volatilitetsmodeller

—

Et indblik i '*The Fundamental Theorem of Derivative Trading*'

Hedging in advanced volatility models -
An insight into 'The Fundamental Theorem of Derivative Trading'

Forfattere:
Michael Viktor Bolvig Olsen (101615)
Rasmus Herkild Svensson (101563)
Theis Reinhardt Knapmann (100997)

Specialevejleder:
Rolf Poulsen

Kontraktnr.:
15172

Antal sider til bedømmelse:	130
Total antal sider:	136
Antal tegn inkl. mellemrum:	261,898
Antal normalsider:	116

15. maj 2020

Copenhagen Business School
HANDELSHØJSKOLEN

Abstract

The main subject of this master thesis is to study the main results of *The Fundamental Theorem of Derivative Trading* (FToDT) and application of these in real option data. Let σ^{act} and σ^{imp} respectively signify the realized and implied volatility. FToDT states that the purchase of an option with a continuously rebalanced delta-hedge will yield an arbitrage opportunity, while observing the inequality $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$, and buying the option if the inequality is true. The realized volatility is however not observable in the market, as such it is up to the trader to model this process as a function of market data and model parameters.

The motivation for researching the application of FToDT in real option data, using several more complex volatility models than the constant volatility approach in Black-Scholes, is (i) to profit in arbitrage opportunities and (ii) to measure the empirical validity of the theorem. We consider (ii) to be indispensably important, the affirmation of which may strengthen the theorem as discretely applicable in measure of hedge portfolio profit-&-loss.

Our study utilizes a methodology of constructed P&L paths, and with this we found significant profitability by usage of EGARCH or Heston volatility models. With the EGARCH model we have found a stricly positive 95% confidence interval for the option-wise P&L results, and thus conclude the existence of an arbitrage opportunity. The Heston model yields the highest expected P&L result, and thus exceeds EGARCH in profitability, although not concluding the same arbitrage opportunity. We also found superior hedging performance by utilizing a minimum-variance strategy based on volatility sensitivity modelling, however this strategy is hardly profitable compared to EGARCH and Heston.

The conclusion of this study is highly applicable in option trading, but this result is somewhat thwarted by the introduction of financial frictions in the market, such as transaction costs. An investor with intent to hedge an option now faces the non-trivial choice of cost minimizing hedge frequency given such frictions in the market - an aspect we have not focused our attention towards, but certainly consider a viable suggestion for further studies in the matter of option hedges.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning **1**

2 Problemformulering **2**
2.1 Afgrænsning . . . 2
2.2 Struktur . . . 3

3 Prisfastsættelse af optioner **3**
3.1 Stokastiske processer . . . 3
3.1.1 Sandsynlighedsrum . . . 4
3.1.2 Itōs lemma . . . 4
3.1.3 Geometrisk Brownsk bevægelse . . . 5
3.1.4 Cox-Ingersoll-Ross proces . . . 7
3.1.5 Målskiftet - Girsanovs Transformation . . . 7
3.2 Black-Scholes Teori . . . 9
3.2.1 Antagelser & Formel . . . 9
3.2.2 Udledning af den funamentale PDE . . . 10
3.2.3 Opstilling af Black-Scholes-formel . . . 11
3.2.4 Løsning til Black-Scholes . . . 12
3.2.5 Historisk vs. implicit volatilitet . . . 16
3.3 Monte-Carlo simulation . . . 16
3.3.1 Numerisk integration . . . 16
3.3.2 Simulation . . . 17
3.4 Fejl/mangler i Black-Scholes-modellen . . . 18
3.4.1 Volatilitetsflade . . . 18
3.4.2 Volatilitetens følsomhed i underliggende . . . 19

4 Afdækning **20**
4.1 *The Greeks* . . . 20
4.1.1 Delta . . . 20
4.1.2 Gamma . . . 22
4.1.3 Theta . . . 23
4.1.4 *Vega* . . . 23
4.1.5 Vanna/Volga . . . 24
4.2 Δ-afdækkede porteføljer . . . 25

5 The Fundamental Theorem of Derivative Trading **26**
5.1 FToDT, Teorem & Bevis . . . 27

5.1.1 Bevis . . . 27
5.1.2 Implikationer/Bemærkninger . . . 29

6 Willmott's hedge-eksperiment 29
6.1 Δ-hedge med realiseret volatilitet . . . 29
6.2 Δ-hedge med implicit volatilitet . . . 31
6.3 Simulation . . . 31

7 Data 33
7.1 Interpolation i volatilitetsfladen . . . 34

8 Autoregressive processer 36
8.1 Autoregressiv proces af 1. orden . . . 36
8.1.1 Moving-Average processer . . . 37
8.1.2 ARMA-processer . . . 37
8.2 Lokale volatilitetsmodeller . . . 38
8.2.1 ARCH . . . 39
8.2.2 GARCH . . . 39
8.2.3 EGARCH . . . 40
8.3 Exponentially Weighted Moving Average og dets λ . . . 42

9 Stokastisk Volatilitet - Heston 44
9.1 Den generelle PDE under stokastisk volatilitet . . . 45
9.2 Heston i den risikofrie verden . . . 48
9.3 Opstilling af Hestons PDE . . . 53
9.4 Karakteristiske funktioner . . . 53
9.5 Udledning af Optionsprisen . . . 55
9.5.1 Løsning til den partielle differentialligning, del 1 . . . 58
9.5.2 Løsning til den partielle differentialligning, del 2 . . . 59
9.5.3 Invertering af den karakteristiske funktion . . . 61
9.6 Lipton Risks løsning . . . 61
9.7 Simulation i Heston . . . 62
9.7.1 Euler diskretisering . . . 62
9.7.2 Brug af diskret Milstein proces . . . 62
9.8 Kalibrering af Heston . . . 63

10 Volatilitetsfrie modeller 65
10.1 Kontinuert vs. diskret afdækning . . . 65
10.2 Data-drevet hedgestrategi . . . 66
10.3 Realiseret Delta . . . 67

10.4 Minimum-Varians Delta . . . 69

11 Empiriske resultater **71**

11.1 Opsætning af P&L . . . 72

11.2 Validitetscheck af P&L-værdier . . . 73

11.2.1 Med fast implicit hedgevolatilitet . . . 73

11.2.2 Med interpolerede implicitte hedgevolatiliteter . . . 74

11.3 Opsætning af lange vs. korte positioner . . . 75

11.4 Benchmark med hhv. fast & varierende impl. hedgevolatilitet . . . 76

11.4.1 Faste vs. Interpolerede parametre . . . 76

11.4.2 Forklaring af udvalgte tendenser . . . 77

11.5 Test af volatilitetsarbitrage . . . 80

11.6 EWMA's empiriske resultater . . . 81

11.6.1 EWMA fast hedgevolatilitet . . . 82

11.6.2 EWMA med interpoleret hedgevolatilitet . . . 84

11.6.3 Kommentar til EWMA . . . 86

11.6.4 Konklusion på EWMA med implicit volatilitet . . . 88

11.7 P&L for EGARCH med implicit volatilitet . . . 88

11.8 EWMA og EGARCH med realiseret volatilitet . . . 91

11.8.1 Kommentar til EGARCH . . . 93

11.9 Sammenligning af resultater for EWMA og EGARCH . . . 94

11.10 Hestons empiriske resultater . . . 96

11.10.1 Sammenligninger af Heston resultater . . . 97

11.11 Empiriske resultater for volatilitetsfrie strategier . . . 99

11.11.1 Real Δ . . . 99

11.11.2 Minimum-varians Δ . . . 101

11.11.3 Resultater samt sammenligning . . . 102

11.12 Sammenligning af resultater . . . 104

12 Evaluering af hedgefejl **106**

12.1 GAINs . . . 106

12.1.1 Optionsvis præstation . . . 107

12.1.1.1 Eksempel: EGARCH-stier for portefølje 10 & 12 . . . 109

12.1.1.2 Bedre afdækning med backbone-dynamik . . . 109

12.1.2 Sammenligning med P&L . . . 110

12.2 Flere statistikker for hegdefejl . . . 111

12.2.1 Forventet afdækningsfejl . . . 111

12.2.2 Standardafvigelse . . . 113

12.2.3 Value-at-Risk . . . 115

12.2.4 Conditional Value-at-Risk 117
12.3 Opsamling på observerede hedgefejl 120

13 Konklusion **121**

14 Perspektivering **124**

15 Litteraturliste **126**
15.1 Primær litteratur 126
15.2 Sekundær litteratur 126

16 Bilag **128**
16.1 Bilag A 128
16.2 Bilag B 129
16.3 Bilag C 130
16.4 Bilag D 131

1 Indledning

I verden af kvantitativ finansering, og især ikke-lineære finansielle produkter, er megen opmærksomhed lagt i kontinuerlig hedging (afdækning) af derivativer. Siden Black & Scholes (1973)[1] kom med deres grundlæggende gennembrud i prissætning af europæiske optioner, har investorer fokuseret på udvikling af afdækningsstrategier - dvs. porteføljer som replikerer selvsamme betalingsstrøm. Adskillige af de originale antagelser i Black-Scholes modellen står dog i modstrid med empiriske resultater, f.eks. antagelsen om konstant volatilitet. Volatilitet er empirisk et stadigt uigennemskueligt og i høj grad stokastisk fænomen, men uomgåeligt ikke konstant.

Under manglende kendskab til den "sande" volatilitet er det ikke muligt at hedge optionen perfekt. Men trods volatilitetens ukendte beskaffenhed opstiller 'The Fundamental Theorem of Derivative Trading' (2016) (FToDT), som er det centrale fokus i denne opgave, alligevel konkrete formler for størrelsen på afdækningsfejlen i en hedgeportefølje. FToDT-læresætningens resultat er en funktionel form for den afdækkede options profit-&-tab (P&L) under afdækningshorisonten. Betragt et konkret rentefrit eksempel, hvor prisprocessen på et enkelt dividendefrit risikofyldt aktiv, S_t, antages at følge dynamikken:

$$dS_t = S_t \left[\mu_{t,r} dt + \sigma_{t,r} dW_t\right], \tag{1.1}$$

hvor $\mu_{t,r}, \sigma_{t,r}$ & W_t angiver hhv. aktivets driftparameter, volatilitet og Brownske bevægelse (BM), som driver aktivets underliggende stokastik. Lad V_t^i være værdien af en option handlet ved en given markedsimplicit volatilitet $\sigma_{t,i}$, som muligvis er aldeles forskellig fra den utilgængelige realiserede volatilitet $\sigma_{t,r}$. Hvis vi søger at afdække en lang position på denne option ved brug af $\sigma_{t,i}$ som hedge-volatilitet, kan vi med anvendelse af Itōs formel og Black-Scholes differentialligning udlede den infinitesimale ændring i hedge-porteføljen $\Pi_t = V_t^i - \nabla_s V_t^i S_t$ til:

$$d\Pi_t = \frac{1}{2}\left(\sigma_{t,r}^2 - \sigma_{t,i}^2\right) S_t^2 \nabla_{ss}^2 V_t dt, \tag{1.2}$$

hvilken generelt ikke er 0 medmindre $\sigma_{t,i} = \sigma_{t,r}$. Det ses i ovenstående ligning, at en kontinuerligt afdækket lang position i optionen vil yde en sikker profit, såfremt den realiserede volatilitet på det underliggende aktiv overstiger markedets implicitte volatilitet a.s. (*almost surely* - næsten sikkert), dvs. $\mathbb{P}\left(\sigma_{t,r} > \sigma_{t,i}\right) = 1$. Uden kendskab til $\sigma_{t,r}$ afhænger arbitragemuligheden imidlertid af vore evner til effektivt at estimere den ud fra markedsdata og komplekse volatilitetsmodeller, hvilket vil være grundlaget for de senere undersøgelser.

[1] Fischer Black & Myron Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy, Vol. 81, nr. 3, maj - juni 1973, s. 637-654

2 Problemformulering

FToDT knytter tab eller gevinst på en dynamisk afdækket position, givet hedge-, realiseret og implicit volatilitet. Der er ikke krav om valg af hedgevolatilitet, så længe denne er konstant under afdækningshorisonten. Imidlertid vil dette kun yde en volatilitetsarbitrage, såfremt der under afdækningshorisonten er kendskab til dynamikken bag den realiserede volatilitet, hvilken vi grundlæggende er komplet uvidende om. Teoremet undersøges da nærmere ud fra følgende undersøgelsesspørgsmål:

i) Hvor empirisk anvendeligt er FToDT for europæiske call-optioner i Equity markedet?

ii) Hvilken forskel betragtes i teoremets anvendelighed ved brug af mere komplekse modeller end den basale Black-Scholes-modellen?

Opgaveformulering (i specialekontrakt): The Fundamental Theorem of Derivative Trading knytter tab eller gevinst på en dynamisk afdækket position sammen med hedge-, realiseret og implicit volatilitet. Vi vil undersøge teoremet nærmere; dets empiriske anvendelighed, samt dets gyldighed for hedgestrategier baseret på mere komplekse modeller end den basale Black-Scholes-model.

2.1 Afgrænsning

Hovedformålet i denne opgave er en undersøgelse af FToDT og teoremets praktiske anvendelsesmuligheder for virkeligt optionsdata og en række komplekse afdækningsmodeller. Følgende afgrænsning er derfor sat i kraft for at holde fokus på hovedpointerne:

i) Ved observation af lukkepriser på S&P500 indekset og tilsvarende optionsdata er det umiddelbart derefter muligt at købe/sælge optionen og opsætte afdækningsposition i indekset, trods paradokset deri.

ii) Optionsdata er tilvejebragt af vejleder, Rolf Poulsen, hvorfor vi ingen kritik stiller til datasættets beskaffenhed.

iii) Risikoneutral prissætning anvendes til prissætning af optioner, vi ser bort fra estimation af risikopræmien hørende til det fysiske mål.

iv) Markedet antages uden finansielle friktioner, dvs. transaktionsomkostninger, restriktioner på positioner, skat og lignende.

v) Konkret prissættes kun Call-optioner, da tilsvarende Put-optioner kan prissættes via Put/Call-pariteten.

vi) I og med det ikke har været muligt at fremskaffe markedspriser på SPX-optioner anvendes Black-Scholes formel med interpoleret implicit volatilitet til at prissætte disse.

vii) Black-Scholes modellens antagelse om konstant volatilitet vil blive berørt, de andre antagelser diskuteres ikke nærmere.

2.2 Struktur

Ved hjælp af en induktiv metode undersøges FToDT. I praksis er det omdannet til følgende struktur for opgaven således, at afsnit 3 beskriver hvorledes prisen på optioner baseret på stokastiske processer bør fastsættes. Underafsnit 3.4 beskriver hertil den grundlæggende uoverensstemmelse mellem observeret optionsdata i markedet og Black-Scholes modellen. Dernæst beskriver afsnit 4 hvorledes risikokilden i optioner kan afdækkes og betingelser for arbitrage i afdækkede optionshandler, afsnit 5 beskriver FToDT og dets implikationer for hedgeporteføljer.

FToDT's resultater testes i afsnit 6 i et opstillet eksperiment (Willmott) med anvendelse af simuleret data, og herefter beskriver afsnit 7 det anvendte reelle optionsdata og data konstrueret på dette. Teorien bag lokale og stokastiske volatilitetsmodeller opstilles i hhv. afsnit 8 og 9, samt volatilitetsfrie afdækningsstrategier i afsnit 10, og resultater for alle disse strategier beskrives og opvejes mod resultaterne fra Willmott eksperimentet undervejs i afsnit 11. Herefter opstilles mål for strategiernes relative afdækningspræstation mod et benchmark og diverse statistikker for den numeriske afdækningsfejl i afsnit 12. Konklusion i afsnit 13 danner herefter en afsluttende opsamling for vores undersøgelser, og videre undersøgelsesmuligheder opstilles i perspektivering afsnit 14.

3 Prisfastsættelse af optioner

Før vi kan tage fat på denne afhandlings egentlige formål, skal vi have styr på nogle af de grundlæggende teorier indenfor kontinuert prisfastsættelse af optioner. I dette afsnit vil vi præsentere nogle af de centrale begreber, der er gældende indenfor kontinuert finansieringsteori. Vi starter med en en gennemgang af nogle af de vigtigste begreber omkring stokastiske processer samt en beskrivelse af to processer, der er centrale i forbindelse med prisfastsættelsesmodellerne, som vi præsenterer i denne afhandling. Herefter vil vi give en introdution af Black-Scholes modellen, hvor vi vil arbejde i den risikofrie verden, hvor den partielle differentialligning udledes og Black-Scholes formel præsenteres.

3.1 Stokastiske processer

I dette underafsnit vil vi give en kort introduktion til nogle af de vigtigste egenskaber i en stokastisk proces, som bruges til prisfastsættelse og modellering igennem afhandlingen. Vi starter med en gennemgang af sandynlighedsrum og informationsmængder, og stifter i denne anledning bekendtskab med Markov- og martingalegenskaben. Her stilles ligeså en generel gennemgang af Itō-processer og Itōs lemma. En Itō-proces er kendetegnet ved at afhængig udelukkende af tid t og en risikokilde W_t, hvorledes dynamikken for en arbitrær Itō-proces X_t betragtes ved:

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \beta(t, X_t)dW_t, \tag{3.1}$$

med arbitrære drift- og diffusionskoefficienter givet ved hhv. $\alpha(t, X_t)$ og $\beta(t, X_t)$. To eksempler på Itō-processer er f.eks. den geometriske Brownske bevægelse (GBM) og Cox-Ingersoll-Ross-processen

(CIR), som vi vil benytte os af senere i denne afhandling.

3.1.1 Sandsynlighedsrum

En stokastisk proces er kendetegnet, som en proces med tilfældig udvikling over tid i henhold til et udfaldsrum Ω, en informationsmængde $\mathcal{F}$ og et sandsynlighedsmål P. Tilsammen danner de den stokastiske basis $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, hvor der til ethvert muligt udfald $\omega \in \Omega$ hører en betinget sandsynlighed $P(\omega|\mathcal{F}) \geq 0$.

Informationsmængden $\mathcal{F}_t$ indeholder information om alle udfald i processen op til tid t. Det vil sige at man i en stokastisk proces har kendskab til hele processens historik, og informationsmængden udvider sig løbende. En delmængde af disse informationsmængder, f.eks. F_τ, kaldes for filtreringen af information i processen ved et tidspunkt τ. I og med informationsmængden udvider sig over tid skal der for filtreringen gælde at $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2} \subset \mathcal{F}_{t_3}$ for $t_1 < t_2 < t_3$. En særlig egenskab som der er gældende for de stokastiske processer, vi arbejder med, er den såkaldte Markovegenskab.

Definition 3.1. Markovegenskab. Egenskaben siger, at forventningen til en fremtidig tilstand i processen kun afhænger af den nuværende tilstand og ikke af hele processens historie. Dvs. at der for $t > s$ gælder, at:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|X_s)$$

Markovegenskaben er nyttig, da vi i så fald blot bør kende processens seneste værdi i forventning til dens fremtidige værdi. En anden egenskab, der er kendetegnet ved mange stokastiske processer og især benyttet i moderne finansieringsteori, er martingalegenskaben. Denne egenskab viser sig også at være meget vigtig i forbindelse med arbitragefri prisfastsættelse.

Definition 3.2. Martingalegenskab. En stokastisk proces X_s, hvor det gælder, at $\mathbb{E}(|X_s| < \infty)\ \forall s$, siges at være et martingal med hensyn til $\mathcal{F}_s$, hvis X_s er målelig med hensyn til $\mathcal{F}_s$, og hvis der for $t > s$ gælder, at:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s,$$

hvor betingelsen $\mathbb{E}(|X_s| < \infty)\ \forall s$ sikrer at de betingede forventede værdier er veldefinerede og målelige. Egenskaben betyder løst sagt, at processen ikke har noget driftkomponent.

3.1.2 Itōs lemma

Kendskab til hvorledes et derivat skal prissættes afhænger af værdiudviklingen i derivatet. Indenfor prissættelse af derivater kendes denne udvikling oftest ikke, men da derivatprisen er en funktion af tid t og prisprocessen for det underliggende aktiv, f.eks. Itō-processen X_t fra ligning (3.1), kan Itōs lemma anvendes, da denne fortæller hvorledes en funktion af stokastiske processer kan differentieres.

Fremgangsmåden for dette differentiale tager udgangspunkt i 2. ordens Taylorrækken:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial X_t}dX_t + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial X_t^2}(dX_t)^2 + \frac{\partial V}{\partial t \partial X_t}(dtdX_t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial X_t}\left(\alpha(t,X_t)dt + \beta(t,X_t)dW_t\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial X_t^2}\left(\beta(t,X_t)dW_t\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha(t,X_t)\frac{\partial V}{\partial X_t} + (\beta(t,X_t))^2\frac{\partial^2 V}{\partial X_t^2}\right)dt + \beta(t,X_t)\frac{\partial V}{\partial X_t}dW_t, \end{aligned} \tag{3.2}$$

hvor der er gjort brug af $(dt)^2 = 0$, $(dW_t)^2 = dt$ og $(dtdW_t) = 0$. Ligning (3.2) er den reducerede form af den stokastiske dynamik ofte kendt som Itō's formel for optionen V.

3.1.3 Geometrisk Brownsk bevægelse

Ofte simuleres stokastik med udgangspunkt i en brownsk bevægelse (BM), W_t, for hvilken vi betragter egenskaberne:

- $W_0 = 0$
- $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n$ er tilvæksterne $W_{t_2} - W_{t_2}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ uafhængige
- $\forall t < T : W_T - W_t \sim \mathcal{N}\left(0, (T-t)\,\sigma^2\right)$
- Funktionen $t \to W_t$ er kontinuert

Flere variationer til den ovenstående proces findes, f.eks. en BM uden start i 0 kan parametrises ved $W_t + x, x \neq 0$. En BM med driftkomponent kan på lignende vis parametrises $W_t + \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}$. Ligeså betragtes en standard BM når standardafvigelsen i et vilkårligt tidsrum $\left[t, T\right]$ svarer udelukkende til tilvæksten $T - t$. Alle BM'er besidder Markovegenskaben, og de driftfrie BM'er besidder ligeså Martingalegenskaben vist tidligere. Hvis vi ønsker at anvende en BM til at beskrive udviklingen i en prisproces kræves imidlertid, at processen ikke kan blive negativ. Til dette formål anvendes den geometriske Brownske bevægelse (GBM), for hvilken et underliggende aktiv S_t kan modelleres ved parametriseringen:

$$S(t) = S_0 e^{X_t},$$

hvor $X_t = \sigma W_t + \mu t$ er en BM med drift, og $S(0) = S_0 > 0$ er den initial værdi af aktivet. Det underliggende i dette tilfælde er lognormalfordelt.

Denne fordeling kan frembringes ved følgende eksempel: Lad $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Da er $Z = e^Y$ en ikke-negativ stokastisk variabel som følger lognormalfordelingen. Vi finder herefter tætheden for Z, ved at differentiere stamfunktionen $F(x) = P(Z \leq x) = P(Y \leq \log x) = \theta\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$, hvor $\mathcal{N}(x)$ er den

kumulative fordelingsfunktion for en standard normalfordeling[2]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & \text{hvis } x > 0 \\ 0, & \text{hvis } x \leq 0 \end{cases}$$

Da vi kan finde tæthedsfunktionen, kan vi dermed bestemme hhv. 1. og 2. moment vha. den momentgenererende funktion. Vi ser, at $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(e^Y)$ og $\mathbb{E}(Z^2) = E(e^{2Y})$ som kan opstilles som $M_Y(s) = \mathbb{E}(e^{sY})$ af $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ med $s = 1$ og $s = 2$. Med denne opstilling fås:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \mathbb{E}(Z^2) &= e^{2\mu + 2\sigma^2} \\ \mathbb{V}(Z) &= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

Som resultaterne ovenfor viser, så kan vi vha. en logtransformation af Z udlede fordelingen $\log Z \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Med dette resultat kan vi opskrive dynamikken for den stokastiske variabel X_t, som en BM med drift og skalering:

$$dZ_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

hvor $\mu \wedge \sigma > 0$ er konstante, og W_t er en standard BM. Vi kan herefter bestemme et udtryk for X_t, med integrationen:

$$\begin{aligned} \int_0^t dX_s &= \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ \implies X_t &= X_0 + \mu t + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

hvor X_t er en BM med driften μ og skaleringen σ, men kun hvis der gælder:

$$\forall X_0 \in \mathbb{R} : Z_t = X_0 + \mu t + \sigma dW_t$$

En klasse af stokastiske processer S_t følger en GBM, hvis processen løser den stokastiske differentialligning:

$$dZ_t = \mu Z_t dt + \sigma Z_t dW_t, \tag{3.3}$$

hvor $\mu \wedge \sigma > 0$ er konstante. Hvis vi løser (3.3) med den initielle betingelse $S_0 > 0$, ved brug af Itō's Lemma med tætheden for lognormalfordelingen, frembringes udtrykket for processen:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t},$$

hvor S_t med $S_t = e^{X_t}$ er en GBM, hvis og kun hvis S_t er en BM med drift og skalering[3].

[2] Karl Sigman (2006): Geometric Brownian motion, Columbia University

[3] Arlie O. Petters & Xiaoying Dong (2016): An Introduction to Mathematical Finance with Applications, Springer-Verlag New York, 1. version

3.1.4 Cox-Ingersoll-Ross proces

I forbindelse med modellering af rentestrukturen har en række forskere udviklet rentemodeller, som besidder *mean-reversion* egenskaben. Mean-reversion udtrykker for den stokastiske proces en udvikling mod et bestemt middelniveau afbrudt af sporadiske udsving givet i stokastikken. Dette afbildes ofte i stokastiske stier for processen med træk mod middelniveauet når processen afviger kraftigt fra dette. Blandt disse forskere udviklede Cox, Ingersoll & Ross (1985)[4] den stokastiske proces (CIR-processen):

$$dr_t = \kappa\left(\theta - r_t\right)dt + r_t\sqrt{\sigma_t}dW_t, \tag{3.4}$$

for den stokastiske rente r_t. I CIR-processen vil renteudviklingen søge mod langtidsniveauet θ med en ikke-negativ hastighed κ. Processen har derudover en reflekterende barriere i 0, hvorfor renten i denne proces ikke kan blive negativ. Når $r_t \to 0^+$ vil den stokastiske kilde dW_t have mindre effekt og driftkoefficienten $\kappa\left(\theta - r_t\right)$ vil dominere den infinitesimale renteudvikling. Det kan vises, at r_t kan ramme barrieren, såfremt $\sigma^2 > 2\kappa\theta$, dvs. hvis $\sigma^2 \leq 2\kappa\theta$ (kendt som Feller-betingelsen[5]) vil den opadgående drift være tilstrækkelig stor til at gøre barrieren utilgængelig.

Senere har en række økonomier haft længerevarige perioder med negativ rente, f.eks. den europæiske indlånsrente sat af ECB i perioden juni 2014 - september 2019[6], hvorfor CIR-processen har mistet anvendelsesmuligheder i rentestrukturer, hvor disse udfald forekommer. Imidlertid er CIR-processen en særligt brugbar dynamik for variansmodellering, især når det gælder prisprocesser med stokastisk volatilitet. Varians/volatilitet er konceptuelt en positiv størrelse (foreløbig), hvorfor CIR-processens anvendelsesmuligheder indenfor denne modellering er oplagte.

3.1.5 Målskiftet - Girsanovs Transformation

Girsanov transformationen muliggør, at skabe et martingalmål på en eksisterende stokastisk proces, som ikke i forvejen er et martingal.

Betragt den binomiale proces S med op-ssh. 0.75 og ned-ssh. 0.25. Denne proces er åbenlyst ikke arbitragefri, da $\mathbb{E}\left[S_{t+1}|\mathcal{F}\right] > S_t$. Men det er muligt at imitere en martingalproces på Wiener-processen dW_t knyttet til S_t (vi bruger Wiener-proces omskifteligt med Brownsk bevægelse, men betegnelsen beskriver samme stokastik). Dette kræver en transformation:

$$dW_t = d\bar{W}_t + \lambda dt$$

[4] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr. & Stephen A. Ross (marts 1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, Vol. 53, nr. 2, marts 1985, s. 385-407

[5] William Feller (28. august 1950): Two Singular Diffusion Problems. Annals of Mathematics, anden serie, Vol. 54, nr. 1, juli 1951, s. 173-182

[6] Key ECB interest rates (European Central Bank): `https://www.ecb.europa.eu/stats/policy_and_exchange_rates/key_ecb_interest_rates/html/index.en.html`

Processen dW_t er åbenlyst ikke et "fair game"på $d\bar{W}$, men med skiftet λ vil den være fair i et andet referencesystem. For enhver unik tilstand drevet af dW_t eksisterer en unik tilstand i $d\bar{W}$. Vi kan dermed skrive:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \left(d\bar{W} + \lambda dt\right)$$

Denne form for ændring på en eksisterende Wiener-proces betegnes som en Girsanov-transformation. Hvis vi nu vælger $\lambda = -\frac{\mu}{\sigma}$ står kun $dS_t = d\bar{W}$ tilbage. Dette betyder, at vi har fjernet driften fra S_t med en transformation, således at dS_t er en martingal under det nye sandsynlighedsmål. Nu er dS_t fair i forhold til processen, som følger den deterministiske udvikling i aktivet $S_0 e^{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)t}$.

Finansielt er dette dog ikke tilstrækkeligt, da $\frac{\mu}{\sigma}$ udgør risikopræmien for den risiko vi påtager os, og denne er ikke justeret for det risikofrie aktiv i markedet. Dette kan vi dog hurtigt tage højde for ved at lade risikopræmien være $\lambda = -\frac{\mu - r}{\sigma}$.

Hvis vi nu definerer et marked via $Z = \frac{S}{B}$, hvor B udgør pengemarkedskontoen med det unikke martingalmål $\mathbb{Q}$, betyder det at vi kan studere ethvert aktiv relativt til pengemarkedskontoen B. Lad Ω udgøre tilstandsrummet for Z, vi skriver da $\mathbb{Q}$-sandsynligheden for hændelsen A:

$$\mathbb{Q} = \int_\Omega Z dP(A)$$

Hvis vi anvender Itō's formel på Z fås:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{\partial Z}{\partial S} dS + \frac{\partial Z}{\partial B} dB \\ &= \frac{1}{B_t} \left\{\mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t\right\} - \frac{S_t}{B_t^2} r_t B_t dt \\ &= \left\{\mu_t - r_t\right\} Z_t dt + \sigma_t Z_t dW_t \end{aligned}$$

Med Girsanov-transformationen $dW_t = g_t dt + d\widetilde{W}_t$ fås:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \left\{\mu_t - r_t\right\} Z_t dt + \sigma_t Z_t \left\{g_t dt + d\widetilde{W}_t\right\} \\ &= \left\{\mu_t - r_t + \sigma_t g_t\right\} Z_t dt + \sigma_t Z_t d\widetilde{W}_t \end{aligned}$$

Med g_t kan vi definere Likelihood-funktionen:

$$dL_t = g_t L_t dW_t, \qquad L_0 = 1$$

som har løsningen

$$L_t = \exp\left\{\int_0^t g_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t g_s^2 ds\right\}$$

Likelihood-funktionen kaldes indenfor finansiel litteratur ofte for den Radon-Nikodym afledte, og funktionen g_t for Girsanov-kernen. g_t ses på samme facon som λ længere oppe givet ved:

$$g_t = -\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$$

Dette er indbegrebet af Girsanovs sætning.

Theorem 3.1. *Girsanovs sætning. Antag den stokastiske basis $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ givet, hvor P udgør markedssandsynlighedsmålet. Lad X være en $(\mathcal{F}, P)$-Wienerproces (Brownian Motion), og lad $\mathcal{F}_t$ være filtrering genereret af denne BM. Lad også L og g være givet som ovenstående (g tilpasset $\mathcal{F}_t$), og lad derudover $\mathbb{E}[L(T)] = 1$. Definer hertil Q ved $dQ = L(T)dP$ på filteret $\mathcal{F}$. Dermed er:*

$$W_t = X_t - \int_0^t g_s ds$$

en $(\mathcal{F}, Q)$-Wienerproces (dvs. en BM under Q-målet).

3.2 Black-Scholes Teori

3.2.1 Antagelser & Formel

Black-Scholes formel er særdeles anvendt til risikoneutral prissætning af europæiske call-optioner. I anvendelse af denne formel betragtes i markedet ét risikofyldt og ét risikofrit aktiv, hhv. $S_t \wedge B_t$, som følger dynamikkerne:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ dB_t &= r B_t dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

Her er $S_0 = S$ og $B_0 = 1$ randbetingelser defineret for hvert aktiv. For disse aktivdynamikker stilles følgende antagelser:

i) Pengemarkedet udbyder samme ind-og udlånsrente r

ii) Markedet er friktionsløst (ingen transaktionsomkostninger)

iii) Begge aktiver er perfekt divisible (der kan tages uendeligt lange og korte positioner i begge)

iv) Ingen spring (dvs. diskontinuitet) i værdien af det risikofyldte aktiv

v) Den risikofrie rente r, risikofyldte afkastrate μ, og volatilitet σ antages alle være konstante

vi) Ingen dividender

Black-Scholes-formlen kan dog udvides så antagelsen om ingen dividender kan undværes, en egenskab vi vil vende tilbage til. En call-option med strikeprisen K, som udløber ved tid T, kan dermed prissættes

til tiden t ved formlen:

$$C_t^{BS} = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \tag{3.6}$$
$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Dvs. det med Black-Scholes formlen er muligt at angive den risikoneutrale værdi på en vilkårlig call-option, udelukkende med kendskab til spotprisen på det underliggende aktiv S_t, strikeprisen K, den risikofrie rente r, volatiliteten σ og udløbstidspunktet T. Black-Scholes-formel antager samtidig, at det underliggende aktivs værdiudvikling følger log-normalfordelingen, hvor d_2 angiver call-optionens kritiske "in-the-money"(ITM) fraktil.

Ved hjælp af Put/Call-pariteten og Black-Scholes-prisen på call-optionen, kan den tilsvarende put-option også prissættes:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \Leftrightarrow P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)}$$
$$\implies P_t^{BS} = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1)$$

Put/Call-pariteten er modelfri, derfor har optionspriser i denne ikke toptegn BS da disse ikke kræves udledt ved Black-Scholes-modellen.

3.2.2 Udledning af den funamentale PDE

Et af de mest banebrydende resultater i Black-Scholes derivatterori er givet ved den fundamentale partielle differentialligning (PDE), da denne er bindende for alle continget-claims V knyttet til det underliggende aktiv S_t. Den fundamentale PDE udtrykkes i ligningen:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0 \tag{3.7}$$

Udledningen af PDE'en starter med opstilling af dynamikken for det underliggende aktiv S_t. Derefter defineres et derivat på det risikofyldte aktiv, $V = V(t, S_t)$. V er prisen på derivatet, som afhænger af t og S_t. Dynamikken for S_t følger en GBM på formen i ligning (3.5). Med dynamikken for det risikofyldte aktiv skal vi opstille en porteføjle, som består af derivatet V og ΔS_t. Porteføjlen er konstrueret således, at vi sælger derivatet og køber Δ stk. af det underliggende aktiv S_t. Porteføjlens værdi er derfor:

$$\Pi = -V + \Delta S_t \tag{3.8}$$

Udviklingen i porteføljens værdi har to effekter. Den ene effekt er udviklingen i derivatet V og den anden i det underliggende aktiv S_t:

$$d\Pi = -dV + \Delta dS_t \tag{3.9}$$

Dynamikken for derivatet V kan med Itō's formel reduceres til:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2$$

I ovenstående kan dS_t erstattes med den opstillede dynamik i ligning (3.5):

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t}dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t}dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}dt \tag{3.10}$$

Vi indsætter ligningerne (3.10) og (3.5) ind i ligning (3.9), reducerer udtrykket og får:

$$d\Pi = \left[-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \mu S_t \left(-\frac{\partial V}{\partial S_t} + \Delta\right)\right] dt + \sigma S_t \left(-\frac{\partial V}{\partial S_t} + \Delta\right) dW_t \tag{3.11}$$

Det ses nu, at hvis vores position i det underliggende aktiv er $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$, så vil porteføljen udgøre en risikofri hedge. Denne er risikofri i og med $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$ vil fjerne risikokilden dW_t. I et effektivt marked med ingen arbitragemuligheder, skal alle porteføljer uden markedsrisiko, tjene den risikofrie rente r. Hvis vi investerer porteføjlens værdi, Π, i det risikofrie aktiv vil den have en udviklingen $r\Pi dt$ over intervallet dt. Derfor må det følge at:

$$r\Pi dt = d\Pi = -\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right] dt$$

Indsætter vi ligning (3.8) ind i ovenstående ligning og rykker rundt på ligningen kommer vi frem til:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0$$

Denne ligning er den samme som ligning (3.7), dermed har vi vist udledningen af den fundamentale PDE og hvad den betyder. Resultatet er essentielt derivatprissætning i kontinuert tid, og kan for ethvert derivat på det underliggende aktiv S_t lede til en entydig pris, givet en unik randbetingelse knyttet til derivatet.

3.2.3 Opstilling af Black-Scholes-formel

Med den fundamentale PDE opstillet er det muligt at udlede Black-Scholes formel. Dette kræver som før nævnt en randbetingelse for den europæiske call-option, $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$. Investering i optionen kræver ligeså, at den underliggende stokastiske proces i ligning (3.5) er et martingal, dvs. en proces som opfylder

$$\mathbb{E}\left[S_T | \mathcal{F}_t\right] = S_t$$

Ovenstående betyder, at den stokastiske proces S_T med filtreringen $\mathcal{F}_t$ forventes at have samme værdi ved et fremtidigt tidspunkt T som på nuværende tidspunkt t. Martingalmål opfattes derfor som såkaldte "fair spil", en nødvendighed i udelukkelse af arbitragemuligheder.

3.2.4 Løsning til Black-Scholes

Det risikofyldte afkast μ vil under det risikoneutrale sandsynlighedsmål svare til det risikofrie afkast, r. Trods aktivets risikokilde, skal det yde samme forrentning som det risikofrie aktiv under det risikoneutrale sandsynlighedsmål. Brud på dette vil resultere i arbitrage, hvilket ikke antages at forekomme i det effektive marked. Ved anvendelse af Itō's formel under $\mathbb{Q}$ frembringes for claimet V:

$$\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS_t)^2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}\left(rS_t dt + \sigma S_t dW_t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dW_t)^2 \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S}dW_t \\
&= rV_t dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S}dW_t
\end{aligned}$$

Dynamikken yder i sig selv ingen information om V's værdi, denne frembringes nu ved integration og forventningstagen af ovenstående udtryk. Pr. definition bliver den forventede værdi af et stokastisk integrale 0, når denne ingen drift har, hvorfor vi kan reducere udtrykket og nå frem til Feynman-Kačs formel:

$$C_t^{BS} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{t,S}^{\mathbb{Q}}\left[\Phi(S_T)\right]$$

Forventningen $\mathbb{E}_{t,S}$ er med fodtegnet (t, S) betinget af filtreringen $\mathcal{F}_t$, dvs. informationen genereret på det risikofyldte aktiv S_t frem til tid t. Med andre ord evalueres forventningen under kendskab til udviklingen i det risikofyldte aktiv frem til tid t. Vi anvender notation $\mathbb{E}_{t,S}$ da kun denne filtrering tages i brug i dette afsnit.

Randbetingelsen $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$ er imidlertid stadig stokastisk, hvilket fordrer kendskab til fordelingen af S_T. Det er dog muligt, og temmeligt enkelt at danne kendskab til fordelingen ud fra dynamikken dS_t. Betragt log-transformationen $Z_t = \log S_t$ hvor dynamikken for Z_t udledes ved Itō's Lemma:

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 \\
&= \frac{1}{S_t}\left(rS_t dt + \sigma S_t dW_t\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt \\
&= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t
\end{aligned}$$

Hvis denne integreres fra tid t til T fås:

$$
\begin{aligned}
Z_T &= Z_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W_T - W_t\right) \\
\implies S_T &= S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} \\
&= S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot z}, \qquad z \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Vi ser dermed log-normalfordelingen $\log S_T \sim \mathcal{N}\left(\log S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$ som ventet. Bemærk gerne her, at den diskonterede prisproces besidder martingalegenskaben:

$$
\begin{aligned}
e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[S_T \middle| \mathcal{F}_t\right] &= e^{-r(T-t)} \times S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\
&= S_t
\end{aligned}
$$

For at simplificere de senere udregninger defineres nu to midlertidige variable til anvendelse i parametriseringen af S_T:

$$
\begin{pmatrix} \tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \tau = T - t \end{pmatrix} \implies S_T = S_t e^{\tilde{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}z} = S_t e^y
$$

Hvor $y = \tilde{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}z = \log\frac{S_T}{S_t}$. Aktivet S_t følger en lognormal-fordeling, for hvilken vi betragter tæthedsfunktionen:

$$
g(S_T) = \frac{1}{\sigma S_T\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{\left[\log\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \tilde{r}\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau}} = \frac{1}{\sigma S_T\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\tilde{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2}
$$

Variablen $\frac{y-\tilde{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ er standardnormalfordelt. Denne kan også frembringes ved isolering af z i S_T-udtrykket, hvorfor vi vil forkorte den med samme notation. Med anvendelse af denne kan tæthedsfunktionen reparametriseres til den standardnormalfordelte tæthed:

$$
\begin{aligned}
g(S_T) &= \frac{1}{\sigma S_T\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \\
&= \frac{1}{\sigma S_T\sqrt{\tau}} \varphi(z)
\end{aligned}
$$

En option (call/put) med randbetingelsen $\Phi(S_T)$ er at-the-money (ATM) med følgende fraktil:

$$
S_t e^{\tilde{r}\tau + \sigma\sqrt{\tau}z_0} - K = 0 \implies z_0 = \frac{\log\frac{K}{S_t} - \tilde{r}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
$$

Dette giver os fraktilen z_0. Med denne har vi nu al nødvendig information for at prissætte call-optionen med Black-Scholes-modellen:

$$\begin{aligned}
C_t^{BS} &= e^{-r\tau}\mathbb{E}_{t,S}^{\mathbb{Q}}\left[\Phi(S_T)\right] \\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(S\right)g\left(S\right)dS, \quad \left\{dS = \frac{\partial S_T}{\partial z}dy = (S_T\sigma\sqrt{\tau})dz\right\} \\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(z\right)g\left(S_T\right)(S_T\sigma\sqrt{\tau})dz \\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(z\right)\varphi\left(z\right)dz = e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{-\tilde{r}\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} - K\right)^{+}\varphi\left(z\right)dz
\end{aligned}$$

Udtrykket i $\{\dots\}$ beskriver substitutionen; vi substituerer integrationen af S ud med integration af z, hvilket kræver det præcise substitutionsforhold. Dernæst skal bemærkes, at $g\left(S_T\right)\left(S_T\sigma\sqrt{\tau}\right)$ præcis svarer til den Gaussiske tæthedsfunktion $\varphi(z)$. Call-optionen har udelukkende værdi i tilstande, hvor den er ITM, derfor integrerer vi fra z_0 til ∞:

$$\begin{aligned}
C_t^{BS} &= e^{-r\tau}\int_{z_0}^{\infty}\left(S_t e^{-\tilde{r}\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} - K\right)\varphi\left(z\right)dz \\
&= S_t e^{-r\tau}\int_{z_0}^{\infty}e^{-\tilde{r}\tau+\sigma\sqrt{\tau}z}\varphi\left(z\right)dz - Ke^{-r\tau}\int_{z_0}^{\infty}\varphi\left(z\right)dz \\
&= S_t e^{-r\tau}\int_{z_0}^{\infty}e^{-\tilde{r}\tau+\sigma\sqrt{\tau}z}\varphi\left(z\right)dz - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}\left(-z_0\right)
\end{aligned}$$

Dernæst indsættes $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ i første led. Dermed udgår diskonteringen på første led. Alle resterende eksponenter i integranden danner tilsammen det 2-leddede kvadrat $-\frac{1}{2}\sigma^2\tau + \sigma\sqrt{\tau}z - \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}\left(z - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2$, hvorledes hele call-prisformlen reduceres til:

$$\begin{aligned}
C_t^{BS} &= S_t\int_{z_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(z-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}}dz - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}\left(-z_0\right) \\
&= S_t\mathcal{N}\left(-z_0 + \sigma\sqrt{\tau}\right) - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}\left(-z_0\right)
\end{aligned}$$

Hvorvidt man integrerer nedre hale af std. normalfordelingen til fraktilen $-z_0 + \sigma\sqrt{\tau}$ eller øvre hale af $N(\sigma\sqrt{\tau}, 1)$-fordelingen ned til fraktilen z_0 udleder samme resultat. Dermed kan vi trække $\sigma\sqrt{\tau}$, som agerer middelværdi, ned i nedre integralgrænse og med denne justering integrere std. normalfordelingens nedre hale. Med ovenstående udtryk er der kun tilbage at definere fraktilerne d_1 og d_2:

$$d_1 = -z_0 + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = -z_0 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Disse fraktiler kan substitueres ind i det tidligere udtryk, så Black-Scholes-formlen får det vanlige udtryk:

$$\begin{aligned} C_t^{BS} &= S_t \mathcal{N}\left(-z_0 + \sigma\sqrt{T-t}\right) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(-z_0\right) \\ &= S_t \mathcal{N}\left(d_1\right) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_2\right) \end{aligned}$$

Beviset er fuldendt da dette udtryk præcist svarer til prisformlen i ligning (3.6).
Hvis vores underliggende aktiv udbetaler en løbende dividende, så holder ovenstående resultat ikke længere. Som beskrevet tidligere kan vi tilpasse Black-Scholes formel, så prisfunktionen også tager højde for dividender. Vi antager derfor, at vores underliggende aktiv har dividenderaten q, og derfor følger $\mathbb{P}$-dynamikken:

$$dS_t = (\mu - q)\, S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

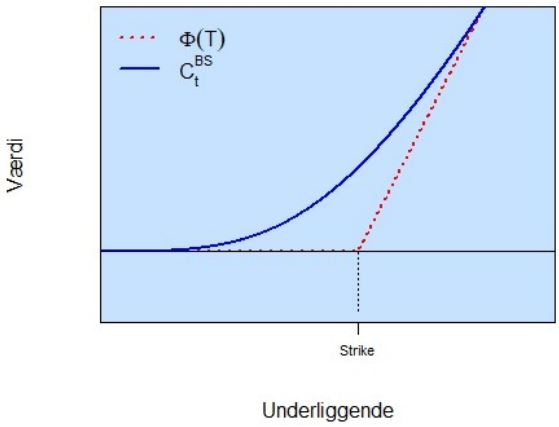
Under $\mathbb{Q}$-mål leder dette til PDE'en:

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt + (r-q)S_t\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{3.13}$$

Med denne PDE ender vi ud med en tilpasset prisfunktion for optioner med dividende:

$$\begin{aligned} C_t^{BS} &= e^{(r-q)(T-t)}\mathbb{E}_{t,S}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+\right] \\ &= S_t e^{-q(T-t)}\mathcal{N}\left(d_1\right) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_2\right) \\ d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \tag{3.14}$$

En visuel illustration af optionsværdien er givet i figur 1. Som det ses i nedenstående figur, er tid t-værdien af call-optionen en udglatning af den ikke-lineære randbetingelse $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$. Optionen har på et vilkårligt tidspunkt $t < T$ til en vilkårlig spotværdi $S_t \in \left[0, \infty\right[$ større eller samme værdi på tidspunkt t end T.



Figur 1: Black-Scholes optionsværdi

Alle parametre i Black-Scholes-formlen er observerbare i markedet undtagen volatiliteten σ. Udledning af Black-Scholes call-priser på et aktiv observeret i markedet afhænger derfor af hvilken volatilitet tages i brug.

3.2.5 Historisk vs. implicit volatilitet

I og med realiseret volatilitet er en uhåndgribelig størrelse, må vi gøre op med hvordan vi opfatter volatilitet. Almindeligt kendt volatilitet kaldes ofte historisk volatilitet, hvilket kendetegnes ved den simple standardafvigelse af historiske observationer af f.eks. log-afkast, R_t, på prisprocessen i det underliggende aktiv:

$$\sigma^{hist} = \sqrt{\frac{1}{n\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \bar{R}\right)},$$

hvor $\bar{R}$ udgør middelværdien af log-afkast over de observerede afkast. Der findes dog andre parametre for volatiliteten f.eks. den implicitte volatilitet. Volatilitetsparameteren kan ikke isoleres i Black-Scholes-formlen, men ved at finde den unikke volatilitet der løser ligningen:

$$C^{obs} = C^{BS}\left(\sigma^{imp}\right),$$

frembringes den markeds-implicitte volatilitet σ^{imp}, hvor C^{obs} udgør en observeret optionspris i markedet (som kan være frembragt ved helt andre metoder f.eks. Monte-Carlo simulation) med samme strike og udløb som $C^{BS}\left(\sigma^{imp}\right)$. Historisk volatilitet betragtes i denne sammenhæng som udtryk for de historiske afvigelser i prisprocessen, mens den implicitte volatilitet udgør en markedsforventet volatilitet på aktivet under optionens levetid.

3.3 Monte-Carlo simulation

Monte-Carlo simulation er en af mange måder at simulere udviklingen i prisprocessen i det underliggende aktiv, for at betragte profitabiliteten i optionen. Resultatet af dette er et antal simulerede S_T-værdier, som tilbagediskonteres til tid $t = 0$. Dette giver en approksimation på værdien af at exercise optionen ved udløb, hvilket naturligvis afhængig af antallet af simulationer. Forventningen til dette payoff bliver dermed optionens pris for at undgå en oplagt arbitragemulighed. Vi vil senere hen benytte os af en sådan Monte-Carlo simulation til netop dette formål, men vi bliver nødt til at forstå teorien bag simulationen først.

3.3.1 Numerisk integration

En af metoderne anvendt i Monte-Carlo er numerisk integration. Som vi nævnte vil optionens arbitragefrie pris være lig den tilbagediskonterede værdi af det forventede payoff. Vi kan betragte det forventede payoff som et integrale af optionens udløbsværdi $\Phi(\cdot)$ og tætheden i den underliggende prisproces. Pr. definition er den empiriske forventning til $\Phi(y)$ med hensyn til en tilfældig stokastisk

variabel Y givet ved summen:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Phi(Y_i),$$

hvor N er antal simulationer af den tilfældige værdi Y. Med store tals lov er denne sum nøjagtig forventningen af payoff'et når $N \to \infty$. For at opnå holde simulationen enkel, starter vi med at definere vores startværdier a og b for hhv. middelværdien og variansen i log-prisen, S_T:

$$a = log(S_0) + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$
$$b^2 = \sigma^2 T$$

I dette setup er μ det risikofyldte afkast og σ volatiliteten for det underliggende aktiv. Lad $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ udgøre en std. normalfordelt stokastisk variabel og Y være den eksponentielle parametrisering givet ved:

$$Y = e^{bZ+a},$$

hvorledes Y følger lognormalfordelingen. Derudover udgør Y værdien af det underliggende aktiv på udløbstidspunktet S_T dvs. målet for simulationen. For en call-option med strike K betragtes dermed payoff-funktionen $\Phi(Y) = (Y-K)^+$. Vi omformulerer nu dette til en algoritme i R-syntaks, hvilket først kræver at vi angiver værdierne S_0, K, μ, σ, T, r og N ved starttidspunktet:

```
a=log(S_0)+ mu*T-0.5*sigma^2*T
b=sigma^2*T
E=0
for (i in 1:N){
Z = rnorm(1)
Y = exp(b*Z+a)
E=E+max(Y-K)
}
E=E/N
V=exp(-r*T)*E
```

3.3.2 Simulation

Forskellen fra ovenstående og denne metode er, at vi i denne metode benytter os af en *random walk* baseret på GBM til at generere en simuleret værdi for S_T, hvor vi nu i stedet benytter det risikofrie afkast som driftkoefficient i simulationen. Vi simulerer værdien for S_T et statistisk stort N antal gange. Den forventede værdi af payoff'et findes da ved middelværdien af samtlige simulerede S_T-værdier. Optionens pris er da den tilbagediskonterede værdi af det forventede payoff. Payoff-funktionen for call-optionen er dog stadig givet ved $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$. Vi kræver kendskab til værdierne S_0, K, μ, σ, T, r og N ved starttidspunktet, men har også brug for kendskab til Δt, som betegner længden af tidsenhederne i vores setup. Med disse startværdier opstilles betragtes algoritmen i følgende R-syntaks:

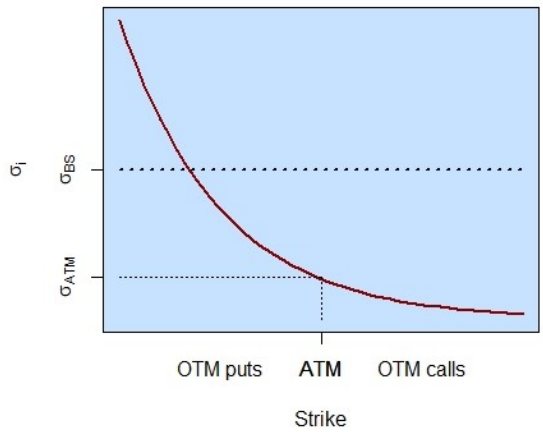
```
E=0
for (i in 1:N){
n=T/deltat
for (t in 1:n){
Z_t = rnorm(1)
if(t==1) {
deltaSt = S_0*(mu*deltat+sigma*sqrt(deltat)*Z_t)
S[t] = S_0+deltaSt
}
else {
deltaSt = S[t-1]*(mu*deltat+sigma*sqrt(deltat)*Z_t)
S[t] = S[t-1]+deltaSt
}
}
E=E+max(S[n]-K)
}
V=exp(-r*T)*E/N
```

3.4 Fejl/mangler i Black-Scholes-modellen

Black-Scholes-modellens antagelse om konstant volatilitet er i uoverensstemmelse med det empiriske optionsdata. For mange aktiver er volatiliteten tidsvarierende, stokastisk og/eller afhængig af strikeprisen på optionen. Forskellige call-optioner handles til forskellige implicitte volatiliteter i markedet afhængig af strike og levetid. Det er således muligt at afbilde implicit volatilitet som funktion af strike og levetid i en 3-dimensionel flade.

3.4.1 Volatilitetsflade

Figur 2 afbilder den implicitte volatilitet i et 2D-plot som funktion af strike, et såkaldt volatilitetsskew da 3. dimension med resterende tid til udløb ikke indgår:



Figur 2: Equity volatility skew

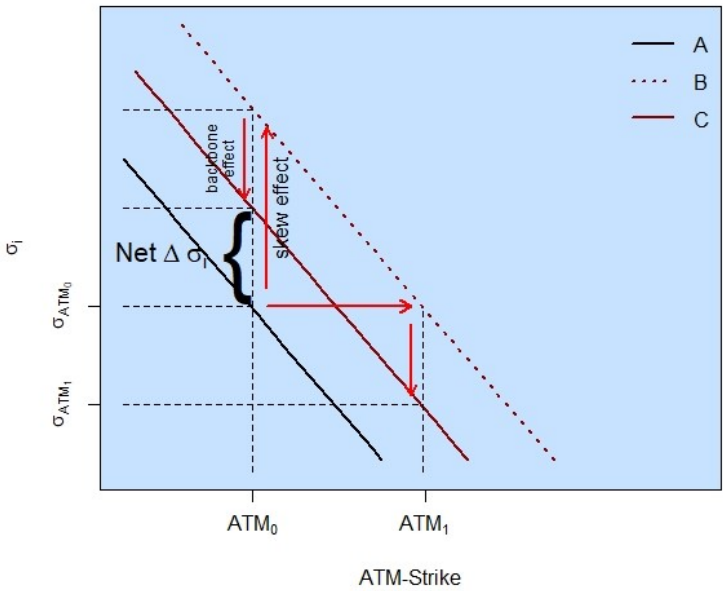
Forskellige strikes leder til forskellige implicitte volatiliteter, og i kraft af Put/Call-pariteten handles både puts og calls til samme σ_i når disse har ens strike og levetid. Som det ses handles lav-strike

puts til højere implicit volatilitet end høj-strike calls, et klart brud på Black-Scholes antagelsen om konstant volatilitet.

Årsagen til denne skævvridning i den implicitte volatilitet bunder i investorers afdækningsønsker i tilstande hvor aktiepriser falder drastisk. Øget implicit volatilitet for visse strikekurser fortæller, at markedet tillægger større sandsynlighed i disse tilstande. Indenfor *Equity*-markedet tillægges der i dette tilfælde større sandsynlighed i tilstande hvor aktiepriser skulle falde - en såkaldt "bad state". I så fald vil markedsdeltagere afdække lange aktie-positioner ved at købe out-of-the-money (OTM) puts, hvilket derfor driver likviditeten og σ_i på disse optioner op.

3.4.2 Volatilitetens følsomhed i underliggende

Volatilitetsfladen repræsenteret 2-dimensionelt i figur 2 giver et billede af volatilitetsniveauet for forskellige strikes, men vi er ligeså interesseret i at betragte volatilitetens opførsel ved ændring i spotprisen. Denne opførsel kan demonstreres i følgende illustration:



Figur 3: Illustration af volatilitetseffekter

Med prisændringen $S_0 \to S_1$ hvor $S_0 < S_1$ observeret i underliggende aktiv forskydes volatilitetsfladen fra A til B, antaget ingen ændringer i ATM-volatiliteten σ_{ATM}. Denne effekt er forårsaget af optionens ændrede "moneyness"under den nye spotpris. En ATM-option ved S_0 vil ikke være ATM ved S_1, hvorfor effekten forskyder volatilitetsfladen op (ATM-vol "rolls up the skew", derfor kaldes effekten ofte skew-effekt). Imidlertid er den implicitte volatilitet ikke uændret når spotprisen ændres. En række modeller opstiller *backbone-effekten* som mål for volatilitetens følsomhed i den underliggende prisproces. Denne følsomhed kan ligeså beskrives ved $\frac{\partial \sigma_{ATM,t}}{\sigma S_t}$, hvorfor backbone-effekten ofte beskrives ved dette differentiale. Volatilitetsfladen er for Equity optioner oftest aftagende i spotpris, hvorledes $\frac{\partial \sigma_{ATM,t}}{\sigma S_t} < 0$, hvilket yder en negativ backbone-effekt. Således flyttes fladen ikke til B men

til C, på grund af volatilitetens følsomhed i underliggende, og nettoeffekten af den ændrede spotpris er en reducering i ATM-vol, $\sigma_{ATM_0} \rightarrow \sigma_{ATM_1}$.

4 Afdækning

En investor, der på tidspunkt t køber/sælger en call-option, er eksponeret mod forskellige risici under optionens levetid. Den mest nærværende risiko er bevægelser i det underliggende aktiv, hvilken investoren som beskrevet kan afdækkes mod ved sin position i aktivet, Δ. Der er ligeså både 1. & 2. ordensrisici forbundet med de resterende parametre i Black-Scholes-formlen, opsummeret i en række græske bogstaver, hvilke hver især spiller en rolle i derivatets risikoprofil.

4.1 *The Greeks*

Når en option er køb/solgt, ses prisen efterfølgende at stige eller falde, hvilket skyldes en række forskellige risikoprofiler. De kan påvirke prisen enten negativt eller positivt. For at forstå hvor stor påvirkningerne er fra de forskellige risikoprofiler, opstiller vi de såkaldte *Greeks*, som beskriver ændringerne i optionsprisen ud fra risikoprofilerne. Udviklingen i optionensprisen kan derfor beskrives ved 2. ordens Taylorudviklingen:

$$dV = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\theta} dt + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S_t}}_{\Delta} dS_t + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}}_{\Gamma} (dS_t)^2 + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \sigma}}_{\text{vega}} d\sigma + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial S_t \partial \sigma}}_{\text{vanna}} dS_t d\sigma + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}}_{\text{volga}} (d\sigma)^2$$

Her ses hver partielle afledte beskrevet ved græske bogstaver (de første 3 gør i det mindste), hvilke hver især har følgende betydning (for et dividendefrit underliggende aktiv).

4.1.1 Delta

Δ er udtryk for adskillige ting i denne sammenhæng, både position i underliggende aktiv i afdækningsporteføljen og samtidig følsomhed for bevægelser i det underliggende aktiv. Ligeså kan den tolkes som sandsynligheden for, at optionen ender ITM - dvs. denne har en positiv udbetaling ved udløb. Den partielle afledte for call-optionen tager form:

$$\Delta = \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S_t} = \mathcal{N}(d_1), \tag{4.1}$$

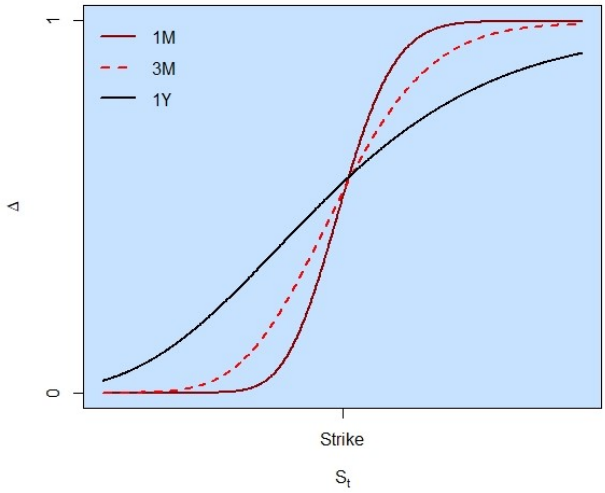
Hvorledes differentialet med denne form sker ved:

$$\begin{aligned}
\Delta = \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t}\left[S_t \mathcal{N}(d_1)\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\
&= \mathcal{N}(d_1) + S_t\mathcal{N}'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\
&= \mathcal{N}(d_1) + S_t\mathcal{N}'(d_1)\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2)\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= \mathcal{N}(d_1) + \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\left[S_t\mathcal{N}'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2)\right]
\end{aligned}$$

Hvilket kan forkortes i og med:

$$\begin{aligned}
Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2) &= Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}) \\
&= Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_1)e^{d_1\sigma\sqrt{T-t}}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\
&= Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_1)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\frac{S_t}{K}e^{rT}e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\
&= S_t\mathcal{N}'(d_1)
\end{aligned}$$

Hvorledes Δ kan reduceres ned til formen i ligning (4.1). I og med Δ udgør ITM-sandsynligheden, er denne ligeså afgrænset i intervallet $\Delta \in \left[0,1\right]$ (for put-optioner ses $\Delta \in \left[-1,0\right]$). Følsomheden i call-optionen er positiv overalt, da en infinitesimal stigning i spotprisen altid øger optionsprisen. Denne følsomhed ses afbildet i figur 4 for en option med hhv. 1 måned, 3 måneder og 1 år til udløb:



Figur 4: Illustration af Δ for Call-option

Optioner med længere løbetid har en fladere profil, da der i disse optioner stadig er stor sandsynlighed for realisering af markante ændringer i den underliggende prisproces. Dette er mindre sandsynligt i optioner med kortere tid til udløb, hvorfor følsomheden i disse optioner især vokser når spotprisen er i nærheden af ATM. I takt med at den resterende tid til udløb reduceres grænser Δ mod step-

funktionen:

$$\lim_{t \to T} \Delta = \begin{cases} 0, & S_T < K \\ 1, & S_T > K \end{cases}$$

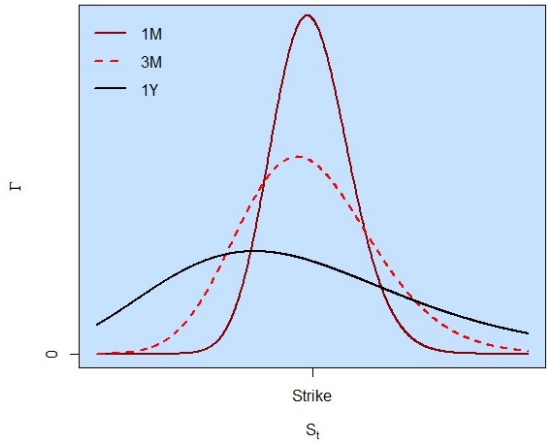
Derudover betragtes Δ ofte som tommelfingerregel for om optionen er ITM eller OTM (også kaldet optionens *moneyness*). Hvis optionen er ATM har den ca. $\Delta \approx 0.5$ før udløb. Det ses ligeså i grænseværdien, at en OTM option har $\Delta = 0$, ændringer i spotprisen ikke forplanter sig i den værdiløse option, mens en ITM option har $\Delta = 1$, da ændringer i spotprisen direkte påvirker randbetingelsen $(S_T - K)^+$. De største ændringer i Δ ses i kortsigtede ATM-optioner, hvilket bl.a. kan betragtes i næste *Greek*, Γ.

4.1.2 Gamma

I og med Δ beskriver følsomheden for ændringer i underliggende, beskriver Γ, som nævnt tidligere, følsomheden for bevægelser i Δ. Som 2. ordensafledt i det underliggende aktiv betragtes Γ således også som udtryk for optionens konveksitet / krumning i optionsværdien. Den tager form:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C_t^{BS}}{\partial S_t^2} = \mathcal{N}'(d_1) \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$$

Denne følsomhed ses afbildet i figur 5:



Figur 5: Illustration af Γ for Call-option

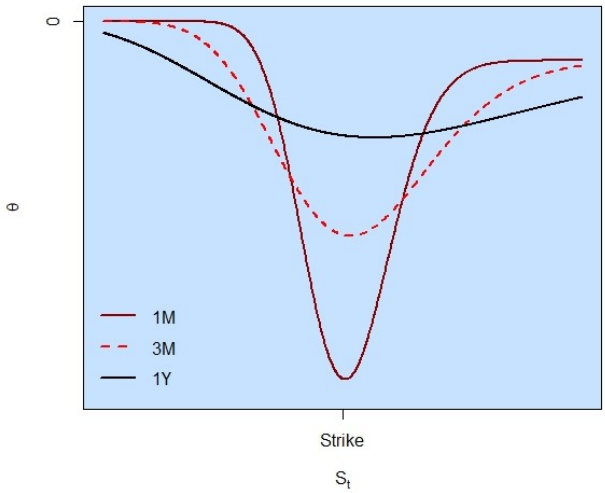
Γ beskriver optionsprisens krumning ift. underliggende. Denne er særligt stor for ATM- eller nær-ATM-optioner med kort tid til udløb. Disse optioner bliver derfor ofte betegnet, som lange Γ optioner. Γ vil gradvis aftage, jo mere ITM eller OTM optionen er. Ligeså findes stor følsomhed i Δ's hurtige ændringer, hvilket ligeså har en umiddelbar påvirkning på rebalanceringen i en hedgeportefølje. Vi kan f.eks. betragter en OTM-option med $\Delta = 0.25$ 2 dage inden udløb, og prisen på underliggende stiger voldsomt 1 dag inden udløb, hvilket gør optionen ITM. Her vil $\Delta \to 1$ indenfor kort tid, hvilket kraftigt øger optionens Γ. Dermed betragtes Γ også som accelerationen i optionsprisen.

4.1.3 Theta

θ kaldes ofte tidsforfald/-værdi og beskriver hvorledes optionens følsomhed for en reducering i den resterende tid inden udløb. Vi ser generelt et inverteret/negativt forhold mellem Γ og θ, da tidsforfald reducerer optionens mulighed for at realisere store bevægelser i underliggende - dermed svinder udnyttelsen af optionskonveksiteten. θ tager formen:

$$\theta = \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial t} = -Ke^{-r(T-t)}\left[r\mathcal{N}(d_2) + \mathcal{N}'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\right],$$

og kan betragtes i figur 6:



Figur 6: Illustration af θ for Call-option

Som figur 6 viser er θ størst for ATM-optioner tæt på udløb. Disse optioner er mest følsomme i reducering af den tilbageværende tid, da sandsynligheden for at optionsværdien kan gå begge veje her er størst. Men i modsætning til Γ og Δ er θ altid negativ, da en reducering af tid til udløb sænker sandsynligheden for at realisere ændringer i den underliggende prisproces. Uden ændringer i spotprisen bliver ATM-optionen derfor værdiløs, når vi nærmer os udløb. Vi betragter ligeså en større følsomhed i ITM optioner end OTM optioner. Værdien i disse optioner påvirkes direkte af ændringer i spotprisen, hvorfor en reducering af løbetiden, hvori disse ændringer kan forekomme, sænker optionsværdien.

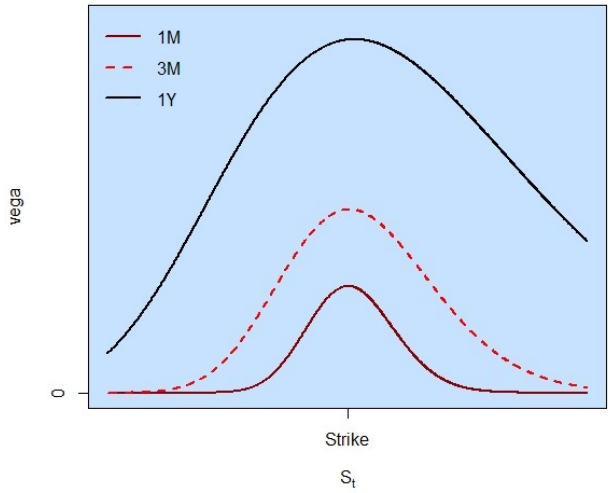
4.1.4 *Vega*

Følsomheden overfor ændringer i det underliggende aktivs volatilitet kaldes *vega*. Her spiller optionens konveksitet også en markant rolle, da denne netop beskriver følsomheden for drastiske ændringer i den underliggende pris. Konveksiteten medfører, at stigningen i optionsværdien, forårsaget af en stor opadgående bevægelse i underliggende, vil være større end faldet i optionsværdien forårsaget af en tilsvarende nedadgående bevægelse i underliggende. Denne egenskab udtrykkes simpelt i *vega*, da større

volatilitet medfører større bevægelser i underliggende. *Vega* kan beskrives ved:

$$vega = \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial \sigma} = S_t \mathcal{N}'(d_1)\sqrt{T-t},$$

og ses afbildet i figur 7:



Figur 7: Illustration af *vega* for Call-option

Følsomheden er positiv, men i modsætning til Γ er den størst for langsigtede optioner, da disse har længere tid til at realisere effekten af større bevægelser.

Vega er typisk højere for optioner, der er ATM, og falder når optionen bliver mere ITM eller OTM. Som i nogle af de andre *Greeks*, så skyldes dette uvisheden om optionens udfald ved udløb. I dette tilfælde vil en større volatilitet gøre sandsynligheden for at forblive ATM mindre, som derfor øger prisen på optionen. En højere volatilitet er ikke en garanti på højere værdi på det underliggende, men derimod en garanti på større variation i værdien af det underliggende. Dermed er der mulighed for at vinde en større gevinst, der øger prisen på optionen. Denne effekt er mest tydeligt, når optionen nærmer sig udløbstidspunktet.

Det kan måske anes i figur 7, at ITM-optioner med lang tid til udløb er mere følsomme i øget volatilitet end tilsvarende OTM optioner. Denne følsomhed kan betragtes, da effekten af større bevægelser i underliggende bidrager direkte til værdien på ITM-optioner. I OTM-optioner er der stadig væsentlig sandsynlighed for værdiløse udfald, hvorfor *vega*-effekten øger optionsværdien i mindre grad.

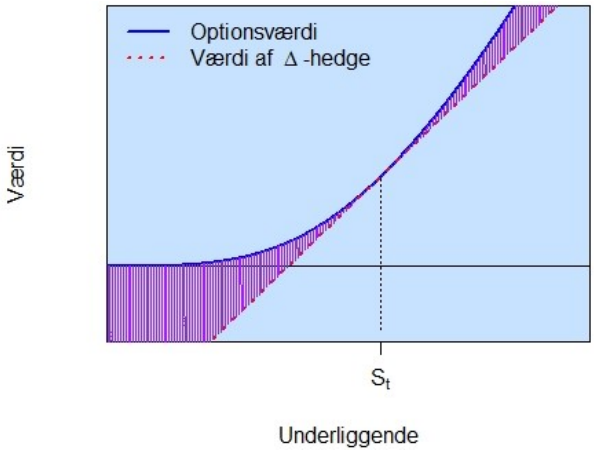
4.1.5 Vanna/Volga

I Black-Scholes antages volatiliteten konstant, hvorfor disse greeks ingen rolle spiller. Men optionsdata viser store følsomheder i disse *greeks*, især da volatiliteten ikke er uændret mens vi observerer ændringer i spotprisen, jf. backbone-effekten i figur 3. I modeller med stokastisk volatilitet spiller disse

følsomheder ligeså en stor rolle. Ofte er *vanna* knyttet til korrelationen mellem risikokilden i underliggende og risikokilden knyttet til volatiliteten, og *volga* knyttet til volatiliteten på risikokilden i den stokastiske proces for volatiliteten, ofte beskrevet som vol-at-vol.

4.2 Δ-afdækkede porteføljer

Som det ses i figur 8 yder optionskonveksiteten en positiv værdi for en Δ-afdækket option, hele det skravede område udgør optionens potentielle upside:



Figur 8: Konveksitetsgavn af Δ-hedge

Vi kan betragte den korte afdækningsperiode givet ved den infinitesimale diskrete tidstilvækst Δt. Over denne periode kan vi ignorere 3. og 4. ordens greeks, så ændringen i optionsprisen er givet ved:

$$\Delta V_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\Delta S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}(\Delta S_t)^2$$

Efter Δ-hedge vil følsomheden for bevægelser i underliggende være neutraliseret, dvs. afdækningsporteføljens P&L efter tidstilvæksten Δt er

$$\text{P\&L} = \theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma_t(\Delta S_t)^2 \tag{4.2}$$

Her er det vigtigt at antagelsen om kontinuitet i S_t passer, hvis der fremkommer diskontinuerte spring i det underliggende vil ovenstående approksimation for prisændringen være fejlagtig. I og med $\theta \leq 0$ for lange positioner i optionen skal optionskonveksiteten givet i Γ kompensere for dette, for at give en positiv P&L. Den bevægelse i det underliggende hvor de to effekter går ud, er netop givet ved break-even P&L'en:

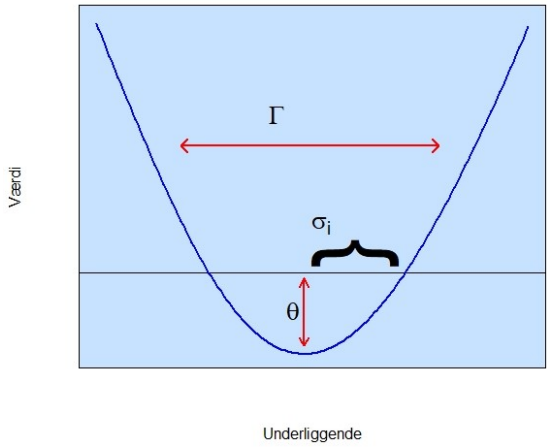
$$\text{P\&L} = 0 \implies \frac{\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right)^2}{\Delta t} = -\frac{2\theta}{\Gamma_t S_t^2} \tag{4.3}$$

I denne ligning er venstresiden et udtryk for størrelsen af bevægelse i underliggende pr. tidsenhed Δt. Størrelsen $\frac{\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right)^2}{\Delta t}$ udgør det kvadrerede afkast i spotprisen skaleret på tidstilvæksten Δt, svarende til den forventede umiddelbare varians i prisprocessen, σ^2. Optionsprisen er dermed "fair" mod

volatiliteten når

$$\theta = -\frac{1}{2}\Gamma_t S_t^2 \sigma^2 \tag{4.4}$$

Markedets mål for volatiliteten som udligner effekterne er netop givet ved den implicitte volatilitet σ_i. Effekterne i ligning (4.4) kommer til udtryk i figur 9, hvori følsomhederne ses for en lang position i optionen.



Figur 9: Δ-HEDGE OPTION P&L I TIDSTILVÆKST Δt

Konveksiteten givet i Γ angiver ligeså krumningen af den øjeblikkelige P&L. Kortsigtede ATM-optioner krummer mere, dvs. hedge-værdien konvergerer hurtigere, imidlertid har de et omfattende tidsforfald - man kan som optionshandler dermed ikke vinde begge effekter.

Hvis den realiserede volatilitet (volatiliteten som effektivt opleves under afdækningsperioden), $\sigma_r > \sigma_i$ a.s., vil underliggende bevæge sig forbi break-even punktet (på en vilkårlig side), hvilket yder en profit på den afdækkede option.

5 The Fundamental Theorem of Derivative Trading

Betragt nu et finansielt marked med et hhv. risikofrit og risikofyldt aktiv. Det risikofyldte aktiv udbetaler en kontinuert dividende. Vi antager formelt informationsstrømmen i dette marked opfanget i den stokastiske basis $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, hvor Ω repræsenterer alle mulige tilstande i økonomien, $\mathbb{P}$ er det fysiske sandsynlighedsmål og $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ er en filtrering, som opfylder højre-kontinuitet ($\cap_{s\geq t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$) og komplethed ($\mathcal{F}_0$ indeholder alle $\mathbb{P}$ tomme mængder). Prisprocessen på det risikofyldte aktiv antages at følge den "sande" dynamik:

$$dS_t = \mu_r(t, \tilde{S}_t)S_t dt + \sigma_r(t, \tilde{S}_t)S_t dW_t \tag{5.1}$$

hvor W_t er en BM tilpasset $\mathbb{F}$. Derudover antages μ_r og σ_r at være deterministiske funktioner, med tilstrækkelig "pæn" opførsel så den stokastiske differentialligning har en unik stærk løsning. Vi antager

specifikt, at disse overholder regularitetsbetingelserne a.s. $\forall t \leq s$:

$$\int_t^s \mu_r(u, \tilde{S}_u) S_u < \infty, \qquad \int_t^s \Big(\sigma_r(u, \tilde{S}_u) S_u\Big)^2 < \infty \tag{5.2}$$

Ovenstående sikrer mulig integration af dynamikkens komponenter, således at prisprocessen i det underliggende aktiv hverken divergerer i drift eller diffusion. Ligeså defineres $\tilde{S}_t$ som den $(1+m)$-dimensionelle vektor $(S_t; \chi_t)$ hvor $\chi_t = \Big(\chi_{1,t}, \quad \ldots, \quad \chi_{m,t}\Big)'$ tolkes som en m-dimensionel tilstandsvariabel, hvis præcise dynamiske natur ikke vil være fokuspunktet i hvad der her følger. I scenariet der forløber, når vi afdækker en option på aktivet S_t, er vi ignorante overfor eksistensen af tilstandsvariablen χ_t såvel som formen af $\mu_r(\ldots)$ og $\sigma_r(\ldots)$. Vi vil specifikt forestille os, at være så misviste, at vi modellerer dynamikken bag S_t som en lokal volatilitetsmodel med diffusionskoefficienten $\sigma_h(t, S_t)$. Lignende antagelser vedrører markedet, selvom vi her angiver den implicitte diffusionskoefficient $\sigma_i(t, S_t)$ for at kunne skelne denne fra vore egne forestillinger. Uanset hvilken dynamisk specifikation opstilles for aktivet, opretholder vi regularitetsbetingelser analog til ligning (5.2).

5.1 FToDT, Teorem & Bevis

Lad $V_t = V(t, S_t)$ være prisprocessen på en europæisk option med slutværdi $\Phi(S_T)$, hvor det underliggende af dette følger dynamikken i ligning (5.1). Optionen antages at kunne handles i markedet til den (ikke nødvendigvis unikt bestemte) implicitte volatilitet $\sigma_i = \sigma_i(t, S_t)$. Antag nu, at vi på tid $t = 0$ agter at Δ-afdække vores position. Denne afdækning opstilles under forestillingen, at volatilitetsfunktionen faktisk burde være på formen $\sigma_h = \sigma_h(t, S_t)$, hvilket leder til den fair værdiproces V_t^h. Dermed er nutidsværdien af profit-&-tabet vi pådrager os for at holde en sådan portefølje i intervallet $\mathbb{T} = [0, T]$:

$$P\&L_{\mathbb{T}}^h = V_0^h - V_0^i + \frac{1}{2}\int_0^T \left[e^{-\int_0^t r_u du}\left(\sigma_r^2 - \sigma_h^2\right) S_t^2 \Gamma_t^h\right] dt \tag{5.3}$$

hvor $r_u = r(u, S_u)$ er den lokale risikofrie rente.

5.1.1 Bevis

Antag at vi på tidspunkt $t = 0$ køber en option V_t^i ved markedets implicitte volatilitet σ_i, og afdækker ved at sælge $\Delta_t^h = \frac{\partial V_t^h}{\partial S_t}$ enheder af underliggende med hedge-volatiliteten $\sigma = \sigma_h(t, S_t)$ - dette sker under antagelsen , at ligning (3.5) er den gældende dynamik for det risikofyldte aktiv S_t, og at denne tilmed udbetaler en kontinuerlig dividendestrøm, q_t. Hedge-porteføljen baseret på denne opstilling tager dermed formen:

$$\Pi_t^h = V_t^i - \Delta_t^h S_t + B_t, \tag{5.4}$$

hvor pengemarkedskontoen B_t tillades en tidsvarierende sågar stokastisk forrentning r_t og afstemmes således, at værdien af ovenstående er 0 altid. Betragt nu den infinitesimale ændring i porteføljeværdien over intervallet $[t, t + dt]$, hvor $t \in [0, T[$. Porteføljen er konstrueret som selvfinansierende, under selvfinansieringsbetingelsen ses dermed:

$$d\Pi_t^h = dV_t^i - \Delta_t^h \left(dS_t + q_t S_t dt\right) + r_t B_t dt \tag{5.5}$$

Ovenstående dynamik kan udvides ved at skrive pengemarkedskontoen B_t fra ligning (5.4) ud

$$d\Pi_t^h = dV_t^i - \Delta_t^h \left(dS_t - (r_t - q_t) S_t dt\right) - r_t V_t^i dt \tag{5.6}$$

Betragt optionsværdien under hedge-volatiliteten $\sigma_h(t, S_t)$, ved Itō's formel er denne:

$$dV_t^h = \left[\frac{\partial V_t^h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2(t, S_t) S_t^2 \frac{\partial^2 V_t^h}{\partial S_t^2}\right] dt + \frac{\partial V_t^h}{\partial S_t} dS_t \tag{5.7}$$

hvor S_t følger dynamikken beskrevet i ligning (5.1). V_t^h opfylder Black-Scholes PDE'en for et dividendebetalende underliggende aktiv (ligning (3.13)):

$$\frac{\partial V_t^h}{\partial t} + (r_t - q_t) S_t \frac{\partial V_t^h}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma_h^2(t, S_t) S_t^2 \frac{\partial^2 V_t^h}{\partial S_t^2} = r_t V_t^h \tag{5.8}$$

Ved at kombinere PDE'en i ligning (5.8) med V_t^h-dynamikken i ligning (5.7) (f.eks. ved substitution af $\frac{\partial V_t^h}{\partial t}$) ses:

$$0 = -dV_t^h + r_t V_t^h dt + \Delta_t^h \left(dS_t - (r_t - q_t) S_t dt\right) + \frac{1}{2}\left[\sigma_r^2(t, S_t) - \sigma_h^2(t, S_t)\right] S_t^2 \Gamma_t^h dt, \tag{5.9}$$

Dette udtryk kan lægges til hedge-dynamikken i ligning (5.6), da begge pr. konstruktion har værdien 0:

$$\begin{aligned} d\Pi_t^h &= dV_t^i - dV_t^h - r_t \left(V_t^i - V_t^h\right) dt + \frac{1}{2}\left[\sigma_r^2(t, S_t) - \sigma_h^2(t, S_t)\right] S_t^2 \Gamma_t^h dt \\ &= e^{\int_0^t r_u du} d\left(e^{-\int_0^t r_u du}(V_t^i - V_t^h\right) + \frac{1}{2}\left[\sigma_r^2(t, S_t) - \sigma_h^2(t, S_t)\right] S_t^2 \Gamma_t^h dt \end{aligned} \tag{5.10}$$

Med den midlertidige variabel $\Theta_t = e^{-\int_0^t r_u du}(V_t^i - V_t^h)$, kan første led i ovenstående ligning ses frembragt ved Itō's formel:

$$\begin{aligned} d\Theta_t &= \frac{\partial \Theta_t}{\partial V_t^i} dV_t^i - \frac{\partial \Theta_t}{\partial V_t^h} dV_t^h + \frac{\partial \Theta_t}{\partial t} dt \\ &= e^{-\int_0^t r_u du} dV_t^i - e^{-\int_0^t r_u du} dV_t^h - e^{-\int_0^t r_u du} r_t \left(V_t^i - V_t^h\right) dt \end{aligned}$$

En perfekt afdækning vil resultere i ingen værdiændring i porteføljen under afdækningshorisonten, men dette er tydeligvis ikke tilfældet. Tilbagediskontering af ligning (5.10) og integrering af de infinitesimale

komponenter leder til et netto profit-&-tab:

$$\begin{aligned} P\&L^h_{\mathbb{T}} &= \int_0^T e^{-\int_0^t r_u du} d\Pi^h_t \\ &= \int_0^T d\left(e^{-\int_0^t r_u du}(V^i_t - V^h_t\right) + \int_0^T e^{-\int_0^t r_u du} \frac{1}{2}\left[\sigma_r^2(t,S_t) - \sigma_h^2(t,S_t)\right] S_t^2 \Gamma^h_t dt \\ &= V^h_0 - V^i_0 + \frac{1}{2}\int_0^T e^{-\int_0^t r_u du}\left[\sigma_r^2(t,S_t) - \sigma_h^2(t,S_t)\right] S_t^2 \Gamma^h_t dt \end{aligned} \tag{5.11}$$

Bemærk $V^i_T = V^h_T = \Phi(S_T)$, hvilket reducerer første led til den initielle værdiforskel i optionen, $V^i_t - V^h_t$. Dernæst repræsenterer 2. led fluktuationerne mellem hedgerens anvendte volatilitetsmodel $\sigma_h(t,S_t)$ og den sande volatilitet i underliggende $\sigma_r(t,S_t)$.

5.1.2 Implikationer/Bemærkninger

Dette er et kerneresultat indenfor optionsafdækning, da det viser vellykket afdækning mulig selv under væsentlig fejlagtighed i den anvendte afdækningsmodel. Vi bemærker ud fra resultatet:

- Vellykket afdækning vurderes i sin helhed på forskellen mellem hedge-volatiliteten $\sigma_h(t,S_t)$ og den sande lokale volatilitet $\sigma_r(r,S_t)$. F.eks. hvis vi er så heldige at $\sigma_h(t,S_t) \leq \sigma_r(t,S_t)$ a.s. $\forall t$, vil afdækningsstrategien Π^h_t tjene en profit med sandsynlighed 1. Selvom den korrekte model i ligning (5.1) er væsentlig forskellig fra den antagne model, såfremt $\Gamma_t \geq 0$, hvilket er gældende for vanilla (regulære) call- & put-optioner.
- Hedgefejlen afhænger ligeså af optionskonveksiteten Γ_t. Hvis Γ_t er lille vil hedgefejlen være lille på trods af stor fejlagtighed i den antagne volatilitetsmodel.
- Den slutgyldige hedgefejl i ligning (5.11) afhænger af hele P&L-stien under optionens levetid - ikke kun af terminalværdien S_T.

6 Willmott's hedge-eksperiment

Vi vil nu vise hvordan P&L'en i ligning (5.3) ser ud under kontrollerede forhold - mere præcist med anvendelse af simuleret data for udviklingen i S_t og konstant σ_r og σ_i. Det underliggende aktiv simuleres under forudsætningen, at dets udvikling følger Black-Scholes antagelser. Efter vi har lavet Willmott's hedge-eksperiment med simuleret data, vil vi gå over til observeret data på S&P 500 indeksoptioner (virkeligt data). Ved først at se på simuleret data kan vi i et vist omfang få dannet et overblik over FToDT-sætningens umiddelbare følger for hedge-porteføljer.

6.1 Δ-hedge med realiseret volatilitet

Som vist i afsnit 5.1 så vil værditilvæksten i vores hedge-porteføjle svare til ligning (5.3) på side 27. Hvis vi skulle være så heldige under afdækningen, at vores model yder en eksakt hedgevolatilitet

$\sigma_h(t, S_t) = \sigma_r(t, S_t)$ vil integranden og dermed hele stokastikken udgå fra ligning (5.3), hvorledes denne reduceres til:

$$P\&L^r_{\mathbb{T}} = V^r_0 - V^i_0$$

Det vil altså sige, at vi på tidspunkt 0 allerede kender P&L'ens tilbagediskonterede værdi før vi overhovedet går i gang med at hedge. Det skal dog bemærkes, at selvom vi kender værdien af P&L'en, så er P&L-stien under afdækningshorisonten stadig fuldstændig stokastisk. Dette kan vi se ved at lægge ligning (5.6) på side 28 til ligning (5.9) på side 28. I ligning (5.5) sættes $h = r$ og i ligning (5.9) sættes $h = i$. Når vi har gjort det, får vi følgende:

$$\begin{aligned} d\Pi^r_t = r_t V^i_t dt + r_t B_t dt - \Delta^r_t \left(dS_t + q_t S_t dt\right) \\ + \Delta^i_t \left(dS_t - \left(r_t - q_t\right) S_t dt\right) + \frac{1}{2}\left[\sigma^2_r\left(t, S_t\right) - \sigma^2_i\left(t, S_t\right)\right] S^2_t \Gamma^i_t dt \end{aligned}$$

Definitionerne på B_t og dS_t er med realiseret hedgevolatilitet:

$$\begin{aligned} B_t &= \Delta^h_t S_t - V^i_t \\ dS_t &= \mu\left(t, S_t\right) S_t dt + \sigma_r\left(t, S_t\right) S_t dW_t, \end{aligned}$$

hvor h'et i ligningen for B_t i dette tilfælde er r og S_t følger samme dynamik som i ligning (5.1). B_t vælges altid som residualværdien der udligner komponenterne i ligning (5.4) på side 27. Sammensættes alle disse informationer, kan værdiændringen i hedgeporteføljen reduceres til:

$$\begin{aligned} d\Pi^r_t = \frac{1}{2}\left[\sigma^2_r\left(t, S_t\right) - \sigma^2_i\left(t, S_t\right)\right] S^2_t \Gamma^i_t dt + \left(\Delta^i_t - \Delta^r_t\right)\left(\mu\left(t, S_t\right) - r_t + q_t\right) S_t dt \\ + \left(\Delta^i_t - \Delta^r_t\right) \sigma_r\left(t, S_t\right) S_t dW_t \end{aligned}$$

Som det ses af den overstående ligning er udviklingen i hedgeporteføljen ikke deterministisk, da ét led afhænger af risikokilden dW_t. Derfor vil vejen til den deterministiske slutværdi altid være usikker og præget af tilfældigheder trods vores kendskab til den afsluttende P&L. Dette kommer til udtryk i vores simulation af hedgeporteføljen.

Det skal dog bemærkes, at den afsluttende P&L kun er deterministisk i simulationen, da vi kan vælge den realiserede volatilitet og holde den konstant under optionens levetid. Når vi arbejder med reelle finansielle data vil P&L-stiens slutværdi ikke være deterministisk, grundet vores manglende kendskab til den sande realiserede volatilitet. Vi kan imidlertid med mere eller mindre succes estimere den ved brug af forskellige volatilitetsmodeller. Med en udvalgt volatilitetsmodel som grundlag for estimationen af den realiserede volatilitet betragtes dermed P&L'en:

$$P\&L^r_{\mathbb{T}} = V^r_0 - V^i_0 + \frac{1}{2}\int_0^T e^{-\int_0^t r_u du}\left[\sigma^2_r(t, S_t) - \hat{\sigma}^2_r(t, S_t)\right] S^2_t \Gamma^r_t dt,$$

hvor $\hat{\sigma}_r(t, S_t)$ udgør volatilitetsmodellens estimation af den realiserede volatilitet til tid t.

6.2 Δ-hedge med implicit volatilitet

Som vist i afsnit 5.1 så vil vores hedgeporteføljes værdi svare til ligning (5.11) på side 29. Hvis vi vælger at hedge med den implicitte volatilitet, dvs. $\sigma_h(t, S_t) = \sigma_i(t, S_t)$ og $V_0^h = V_0^i$, reduceres udtrykket til kun at indeholde integralet:

$$P\&L_{\mathbb{T}}^i = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-\int_0^t r_u du}\left[\sigma_r^2(t, S_t) - \sigma_i^2(t, S_t)\right] S_t^2 \Gamma_t^i dt$$

Denne P&L er stokastisk, da vi integrerer over den stokastiske proces S_t. Når vi afdækker med den implicitte volatilitet, har vi således ikke kendskab til resultatet - i modsætning til førnævnte afdækning med realiseret volatilitet, hvori P&L-værdien til slut er deterministisk.

Det er dog værd at bemærke at selvom vores P&L er stokastisk, så ved vi at værdiudviklingen i hedgeporteføljen $d\Pi_t^i$ ikke afhænger direkte af risikokilden. Dette leder til pointen "dårlige modeller udløser blødning - ikke sprængning" - impulser fra den stokastiske kilde har indirekte påvirkning på hedgeporteføljen. Dermed iagttages ikke afdækningsfejl direkte proportionelle med værdiændringen i det underliggende aktiv for dårligt afdækkede positioner.

Hvorvidt en hedgestrategi med implicit hedgevolatilitet er rentabel, er i sig selv et meget komplekst problem. Men vi kan iagttage, hvad der skal være opfyldt, for at vores P&L er positiv med sandsynlighed 1. Da $e^x \geq 0, x \in \mathbb{R}$, $S_t^2 \geq 0$ og $\Gamma_t^i \geq 0$ er den eneste komponent, der kan ændre fortegn på P&L'en givet ved $\sigma_r^2(t, S_t) - \sigma_i^2(t, S_t)$. Dermed vil $\sigma_r^2(t, S_t) - \sigma_i^2(t, S_t) > 0, \ \forall \ t$ altid resultere i en positiv P&L.

6.3 Simulation

Udgangspunktet for simulationen er en Black-Scholes verden, dvs. at afkastraten μ og volatiliteten σ begge er konstante, og vi kan dermed let simulere udviklingen i prisprocessen for det underliggende aktiv ud fra antagelsen, at det følger en GBM ved dynamikken:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Løsning til denne ligning er vist i afsnit 3.2.4 under $\mathbb{Q}$-målet. På tilsvarende vis kan vi finde løsningen under $\mathbb{P}$-målet:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} W_t}, \tag{6.1}$$

Ligning (6.1) angiver den simulerede værdi i det underliggende aktiv efter Δt tid er passeret, og danner udgangspunkt for værdiudviklingen i S_t i Willmott's hedge-eksperiment. Det antages at μ og σ er kendt på forhånd, og da ligning (6.1) udtrykker prisudviklingen i det underliggende aktiv, kan σ i

eksponenten betragtes som den realiserede volatilitet.

Vi opstiller 2x10 forskellige hedge-forsøg. De første 1x10 vil være med anvendelse af den realiserede volatilitet som hedgevolatilitet, og de næste 1x10 med implicit volatilitet som hedgevolatilitet. Følgende parametre vil indgå indgå i simulationseksperimentet:

- $S_0 = 100$
- $\mu = 10\%$
- $q = 0\%$
- $\sigma_r = 30\%$
- $K = 100$
- $r = 5\%$
- $T = 0.25$
- $\sigma_i = 20\%$

Som udgangspunkt anvendes optioner med 3 måneder til udløb, hvorledes $T = \frac{3}{12} = 0.25$ angiver annualiseret tid til udløb. Renten r antages ligeså at være konstant i denne simulation.

Når vi nu har valgt alle vores variable, så mangler vi blot at vælge afdækningsfrekvensen under den 3-måneders horisont optionen dækker over. Afdækningsfrekvensen på vores portefølje har stor indflydelse på niveauet i den afsluttende P&L. Når vi bruger den realiserede volatilitet, vil resultatet altid være deterministisk, men øget frekvens vil øge præcisionen af vores resultat mod det teoretiske resultat, jf. tabel 25 i Bilag A.

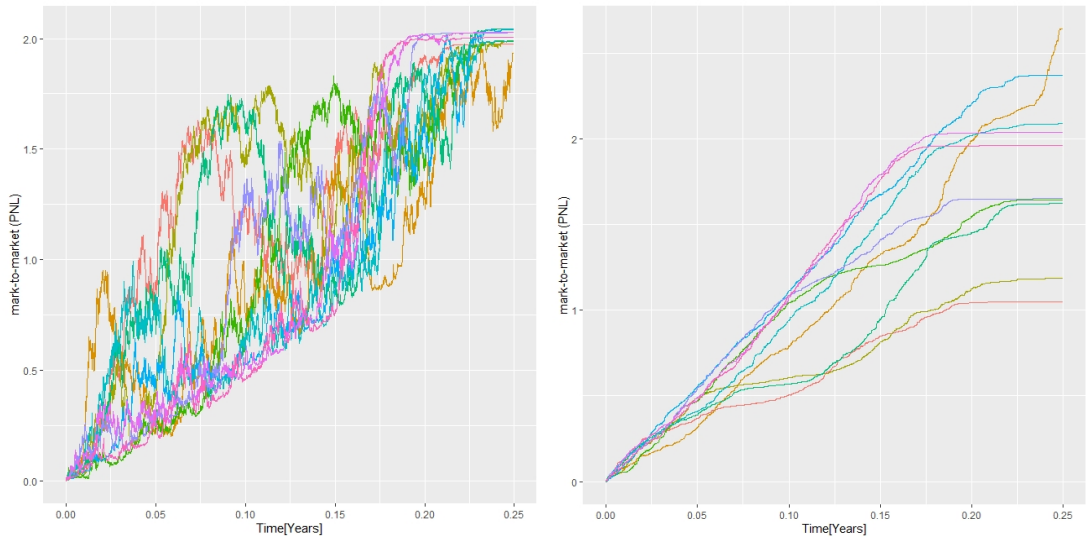
Med vores faste parametre har vi følgende optionspriser og porteføljeværdi (for porteføljen med den realiserede volatilitet):

- $V_0^i = 4.614997$
- $V_0^r = 6.583084$
- $e^{rT}(V_0^r - V_0^i) = 1.992843$,

hvor $e^{rT}(V_0^r - V_0^i)$ angiver den fremdiskonterede P&L-værdi af den realiserede hedgeportefølje. Dette er den teoretiske værdi, som vi regner med at få med realiseret volatilitet i afdækningen. I vores simulation har vi valgt frekvensen 5000, hvorledes denne frekvens med 5000 afdækninger i løbet af 3 måneder kræver tidstilvæksten mellem hver afdækning $\Delta t = \frac{0.25}{5000}$.

På figur 10 er P&L-stierne for hhv. den realiserede og implicitte hedgevolatilitet afbildet. De stokastiske fluktuationer i afdækning med realiseret hedgevolatilitet er især bemærkelsesværdige, jf. figur 10a, men er i teorien fuldstændigt ventede, da værdiudviklingen i hedgeporteføljen er direkte eksponeret mod risikokilden dW_t. Ligeså ses stierne at konvergere mod den teoretiske værdi $e^{rT}(V_0^r - V_0^i) = 1.992843$, efterhånden som optionens løbetid passerer. Nogle stier ender kun approksimativt ved den teoretiske værdi, hvilket skyldes ikke-kontinuert afdækning. Den diskrete frekvens på 5000 yder afdækning flere gange dagligt, men er på ingen måde kontinuert, hvorfor P&L-stierne kun approksimativt ender ved den teoretiske værdi. I Bilag A tabel 25 er forsøget opstillet med forskellige afdækningsfrekvenser for 10 simulerede stier.

(a) P&L med hedge-vol: $\sigma_h = \sigma_r$ (b) P&L med hedge-vol: $\sigma_h = \sigma_{imp}$



Figur 10: Simulerede P&L-stier

I figur 10b er P&L-stierne med den implicitte volatilitet som hedgevolatilitet afbildet. Det bemærkelsesværdige her er stiernes mere eller mindre glatte kurver med en ikke-deterministisk slutværdi ved udløb. Som før nævnt skyldes dette hedgeporteføljens indirekte eksponering mod risikokilden dW_t. Imidlertid er udløbsværdien stokastisk, da vi integrerer mht. den stokastiske proces dS_t, og vi ved derfor ikke, hvor meget vi tjener. Disse simulationer er dog alle rentable, da vi har valgt parametre, der opfylder $\sigma_r > \sigma_i$. I Bilag A tabel 26 er forsøget opstillet med forskellige afdækningsfrekvenser for 10 simulerede stier.

7 Data

I undersøgelsen af FToDT-sætningens empiriske validitet og gyldighed for hedgestrategier anvendes daglig S&P 500 indeksdata (under databasekoden/*ticker* SPX) med en række datafelter i perioden 2004-2009. Datasættet er repræsentabelt for SPX-optioner af varierende løbetid, men vi tager udgangspunkt i optioner med 3 måneder til udløb. Optionsløbetider repræsenteres ofte ved *tenoren* δ, for hvilken vores 3 måneders optioner vil have tenoren f.eks. $\delta = 3M$.

Det indsamlede data omfatter ligeså datapunkter for SPX-volatilitetsfladen, for hvilken vi traditionelt betragter strike-kursen på den ene akse. Det er mere overskueligt i databehandlingen at repræsentere denne akse ved strike-spot-forholdet, $\kappa = \frac{K}{S_t}$, hvor K udgør strike-kursen og S_t udgør spotkursen på underliggende. Vi vil anvende notationen κ_{K/S_t} for strike-spot-forholdet, en ATM-option vil således have $\kappa_1 = 1$. Med disse overvejelser i sinde betragtes datafelterne:

i) Underliggende spotkurs (S&P 500-indeksets daglige lukkepriser)

ii) Tenor $\delta \in \{1M, 2M, 3M, 6M, \ldots, 36M\}$

iii) Udløbsdato

iv) Ophør (antal år inden udløb)

v) Datapunkter i volatilitetsfladen for strike-spot-forhold $\kappa \in \{0.70, 0.75, \ldots, 1.30\}$, $\forall \delta$.

vi) Risikofri kortrente, r_t

vii) Dividenderate på underliggende, q_t

viii) Forward-spotkurs, fremdiskontering af dividendebærende spotkurs - dvs. $F_T \approx S_t e^{(r_t - q_t)\cdot(T-t)}$

ix) ATMF-vol (implicit volatilitet for ATM-optionen med Forward-spotkurs som underliggende)

Bemærk, trods vores fokus på 3 måneders optioner, skal vi stadig bruge data fra volatilitetsfladen på optioner med kortere tid til udløb efterhånden som den resterende løbetid på vores 3M option reduceres.

Udover vores primære data ovenfor, er der indenfor samme tidshorisont indsamlet supplerende SPDR S&P 500 Trust ETF (under databasekoden/*ticker* SPY) data. Det supplerende data indeholder prisen på SPY, som minutiøst følger SPX med en faktor $\frac{1}{10}$ (dvs. $S_{SPY} = \frac{1}{10} S_{SPX}$). Frekvensen på dette data er øget til 5 minutter, hvorledes det mellem hver afdækning vil være muligt at observere prisen på underliggende i intervaller af 5 minutter. Da vi udelukkende observerer disse priser, vil repræsentationen af SPY som underliggende aktiv ikke spille nogen rolle. Disse supplerende observationer anvendes kun i opstilling af Real-Δ-strategien, da vi i denne strategi kræver en højere frekvens end daglige observationer.

7.1 Interpolation i volatilitetsfladen

Den implicitte volatilitet varierer som følge af en række ting under afdækningshorisonten. Restløbetiden reduceres og underliggende bevæger sig, hvorledes vores option ikke vil være ATM længere. Vores datapunkter for volatilitetsfladen er som nævnt forankret i strike-spot-forholdet til givne tenorer, dvs. vi f.eks. for 2.5 måneder resterende løbetid, $\delta_{2.5M}$, og 1.01 strike-spot-forhold, $\kappa_{1.01}$, er nødsaget til at interpolere mellem tilgængelige datapunkter på volatilitetsfladen (i det her tilfælde mellem 2M og 3M på tidsaksen og 1 og 1.05 på strike/spot-aksen).

Vi anvender i første omgang en bilineær interpolationsmetode (tosidet lineær interpolation, da vi betragter tid og strike/spot). Betragt det tidligere eksempel med 2.5 måneders resterende løbetid og 1.01 strike-spot-forhold, dette vil kræve en interpolation i gitteret:

$\delta \setminus \kappa$	κ_1	$\kappa_{1.05}$
δ_{2M}	$\sigma_{\delta_{2M},\kappa_1}$	$\sigma_{\delta_{2M},\kappa_{1.05}}$
δ_{3M}	$\sigma_{\delta_{3M},\kappa_1}$	$\sigma_{\delta_{3M},\kappa_{1.05}}$

Volatilitetsinterpolationen vil foregå mellem 4 gitterpunkter svarende til ovenstående. Lad Σ repræsentere ovenstående gitter for en interpolation mellem 2 arbitrære tenorer og 2 arbitrære κ'er. For en option med restløbetiden $\delta^* \in [\delta_{lower}, \delta_{upper}]$ og hvor underliggende spot danner strike-spot forholdet $\kappa^* \in [\kappa_{lower}, \kappa_{upper}]$ (hvor intervallet angiver nærmeste nedre og øvre datapunkt) interpoleres volatiliteten ved:

$$\sigma_{\delta^*,\kappa^*} = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{upper}-\delta^*}{\delta_{upper}-\delta_{lower}} \\ \frac{\delta^*-\delta_{lower}}{\delta_{upper}-\delta_{lower}} \end{pmatrix}' \cdot \Sigma \cdot \begin{pmatrix} \frac{\kappa_{upper}-\kappa^*}{\kappa_{upper}-\kappa_{lower}} \\ \frac{\kappa^*-\kappa_{lower}}{\kappa_{upper}-\kappa_{lower}} \end{pmatrix}$$

I og med vi ikke har data for restløbetider under 1 måned og strike-spot-ratios under 0.70 og over 1.30, er vi nødsaget til at ekstrapolere. I første omgang vil denne ekstrapolation være flad, dvs. vi antager volatiliteten er flad fra nærmeste tilgængelige datapunkt og ud. Interpolationen er implementeret med følgende R-kode:

```
interpolate_function <- function(strike, remtime_data,rem_timetomat, defspot = NULL, flag = 0)
    {
  strike_tmp <- seq(130,70,by=-5)
  remtime_vector <- as.numeric(remtime_data$Maturity-remtime_data$Date)/365
  strike.spot.ratio <- strike/unique(remtime_data$Spot)*100
  if(!is.null(defspot)) strike.spot.ratio <- strike/defspot*100
  left_timeknot <- findInterval(rem_timetomat,remtime_vector)
  time_knots <- remtime_vector[c(left_timeknot,left_timeknot+1)]
  remtime_subset <- remtime_data[remtime_vector %in% time_knots,]
  if(dim(remtime_subset)[1]==2) {
    time.int <- t(c((time_knots[2]-rem_timetomat)/(time_knots[2]-time_knots[1]),
                (rem_timetomat-time_knots[1])/(time_knots[2]-time_knots[1])))
  }
  else time.int <- diag(1)
  if(flag==1) return(as.numeric(time.int%*%remtime_subset$ZeroRate))
  if(flag==2) return(as.numeric(time.int%*%remtime_subset$Div.Yield))
  left_strikeknot <- findInterval(-strike.spot.ratio,-strike_tmp)
  strike_knots <- strike_tmp[c(left_strikeknot+1,left_strikeknot)]
  vol.grid <- as.matrix(remtime_subset[, which(strike_tmp %in% strike_knots)+5])
  if(dim(vol.grid)[2]==2) {
    strike.int <- c((strike.spot.ratio-strike_knots[1])/(strike_knots[2]-strike_knots[1]),
                    (strike_knots[2]-strike.spot.ratio)/(strike_knots[2]-strike_knots[1]))
  }
  else strike.int <- diag(1)
  interpolation <- as.numeric(time.int %*% vol.grid %*% strike.int)
  return(interpolation)
}
```

Hvor *remtime_subset* udgør en optionsdata for en given dag i dataperioden, mens optionen har den resterende løbetid *rem_timetomat*.

8 Autoregressive processer

Adskillige modeller søger at forudse fremtidig volatilitet ud fra den historiske information om det underliggende aktiv, hvilket ofte er repræsenteret ved tidsserien for aktivets priser. Modellering af volatiliteten for en tidsserie sker ofte i forbindelse med en modellering af afkast for en tidsserie. Den autoregressive proces tillader modellering af afkast som funktion af tidligere afkast inkl. støjled. Hvorvidt tidsserien har konvergerende egenskaber kan betragtes i stationaritetsegenskaben:

- Stærk stationaritet: $S_{1+h}, S_{2+h}, \ldots$ har samme fordeling som $S_1, S_2, \ldots$
  (en tidsforskydning h, kaldet *lag*, i tidsserien yder ingen ændringer i fordelingen)
- Svag (2. ordens) stationaritet: $\forall t : \mathbb{E}[S_t] = \mu_S$, $\mathbb{V}[S_t] = \sigma_S^2$ og $Corr(S_t, S_{t+h}) = \rho(h)$
  (konstant middelværdi og varians, samt korrelation givet som funktion af lag)

Her kaldes $\rho(|h|)$ autokorrelationen idet den beskriver korrelationen i tidsserien ved forskellige tidsindeks, altså et mål for hvor meget af tidsserien der "går i arv". Til autokorrelationen $\rho(h)$ anvendes ligeså en autokovarians $\gamma(h) = Cov(S_t, S_{t+h})$, som beskriver kovariationen i serien for et lag h. Et fællestræk for mange autoregressive processer er deres anvendelse af hvidstøjsprocesser. Disse er stationære processer ε_t med middelværdi μ (typisk 0), varians σ_ε^2 (typisk 1) og samtlige autokorrelationer $\rho(h) = 0, \forall\ h \neq 0$ for svag stationaritet - såfremt stærk kræves er den konstruerede hvidstøjsproces uafhængigt identisk fordelt (iid.). Ofte anvendes den standardiserede hvidstøjsproces $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$, som har middelværdi 0 og varians 1.

8.1 Autoregressiv proces af 1. orden

Den simpleste autoregressive proces er en førsteordens autoregressiv proces, ofte forkortet AR(1), udgør en simpel modellering af f.eks. afkast og har formen:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t,$$

hvor ε_t udgør en hvidstøjsproces, som er ukorreleret med Z_{t-1}. Denne proces kan udvides uendeligt:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t = \phi^2 Z_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \sum_{h=0}^{\infty} \phi^h \varepsilon_{t-h}.$$

Denne sum vil kun konvergere for $|\phi| < 1$. Givet dette er tilfældet ses 2. ordens egenskaberne:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t] &= 0 \\
\gamma(0) &= \mathbb{V}[Z_t] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{h=0}^{\infty} \phi^h = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\
\gamma(h) &= Cov(Z_t, Z_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\phi^{|h|}}{1-\phi^2} \\
\rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^{|h|},
\end{aligned}$$

hvor $\rho(h)$ bemærkes at være aftagende i lag h, dvs. processen "arver" mindre fra fjernere tidsindeks i serien. Grænsetilfældet af stationaritet for AR(1)-processen ses ved $\phi \to \pm 1$, hvor $\gamma(0)$ og $\gamma(h)$ grænser mod uendelig, og serien da viser *Random-Walk* egenskaber. For $|\phi| > 1$ vil processen udvise eksplosive egenskaber, og om processen nogensinde vender tilbage til det initielle niveau er uklart. Disse autoregressive processer findes i udvidelse op til arbitrær orden p og tager da form:

$$Z_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j Z_{t-j} + \varepsilon_t,$$

men de besidder de samme fundamentale egenskaber som førsteordensprocessen.

8.1.1 Moving-Average processer

I nogle processer kan det tænkes at tidligere støj muligvis påvirker den nuværende proces, f.eks. pga. forsinkelser i information. Den simpleste repræsentation af en sådan proces tager formen:

$$Z_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

For denne proces betragtes autokavariansen:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \theta^2\right) \\
\gamma(1) &= \sigma_\varepsilon^2 \theta \\
\gamma(h) &= 0, \ \forall h > 1
\end{aligned}$$

Den eneste ikke-trivielle autokorrelation for processen er da $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$. Processen kan ligesom AR-processen udvides til en arbitrær orden q:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Her er autokorrelationen ligeså triviel for alle lags $h > q$.

8.1.2 ARMA-processer

Sammensætningen af de to ovenstående processer danner ARMA-processen:

$$Z_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j Z_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Ved brug af en backshift operator $B\{x_t\} = \{x_{t-1}\}$ kan denne proces simplificeres til:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p\right) Z_t &= \left(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q\right) \varepsilon_t \\
\implies P(B) Z_t &= Q(B) \varepsilon_t,
\end{aligned}$$

hvor P og Q udgør polynomierne i ovenstående hhv. venstre- og højresides parentes. Denne omskrives til:

$$Z_t = P(B)^{-1}Q(B)\varepsilon_t,$$

hvor en Taylorrække omkring 0 kan approksimere $P(B)^{-1}Q(B)$ og give nærmere information om repræsentation af Z_t ved $P(B)^{-1}Q(B)$:

$$Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i B^i\right) \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

Om denne approksimation virker afhænger af konvergensen i $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$. Vi kan desværre kun kradse i overfladen, da meget af dette afhænger af teorien om komplekse funktioner. Forskningen indenfor dette område har ført til resultatet, at Taylorrækken for en "pæn" funktion er konvergent i en skive omkring origo, hvis og kun hvis funktionen ikke har nogen singulariteter indenfor skiven. Med antagelsen, at Q og P ingen fællesrødder har, vil alle singulariteter i Q/P eksistere præcis i P's rødder. Hvis alle disse rødder findes udenfor enhedscirklen vil Taylorrækkens koefficienter opfylde konvergenskravet, repræsentationen virker og Z_t er stationær.

Hvis der findes singularitet indenfor enhedscirklen er koefficienterne ubegrænsede, svarende til det eksplosive tilfælde af AR(1)-processen. Hvis der findes rødder på enhedscirklen vil processen ikke være stationær, men derimod udvise Random-Walk egenskaber ligesom tidligere beskrevet.

Dette vil dog ikke være vores fokuspunkt, da målet i denne opgave er modellering af volatilitetsprocessen. Vi ser da i det videre forløb bort fra de begrænsninger der findes i ARMA-processens konvergenskrav.

8.2 Lokale volatilitetsmodeller

ARMA-modellen fungerer i modellering af f.eks. afkast i en tidsrække, men passer dårligt med volatiliteten målt i finansielle data. Modellens mangelfuldhed i denne bestræbelse skyldes homoskedasticitet i modellens volatilitet:

$$Z_t = f\left(S_1, S_2, \ldots, S_{t-1}\right) + \varepsilon_t$$

Volatiliteten er ikke tidsvarierende, hvilket strider mod mange observerede tidsserier for finansiel data. Hvis vi introducerer heteroskedastisk (tidsvarierende) volatilitet tager modellen form:

$$Z_t = f\left(S_1, S_2, \ldots, S_{t-1}\right) + \sigma\left(S_1, S_2, \ldots, S_{t-1}\right)\varepsilon_t,$$

hvorledes støjen ses influeret af den observerede tidsrække i funktionen $\sigma(\ldots)$. Dette leder op til spørgsmålet om hvorledes modelleringen af $\sigma(\ldots)$ skal foregå.

8.2.1 ARCH

Den simpleste mulighed er auto-regressive-betingede-heteroskedastiske (ARCH) processer. I ARCH-processer parametrises volatiliteten på tidligere volatiliteter og en hvidstøjsproces, betragt f.eks. førsteordens ARCH-processen:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t &= \sqrt{\omega + \alpha a_{t-1}^2}, \quad (\omega, \alpha) > 0, \end{aligned}$$

hvor ω udgør interceptet i volatiliteten (et mål for den gennemsnitlige volatilitet) og α mængden af autokorrelation i processen. Begge parametre, ω og α skal være positive, da volatilitetsprocessen er positiv. Her er $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$ eneste kilde til stokastik i ARCH-modellen. Processens 2. ordens egenskaber ses:

$$\begin{aligned} \gamma_q(0) &= \mathbb{V}[a_t] = \mathbb{E}[\sigma_t^2 \varepsilon_t^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[a_{t-1}^2] = \omega + \alpha \gamma_a(0) \\ &= \frac{\omega}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Dvs. processen har positiv varians for $0 < \alpha < 1$ og betragtes i dette parameterinterval som stationær (den er også stationær for $\alpha = 1$ men har uendelig varians, hvilket ikke er brugbart i vores modellering). Autokorrelationen for denne er triviel, da $\rho_a(h) = 0, h \neq 0$. ARCH-processen kan med denne konstruktion forecastes med anvendelse af den betingede varians:

$$\mathbb{V}\left[a_t \mid a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots\right] = \omega + \alpha a_{t-1}^2 = \sigma_{t-1}^2$$

ARCH-processens fremtidige betingede volatilitet forventes dermed at svare til den senest observerede volatilitet, hvilket er særdeles brugbart til forecasting af volatiliteter for det underliggende aktiv. Volatiliteten for en ARCH-proces af højere orden (f.eks. orden p) kan ligeså betragtes ved:

$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2}$$

8.2.2 GARCH

En af de urealistiske aspekter ved ARCH-modellen er, at overskydende volatilitet ofte viser sig i korte udbrud, mens de i virkeligheden varer længere. Den generaliserede ARCH (GARCH) model tillader mere vedvarende volatilitet ved at føre volatiliteten tilbage i processen direkte i den udvidede

model:

$$
\begin{aligned}
a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
\sigma_t &= \sqrt{\omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2}, \quad \forall j, i: \ (\omega, \alpha_j, \beta_i) > 0,
\end{aligned}
$$

Med denne opstilling er det muligt at modellere klyngedannelse i volatilitetsprocessen (*volatility clustering*), dvs. persistente afvigelser fra langtidsniveauet over længere perioder. Finansiel data har især tendens til klyngedannelse, hvorfor en generaliseret heteroskedastisk model fungerer bedre til at modellere disse egenskaber.

8.2.3 EGARCH

Førnævnte klyngedannelse i volatiliteten er stærkt påvirket af retningen i den underliggende prisproces. Dette finder sted, da prisprocesser dykker drastisk, men vokser langsomt. Negative afkast har derfor større indvirkning på den realiserede volatilitet end tilsvarende positive afkast. GARCH-modellen er blevet udsat for en række kritikpunkter, bl.a. at modellen ikke tager højde for denne asymmetriske påvirkning af negative vs. positive afkast. Ligeså begrænses parametriseringen af kravet $\alpha, \beta > 0$ for ikke-negativ volatilitet. Intet dikterer specifikt et lineært udtryk for σ_t^2, dvs. udgangspunktet for volatilitetsmodelleringen bør være at beskrive volatiliteten som funktion af tidligere observationer og volatiliteter, med andre ord:

$$\sigma_t = f\left(\{a_{t-i}\}, \{\sigma_{t-i}\} \mid \theta\right), \quad i \in \mathbb{N}_+$$

hvor θ udgør parametre anvendt i modellen.

Dette problem vil den eksponentielle GARCH udvidelse (EGARCH) tage hånd om. Betragt variansen i en GARCH(p,q)-proces:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sigma_{t-j}^2 \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Denne kan reduceres ved rekursivt at substituere parametrene i modellen:

$$\sigma_t^2 = \omega^* + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \varepsilon_{t-k}^2 \sigma_{t-k}^2$$

Dette sker på samme måde, som 1. ordens GARCH-processens varians $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ kan reparametriseres ved:

$$\sigma_t^2 = \omega^* + \phi \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2, \quad \text{hvor} \ \ \omega^* = \omega + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n, \quad \phi = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n$$

På denne måde kan en af de tre parametre i GARCH-modellen udelades til fordel for en uendelig sum. Parameterbegrænsningen kan håndteres ved at modellere log-volatiliteten:

$$\log \sigma_t = \alpha_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(\varepsilon_{t-k}), \quad \beta_1 \equiv 1, \tag{8.1}$$

for en passende funktion g. Da log-volatiliteten $\log \sigma_t \in \mathbb{R}$ er målet for modelleringen, stilles ingen krav om non-negativitet for parametrene i modellen. Funktionen g skal nu gøre det muligt at skabe asymmetrisk påvirkning af prisfald/-stigninger, hvilket som udgangspunkt kan gøres ved:

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma\left(|\varepsilon_t| - \mathbb{E}\left[|\varepsilon_t|\right]\right)$$

Pr. konstruktion er g en iid. stokastisk sekvens (antaget ε_t er stærk hvid støj) med middelværdi 0. De to komponenter i g har begge middelværdi 0, og hvis fordelingen af ε_t er symmetrisk $\mathbb{E}\left[\left(\frac{\varepsilon_t - \mathbb{E}[\varepsilon_t]}{\sigma_{\varepsilon_t}}\right)^3\right] = 0$, vil disse komponenter ligeså være indbyrdes ortogonale/ukorrelerede. Hældningen på g-funktionen har ligeså en spændende egenskab, da vi betragter

$$g'(\varepsilon_t) = \begin{cases} \theta - \gamma, & -\infty < \varepsilon_t \leq 0 \\ \theta + \gamma, & 0 < \varepsilon_t < \infty \end{cases}$$

Dette udtryk for funktionen g giver en assymetrisk påvirkning på volatiliteten drevet af retningen i den underliggende prisproces. Imidlertid står vi i ligning (8.1) stadig med en uendelig række af parametre, hvad der umuligt lader sig estimere. Denne uendelige række kan dog repræsenteres på følgende ARMA-form:

$$\log \sigma_t^2 = \alpha_t + \frac{1 + \sum_{j=1}^{q} \phi_j L^j}{1 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i L^i} g(\varepsilon_{t-1}) = \alpha_t + \frac{AR(q)}{MA(p)} g(\varepsilon_{t-1}),$$

Her udgør $AR(q)$ og $MA(p)$ hhv. en q'te ordens autoregressiv proces og en p'te ordens moving-average proces. Med denne ARMA-repræsentation kan vi modellere log-volatiliteten i EGARCH-modellen ved:

$$\log \sigma_t^2 = \omega^* + \sum_{j=1}^{q} g(\varepsilon_{t-j}) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log \sigma_{t-i}^2,$$

$$g(\varepsilon_{t-j}) = \alpha_j \varepsilon_{t-j} + \gamma_j \left(|\varepsilon_{t-j}| - \mathbb{E}[|\varepsilon_{t-j}|]\right), \quad \text{for } j \in \{1, \ldots, q\}$$

Det kræver nu kun en eksponentiel transformation af log-volatiliteten for at udlede EGARCH-modellens volatilitetsmodellering.

8.3 Exponentially Weighted Moving Average og dets λ

En alternativ og væsentlig simplere volatilitetsmodel er *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), som ligesom ARCH-processerne kan estimere fremtidig volatilitet ud fra historisk data. EWMA er et specialtilfælde af en førsteordens integreret GARCH-proces, IGARCH(1,1), hvori modelleringen af volatilitet har udtrykket:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad \omega + \alpha + \beta = 1 \end{aligned}$$

hvor ε_t er en hvidstøjsproces. EWMA er det simplificerede specialtilfælde af processen hvor $\omega = 0, \beta = \lambda$ og $\alpha = 1 - \lambda$ hvorledes volatiliteten modelleres ved:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= (1-\lambda) a_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \\ &= \sigma_{t-1}^2 \left[\lambda + (1-\lambda) \varepsilon_{t-1}^2 \right] \end{aligned}$$

Variansprocessen er lineær i tidligere observerede værdier for variansen men udsat for de chok der følger af hvidstøjsprocessen i a_{t-1}^2. Den eksponentielle vægt refererer til λ, og hvorledes denne aftager eksponentielt med lag i tidsserien. Variansen σ_{t-h}^2 vil have vægten λ^h i modelleringen af σ_t^2. Indflydelsen af denne på en senere volatilitet er således eksponentielt aftaget for $\lambda < 1$.

IGARCH(1,1), med $\omega > 0$ og $\omega = 0$, er analog til en *Random Walk*-proces hhv. med og uden drift. Derfor er EWMA, hvor $\omega = 0$, en naturlig model for volatiliteten, såfremt vi ikke forventer driftkomponent i volatilitetsprocessen. Dette er dog vildledende ifølge Daniel Nelson, da variansen i IGARCH(1,1) med $\omega = 0$ med sikkerhed kollapser og bevæger sig mod 0, når tiden grænser mod uendelig[7].

Det kan bemærkes at EWMA-variansen, σ_t^2, er en martingal, da vi med itererede forventninger kan udtrykke en fremtidig betinget varians ud fra det nuværende variansniveau (også betragtet i processens driftløshed). Når $\omega > 0$ bliver variansen i IGARCH(1,1) strengt stationær og ergodisk (ligesom i mean-reversion søger processen mod et langtidsniveau), og vil dermed ikke opføre sig som en Random Walk. Grunden til denne tendens, skal vi finde i modellens vedvarende chok. Der findes adskillige mål for chokvedvarenhed i en stationær stokastisk proces, f.eks. den numeriske forskel mellem procesværdien og langtidsniveauet eller sandsynligheden for at samme forskel er mindre end en given tærskelværdi. For en given stokastisk proces fremstiller disse mål ikke altid samme konklusion om hvorvidt denne besidder chokvedvarenhed. Dette er bl.a. årsag til, at de betingede momenter i modellen kan eksplo-

[7] Daniel B. Nelson (marts 1991): Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. Econometrica, Vol. 59, nr. 2, marts 1991, s. 347-370

dere i værdi trods stationaritet.

Som før beskrevet kan det kvadrerede afkast, R_t^2, betragtes som den umiddelbare varians, hvorfor vi ud fra disse derfor vil modellere variansen. Variansen i EWMA initialiseres her ved den historiske varians af de n foregående log-afkast:

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{k-i} - \bar{R}\right)^2 \tag{8.2}$$

$$\text{for } t \geq k : \hat{\sigma}^2_{EWMA,t+1} = \lambda\,\hat{\sigma}^2_{EWMA,t} + (1-\lambda)R_t^2,\ 0 < \lambda < 1$$

hvor $\bar{R}$ er middelværdien af de n observerede log-afkast. Hvidstøjsprocessen er her udgået pga. substitutionen $R_t^2 = \sigma_t^2\varepsilon_t^2$, hvorledes afkastet nu udgør støjkilden i modellen. Alle varianser $\hat{\sigma}^2_{EWMA,t+1}$ udgør EWMA-modellens estimationer på tid $t+1$ variansen. I ovenstående ligning betragtes vægten λ, og da denne angiver vægten i processens tidligere værdier (analog til autokorrelationen) spiller estimationen af denne parameter en stor rolle i modellens approksimation af den realiserede volatilitet. Ligeså er λ afgørende for modellens tilpasningshastighed til ændrede forhold i det finansielle marked.

Vores estimation af λ sker ud fra de to fejlstatistikker *Root Mean Square Error* (RMSE) og *Heteroscedasticity-adjusted Root Mean Square Error* (HRMSE). Disse statistikker angiver på hver sin form den kvadrerede fejl mellem den estimerede og realiserede varians. Kvadreringen af øger store og reducerer små estimationsfejl. RMSE og HRMSE ligner i høj grad hinanden, idet HRMSE blot er en udvidelse, som tager højde for heteroskedasticitet (tidsvariation) i volatilitsprocessen. I disse fejlstatistikker anvendes det forventede kvadrerede afkast som repræsentation for den realiserede varians:

$$\sigma^2\Delta t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^2,$$

hvor n udgør antallet af månedlige observationer da Bernard Bolles forsøg[8], som vi tager udgangspunkt i, tager udgangspunkt i månedlige varianser. Imidlertid kræver vores udgangspunkt en daglig rebalancering, hvorfor vi øger frekvensen til at modellere daglige varianser. Dette giver os $\Delta t = 1 \wedge n = 1$, og dermed:

$$\sigma^2_{real,t} = R_t^2$$

Denne repræsentation af den realiserede varians anvendes som reference i de to fejlstatistikker:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(\sigma^2_{real,t} - \hat{\sigma}^2_{EWMA,t}\right)^2}, \qquad \text{HRMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(1 - \frac{\sigma^2_{real,t}}{\hat{\sigma}^2_{EWMA,t}}\right)^2}$$

[8] Bernard Bollen (2015): What should the value of lambda be in the exponentially weighted moving average volatility model?. Applied Economics, Vol. 47, nr. 8, 2015, s. 853-860

hvor N betegner antallet af iterationer i vores estimerede data. Det optimale λ findes ved minimering af fejlstatistikkerne, hvilket leder til resultaterne:

	λ	Teststørrelse
RMSE	0.89687	0.17164
HRMSE	0.98235	2.40379

Vores kalibrering af de optimale estimatorer tager udgangspunkt i $N = 1277$ observationer i dataperioden 6. juli 2004 til 31. juli 2009. Her anvendes $k = 109$ observationer til at estimere startvariansen σ_k^2 i ligning (8.2) og initialisere EWMA-modelleringen. I starten af dataperioden kræver dette naturligvis datapunkter der er utilgængelige, men under antagelse af konstant λ ville en kalibrering med historisk data udlede samme estimatorer.

Ovenstående resultater viser, at vi skal vægte tidligere volatiliteter med $\lambda = 0.89687$ og $\lambda = 0.98235$ ifølge hhv. RMSE og HRMSE, da disse yder de laveste estimationsfejl af den realiserede volatilitet baseret på kvadrerede log-afkast. Vi vil senere analysere hvilke af disse estimater der yder de bedste P&L-resultater.

9 Stokastisk Volatilitet - Heston

Som nævnt tidligere handles optioner med forskellige strikes og løbetider til forskellige implicitte volatiliteter. Hvorledes volatiliteten er forbundet til disse statiske optionsegenskaber opfanges i modeller med stokastisk volatilitet. Dermed er stokastiske volatilitetsmodeller i stand til at replikere hele volatilitetsfladen for et finansielt produkt. Vi tager udgangspunkt i Heston-modellen, hvor følgende dynamikker betragtes for hhv. det underliggende aktiv, volatiliteten og deres indbyrdes korrelation[9]:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{P},1} \\ dv_t &= \kappa\left(\theta - v_t\right) dt + \eta\sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},2} \\ dW_t^{\mathbb{P},1} dW_t^{\mathbb{P},2} &= \rho dt \end{aligned}$$

Prisprocessen S_t for underliggende svarer i høj grad til prisprocessen i Black-Scholes modellen. Imidlertid er parameteren for den konstante volatilitet skiftet ud med en stokastisk proces. Variansen v_t følger en Cox-Ingersoll-Ross proces, som beskrevet i underafsnit 3.1.4.

I dette setup følger pengemarkedskontoen B_t samme dynamik som tidligere beskrevet. Men i modsætning til Black-Scholes er der i dette tilfælde to kilder af stokastik, hvorfor vi ikke længere er i stand til hedge optionen udelukkende med Delta-hedging. Markedet er ligeså ikke komplet i Heston-modellen, hvorfor vi betragter adskillige martingalmål, og finder os i dilemmaet, om hvilket martingalmål vi bør anvende.

[9] Steven L. Heston (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies, Vol. 6, nr. 2, 1993, s. 327-343

9.1 Den generelle PDE under stokastisk volatilitet

Med udgangspunkt i en generel klasse af stokastiske volatilitetsmodeller som beskrevet i Gatheral[10], opstilles følgende stokastiske differentialligning (SDE) for hhv. det underliggende aktiv, variansprocessen og korrelationsstrukturen mellem disse:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(\mathbb{P},1)} \\ dv_t &= \alpha(S_t, v_t, t)dt + \eta\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t} dW_t^{(\mathbb{P},2)} \\ dW_t^{(\mathbb{P},1)} dW_t^{(\mathbb{P},2)} &= \rho dt \end{aligned}$$

Her er μ_t den deterministiske øjeblikkelige drift i det underliggende aktivs afkast, η er volatilitet i variansprocessen, ofte kaldet vol-at-vol, og ρ er korrelationskoefficienten mellem det underliggende aktivs afkast og ændringen i variansen. Risikokilderne $dW_t^{(\mathbb{P},1)}$ og $dW_t^{(\mathbb{P},2)}$ er brownske bevægelser ligesom tidligere.

Det ses at vores stokastiske proces for det underliggende aktiv svarer til processen i Black og Scholes, men med volatilitetskoefficienten skiftet ud med den stokastiske volatilitet. Dette sikrer, at vi ender ud med den standardiserede version af Black-Scholes formel med en tidsafhængig volatilitet, hvilket også er frembragt i grænsen $\eta \to 0$. I grænsen for vol-at-vol betragtes SDEs:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(\mathbb{P},1)} \\ dv_t &= \alpha(S_t, v_t, t)dt, \end{aligned}$$

hvorledes variansprocessen er deterministisk og ikke eksponeret mod risikokilden $dW_t^{(\mathbb{P},1)}$. Den stokastiske proces for variansen er meget generel, da vi ikke antager noget om funktionsformler for $\alpha(\cdot)$ og $\beta(\cdot)$.

I Black-Scholes modellen eksisterer kun en risikokilde i værdiudviklingen for optionen, nemlig stokastikken knyttet til det underliggende aktiv, som vi tidligere har vist kan afdækkes med en dynamisk rebalanceret position i det underliggende aktiv. I denne model med stokastisk volatilitet eksisterer der 2 risikokilder, én i prisprocessen for det underliggende aktiv og én i variansprocessen. En risikofri portefølje kræver derfor afdækning af begge disse risikokilder.

For at øge overskueligheden i følgende udledning har vi fjernet indeks fra v og S og argumenterne i hhv. α og β funktionen. Vi definerer nu et nyt derivat V_1, som afhænger af variansprocessen v_t og prisprocessen S_t. Hedgeporteføljen skal indeholde optionen vi søger at prissætte $V = V(S, v, t)$, positionen Δ i det underliggende aktiv S og positionen Δ_1 i det nye derivat V_1. Vi agter at købe optionen V, sælge Δ af det underliggende aktiv og sælge Δ_1 af derivatet V_1, hvorledes hedgeporteføljen har

[10] Jim Gatheral (2006): The Volatility Surface - A Practitioner's Guide, John Wiley & Sons, Inc.

værdien:

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1 \tag{9.1}$$

Værdiændringen i hedgeporteføljen er givet ved:

$$d\Pi = dV - \Delta dS - \Delta_1 dV_1$$

Værdiudviklingen i optionen V og derivatet V_1 kan ved Itōs formel udledes til:

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial v}dv + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(dv)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v}dSdv \\
dV_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial S}dS + \frac{\partial V_1}{\partial v}dv + \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}(dv)^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v}dSdv
\end{aligned}$$

Ligesom før kan vi med udgangspunkt i de infinitesimale tilvækster i tid og risikokilden $dt^2 = 0$, $\left(dW_t^{(\mathbb{P},1)}\right)^2 = \left(dW_t^{(\mathbb{P},2)}\right)^2 = dt$, $dtdW_t^{(\mathbb{P},1)} = dtdW_t^{(\mathbb{P},2)} = 0$ og $dW_t^{(\mathbb{P},1)}dW_t^{(\mathbb{P},2)} = \rho dt$ sætte værdiudviklingen for optionen V og derivatet V_1 ind i ligning (9.1), hvilket frembringer:

$$\begin{aligned}
d\Pi = &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)dt \\
&- \Delta_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right)dt \\
&+ \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta\right)dS \\
&+ \left(\frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial v}\right)dv
\end{aligned}$$

For at gøre denne portefølje øjeblikkelig risikofri vælges Δ og Δ_1 til eliminering af risikokilderne i hhv. dS og dv. Dette kræver følgende opfyldt:

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta}_{dS} = 0, \qquad \underbrace{\frac{\partial V}{\partial v} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial v}}_{dv} = 0$$

Hvor det skal forstås, at første lighed eliminerer risikokilden i dS og anden lighed risikokilden i dv. Disse ligheder opfyldes med positionerne:

$$\Delta_1 = \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}, \qquad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}\frac{\partial V_1}{\partial S}$$

Med de udledte udtryk for afdækningspositionerne Δ og Δ_1 betragtes nu værdiudviklingen i hedgeporteføljen:

$$\begin{aligned} d\Pi = &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)dt \\ &- \Delta_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right)dt \end{aligned}$$

I og med porteføljen er risikofri, skal forrentningen på porteføljen svare til forrentningen på det risikofrie aktiv (pengemarkedskontoen B_t) for at udelukke arbitragemuligheder. Dette kræver dermed:

$$\begin{aligned} d\Pi = &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)dt \\ &- \Delta_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right)dt \\ &= r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1)dt \end{aligned}$$

Alle led afhænger af dt, hvorfor denne kan divideres ud. Med de fundne udtryk for Δ og Δ_1 indsat i ligningen ses:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right) \\ &- \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right) \\ &= r(V - \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}\frac{\partial V_1}{\partial S}\right)S - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}V_1) \end{aligned}$$

Alle led, der afhænger af V, kan nu separeres og flyttes over på venstre side, og vice versa alle med V_1-led på højre side, hvorledes ligningen tager formen:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right) - rV + r\frac{\partial V}{\partial S}S \\ &= r\frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}\frac{\partial V_1}{\partial S}S - r\frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}V_1 + \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\right) \end{aligned}$$

Ved så at dividere med $\frac{\partial V}{\partial v}$ på begge sider, ender vi ud med at få:

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - rV + r\frac{\partial V}{\partial S}S}{\frac{\partial V}{\partial v}} \\ &= \frac{r\frac{\partial V_1}{\partial S}S - rV_1 + \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \end{aligned}$$

Vestre side afhænger kun af V, og højre side afhænger kun af V_1, dvs. brøken kan opstilles for en vilkårlig option på det underliggende aktiv S. Dette kan kun lade sig gøre hvis hele brøken kan skrives som funktion af udelukkende S, v og t, hvorledes vi lader højre side tage denne form:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - rV + r\frac{\partial V}{\partial S}S}{\frac{\partial V}{\partial v}} = -f(S,v,t)$$

Dernæst kan vi gange med $\frac{\partial V}{\partial v}$ og lægge $f(S,v,t)\frac{\partial V}{\partial v}$ til på begge sider, hvorledes vi ender ud med Heston PDE'en:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - rV + r\frac{\partial V}{\partial S}S + f(S,v,t)\frac{\partial V}{\partial v} = 0$$

Det eneste vi mangler at finde ud af er et eksplicit udtryk for funktionen $f(S,v,t)$. Gatheral angiver selv denne ved $f(S,v,t) = (\alpha - \gamma\beta\sqrt{v})$, hvor γ også er en funktion af S, v og t. Denne funktion repræsenterer markedsprisen på volatilitetsrisiko, og er ligesom f uafhængig af optionen. Heston anvender selv funktionen

$$f(S,v,t) = \kappa(\theta - v_t),$$

hvilket vi også vil tage udgangspunkt i for vores videre arbejde i Heston-modellen. I og med vi agter at analysere Heston-modellens afdækningspræstation i under det risikoneutrale sandsynlighedsmål, er vi ikke interesserede i at prissætte volatilitetsrisiko, derfor er funktionen $f(S,v,t)$ uinteressant i vores undersøgelser. Følgende afsnit beskriver overgangen fra det fysiske $\mathbb{P}$-mål til det risikoneutrale $\mathbb{Q}$-mål (den risikofrie verden).

9.2 Heston i den risikofrie verden

Der er forskellige måder at beskrive overgangen til den risikofrie verden i Heston-modellen. Hvis vi antager dividenderaten $q_t = 0$ betragtes følgende risikofyldte dynamikker i Heston-modellen

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^{\mathbb{P},1} \tag{9.2}$$

$$dv_t = \kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_t^{\mathbb{P},2} \tag{9.3}$$

$$dW_t^{\mathbb{P},1}dW_t^{\mathbb{P},2} = \rho dt, \tag{9.4}$$

hvor $\mathbb{P}$ angiver det risikofyldte sandsynlighedsmål. Vi ønsker en overgang til de risikofrie stokastiske værdiudviklinger, hvori $\mathbb{E}_t\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = rdt$. Ved anvendelse af Girsanov's sætning og tilpassede valg for de risikofrie parametre beskrevet i følgende afsnit, overgår vi til det risikofrie sandsynlighedsmål $\mathbb{Q}$

hvorledes:

$$
\begin{aligned}
dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{Q},1} \\
dv_t &= \kappa^{\mathbb{Q}} \left(\theta^{\mathbb{Q}} - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{Q},2} \\
dW_t^{\mathbb{Q},1} dW_t^{\mathbb{Q},2} &= \rho dt
\end{aligned}
$$

Hvor $\kappa^{\mathbb{Q}} = \kappa^{\mathbb{P}} + \gamma$ og $\theta^{\mathbb{Q}} = \frac{\kappa^{\mathbb{P}}\theta^{\mathbb{P}}}{\kappa^{\mathbb{P}}+\gamma}$. Her er γ en parameter forbundet med prisen på volatilitetsrisiko.

Når vi skal kalibrere Heston, kan vi altså kalibrere den direkte i den risikofrie verden. $\kappa^{\mathbb{Q}}$ og $\theta^{\mathbb{Q}}$ kan estimeres direkte, dermed behøver vi ikke at beskæftige os med parameteren γ under $\mathbb{Q}$-mål (i overgangen fra $\mathbb{P}$ til $\mathbb{Q}$ er den dog ikke betydningsløs). Desværre kræves et marked for kontrakter relateret til variansprocessen v_t for at kunne afdække volatilitetsrisikoen. Den risikofrie prissætning er betinget af antagelsen om perfekt afdækning, hvilket ikke er muligt uden afdækning af risikokilden i variansprocessen. Såfremt dette marked ikke eksisterer må vi anvende risikofyldt prissætning, som kræver anvendelse af andre modeller og hypoteser i estimation af en passende risikopræmie samt kendskab til fordelingen for risikopræmien.

Følgende viser overgangen fra den risikofyldte- til den risikofrie verden. Prisproces for det underliggende aktiv i ligning (9.2) er med diskontering et martingal under $\mathbb{P}$-målet. Overgang til den risikofrie dynamik kræver et tilsvarende martingalmål, som giver prisprocessen $\frac{dS_t}{S_t}$ driften rdt. Dette muliggøres ved et skift i sandsynlighedsmål ved anvendelse af Girsanovs sætning. Vi definerer i den sammenhæng den Radon-Nikodym afledte:

$$
\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_t = M_t
$$

Her er M_t et eksponentielt martingalmål (EMM) på formen[11]:

$$
M_t = \exp\left\{\int_t^T C_s dW_s^{\mathbb{P},1} - \frac{1}{2}\int_t^T C_s^2 ds + \int_t^T D_s dW_s^{\mathbb{P},2} - \frac{1}{2}\int_t^T D_s^2 ds\right\}
$$

Dette EMM er ligeså løsning til den stokastiske differentialligning:

$$
\frac{dM_t}{M_t} = C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}, \qquad M_0 = 1.
$$

Konstruktionen af EMM'et M_t muliggør, at forventningen til en stokastisk proces Z_t under sandsynlighedsmålet $\mathbb{Q}$ kan overgå til sandsynlighedsmålet $\mathbb{P}$:

$$
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[Z_t\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[M_t Z_t\right]
$$

[11] Ricardo Crisóstomo (december 2014): An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab, Comisi óon Nacional del Mercado de Valores, nr. 58

Derfor hvis vi betragter forventningen af det infinitesimale trin:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[dZ_t\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{M_t + dM_t}{M_t} dZ_t\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(1 + \frac{dM_t}{M_t}\right) dZ_t\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[dZ_t\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\right) dZ_t\right]\end{aligned}$$

Ovenstående udtryk beskriver den $\mathbb{Q}$-forventede værdi af dZ_t ud fra 2 $\mathbb{P}$-forventede komponenter. Vi kan på samme vis udlede hhv. drift og volatilitet for prisprocessen $\frac{dS_t}{S_t}$ under sandsynlighedsmålet $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\right)\frac{dS_t}{S_t}\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},1}\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\right)\left(\mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},1}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\mu dt\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},1}\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\mu C_t dW_t^{\mathbb{P},1} dt\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\mu D_t dW_t^{\mathbb{P},2} dt\right] \\ &\quad + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[C_t\sqrt{v_t}\left(dW_t^{\mathbb{P},1}\right)^2\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},1}\right] \\ &= \mu dt + 0 + 0 + 0 + C_t\sqrt{v_t} dt + D_t\sqrt{v_t}\rho dt \\ &= \left(\mu + C_t\sqrt{v_t} + D_t\sqrt{v_t}\rho\right) dt \\ \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW^{\mathbb{P},2}\right)^2\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[v_t\left(dW_t^{\mathbb{P},1}\right)^2\right] \\ &= v_t dt\end{aligned}$$

I ovenstående udvidelse af $\frac{dS_t}{S_t}$ anvendes vores kendskab til fordelingen $\mathcal{N}(0, \sqrt{t})$ og korrelationen $\mathbb{E}\left[dW_t^{\mathbb{P},1} dW_t^{\mathbb{P},2}\right] = \rho dt$. Ligeså anvendes tidligere opstillede regler for de infinitesimale ændringer, for en vilkårlig brownsk bevægelse, $dW_t^{\mathbb{P}} dt = 0$, $(dt)^2 = 0$, $(dW_t^{\mathbb{P}})^2 = dt$ og $\mathbb{E}\left[dW_t\right] = 0$.

På samme måde udledes drift og volatilitetsprocessen for dv_t under $\mathbb{Q}$-målet til:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[dv_t\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[dv_t\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\right) dv_t\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\right)\left(\kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt + \eta\sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},2}\right)\right] \\
&= \kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\eta\sqrt{v_t} C_t dW_t^{\mathbb{P},1} dW_t^{\mathbb{P},2}\right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\eta\sqrt{v_t} D_t \left(dW_t^{\mathbb{P},2}\right)^2\right] \\
&= \left(\kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) + \eta\sqrt{v_t} C_t \rho + \eta\sqrt{v_t} D_t\right) dt \\
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[(dv_t)^2\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\left(1 + C_t dW_t^{\mathbb{P},1} + D_t dW_t^{\mathbb{P},2}\right)^2 \left(\kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt + \eta\sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},2}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}\left[\eta^2 v_t \left(dW_t^{\mathbb{P},2}\right)^2\right] \\
&= \eta^2 v_t dt
\end{aligned}$$

Funktionerne i EMM'et M_t kan nu vælges således at overgangen til det risikofrie $\mathbb{Q}$-mål udelukker arbitrage. Vi ønsker derfor følgende opfyldt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] &= r dt \\
\implies C_t + \rho D_t &= -\frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} \\
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[dv_t\right] &= \left(\kappa^{\mathbb{P}}\left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) - \gamma v_t\right) dt \\
\implies \rho C_t + D_t &= -\frac{\gamma\sqrt{v_t}}{\eta},
\end{aligned}$$

hvor γ som nævnt før er en parameter i prisen på volatilitetsrisiko. Med disse egenskaber krævet for funktionerne C_t og D_t i EMM'et og Girsanovs multidimensionelle sætning udledes følgende BM under $\mathbb{Q}$-mål:

$$\begin{aligned}
W_t^{\mathbb{Q},1} &= W_t^{\mathbb{P},1} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} t \\
W_t^{\mathbb{Q},2} &= W_t^{\mathbb{P},2} + \frac{\gamma\sqrt{v_t}}{\eta} t
\end{aligned}$$

Det er nu muligt at opstille overgangen fra den risikofyldte- til den risikofrie verden ved substitution af ovenstående i de risikofyldte BM'er $\left(W_t^{\mathbb{P},1}, W_t^{\mathbb{P},2}\right)$ hvorledes:

$$\begin{aligned}
dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{P},1} \\
&= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\left(W_t^{\mathbb{Q},1} - \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} t\right) \\
&= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{Q},1} - \sqrt{v_t} S_t \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt \\
&= r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{Q},1} \\
dv_t &= \kappa^{\mathbb{P}} \left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{P},2} \\
&= \kappa^{\mathbb{P}} \left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} d\left(W_t^{\mathbb{Q},2} - \frac{\gamma \sqrt{v_t}}{\eta} t\right) \\
&= \kappa^{\mathbb{P}} \left(\theta^{\mathbb{P}} - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{Q},2} - \eta \sqrt{v_t} \frac{\gamma \sqrt{v_t}}{\eta} dt \\
&= \left(\kappa^{\mathbb{P}} \theta^{\mathbb{P}} - \kappa^{\mathbb{P}} v_t - \gamma v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{Q},2}
\end{aligned}$$

Med notationen $\kappa^{\mathbb{Q}} = \kappa^{\mathbb{P}} + \gamma$ og $\theta^{\mathbb{Q}} = \frac{\kappa^{\mathbb{P}} \theta^{\mathbb{P}}}{\kappa^{\mathbb{P}} + \gamma}$ kan processen for dv_t reduceres til:

$$dv_t = \kappa^{Q} \left(\theta^{Q} - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{Q,2}$$

Nu mangler kun en begrænsning på korrelationen. Under det risikofyldte mål ses $dW_t^{\mathbb{P},1} dW_t^{\mathbb{P},2} = \rho dt$, hvilket svarer til kravet $\mathbb{E}_t \left[dW_t^{\mathbb{P},1} dW_t^{\mathbb{P},2}\right] = \rho dt$, som bliver opfyldt ved:

$$\begin{aligned}
\rho dt &= \mathbb{E}_t \left[dW_t^{\mathbb{P},1} dW_t^{\mathbb{P},2}\right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[d\left(W_t^{Q,1} - \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} t\right) d\left(W_t^{Q,2} - \frac{\gamma \sqrt{v_t}}{\eta} t\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_t \left[dW_t^{Q,1} dW_t^{Q,2}\right],
\end{aligned}$$

hvor vi igen bruger reglerne for de infinitesimale procesændringer $dW_t dt = 0$, $(dt)^2 = 0$ og $\mathbb{E}\left[dW_t\right]$. Vi betragter i ovenstående samme forventede korrelation under det risikoneutrale- og risikofyldte mål.

Dette udgør overgangen til den risikofrie verden, hvorledes vi betragter de før opstillede risikofrie $\mathbb{Q}$-dynamikker:

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{\mathbb{Q},1} \tag{9.5}$$

$$dv_t = \kappa^{\mathbb{Q}} \left(\theta^{\mathbb{Q}} - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{\mathbb{Q},2} \tag{9.6}$$

$$dW_t^{\mathbb{Q},1} dW_t^{\mathbb{Q},2} = \rho dt \tag{9.7}$$

Selvom denne gennemgang viser overgangen mellem $\mathbb{Q}$- og $\mathbb{P}$-målet, beskriver Heston overgangen på anden vis i sit originale papir. Vi vil i følgende afsnit således beskrive Hestons udledning af prisen på en call-option, hvor resultat der følger frembringes både ved $\mathbb{P}$- eller $\mathbb{Q}$-mål.

9.3 Opstilling af Hestons PDE

Med udgangspunkt i ovenstående ligning (9.5), (9.6) og (9.7) opstilles Heston modellens PDE:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta vS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r\frac{\partial V}{\partial S}S + \kappa(\theta - v_t)\frac{\partial V}{\partial v} - rV = 0, \tag{9.8}$$

hvor det ses at $\mathbb{Q}$-notationen er udeladt fra parametrene κ og θ og risikokilderne $W_t^{(1)}$ og $W_t^{(2)}$. Denne PDE opstilles på baggrund af et aktiv $V(S, v, t)$, som afhænger af de 2 stokastiske processer dS og dv. Med anvendelse af Itoōs formel for flerdimensionelle processer betragets følgende værdiudvikling for aktivet $V(S, v, t)$:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial v}dv + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}(dv)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v}dSdv \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}rS_t dt + \frac{\partial V}{\partial v}\kappa\left(\theta - v_t\right)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}v_t S_t^2 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\sigma_t^2 v_t + \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v}\rho v_t S_t \sigma_t dt \\ &+ \frac{\partial V}{\partial S}\sqrt{v_t}S_t dW_t^{(1)} + \frac{\partial V}{\partial v}\sigma_t\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

I den risikoneutrale verden skal afkastet på aktivet V svare til afkastet på en risikofri investering, hvorledes der må gælde:

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[dV\right] = rVdt$$

Da forventningen til udviklingen i en stokastisk proces svarer til driftleddet med denne risikoneutrale drift frembringes den risikoneutrale PDE svarende til ligning (9.8):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta vS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r\frac{\partial V}{\partial S}S + \kappa(\theta - v_t)\frac{\partial V}{\partial v} = rV,$$

Som alle S_t- og v_t-afhængige aktiver skal opfylde.

Løsningen af denne 2. ordens partielle differentialligning kræver anvendelse af forskellige numeriske løsningsmetoder f.eks. Monte-Carlo simulation. Heston løste i 1993, med numerisk løsningsteknik, for optionsprisen med denne opstillede model. Dette har efterfølgende fået flere udvidelser, hvor vi vil tage udgangspunkt i LiptonRisks løsningsmetode.

9.4 Karakteristiske funktioner

Optionsprisen afhænger ligesom tidligere af sandsynligheden for at optionen udløber ITM. Dette kræver kendskab til fordelingen af terminalværdien S_T, som ligeså indgår i randbetingelsen $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$. Såfremt fordelingen kendes, er ITM-sandsynligheden uproblematisk at udregne. Mang-

lende kendskab til denne fordeling kan dog håndteres ved anvendelse af karakteristiske funktioner, da disse har et én-til-én forhold med fordelingen af en stokastisk variabel.

Lad Y være en stokastisk variabel for hvilken vi ikke kender fordelingen. Den karakteristiske funktion for denne variabel er givet ved Fouriertransformationen:

$$f(\phi) = \mathrm{E}\left[e^{i\phi Y}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi y}\psi(y)dy,$$

hvor $i \in \mathbb{C}$ er et komplekst tal, og hvor $\phi \in \mathbb{R}$ og $\psi(\cdot)$ er tætheden for Y. Med en invers Fouriertransformation kan tætheden for Y udledes som funktion af den karakteristiske funktion $f(\phi)$:

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\phi)\, e^{-i\phi y} d\phi$$

Lad nu Y være normalfordelt $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Da Y er normalfordelt kendes den karakteristiske funktion ved:

$$f(\phi) = e^{i\phi\mu - \frac{1}{2}\phi^2\sigma^2}$$

Med denne karakteristiske funktion kan tætheden for Y udledes ved den inverse Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi\mu - \frac{1}{2}\phi^2\sigma^2} e^{-i\phi y} d\phi \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}},\end{aligned}$$

hvilket præcis svarer til tætheden i normalfordelingen. I Black-Scholes har log-prisen $x_T = \log S_T$ fordelingen $x_T \sim \mathcal{N}\left(x_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma^2\tau\right)$ hvor $\tau = T - t$. Dermed er den karakteristiske funktion for log-prisen x_T i Black-Scholes modellen:

$$f(\phi) = e^{i\phi x_t + i\phi\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau - \frac{1}{2} * \phi^2\sigma^2\tau}$$

Heston antager, at den karakteristiske funktion for terminalværdien S_T tager lignende form. Specifikt forventes den karakteristiske funktion at være eksponentielt affin i log-prisens initielle værdi x_t. Affinitet i x_t angiver linearitet i x_t, som ikke krydser origo (hvor eksponentiel affinitet således beskriver affinitet i eksponenten).

Affinitet i en stokastisk proces konkluderes, når dennes drift- og infinitesimale diffusionskoefficienter i processen er affine funktioner. I Heston-modellen er drift og diffusion for både variansprocessen v_t og log-prisprocessen x_t affine funktioner, hvorfor det vil være naturligt at opstille den karakteristiske

på følgende eksponentielt affine form:

$$f(\phi) = e^{C(\tau,\phi)+D(\tau,\phi)v_t+i\phi x_t},$$

hvor $C(\tau,\phi)$ og $D(\tau,\phi)$ udgør deterministiske funktioner. Optionsprisen udledes i følgende afsnit med udgangspunkt i denne karakteristiske funktion.

9.5 Udledning af Optionsprisen

Optionsprisen opstilles med udgangspunkt i den førudledte risikoneutrale dynamik ligning (9.5), (9.6) og (9.7) og den risikoneutrale PDE i ligning (9.8). Prisen på en europæisk call-option $V_t(S_t, v_t, t)$ med strike K og udløb T kan som før udledes med randbetingelsen $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$. I analog til Black-Scholes kan tid t optionsværdien angives på formen:

$$V_t(S, v, T) = S_t P_1(S, v, T) - Ke^{-r(T-t)} P_2(S, v, T),$$

hvor $P_1(S, v, T)$ og $P_2(S, v, T)$ udgør 2 arbitrære sandsynligheder for hhv. optionens ITM-udfald, og hvorvidt vi ønsker at strike ved udløb. Disse sandsynligheder er på nuværende tidspunkt ukendte, hvorfor vi søger kendskab til fordelingen af S_T. I Black-Scholes modellen ville dette være simpelt, da fordelingen af S_T kan påvises at være lognormalfordelt, men dette er ikke nødvendigvis tilfældet i Heston, da S_T afhænger af v_T.

Optionsværdien kan adskilles i 2 *contingent claims* hhv. $S_T P_1(S, v, T)$ og $Ke^{-r(T-t)} P_2(S, v, T)$. Første claim er en fordring, som udbetaler S_T ved udløb såfremt terminalværdien overstiger strike K. Det andet claim er en fordring på $Ke^{-r(T-t)}$, nutidsværdien af strikeprisen, også såfremt $S_T > K$. Sidstnævnte claim svarer til en digitaloption, hvilket er et derivat med en fast udbetaling såfremt en given betingelse overholdes ved udløb. Her udgør $P_1(S, v, T)$ og $P_2(S, v, T)$ sandsynligheden for at betingelsen i disse claims overholdes (under hhv. sandsynlighedsmål $\mathbb{S}$ og $\mathbb{Q}$).

I udledning af disse sandsynligheder er det praktisk at anvende log-prisen $x_t = \log S_t$, hvor vi med Itōs formel kan udlede log-prisdynamikken:

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{\partial x_t}{\partial t} dt + \frac{\partial x_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial^2 x_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(1)} \end{aligned}$$

Prisen for call optionen kan omskrives til følgende funktion af log-prisen x:

$$V_t(x, v, t) = e^x P_1 - Ke^{-r(T-t)} P_2,$$

hvor de 2 contingent claims da udgør hhv. $V_1 = e^x P_1$ og $V_2 = Ke^{-r(T-t)}P_2$. Da det er den fremtidige værdi af optionen, som der er relevant, vil det være væsentlig nemmere at udtrykke PDE'en i den resterende løbetid $\tau = T - t$ fremfor kalendertid t - hvorledes det partielle differentiale $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \tau}$. Ligeså kan de senere udtryk forenkles ved anvendelse af log-prisen x i stedet for S, hvorledes vi betragter PDE'en:

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial V}{\partial x} + [\kappa(\theta - v)]\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho\eta v\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial v} = rV$$

Begge contingent claims skal opfylde denne PDE. Vi betragter derfor de afledte for claimet V_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial x} &= e^x\left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x}\right) & \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} &= e^x\left(P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right)\\
\frac{\partial V_1}{\partial v} &= e^x\frac{\partial P_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} &= e^x\frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2}\\
\frac{\partial V_1}{\partial \tau} &= e^x\frac{\partial P_1}{\partial \tau} & \frac{\partial^2 V_1}{\partial v \partial x} &= e^x\left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial v \partial x}\right)
\end{aligned}$$

Med disse afledte substitueret i PDE'en kan e^x divideres ud i alle led, hvorledes:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\left(P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x}\right) + [\kappa(\theta - v)]\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2}v\left(P_1 + 2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right)\\
+ \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \rho\eta v\left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial v \partial x}\right) = rP_1
\end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$-\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + \left(r + \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial P_1}{\partial x} + [\kappa\theta - \kappa(v - \rho\eta)]\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} + \rho\eta v\frac{\partial^2 P_1}{\partial v \partial x} = 0$$

Sandsynligheden P_1 skal opfylde denne PDE. Samme øvelse udføres for det andet contingent claim V_2, hvilket udleder en tilsvarende PDE, som sandsynligheden P_2 skal opfylde:

$$-\frac{\partial P_2}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + [\kappa\theta - \kappa v]\frac{\partial P_2}{\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + \rho\eta v\frac{\partial^2 P_2}{\partial v \partial x} = 0$$

Disse to PDE'er, ligner hinanden utrolig meget. Den eneste umiddelbare forskel er fortegnet på $\frac{1}{2}v$ i parentesen i 2. led. Det er nu praktisk at samle begge disse PDE'er i en generel PDE for begge sandsynligheder:

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + (r + u_j v)\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + (a - b_j v)\frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + \rho\eta v\frac{\partial^2 P_j}{\partial v \partial x} = 0, \quad j \in \{1, 2\} \tag{9.9}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a = \kappa\theta, \qquad b_1 = \kappa - \rho\eta, \qquad b_2 = \kappa$$

P_j er som tidligere nævnt et udtryk for hhv. ITM-sandsynligheden og sandsynligheden for at strike givet værdien af x_t og v_t på tidspunkt t:

$$P_j\left(x, v, T; \log K\right) = \mathbb{P}\left(x_T \geq log(K) \;\middle|\; x_t = x, v_t = v\right)$$

Der er ingen umiddelbare løsninger for disse sandsynligheder på lukket form. Imidlertid kan vi med anvendelse af de karakteristiske funktioner for hhv. P_1 og P_2, som opfylder samme PDE i ligning (9.9) under randbetingelsen $f(x_T;\phi) = e^{i\phi x_T}$, udlede lukkede løsninger for sandsynlighederne.

Som nævnt i afsnit 9.4, så tager vi udgangspunkt i den karakteristiske funktion:

$$f_j(\phi) = e^{C_j(\tau,\phi)+D_j(\tau,\phi)v_t+i\phi x_t}, \quad j \in \{1,2\}$$

med de deterministiske men ukendte funktioner $C_j(\tau,\phi)$ og $D_j(\tau,\phi)$. Med randbetingelsen $f(x_T;\phi) = e^{i\phi x_T}$ må der gælde:

$$C_j(0;\phi) = 0 \quad og \quad D_j(0;\phi) = 0$$

Da forholdet mellem den karakteristiske funktion og tæthedsfunktionen for en stokastisk variabel er entydigt, betyder det at ligning (9.9), kan skrives med den karakteristiske funktion:

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + (r + u_j v)\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + (a - b_j v)\frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{1}{2}\eta^2 v\frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \rho\eta v\frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} = 0, \quad j \in \{1,2\} \tag{9.10}$$
$$u_1 = \frac{1}{2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a = \kappa\theta, \qquad b_1 = \kappa - \rho\eta, \qquad b_2 = \kappa$$

De partielle afledte i denne ligning kan med udtrykket for den karakteristiske funktion udledes til:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x} = i\phi f_j \qquad \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} = i^2\phi^2 f_j$$
$$\frac{\partial f_j}{\partial v} = D f_j \qquad \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2} = D^2 f_j$$
$$\frac{\partial f_j}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial C}{\partial \tau} + v_t\frac{\partial D}{\partial \tau}\right) f_j \qquad \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} = i\phi D f_j$$

Hvor argumenterne til $C_j(\tau;\phi)$ og $D_j(\tau;\phi)$ er udeladt af hensyn til overskueligheden. Alle led indeholder f_j, dvs. dette kan indsættes i ligning (9.10), og f_j kan reduceres ud hvorledes:

$$-\left(\frac{\partial C}{\partial \tau} + v_t\frac{\partial D}{\partial \tau}\right) + (r + u_j v)\, i\phi + \frac{1}{2}v i^2\phi^2 + (a - b_j v)\, D + \frac{1}{2}\eta^2 v D^2 + \rho\eta v i\phi D = 0, \quad j \in \{1,2\}$$

Alle led med og uden v_t kan samles for et simplere udtryk:

$$\left(-\frac{\partial D}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 D^2 + \rho\eta i\phi D + u_j i\phi - b_j D\right) v_t - \frac{\partial C}{\partial \tau} + ri\phi + aD = 0$$

Da dette skal være 0 for alle værdier af v_t, må koefficienten til v_t have værdien 0. Ligeså må summen af de andre led der ikke hører til v_t være lig 0, hvorledes PDE'en kan deles op i ligningssystemet:

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = u_j i - \frac{1}{2}\phi^2 + (\rho\eta i\phi - b_j)\, D + \frac{1}{2}\eta^2 D^2 \tag{9.11}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = ri\phi + aD, \tag{9.12}$$

kaldet Riccati-ligningssystemet. Løsningen til dette ligningssystem udledes i følgende afsnit.

9.5.1 Løsning til den partielle differentialligning, del 1

Vi løser først differentialligningen for D, da denne er uafhængig af C. Først forkortes koefficienterne:

$$\frac{dD}{d\tau} = \alpha + \beta D + cD^2 \tag{9.13}$$

$$\alpha = u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2, \qquad \beta = \rho\eta i\phi - b_j, \qquad c = \frac{1}{2}\eta^2$$

Problemet i denne differentialligning ligger hovedsageligt i det kvadrerede led. Med transformationen $\log y$ kan denne reduceres:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{c}\frac{d\log y}{d\tau} = -\frac{1}{cy}\frac{dy}{d\tau} \\ \frac{dD}{d\tau} &= -\frac{1}{cy}\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= -\frac{1}{cy}\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{cy^2}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 \end{aligned}$$

Sammensættes dette med udtrykket i ligning (9.13) ses:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{cy}\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{cy^2}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 &= \alpha + \beta\left(-\frac{1}{cy}\frac{dy}{d\tau}\right) + c\left(-\frac{1}{cy}\frac{dy}{d\tau}\right)^2 \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} - \beta\frac{dy}{d\tau} + \alpha cy &= 0 \end{aligned}$$

Dette er en ordinær 2. ordens differentialligning, for hvilken rødderne ved den karakteristiske funktion yder en løsning:

$$0 = \lambda^2 - \beta\lambda + \alpha c, \qquad \Longrightarrow \qquad r_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha c}}{2} = \frac{\beta \pm d}{2}$$

Med ovenstående rødder kan løsningen til y opstilles:

$$y = C_1 e^{r_+\tau} + C_2 e^{r_-\tau},$$

hvor C_1 og C_2 udgør arbitrære konstanter. Men vi er ikke interesserede i y, men derimod D hvilken vi finder ved:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{d\tau} &= C_1 r_+ e^{r_+\tau} + C_2 r_- e^{r_-\tau} \\
\implies D &= -\frac{1}{cy}\frac{dy}{d\tau} = -\frac{1}{c}\frac{C_1 r_+ e^{r_+\tau} + C_2 r_- e^{r_-\tau}}{C_1 e^{r_+\tau} + C_2 e^{r_-\tau}} \\
&= -\frac{1}{c}\frac{C_3 r_+ e^{d\tau} + r_-}{C_3 e^{d\tau} + 1}, \qquad C_3 = \frac{C_1}{C_2}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu med randbetingelsen $D(0,\phi) = 0$ bestemme konstanten C_3 og udlede løsningen til funktionen:

$$
\begin{aligned}
D(0,\phi) &= -\frac{1}{c}\frac{C_3 r_+ + r_-}{C_3 + 1} \\
C_3 &= -\frac{r_-}{r_+} \\
\implies D(\tau,\phi) &= -\frac{1}{c}\frac{-\frac{r_-}{r_+} r_+ e^{d\tau} + r_-}{-\frac{r_-}{r_+} e^{d\tau} + 1} \\
&= -\frac{r_-}{c}\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g e^{d\tau}}, \qquad g = \frac{r_-}{r_+}
\end{aligned}
$$

Med koefficienterne α, β og c skrevet ud bliver diskriminanten således:

$$
d_j = \sqrt{(\rho\eta i\phi - b_j)^2 - 4\left(u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2\right)\frac{1}{2}\eta^2} = \sqrt{(\rho\eta i\phi - b_j)^2 - (2u_j i\phi - \phi^2)\,\eta^2},
$$

Denne ses at variere ud fra hvilken af de to differentialligninger vi løser for. Vi giver den derfor fodtegn j. Med denne bemærkning opnår vi resultatet, som svarer til Hestons oprindelige udtryk:

$$
D(\tau,\phi) = -2\frac{r_{j-}}{\eta^2}\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}},
$$

hvor $r_{j-} = \frac{\rho\eta i\phi - b_j - d_j}{2}$. Med denne løsning kan vi i efterfølgende afsnit gå i gang med at finde $C(\tau;\phi)$.

9.5.2 Løsning til den partielle differentialligning, del 2

Med løsningen til $D(\tau,\phi)$ er det nu muligt også at finde en løsning til $C(\tau,\phi)$. Vi kan med differentialligningen i (9.12) flytte rundt og integrere over restløbetiden:

$$
\begin{aligned}
dC &= ri\phi\alpha D(\tau,\phi)d\tau \\
\int_0^\tau dC(t,\phi) &= \int_0^\tau ri\phi dt + \alpha\int_0^\tau D(t,\phi)dt \\
C(\tau,\phi) &= C(0,\phi) + ri\phi\tau + \alpha\int_0^\tau D(t,\phi)dt \\
&= ri\phi\tau + \alpha\frac{d_j + b_j - i\rho\eta\phi}{\eta^2}\int_0^\tau \frac{1 - e^{d_j t}}{1 - g_j e^{d_j t}}dt
\end{aligned}
$$

Integralet kan forenkles ved et variabelskift $y = e^{d_j t}$, hvor vi ser $dy = e^{d_j t} d_j dt = y d_j dt$. Med dette skift skal vi også redefinere integralgrænserne, da $t = 0 \implies y = 1, t = \tau \implies y = e^{d_j \tau}$. Dermed:

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \frac{1 - e^{d_j t}}{1 - g_j e^{d_j t}} dt &= \int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{1-y}{1-g_j y} \frac{1}{y d_j} dy \\ &= \frac{1}{d_j} \int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{1-y}{1-g_j y} \frac{1}{y} dy\end{aligned}$$

Vi kan betragte integranden $\frac{1-y}{1-g_j y}\frac{1}{y}$ som sum af 2 brøker med ukendte tællere og forenkle:

$$\begin{aligned}&\frac{1-y}{1-g_j y}\frac{1}{y} = \frac{D}{1-g_j y} + \frac{E}{y} \\ &\implies 1 - y = Dy + E\left(1 - g_j y\right) = E + \left(D - g_j E\right) y\end{aligned}$$

For at dette skal være opfyldt må det gælde at:

$$\begin{aligned}&E = 1, \qquad D = g_j - 1 \\ &\implies \frac{1-y}{1-g_j y}\frac{1}{y} = \frac{g_j - 1}{1 - g_j y} + \frac{1}{y}\end{aligned}$$

Dette kan vi prøve at integrere:

$$\begin{aligned}\int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{1-y}{1-g_j y}\frac{1}{y} dy &= \int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{g_j - 1}{1 - g_j y} dy + \int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1-g_j}{g_j} \int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{-g_j}{1-g_j y} dy + \int_1^{e^{d_j \tau}} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1-g_j}{g_j} \int_1^{e^{d_j \tau}} d(\log(1 - g_j y)) + \int_1^{e^{d_j \tau}} d(\log y) \\ &= \frac{1-g_j}{g_j} \Big[\log\left(1 - g_j y\right)\Big]_1^{e^{d_j \tau}} + \Big[\log y\Big]_1^{e^{d_j \tau}} \\ &= \frac{1-g_j}{g_j} \log\left(\frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j}\right) + d_j \tau\end{aligned}$$

Med dette har vi løsningen til $C(\tau, \phi)$, hvilken vi kan reducere og ende med samme oprindelige udtryk som Heston:

$$C(\tau, \phi) = ir\phi\tau + \frac{a}{\eta^2}\left(\left(d_j + b_j - i\rho\eta\phi\right)\tau - 2\log\left(\frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j}\right)\right)$$

9.5.3 Invertering af den karakteristiske funktion

Da vi nu har fundet de to ukendte funktioner $C(\tau;\phi)$ og $D(\tau;\phi)$, har vi altså løsningen til den karakteristiske funktion:

$$
\begin{aligned}
f_j(\phi) &= e^{C_j(\tau,\phi)+D_j(\tau,\phi)v_t+i\phi x_t}, \quad j \in \{1,2\}, \\
D_j(\tau,\phi) &= \frac{b_j - \rho\eta i\phi + d_j}{\eta^2}\left(\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-g_j e^{d_j\tau}}\right) \\
C_j(\tau,\phi) &= ir\phi\tau + \frac{a}{\eta^2}\left((d_j + b_j - i\rho\eta\phi)\,\tau - 2\log\left(\frac{1-g_j e^{d_j\tau}}{1-g_j}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Hvor:

$$
\begin{aligned}
g_j &= \frac{b_j - \rho\eta i\phi + d_j}{b_j - \rho\eta i\phi - d_j}, \qquad d_j = \sqrt{(\rho\eta i\phi - b_j)^2 - (2u_j i\phi - \phi^2)\,\eta^2} \\
a &= \kappa\theta, \qquad u_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & if\, j=1 \\ -\frac{1}{2} & if\, j=2 \end{cases}, \qquad b_j = \begin{cases} \kappa - \rho\eta & if\, j=1 \\ \kappa & if\, j=2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Med den karakteristiske funktion udledt kan vi med én-til-én forholdet mellem denne og tæthedsfunktionen udlede sandsynlighederne P_1 og P_2. Specifikt kan følgende eksplicitte udtryk for sandsynlighederne udledes med den inverse Fouriertransformation[12]:

$$
P_j\left(x,v,T;ln\left[K\right]\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi\log K} f_j\left(x,v,T;\phi\right)}{i\phi}\right] d\phi,
$$

hvor $Re\left[\cdot\right]$ udgør realdelen af $\cdot$ (i modsætning til den imaginære del givet i $Im\left[\cdot\right]$). Dette yder alle nødvendige informationer for at udlede optionsprisen i Heston-modellen. Det uendelige numeriske integrale er problematisk i praksis, men Heston nævner at dette hurtigt konvergerer.

9.6 Lipton Risks løsning

Senere optimalitetscheck af Heston-modellen har udledt ustabile kalibreringer for givne parameterværdier. Anvendelse af Heston-modellen kræver til at starte med en kalibrering af modellen til markedet hvori denne ønskes anvendt. Men ovenstående kalibrering udleder singularitet i $\phi = 0$.

Alexander Lipton præsenterede sin løsning på dette problem i RISK FEBRUARY 2002[13]. Randbetingelsen i call-optionen kan omskrives $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+ = S_T - \min\left(S_T, K\right)$. Lipton anvender denne randbetingelse og ligeså dividendejusteret log-pris $x_t = \log\frac{S_t}{K} + (r-q)$, og med disse kommer

[12] Steven L. Heston (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies, Vol. 6, nr. 2, 1993, s. 327-343

[13] Alexander Lipton (2002): The Vol Smile Problem: Risk Analysis, vol. 15, 2002, s. 61-65

frem til en tilsvarende optionspris i Hestons stokastiske volatilitetsmodel:

$$C^{SV}\left(t, S_t, v_t, T, K\right) = S_t e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\left(-i\phi+\frac{1}{2}\right)x_t + \alpha^{SV}(T-t,\phi) + \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\beta^{SV}(T-t,\phi)v}}{\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)} d\phi$$

Hvor:

$$\begin{aligned}
\alpha^{SV}\left(T-t,\phi\right) &= -\frac{\kappa\theta}{\eta^2}\left[\Psi_+\left(T-t\right) + 2\log\left(\frac{\Psi_- + \Psi_+ e^{-\zeta(T-t)}}{2\zeta}\right)\right] \\
\beta^{SV}\left(T-t,\phi\right) &= -\frac{1-e^{-\zeta(T-t)}}{\Psi_- + \Psi_+ e^{-\zeta(T-t)}} \\
\Psi_\pm &= \mp\left(i\phi\rho\eta + \hat{\kappa}\right) + \zeta \\
\zeta &= \sqrt{\phi^2\eta^2\left(1-\rho^2\right) + 2i\phi\eta\rho\hat{\kappa} + \hat{\kappa}^2 + \frac{\eta^2}{4}} \\
\hat{\kappa} &= \kappa - \frac{\rho\eta}{2}
\end{aligned}$$

Denne formel er bedre til vores kalibreringsformål end den Heston kommer frem til. Der findes ingen singulære punkter for ϕ i integralet $\int_{-\infty}^{\infty}$, hvorledes formlen yder en mindre problematisk kalibrering.

9.7 Simulation i Heston

9.7.1 Euler diskretisering

Udviklingen i Hestons variansproces kan simuleres enten ud fra $\mathbb{P}$-processen i ligning (9.3) eller $\mathbb{Q}$-processen i ligning (9.6) ved den følgende Euler-diskretisering:

$$v_{t+1} = v_i + \kappa\left(\theta - v_t\right)\Delta t + \eta\sqrt{v_t}\sqrt{\Delta t}Z,$$

hvor $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Der kan i denne simulation forekomme negative varianser. Såfremt $v_t < 0$ løses dette ved påtvingning af en af følgende krav:

i) Vi sætter $v_t = 0$.

ii) Vi sætter $v_t = -v_t$ (Svarende til at en barriere i 0 reflekterer variansen op).

I praksis kræves et stort antal tidsændringer med de fundne værdier for de nødvendige parametre i modellen for at opnå konvergens med denne diskrete proces[14].

9.7.2 Brug af diskret Milstein proces

Problemet med simulerede negative varianser kan alternativt løses ved implementering af Milsteins diskrete ordning. Ved en 2. ordens Itō-Taylor udvidelse af $v(t+\Delta t)$ betragtes approksimationen:

[14] Jim Gatheral (2006): The Volatility Surface - A Practitioner's Guide, John Wiley & Sons, Inc.

$$v_{t+1} = v_t + \kappa\left(\theta - v_t\right)\Delta t + \eta\sqrt{v_t}\sqrt{\Delta t}Z + \frac{\eta^2}{4}\Delta t\left(Z^2 - 1\right)$$

Hvilket kan omskrives til:

$$v_{t+1} = \left(\sqrt{v_t} + \frac{\eta}{2}\sqrt{\Delta t}Z\right)^2 + \kappa\left(\theta - v_t\right)\Delta t - \frac{\eta^2}{4}\Delta t$$

Hvis den simulerede varians $v_t = 0$ og $4\kappa\theta > \eta^2$ vil $v_{t+1} > 0$, hvorledes hyppigheden af negative varianser reduceres som også beskrives af Gatheral. Imidlertid udleder $4\kappa\theta < \eta^2$ markant færre negative varianser end Euler-diskretiseringen af variansprocessen. Med en diskret variansproces kræves ligeså en diskret prisproces for det underliggende aktiv. Vi lader derfor log-afkastet $x_t = \log\frac{S_t}{S_0}$ være givet ved den diskrete proces:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{v_t}{2}\Delta t + \sqrt{v_t\Delta t}\,W, \qquad W \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Der skal her gælde at risikokilderne er ukorrelerede $\mathbb{E}\left[Z\,W\right]$. I og med x_t udgør log-afkastet i det prisprocessen for det underliggende aktiv, betragter vi ingen højere ordener i den diskrete approksimation.

9.8 Kalibrering af Heston

Anvendelse af Heston som optionsprismodel kræver først kalibrering af modellen til markedet for optionen. Her kalibreres Heston-modellens parametre, således at de modellerede volatiliteter passer med de observerede implicitte volatiliteter i markedet. Dette kræver således markedsdata, for den givne option vi søger at modellere prisen på.

Optimeringen af parametre i Heston-modellen for SPX-optionsmarkedet tager udgangspunkt i en minimering af forskellen mellem modelpris og observeret markedspris på optionen. Under det risikoneutrale mål skal vi således estimere parametrene $\Omega = \Big\{v_0,\quad \theta,\quad \kappa,\quad \eta,\quad \rho\Big\}$. Estimationen af disse parametre skal også fremgå således, at den stokastiske prisproces for det underliggende aktiv udleder samme modelpriser på indekset som observeres i markedet. Følgende mål opstilles da for de optimale parametervalget:

i) Minimering af fejl mellem modelpriser og markedspriser på SPX-optionen.

ii) Minimering af fejl mellem modelpriser for underliggende aktiv og indekspriser på SPX.

Den simpleste måde at opfylde disse krav er ved at minimere den kvadrerede sum af prisfejl:

$$\min_{\Omega} G(\Omega) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\left[V_i^{\Omega}(K_i,T_i) - V_i^{Mkt}(K_i,T_i)\right]^2,$$

hvor $V_i^{\Omega}(K_i,T_i)$ er modellens værdi af den i'te option med strike K_i og udløb T_i ud fra de fem parametre, og $V_i^{Mkt}(K_i,T_i)$ er værdien af den tilsvarende option observeret i markedet.

Problemet med denne kalibrering er, at der i minimeringen ikke nødvendigvis er konveksitet. Manglende konveksitet udelukker ikke eksistensen af adskillige lokale minima[15]. Dette er problematisk, da optimeringen af parametrene således kan afhænge af vores initielle gæt Ω_0, og ikke nødvendigvis finder den mest optimale løsning. Såfremt vi ønsker at udelukke en given løsning, såfremt at denne kun er et lokalt optimum, kræves implementering af en global optimeringsproces. Grundet kompleksiteten i global optimering for ikke-konvekse funktioner kræver dette uhyrlig computerkraft, hvorfor vi benytter en lokal optimering og ser bort fra eventuelle bias forårsaget af dette.

Implementering af lokal optimering kræver en række kriterier for vurdering af acceptable løsninger. Disse kriterier sørger for at fundne parametre ikke overskrider modellens tilladte grænseværdier. For en given kalibrering genitereres algoritmen med andre initialværdier for parametrene, såfremt en løsning ikke opfylder kriterierne. De anvendte kriterier er angivet:

i) Variansen i modellen kræves positiv. På grund af mean-reversion vil variansen for de fleste finansielle produkter dog heller ikke overstige 100%. Den initielle varians og langtidsniveauet for processen vil da som udgangspunkt ligge i intervallet $\left[0,1\right]$ dvs. $\left\{v_0, \quad \theta\right\} \in \left[0,1\right]$.

ii) Den statistiske korrelation mellem den underliggende prisproces og volatilitetsprocessen ligger konceptuelt i intervallet $\left[-1,1\right]$. Ofte er korrelationen negativ (prisfald fører ofte til større volatilitet), men positiv korrelation er mulig, derfor kræves $\rho \in \left[-1,1\right]$

iii) Volatiliteten for variansen (vol-at-vol) skal være positiv. Vol-at-vol angiver volatiliteten i variansprocessen, volatiliteter er konceptuelt positive hvorfor vi også kræver dette af vol-at-vol. Samtidig er volatilitetsfladen oftest en konveks funktion af strike og udløbstid, dette replikeres med en positiv vol-at-vol. Dog kan vol-at-vol for finansielle aktiver dramatisk ændre sig over kort tid. Dette er ofte observeret i forøget krumning i volatilitetsfladen. Derfor kræves en høj øvre grænse for vol-at-vol, og vi vælger som udgangspunkt $\eta \in \left[0,5\right]$

iv) For at sikre mean-reversion i modellen skal κ være positiv. Negative værdier vil resultere i en volatilitetsudvikling, der muligvis divergerer fra langtidsniveauet altså mean-aversion. Dermed kræves $\kappa \in [0,\infty[$

v) Det sidste kriterium i kalibreringen af modellen er ikke et strengt nødvendigt krav. Såfremt $2\kappa\theta - \eta^2 \geq 0$ vil variansprocessen aldrig ramme barrieren i 0 (kendt som Feller-betingelsen). Dette sørger for strengt positiv variansmodellering.

Hvis en løsning opfylder alle 5 kriterier accepteres de fundne optimale parametre. Som sagt kan Feller-betingelsen udelades, da begrænsninger for alle parametre stilles i de første 4 kriterier.

[15] Ricardo Crisóstomo (december 2014): An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab, Comisi óon Nacional del Mercado de Valores, nr. 58

10 Volatilitetsfrie modeller

I denne sektion opstilles to afdækningsstrategier hvori afdækningspositionen i det underliggende aktiv ikke er en direkte funktion af hedgevolatilitet. Strategierne kan dermed betragtes som markedets alternative afdækningsstrategier til de før opstillede lokale og stokastiske volatilitetsmodeller. Det er i denne sammenhæng vores forestilling, at markedet besidder en række deltagere, som ikke anvender volatilitetsmodeller i deres afdækning af risiko i optioner.

10.1 Kontinuert vs. diskret afdækning

Hvis optionen V_t kunne afdækkes perfekt med kontinuerligt rebalancerede positioner i underliggende S_t, ville denne følge dynamikken:

$$dV_t = \Delta_t^* dS_t, \tag{10.1}$$

for en given tilpasset og integrabel selvfinansierende strategi Δ_t^*. Da optionen handles ved tid $t = 0$ til den entydige pris V_0, må startværdien for prisprocessen hørende til optionen være konstant. Derudover skal der gælde at $V_t \geq 0, \forall t$ for at undgå åbenlyse arbitragemuligheder. Ligesom i Hayashi & Mykland[16] kan den sande hedgestrategi Δ^* antages at følge en Itō-proces:

$$d\Delta_t^* = \Delta_t^{*1} dt + \Delta_t^{*2} dW_t, \qquad W_t = \begin{pmatrix} W_t^{(1)} \\ W_t^{(1)} \end{pmatrix}$$

hvor startværdien Δ_0^* er konstant, og Δ^{*1} og Δ^{*2} er tilpassede integrable processer værdisatte i hhv. $\mathbb{R}$- og $\mathbb{R}^2$. Siden Δ^* er drevet af to risikokilder, vil V_t afhænge af både $W_{t,1}$ og $W_{t,2}$. Dermed kan V_t ikke replikeres alene ved position i S_t, hvorfor V_t ikke er et overflødigt aktiv. Replikering af V_t kræver kendskab til strategien Δ^*. Hayashi & Mykland udleder under kontinuerte observationer Δ^* til størrelsen:

$$\Delta_t^* = \frac{d\langle S, V\rangle t}{d\langle S, S\rangle t}, \tag{10.2}$$

hvor $\langle\ ,\ \rangle$ udgør den kvadratiske variation. Da vi begrænser os til stiuafhængige europæiske optioner kan denne reduceres til den velkendte delta-hedge:

$$\Delta_t^* = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$$

Imidlertid kan optioner i den virkelige verden ikke afdækkes kontinuert, hvilket giver anledning til hedgefejl mellem kontinuert og tilsvarende diskret afdækkede optioner. En strategi med diskret afdækning Δ_t^{disc} på ækvidistante tidspunkter $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ yder gevinsten

$$V_{t_j}^{\Delta^{disc}} = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta_{t_i}^{disc} \Delta S_{t_i}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

[16] Takaki Hayashi & Per A. Mykland (april 2004): Evaluating hedging errors: An asymptotic approach. Mathematical Finance, Vol. 15, nr. 2, april 2005, s. 309-343

hvor $\sum_{i=0}^{j-1}$ kollapser til 0 for $j = 0$, og ΔS_{t_i} udgør tilvæksten $S_{t_{i+1}} - S_{t_i}$. Det er således muligt at måle den relative præstation af den diskrete ift. kontinuerte afdækning diskretisering af Δ_t^* ved den relative hedgefejl:

$$L_{t_j}^n = \sum_{i=0}^{j-1} \left(\Delta_{t_i}^* - \Delta_{t_i}^{disc} \right) \Delta S_{t_j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{10.3}$$

Minimering af denne afdækningsfejl afhænger af vores kendskab til den sande model og afdækningsfrekvensen vi er i stand til at opretholde for hedgeporteføljen. Vi betragter dermed følgende 2 scenarier ifm. størrelsen på hedgefejlen:

i) Kendskab til dynamikken i den sande model / adgang til kontinuert prisdata, men afdækning begrænset til diskrete tidspunkter

ii) Intet kendskab til dynamikken i den sande model, men hedgestrategi konstrueret ud fra data-drevet model baseret på kontinuerligt observerbare priser

Der er i (ii) tale om en mere realistisk strategi, da vi i høj grad ikke kender den sande model og er begrænset til data-drevne modeller med diskret afdækning.

10.2 Data-drevet hedgestrategi

Med udgangspunkt i tilfældet hvor vi intet kendskab har til den sande afdækning Δ^*, kan vi opstille en data-drevet model som nævnt beskrevet ovenfor med markedsdata observeret kontinuerligt. Denne opstilling vil give os en mere realistisk tilgang til vores hedge, da det i den virkelige verden ikke er muligt at hedge kontinuert. Ud fra ligning (10.2) opstilles den alternative strategi:

$$\widetilde{\Delta}_{t_i}^n = \frac{\langle S, C \rangle_{t_i} - \langle S, C \rangle_{t_{i-1}}}{\langle S, S \rangle_{t_i} - \langle S, S \rangle_{t_{i-1}}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{10.4}$$

Da denne strategi er data-drevet stilles ingen antagelser om dynamikken i prisprocesserne. Med almindelig Black-Scholes dynamik for S_t og Itōs formel dekomponerer denne størrelse til:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_{t_i}^n &= \frac{\int_0^{t_i} \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \sigma_t^2 S_t^2 dt - \int_0^{t_{i-1}} \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \sigma_t^2 S_t^2 dt}{\int_0^{t_i} \sigma_t^2 S_t^2 dt - \int_0^{t_{i-1}} \sigma_t^2 S_t^2 dt} \\ &= \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \sigma_t^2 S_t^2 dt}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_t^2 S_t^2 dt} \end{aligned}$$

I første iteration af (10.4) sættes $\widetilde{\Delta}_{t_0}^n := \Delta_0^*$. I tilfælde hvor $\langle S, S \rangle_{t_i} - \langle S, S \rangle_{t_{i-1}} = 0$ sættes $\widetilde{\Delta}_{t_i}^n := \widetilde{\Delta}_{t_{i-1}}^n$. Denne strategi er mulig, såfremt vi i intervallet $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ kan observere det nødvendige prisdata på S_t og C_t, og på disse udregne den kvadratiske variation og kovariation. Det er således en data-drevet strategi da ingen information om den bagvedliggende model forventes. Denne strategi fungerer udmærket så længe tidsintervallet mellem afdækning $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ er af en tilpas minimal størrelse.

10.3 Realiseret Delta

I det videre forløb vil vi ligeså betragte markedsdata ud fra diskrete observationer, hvilket gør modellen yderligere virkelighedsnær, og ud fra dette opstille Real Δ strategien. Afdækningsfrekvensen er fortsat uændret, men det vil i mellem hver afdækning være muligt at observere både markedsprisen på optionen og det underliggende aktiv et arbitrært antal m gange. Lad antallet af afdækninger være givet ved n, og tiderne $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tidspunkterne for disse n afdækninger - hvor $t_0 = 0$ og $t_n = T$. Lad nu $t_i^0, t_i^1, \ldots, t_i^{m-1}$ angive tidspunkter for observationer i markedet hvor $t_i^0 = t_i$ og $t_i^m = t_{i+1}, \forall i$. Dette giver tidsintervallet $\Delta t = \frac{T}{mn}$ mellem hver observation og $h = \frac{T}{n} = m\Delta t$ mellem hver hedge.

Optionsprisen og den optimale afdækning bliver i stigende grad fejlagtig i kraft af begrænsningen forårsaget af diskrete observationer i modsætning til brugen af kontinuerte observationer. Usikkerheden i den nye model afhænger af antallet af observationer mellem hver hedge m. Lad C_t^m beskrive optionsværdien til et tidspunkt t baseret på m observationer af underliggende efter seneste afdækning. For at inkorporere denne usikkerhed i optionsprisen C_t^m forudsættes denne at være kontamineret af et additivt støjled N_t^m, som er et kontinuert semimartingal, hvor $\langle S, N^m \rangle_t \equiv 0, \forall m \in \mathbb{N}$. Dette giver os følgende værdiudvikling for den kontaminerede optionspris C_t^m:

$$dC_t^m = \Delta_t^* dS_t + dN_t^m,$$

hvor Δ_t^* angiver en tilpassende sand hedgestørrelse. For at undgå en oplagt arbitragemulighed skal der ligeså gælde $C_t^m \geq 0, \forall t$. Vi ser, at denne dynamik for C_t^m svarer til tidligere dynamik i ligning (10.1), såfremt støjen er triviel $N_t^m \equiv 0$. I det der følger, betragtes en familie af modeller indekseret ved m og n, som opfylder ovenstående dynamik. Det bemærkes, at den sande hedgestørrelse Δ_t^* er konstant i antallet af m observationer, da den tager udgangspunkt i den kontinuerte model.

Da C_0 kendes på tid $t = 0$ findes ingen usikkerhed i optionsprisen C_0^m. Da denne ikke er kontamineret, må vi dermed have $N_0^m = 0$. Herefter er N_t^m og C_t ikke længere observerbare før udløb $t = T$ hvor $C_T = \Phi(S_T)$ og $N_T^m = 0$. Ligesom C_t^m kræver vi, at støjen $N_t^m \geq 0, \forall t$ med sandsynlighed 1. For ethvert m kan vi ikke afdække optionen C_t^m perfekt grundet kontaminationen N^m. Med en daglig afdækningsfrekvens opstilles for en given dag t_{i+1} med m observerede priser det realiserede delta:

$$\widehat{\Delta}_{t_{i+1}}^{n,m} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \left(S_{t_i^{j+1}} - S_{t_i^j} \right) \left(C_{t_i^{j+1}} - C_{t_i^j} \right)}{\sum_{j=0}^{m-1} \left(S_{t_i^{j+1}} - S_{t_i^j} \right)^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{10.5}$$

Ligesom i ligning (10.4) sætter vi rent praktisk $\widehat{\Delta}_{t_i}^m = \widehat{\Delta}_{t_{i-1}}^m$, i tilfælde hvor brøken kræver division med 0. Det ses i (10.5) at nævneren er 0, når det underliggendes værdi ikke ændres mellem to hedgetidspunkter $[i, i+1]$.

Tælleren er en diskret estimator på kovariabiliteten i optionsprisen og underliggende indenfor inter-

vallet $\left[t_i, t_{i+1}\right]$ analog til ligning (10.4). Nævneren beskriver den kvadratiske variation i underliggende, eller med andre ord en estimator på variabiliteten i underliggende. Samlet udgør brøken dermed et udtryk for den skalerede kovariabilitet i optionsprisen. Disse størrelser kan til en vis grad sammenlignes med de gængse udtryk for kovarians, varians og korrelation. Imidlertid betragter vi i denne model tilvækster i de stokastiske processer, hvorfor den er mere hensigtsmæssig til formålet. Real Δ opfattes derfor som et udtryk for korrelationen mellem optionsprisen og spotprisen - udjævnet af de m observationer strategien forudsætter for hver daglige hedge.

Modellen antager ingen dynamik for optionsprisen eller prisen på underliggende, men med anvendelse af Black-Scholes dynamikken for disse og en øget observationsfrekvens ses grænseværdien for det realiserede delta:

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{\Delta}_{t_{i+1}}^{n,m} = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \sigma_t^2 S_t^2 dt}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_t^2 S_t^2 dt},$$

hvor integranden i tælleren udgør krydsproduktet af volatilitetskoefficienter mellem S_t og C_t og nævneren den kvadrerede volatilitetskoefficient i S_t. Grænseværdien svarer til den tilsvarende dekompositionen af ligning (10.4). Vi kan dermed opstille den relative hedgefejl mellem $\widehat{\Delta}_{t_i}^{n,m}$ i ligning (10.5) og den data-drevne strategi med kontinuerligt observerbart markedsdata $\widetilde{\Delta}_{t_i}^{n}$ i ligning (10.4):

$$L_j^{n,m} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\widetilde{\Delta}_{t_i}^{n} - \widehat{\Delta}_{t_i}^{n,m}\right) \Delta S_{t_i}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{10.6}$$

Som vist i Hayashi & Mykland Appendix Proposition A.1 konvergerer denne hedgefejl:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\widetilde{\Delta}_{t_i}^{n} - \widehat{\Delta}_{t_i}^{n,m}\right) \Delta S_{t_i} = o_P(1), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

$$\text{hvor } \forall \varepsilon \geq 0 : \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(|o_P(1)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Dette har betydning for vores opfattelse af støjen i modellen, da kontaminationsleddet $N^m = o_P(1)$ i grænsen for observationer. Betydningen af dette er essentielt, da en større observationsfrekvens da vil øge muligheden for at tilnærme den sande afdækning Δ^*.

Det realiserede delta er fuldstændig modelfri i prisprocesserne, der hører til både optionen og underliggende. Dette yder håb til en mulig anvendelse som kontrol af misspecificerede modeller og dertilhørende koefficienter. Derudover er denne strategi tilpasset diskrete observationer i S_t og C_t^m, hvormed den i modsætning til kalibreringstunge modeller vil være opdateret med seneste information observeret i markedsdata. Det er til trods for ventetid med at indsamle data og opstille passende estimation af følsomhed, hvilket især er relevant i højfrekvent afdækning. Dermed burde enhver af de eksisterende strategier udkonkurrere denne naive strategi i afdækningsfejl, såfremt brugen af den udvalgte strategi er velbegrundet.

10.4 Minimum-Varians Delta

Det andet alternativ er en afdækningsstrategi baseret på de observerede implicitte volatiliteter og den gængse Black-scholes model med implicit hedgevolatilitet (dermed er modellen indirekte bestemt af volatilitetsmodellering). Som beskrevet tidligere er implicit volatilitet den unikke volatilitet, som løser:

$$\hat{V}_t = V_t^{BS}\left(S_t, \sigma_i\right),$$

for en observeret markedspris $\hat{V}_t$. Markedsprisens infinitesimale ændring kan beskrives ved Taylorrækken:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{V}_t &= \frac{\partial V_t^{BS}}{\partial S_t}\Delta S_t + \frac{\partial V_t^{BS}}{\partial \sigma^{imp}}\Delta\sigma^{imp} + \varepsilon_t \\ &= \Delta_t^{BS}\Delta S_t + \nu_t^{BS}\Delta\sigma^{imp} + \varepsilon_t, \end{aligned} \tag{10.7}$$

hvor ε_t beskriver et kontaminerende støjled i markedsprisen. Strategien i dette afsnit tilhører en klasse af ikke-selvfinansierende afdækningsmodeller. Manglende selvfinansiering skaber grundlag for en tilhørende omkostningsproces knyttet til afdækningsporteføljen. Lad $\phi(t) = \left(\phi^0(t), \phi^1(t)\right)$ angive position i det risikofrie- og risikofyldte aktiv, dermed betragtes omkostningsprocessen[17] til tid t:

$$\text{Cost}_\phi(t) = V_\phi(t) - \int_0^t \phi^0(s)dB_s - \int_0^t \phi^1(s)dS_s,$$

hvor $V_\phi(t) = \phi^0(t)dB_t + \phi^1(t)dS_t$ angiver værdien af afdækningsporteføljen. Anvendelse af en ikke-selvfinanserende strategi til at replikere optionens betalingsstrøm bærer dermed risikoen forbundet med omkostningsprocessen. Det vil således være i afdækkerens interesse at minimere omkostningen associeret med strategien, hvilket f.eks. kan gøres ved minimering af den betingede variansproces i ovenstående omkostningsfunktion i afdækningsperioden $\left[t, T\right]$:

$$\min_\phi \mathbb{E}\left[\left(Cost_\phi(T) - Cost_\phi(t)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Lad *Minimum-Varians* være en strategi baseret på ovenstående variansrisikominimering. For denne strategi beskriver $\Delta_t^{MV}\Delta S_t$ værdiændringen i strategiens delta-replikering, som vi nu vil tilpasse Taylorapproksimationen fra tidligere. Hvis vi trækker $\Delta_t^{MV}\Delta S_t$ fra begge sider i ligning (10.7) fås:

$$\Delta\hat{V}_t - \Delta_t^{MV}\Delta S_t = \left(\Delta_t^{BS} - \Delta_t^{MV}\right)\Delta S_t + \nu_t^{BS}\Delta\sigma^{imp} + \varepsilon_t$$

Betinget på tilvæksten ΔS_t er den forventede værdi af dette:

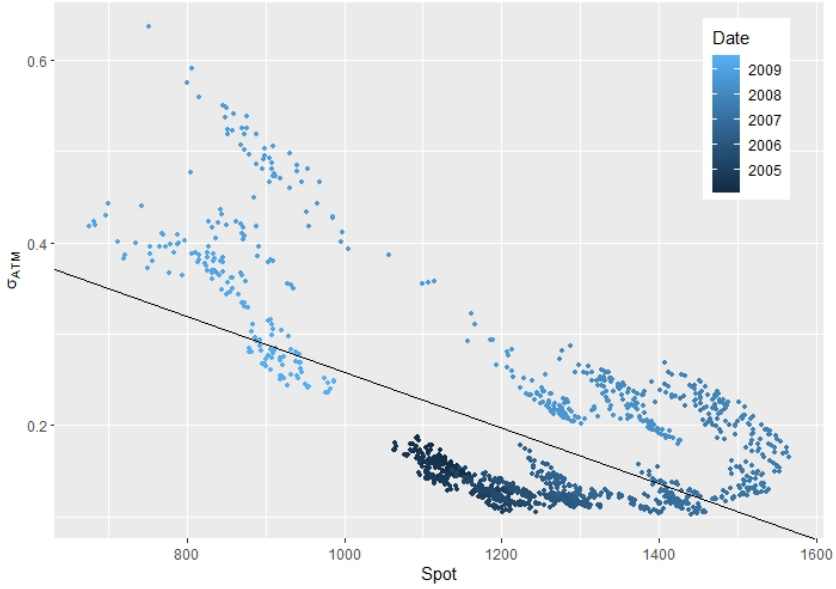
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\Delta\hat{V}_t - \Delta_t^{MV}\Delta S_t \middle| \Delta S_t\right] = 0 \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \Delta_t^{MV} = \Delta_t^{BS} + \nu_t^{BS}\frac{\mathbb{E}\left[\Delta\sigma^{imp}\middle|\Delta S_t\right]}{\Delta S_t} + \frac{\mathbb{E}\left[\varepsilon_t\right]}{\Delta S_t},\end{aligned}$$

[17] Rolf Poulsen, Klaus Reiner Schenk-Hoppé & Christian-Oliver Ewald (26. februar 2006): Risk Minimization in Stochastic Volatility Models: Model Risk and Empirical Performance, Quantitative Finance, Vol. 9, nr. 6, 2006, s. 693-704

hvor støjleddet udgår, når tidstilvæksten bliver kontinuert. For kontinuerte tilvækster frembringes dermed samme udtryk som Hull & White (2017)[18]:

$$\Delta_t^{MV} = \Delta_t^{BS} + \nu_t^{BS} \frac{\partial \mathbb{E}\left[\sigma^{imp}\right]}{\partial S_t} \tag{10.8}$$

Volatilitetens følsomhed i den underliggende prisproces er synonym med tidligere nævnte backbone-effekt, hvorfor strategien som udgangspunkt burde tage højde for de tidligere teoretiske skævvridningseffekter i afsnit 3.4.2. For SPX datasættet i perioden 2004-2009 betragter vi følgende scatterplot for ATM-volatiliteten:



Figur 11: Backbone for σ_{ATM} på 3M optioner med regression $\sigma_{ATM} = 0.5641 - 0.0003 \times Spot$

I mangel af bedre kan backbone-effekten approksimeres via regressionen med $\frac{\partial \sigma_{ATM}}{\partial S} = -0.0003$. Vi har imidlertid bedre approksimationer, da Hull & White bl.a. beskriver forskellen $\Delta^{MV} - \Delta^{BS}$, og hvorledes denne i høj grad ikke er afhængig af optionsløbetiden. Dermed kan vi med fordel tilnærme den med en kvadratisk funktion i Δ^{BS}[19]. Da backbone-effekten kan approksimeres på denne facon, gælder der approksimativt:

$$\nu_t^{BS} = S_t \sqrt{T-t}\; G(\Delta_t^{BS}),$$

for en funktion G, hvor $T - t$ udgør den tilbageværende løbetid på optionen. Med denne observation udleder Hull & White minimum-varians afdækningspositionen:

$$\Delta_t^{MV} = \Delta_t^{BS} + \frac{\nu_t^{BS}}{S_t\sqrt{T-t}} \left(a + b\Delta_t^{BS} + c\left(\Delta_t^{BS}\right)^2\right), \tag{10.9}$$

[18] John Hull & Alan White (24. maj 2017): Optimal Delta Hedging for Options. Journal of Banking and Finance, Vol. 82, september 2017, s. 180-190

[19] Vi antager denne approksimation også er gældende for vores datasæt, da Hull & White bl.a. arbejder med SPX-optioner i årrækken 2004-2015.

for ukendte koefficienter a, b og c. For at ligning (10.8) og (10.9) skal være identiske kræver vi:

$$\mathbb{E}\left[\Delta\sigma_i\right] = \left(\frac{a + b\Delta_t^{BS} + c\left(\Delta_t^{BS}\right)^2}{\sqrt{T-t}}\right)\frac{\Delta S_t}{S_t}$$

Således kan backbone-effekten beskrives ved denne kvadratiske approksimation i Δ_t^{BS}. Dvs. vi nu kun mangler at estimere koefficienterne a, b og c for at implementere strategien. Estimationen af disse vil foregå ved regressionen:

$$\begin{aligned}\hat{V}_t - \Delta_t^{BS}\Delta S_t &= \frac{\nu_t^{BS}}{\sqrt{T-t}}\mathbb{E}\left[\Delta\sigma_i\right] + \varepsilon_t \\ &= \frac{\nu_t^{BS}}{\sqrt{T-t}}\frac{\Delta S_t}{S_t}\left(\frac{a + b\Delta_t^{BS} + c\left(\Delta_t^{BS}\right)^2}{\sqrt{T-t}}\right) + \varepsilon_t\end{aligned}$$

Vi kan estimere koefficienterne ved at minimere summen af kvadrerede fejl (SSE) i residualen $\hat{\varepsilon}_t$:

$$\min_{a,b,c}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{V}_i - \Delta_i^{BS}\Delta S_i - \frac{\nu_i^{BS}}{\sqrt{T-i}}\frac{\Delta S_t}{S_t}\left(\frac{a + b\Delta_i^{BS} + c\left(\Delta_i^{BS}\right)^2}{\sqrt{T-i}}\right)\right)^2$$

11 Empiriske resultater

I dette afsnit betragter vi de empiriske resultater, der udspringer af ovenstående metodeafsnit om EWMA, EGARCH, Heston og de volatilitetsfrie modeller, samt tests af forskellige fremgangsmetoder for opstilling af hedgeporteføljen. For hver fremgangsmetode vil der af hedgeporteføljen følge et sæt P&L-stier og konfidensinterval for metodens middelværdi. Vi vil sammenligne disse resultater på tværs af metodevalg. Ud fra disse kan vi vurdere, hvilke metoder der passer bedst i afdækning af det givne optionsdata. Samtidig betragter vi om resultaterne stemmer overens med den givne teori, dvs. hvorvidt realiseret hedgevolatilitet yder stokastiske stier men deterministisk slutværdi, implicit hedgevolatilitet yder glatte stier men stokastiske slutværdier under anvendelse af reelle datapunkter. Vi diskuterer resultaterne af de enkelte empiriske resultater undervejs i afsnittet. Til sidst opsummeres alle resultater i en samlet vurdering og diskussion.

Som tidligere nævnt tager vi udgangspunkt i empiriske resultater, som følger køb/salg af ATM-call-optioner med 3 måneder til udløb. Vi antager 63 arbejdsdage i løbet af de 3 måneder, svarende til 252 arbejdsdage på et år. For at gøre resultaterne tilstrækkeligt indbyrdes uafhængige, handles ingen nye call-optioner så længe en eksisterende købt/solgt call-option endnu har resterende løbetid. På denne måde findes ingen overlap i afdækningshorisonten for samtlige hedgeporteføljer.

På trods af FToDT's antagelse om afdækning med konstant volatilitet under afdækningshorisonten er det i praksis muligt at afdække med varierende volatilitet under afdækningshorisonten. Resultater frembragt ved disse afdækninger kan ikke direkte sammenlignes med FToDT's konklusioner, men det

burde som udgangspunkt yde en bedre afdækning, da mere information inddrages om volatilitetsprocessen under afdækningen. For strategier med implicitet hedgevolatilitet opdateres denne med den implicitte volatilitet interpoleret i volatilitetsfladen for optionens tilbageværende løbetid og strike-spot-ratio, mens det for realiserede hedgevolatilitet vil være en opdatering med nyligt estimerede volatiliteter baseret på data fra modellen/markedet.

11.1 Opsætning af P&L

For en given strategi anvendes følgende fremgangsmåde til at bestemme de daglige P&L-værdier til tidspunkt t i afdækningshorisonten. Lad γ angive positionen i optionen (hvorvidt vi køber/sælger denne). For hver afdækningsstrategi $x \in \left\{\sigma^{imp}, \sigma^{act}\right\}$ opstilles følgende:

- Ved tid $t = 1$ handles optionen med position γ til den implicitte volatilitet i markedet, og den Δ-neutrale hedgeportefølje opstilles:

$$\Pi_1 = B_1 - \gamma\Delta_1^{BS}(x_1)S_1 + \gamma C_1^{BS}(\sigma_1^{imp}), \quad \text{st.} \quad \Pi_1 = 0,$$

  hvor $\Delta_1^{BS}(x_1)$ er det ordinære Black-Scholes Delta med volatiliteten x_1. B_1 vælges så bibetingelsen overholdes.

- For $t = 2, 3, \ldots, 63$:
  Efter Δt tilvækst i afdækningstiden er den realiserede tid-t-værdi i porteføljen dermed:

$$\widetilde{\Pi}_t = B_{t-1}e^{r_{t-1}\Delta t} - \gamma\Delta_{t-1}^{BS}(x_{t-1})S_t e^{q_{t-1}\Delta t} + \gamma C_t^{BS}(\sigma_t^{imp})$$

  Hvor $C_t^{BS}(\sigma_t^{imp})$ er værdien af optionen til tid t med samme strike som vi handlede den til oprindeligt. Her udgør σ_t^{imp} den i volatilitetsfladen interpolerede implicitte volatilitet ud fra optionens strike og tilbageværende løbetid. Den daglige (realiserede) værdiændring er da

$$dP\&L_t = \widetilde{\Pi}_t - \Pi_{t-1}$$

  og definerer profitten/tabet pådraget i intervallet $\left[t-1, t\right]$. Herefter rebalanceres porteføljen så den endnu en gang er Δ-neutral:

$$\Pi_t = B_t - \gamma\Delta_t^{BS}(x_t)S_t + \gamma C_t^{BS}(\sigma_t^{imp}), \quad \text{st.} \quad \Pi_t = \widetilde{\Pi}_t$$

  hvor værdien af pengemarkedskontoen B_t justeres til opfyldelse af bibetingelsen for selvfinansiering i porteføljen. Vi ser, at hvis bibetingelsen skal være opfyldt, må vi justere B_t til at være:

$$\begin{aligned}
B_t - \gamma\Delta_t^{BS}(x_t)S_t + \gamma C_t^{BS}\left(\sigma_t^{imp}\right) &= B_{t-1}e^{r_{t-1}\Delta t} - \gamma\Delta_{t-1}^{BS}(x_{t-1})S_t e^{q_{t-1}\Delta t} + \gamma C_t^{BS}(\sigma_t^{imp}) \\
B_t - \gamma\Delta_t^{BS}(x_t)S_t &= B_{t-1}e^{r_{t-1}\Delta t} - \gamma\Delta_{t-1}^{BS}(x_{t-1})S_t e^{q_{t-1}\Delta t} \\
B_t &= B_{t-1}e^{r_{t-1}\Delta t} - \gamma S_t\left(\Delta_{t-1}^{BS}(x_{t-1})e^{q_{t-1}\Delta t} - \Delta_t^{BS}(x_t)\right)
\end{aligned}$$

- Ved optionsudløb vil værdien af hedgestrategien dermed være de akkumulerede daglige vær-

diændringer i hedgeporteføljen:

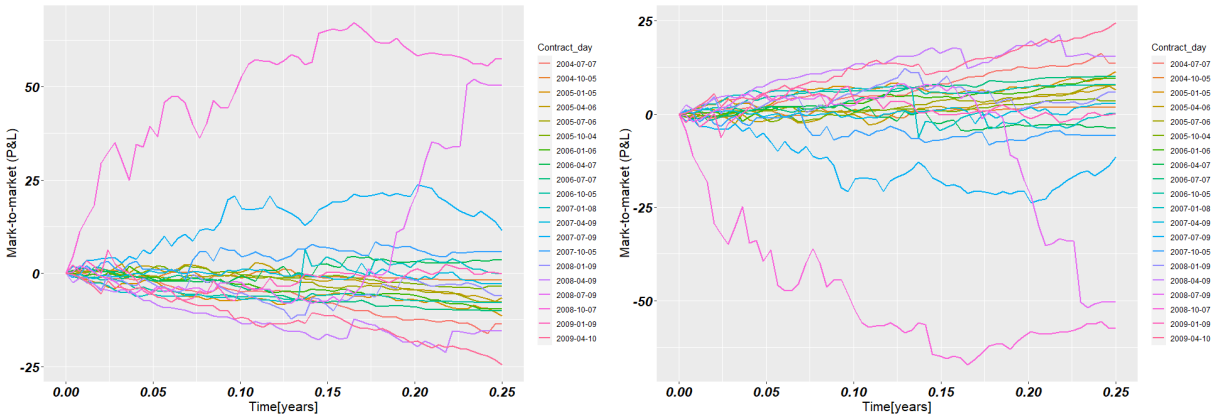
$$\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h} = \int_0^T d(P\&L_t) = \sum_{t=2}^{T} d(P\&L_t)$$

11.2 Validitetscheck af P&L-værdier

Hvorvidt ovenstående metodik for opstilling af P&L-stierne er gyldig, kan vi teste med følgende validitetscheck. Den afsluttende P&L med udelukkende lange positioner ($\gamma = 1$ for alle optioner) skal tilsvare den afsluttende P&L med udelukkende korte positioner ($\gamma = -1$ for alle optioner), givet fortegnsskift. Denne præmis vil fungere som validitetscheck af de opstillede P&L-stier, og giver samtidig et indblik i stiernes retning for den rene købe-/sælgestrategi. Testen skiller sig dermed ud fra senerede P&L-stier, da ingen volatilitetsanalyse udføres for positionsvalget. Følgende grafer og tabel viser P&L'stierne for udelukkende lange/korte positioner:

11.2.1 Med fast implicit hedgevolatilitet

(a) P&L-STIER, LANGE POSITIONER (b) P&L-STIER, KORTE POSITIONER



Figur 12: P&L-STIER MED STRENGT LANGE/KORTE POSITIONER

Kontraktdato	Lange	Korte	Abs. Diff.
2004-07-07	-13.52013	13.52013	0.00000
2004-10-05	-1.82318	1.82318	0.00000
2005-01-05	-11.36685	11.36685	0.00000
2005-04-06	-6.50737	6.50737	0.00000
2005-07-06	-7.73943	7.73943	0.00000
2005-10-04	-3.53228	3.53228	0.00000
2006-01-06	-9.63166	9.63166	0.00000
2006-04-07	3.54824	-3.54824	0.00000
2006-07-07	-10.03546	10.03546	0.00000
2006-10-05	-7.91673	7.91673	0.00000
2007-01-08	-0.20808	0.20808	0.00000
2007-04-09	-2.83874	2.83874	0.00000
2007-07-09	11.43907	-11.43907	0.00000
2007-10-05	5.79911	-5.79911	0.00000
2008-01-09	-5.86928	5.86928	0.00000
2008-04-09	-15.38216	15.38216	0.00000
2008-07-09	50.41407	-50.41407	0.00000
2008-10-07	57.35539	-57.35539	0.00000
2009-01-09	-0.05373	0.05373	0.00000
2009-04-10	-24.48797	24.48797	0.00000
Total	7.64283	-7.64283	0.00000

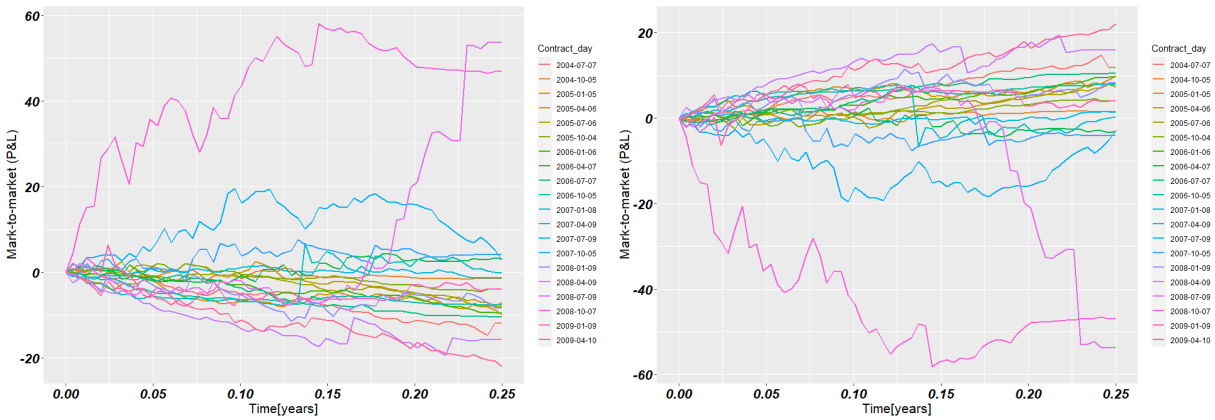
Tabel 1: Resultater for P&L-stierne

Som vist i figur 12a kan P&L-stierne med udelukkende lange positioner spejles i 1. aksen, hvilket giver præcis de samme stier set i figur 12b. Summen af slutværdierne for købsstrategien ses i tabel 1 at være 7.64283, og tilsvarende -7.64283 for salgsstrategien. Derudover ses det i tabel 1, at den absolutte forskel i P&L for samtlige porteføljer er 0. Dermed konkluderer vi, at vores metode som udgangspunkt opstiller gyldig P&L-resultater.

11.2.2 Med interpolerede implicitte hedgevolatiliteter

Det samme forsøg opstiller vi for en afdækning baseret på den interpolerede implicitte hedgevolatitet σ_{t-1}^{imp} i intervallet $[t-1, t]$. Med denne betragter vi P&L-stierne:

(a) P&L-stier, lange positioner (b) P&L-stier, korte positioner



Figur 13: P&L-stier med strengt lange/korte positioner

Kontraktdato	Lange	Korte	Abs. Diff.
07-07-2004	-11.89768	11.89768	0.00000
05-10-2004	-1.48275	1.48275	0.00000
05-01-2005	-9.79447	9.79447	0.00000
06-04-2005	-7.10229	7.10229	0.00000
06-07-2005	-8.03833	8.03833	0.00000
04-10-2005	-3.92987	3.92987	0.00000
06-01-2006	-9.56889	9.56889	0.00000
07-04-2006	3.15573	-3.15573	0.00000
07-07-2006	-10.33827	10.33827	0.00000
05-10-2006	-7.68482	7.68482	0.00000
08-01-2007	-0.16915	0.16915	0.00000
09-04-2007	-1.33448	1.33448	0.00000
09-07-2007	2.88319	-2.88319	0.00000
05-10-2007	4.14272	-4.14272	0.00000
09-01-2008	-8.37884	8.37884	0.00000
09-04-2008	-15.77426	15.77426	0.00000
09-07-2008	53.76396	-53.76396	0.00000
07-10-2008	46.98630	-46.98630	0.00000
09-01-2009	-3.92188	3.92188	0.00000
10-04-2009	-22.00112	22.00112	0.00000
Total	-10.48522	10.48522	0.00000

Tabel 2: Resultater for P&L-stierne

Som vist i figur 13 kan P&L-stierne med udelukkende lange positioner (a) igen spejles i 1. aksen, hvilket resulterer i de samme stier set i (b). Summen af slutværdierne for købsstrategien ses i tabel 2 at være -10.48522, og tilsvarende 10.48522 for salgsstrategien. Derudover ses det i tabel 2, at den absolutte forskel i P&L for samtlige porteføljer er 0. Dermed konkluderer vi, at vores metode som udgangspunkt også opstiller gyldig P&L-resultater for afdækning med varierende hedgevolatilitet.

11.3 Opsætning af lange vs. korte positioner

Vi ser i tabel 1 og 2 store udsving i de individuelle porteføljers P&L-resultater, hvorfor det vil være fordelagtigt at optimere opsætningen af lange/korte positioner i optionen. Som bl.a. set i figur 9 har en lang position i optionen konveksitetsgavn givet $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$. Der er derfor grund til at analysere det relative volatilitetsniveau for hhv. den implicitte- og realiserede volatilitet. Vi opstiller positionen i optionen ud fra en evaluering af uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$ på et vilkårligt tidspunkt, vi agter at handle optionen. For hver hedgestrategi $x \in \{\sigma^{imp}, \sigma^{act}\}$ betragtes da følgende:

- Opsætning af position i call-optionen:

$$\sigma_1^{act} < \sigma_1^{imp} \implies \gamma = -1, \qquad \text{(call-optionen sælges)}$$
$$\sigma_1^{act} > \sigma_1^{imp} \implies \gamma = 1, \qquad \text{(call-optionen købes)}$$

- Herefter følges samme P&L-metodik som i afsnit 11.1

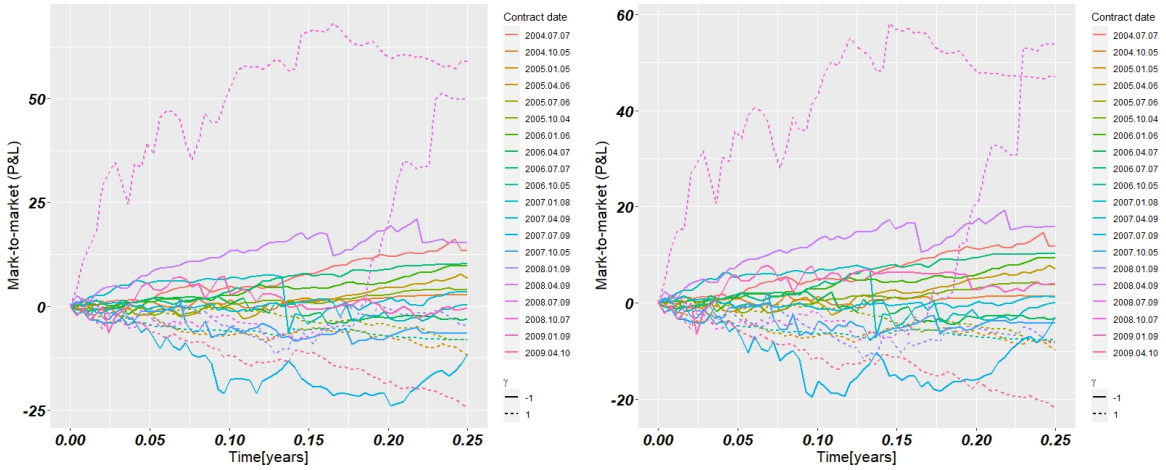
Denne grundlæggende fremgangsmetode bruges for begge hedgestrategier, hhv. realiseret og implicit hedgevolatilitet, da den efterfølgende afdækning ikke er afhængig af γ-opsætningen. Begge strategier kræver imidlertid estimation af den realiserede volatilitet for at teste $\sigma_1^{act} < \sigma_1^{imp}$. Næste afsnit vil i

dette øjemed beskrive resultaterne ud fra hver volatilitetsmodel.

11.4 Benchmark med hhv. fast & varierende impl. hedgevolatilitet

Følgende afsnit beskriver forskellen i anvendelse af en Black-Scholes strategi med hhv. fast og interpoleret implicit hedgevolatilitet. Begge strategier vil købe/sælge optioner på et tidspunkt τ ud fra evaluering af uligheden $\sigma_\tau^{act} > \sigma_\tau^{imp}$, hvor σ_τ^{act} repræsenteres af volatiliteten i det annualiserede log-afkast umiddelbart før optionen handles $\sqrt{R_{\tau-1}^2}$ (svarende til det numeriske $\tau - 1$ log-afkast). Størrelsen på denne volatilitet er drevet af størrelsen på fluktuationerne i indeksprisen i tidsrummet $\left[\tau - 2, \tau - 1\right]$, og er derfor en udmærket repræsentation af den realiserede volatilitet i aktivet.

FToDT beskriver P&L-værdien for en strategi med fast hedgevolatilitet. Vi anvender derfor afdækning i Black-Scholes modellen med fast implicit volatilitet som benchmark-model. For simplificering vil vi ligeså anvende en konstant rente- og dividendeparameter i denne strategi. Det er således udelukkende indeksprisen og den resterende løbetid, der varierer i afdækningspositionen. Som første alternativ til dette betragtes afdækning i Black-Scholes modellen med interpoleret implicit volatilitet og varierende rente- og dividendeparametre. Følgende graf viser P&L-stierne for Black-Scholes afdækning med den implicitte hhv. faste & interpolerede hedgevolatilitet:



(a) FASTE PARAMETRE (b) INTERPOLEREDE PARAMETRE

Figur 14: P&L STIER FOR BLACK-SCHOLES, AFDÆKNING MED IMPLICIT HEDGEVOLATILITET

11.4.1 Faste vs. Interpolerede parametre

Da benchmarkstrategien i figur 14a har fast volatilitet betragtes ingen følsomhed i *Greeks* som vega, hvorfor modellen må forventes at afdække optionsprisændringen ringere end alternativet. Figur 14a viser P&L-stierne for den simple faste Black-Scholes strategi, hvor vi iagttager en afsluttende P&L på 95.54871. Stierne ligner til forveksling P&L-stierne i grafen til højre 14b, men denne afdækning med varierende parametre opnår resultatet 99.98459, hvilket er umiddelbart bedre end modellen med faste

parametre. De enkelte optioners P&L-resultater kan betragtes i tabel 3 nedenfor:

Kontraktdato	Konstant σ^{imp}	Interpoleret σ^{imp}
2004-07-07	13.42865	11.89065
2004-10-05	2.79510	1.44881
2005-01-05	-11.81521	-9.77210
2005-04-06	6.77127	7.08423
2005-07-06	-8.18707	-8.03847
2005-10-04	3.92048	3.87291
2006-01-06	9.79796	9.54608
2006-04-07	-3.08660	-3.16709
2006-07-07	10.15451	10.32939
2006-10-05	-8.19014	-7.66615
2007-01-08	0.48227	0.13428
2007-04-09	3.38851	1.29519
2007-07-09	-11.68841	-2.87117
2007-10-05	-6.61481	-4.12767
2008-01-09	-4.43670	-8.40578
2008-04-09	15.23820	15.77669
2008-07-09	49.89681	53.77198
2008-10-07	58.96233	46.93434
2009-01-09	-0.49322	3.93316
2009-04-10	-24.77523	-21.98468
Total	95.54871	99.98459

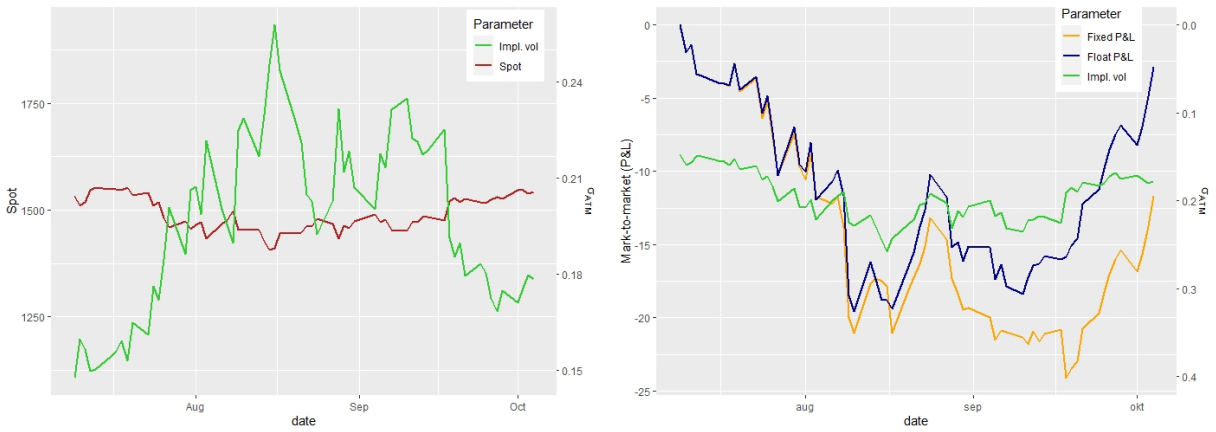
Tabel 3: Black-Scholes resultater,
afdækning med hhv. faste og interpolerede parametre

Strategien med interpolerede parametre lader generelt til at præstere bedre individuelle P&L-resultater, men har som vist i tabellen også et par optioner med dårligere resultater end strategien med faste parametre. En forklaring til dette beskrives i følgende afsnit.

11.4.2 Forklaring af udvalgte tendenser

Hvorvidt Black-Scholes strategien med faste parametre foretrækkes frem for den tilsvarende strategi med interpolerede parametre, afhænger i høj grad af volatilitetsniveauet når optionen handles. Når retningen på den implicitte volatilitet under løbetiden er nedadgående vil afdækningen overvurdere optionsprisen i Black-Scholes formel, grundet konveksitetsgavnen i den større volatilitet der anvendes i formlen kontra den senere observerede volatilitet i markedet. I modsat tilfælde undervurderes optionsprisen i afdækningen når retningen i den implicitte volatilitet er opadgående. Dette sker da indeksprisens fald i samme periode yder et større fald i optionens *moneyness*, end hvis den observerede implicitte volatilitet anvendes i stedet. Betragt følgende eksempel:

Portefølje 13 handledes 9. juli 2007 med afdækning 3 måneder frem. Under denne periode betragtes følgende udvikling i indeksprisen, ATM-volatiliteten og P&L-stierne for strategien med hhv. faste og varierende parametre:



(a) Spotpris & atm-volatilitet (b) atm-volatilitet og p&l-stier

Figur 15: Porteføljе 13,
Illustration af volatilitetseffekter i p&l-stier

Black-Scholes strategien med interpolerede parametre ses at følge udviklingen i den implicitte volatilitet nærmere end den tilsvarende strategi med faste parametre. Udviklingen i P&L-stien for strategien med faste parametre lader til at være mere udjævnet, men afbrudt af fluktuationer i volatiliteten undervejs. ATM-volatiliteten starter fra venstre ved 0.1476, og viser udsving i begge retninger under hele afdækningsperioden. Volatiliteten falder midt i August 2007 som følge af en stigning og derefter udglatning i indeksprisen.

Black-Scholes modellen med faste parametre vil derfor på alle tidspunkter umiddelbart før dette volatilitetsfald undervurdere optionsprisen markant, da det gradvise fald i indeksprisen øger volatiliteten i aktivet. Dette giver to modsatrettede effekter på optionens *moneyness*, hvori Black-Scholes med faste parametre kun tager højde for den ene. Når afdækningen ikke tager højde for *vega*-effekten forårsaget af volatilitetsændringen reduceres positionen i det underliggende aktiv mere, hvorledes en suboptimal afdækning af risikokilden vil følge. Strategien med faste parametre er dermed ikke delta-neutral, i modsætning til strategien hvor den implicitte volatilitet opdateres løbende.

Begge strategier har positionen $\gamma = -1$, jf. tabel 29 i Bilag D i optionen for portefølje 13. Betragt hedgeporteføljen på et tidspunkt t:

$$\Pi_t = B_t + \Delta_t^{BS}(\sigma_t^{imp})S_t - C_t^{BS}(\sigma_t^{imp})$$

Antag, indeksprisen falder $S_{t+1} < S_t$, og betragt opdateringen:

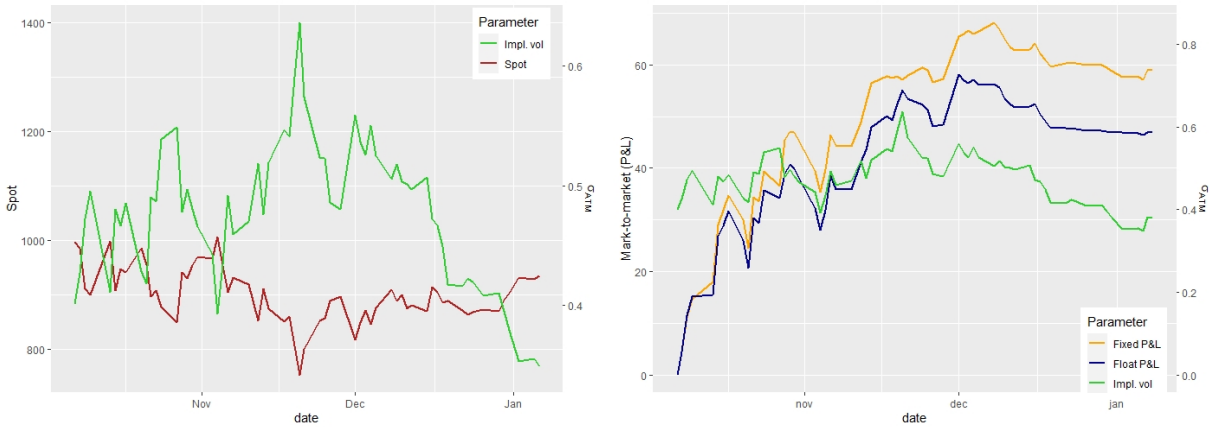
$$\widetilde{\Pi}_{t+1} = B_t e^{r_t \Delta t} + \Delta_t^{BS}(\sigma_t^{imp})S_{t+1}e^{q_t \Delta t} - C_{t+1}^{BS}(\sigma_{t+1}^{imp})$$

I strategien med faste parametre reduceres positionen i underliggende kraftigere end i tilsvarende strategi med interpolerede parametre. Således vil værdien af den afdækkede position i strategien med faste parametre være mindre værd end den tilsvarende strategi med interpolerede parametre. Værdiændringen i optionen er mindre fordi optionen handles til en højere implicit volatilitet, hvorfor porteføljen

med de faste parametre replikerer denne værdiændring dårligt.

I og med begge strategier sælger optionen har de en lang position i volatilitetsforskellen $\sigma^{imp} - \sigma^{act}$. Med den korte position taber P&L-stierne værdi, når det underliggende aktiv bevæger sig meget, hvilket er ensbetydende med store niveauer for den realiserede volatilitet. Mens den implicitte volatilitet fluktuerer opad, falder værdien af P&L-stierne i plot 16b, hvorfor den realiserede volatilitet ligeså må fluktuere på et niveau over den implicitte volatilitet. Begge strategier vinder lidt P&L mens den implicitte volatilitet falder i midten af August. Den realiserede volatilitet falder da i samme periode til et niveau under den implicitte volatilitet (formodentlig). Strategierne vinder for det meste lidt P&L mens den implicitte volatilitet falder på trods af det korte Γ i den solgte option. Dette er umiddelbart kontraintuitivt, men ved at betragte P&L-stiernes udvikling får vi da et sløret billede af den realiserede volatilitet og niveauet for denne.

Modeksempel: Portefølje 18 handledes 7. oktober 2008 med afdækning 3 måneder frem. Under denne periode betragtes følgende udvikling i indeksprisen, ATM-volatiliteten og P&L-stierne for strategien med hhv. faste og varierende parametre:



(a) Spotpris & atm-volatilitet

(b) atm-volatilitet og p&l-stier

Figur 16: Portefølje 18,
Illustration af volatilitetseffekter i p&l-stier

I afdækningsperioden for portefølje 18 betragtes mere voldsomme fluktuationer i indeksprisen og større implicitte volatiliteter, end vi så for portefølje 13. Begge strategier køber optionen og er dermed lang i forskellen $\sigma^{act} - \sigma^{imp}$. I denne periode betragtes store ændringer i det underliggende aktiv, ensbetydende med høj realiseret volatilitet, derfor vinder strategierne store P&L-resultater med lang Γ. På trods af vores manglende evne til at observere den realiserede volatilitet kan vi drage konklusioner om niveauet for denne ved den observerede udvikling i P&L-stierne. For det meste vokser P&L-stierne for begge strategier med den implicitte volatilitet, hvorfor den realiserede volatilitet i denne periode også må fluktuere på et højere niveau. Især volatilitetsstigningen i midten af November øger værdien i P&L-stierne for begge strategier, hvilket også passer med store spring i den realiserede volatilitet da

indeksprisen her falder markant.

Begge strategier drager fordel af store spring i den realiserede volatilitet forårsaget af fald i spotprisen. Strategien med faste parametre opnår et højere resultat, da denne mere uforsigtigt tager længere/kortere positioner i underliggende end strategien med interpolerede parametre. Det ses da også, at udsvingene i den implicitte volatilitet ofte skaber tilsvarende udsving i P&L-stien for strategien med interpolerede parametre. Udsving vi ikke ser samtidig på den anden strategi, da denne ikke tager højde for *vega*-effekten. Black-Scholes strategien med interpolerede parametre yder da en bedre afdækning, men opnår lavere P&L-resultater, da afdækningen ikke vinder hurtige gevinster under drastiske ændringer i indeksprisen.

11.5 Test af volatilitetsarbitrage

En af Willmott eksperimentets resultater er, at volatilitetsarbitrage kan opsamles, såfremt uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$ under afdækningsperioden er sand for lange- og falsk a.s. for korte positioner i optionen. Volatilitetsarbitrage er ensbetydende med, at vi i den selvfinansierende strategi, trods ingen initiel formue, kan skabe positive risikofrie betalingsstrømme på strategien. I vores tilfælde betyder dette, at slutværdien for P&L-stierne i en given strategi er signifikant større end 0. For at finde ud af om den afsluttende P&L er signifikant større end 0, bruger vi middelværdi, standardafvigelse og konfidensinterval for P&L-resultaterne. Middelværdien er givet ved:

$$\mathbb{E}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]_i,$$

hvor $\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]_i$ er vores afsluttende P&L for hver portefølje $i \in \{1, \ldots, N\}$, og $\mathbb{E}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]$ er den forventede P&L-værdi. Vi er i stand til at opstille $N = 20$ ikke-overlappende porteføljer, dvs. middelværdien for P&L-resultaterne i f.eks. Black-Scholes strategien med interpoleret implicit hedgevolatilitet er:

$$\frac{1}{20} \times 99.98459 = 4.99923$$

Når vi har fundet middelværdien, så skal vi bruge den til at bestemme standardafvigelsen. Denne udledes ved formlen:

$$Std.dev. = \sqrt{\mathbb{V}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]_i - \mathbb{E}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]\right)^2}$$

Standardafvigelsen for P&L-resultaterne i Black-Scholes strategien med interpoleret implicit hedgevolatilitet er dermed 17.88141. Med kendskab til middelværdi og standardafvigelse kan vi finde konfidensintervallet for middelværdien af P&L-resultaterne. Formlen for konfidensintervallet med konfi-

densniveauet α er givet ved:

$$CI = \left\{ \mathbb{E}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right] - \sqrt{\tfrac{1}{N}\mathbb{V}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]} \times q_{1-\frac{1}{2}\alpha}, \quad \mathbb{E}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right] + \sqrt{\tfrac{1}{N}\mathbb{V}\left[\widehat{P\&L}_{\mathbb{T}}^{h}\right]} \times q_{1-\frac{1}{2}\alpha} \right\},$$

hvor q_α udgør fraktilen i std. normalfordelingen for sandsynligheden α. For ovenstående benchmark-strategier betragtes følgende middelværdier, standardafvigelser og konfidensintervaller for niveauet $\alpha = 0.05$ (et 95% konfidensniveau)

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
Faste parametre	4.77744	19.60063	-3.81276	13.36763
Interpolerede parametre	4.99923	17.88141	-2.83750	12.83596

Tabel 4: KONFIDENSINTERVAL FOR BLACK-SCHOLES STRATEGI

Strategien med interpoleret hedgevolatilitet har både en større middelværdi og lavere standardafvigelse end strategien med fast hedgevolatilitet. Dens P&L-resultater er således markant bedre end benchmark. Imidlertid er nedre konfidensniveau ikke positivt for nogen af strategierne, dermed kan vi med 95% sandsynlighed for begge udelukke, at strategien yder volatilitetsarbitrage.

Hvorvidt en strategi yder volatilitetsarbitrage afhænger både af købestrategien (opsætning af γ) og strategiens afdækningspræstation under afdækningshorisonten. Det er da muligt for de følgende strategier at yde en volatilitetsarbitrage, såfremt at de yder en bedre købestrategi og afdækningspræstation.

11.6 EWMA's empiriske resultater

Den første strategi vi prøver at finde volatilitetsarbitrage med er EWMA-strategien. Når realiseret volatilitet estimeres med EWMA-modellen foreligger parametervalget for λ. Men som nævnt tidligere leder forskellige fejlstatistikker til forskellige estimater af denne. Vi tager derfor udgangspunkt i de optimale parametre beskrevet i afsnit 8.3, fundet ved reducering af hhv. RMSE og HRMSE, $\lambda = 0.89687$ og $\lambda = 0.98235$. Vi vil derudover sammenligne resultaterne med $\lambda = 0.97$, svarende til det optimale parametervalg ifølge Mina og Xiaos forskning fra 2001. Denne forskning opstiller λ's størrelse ud fra RiskMetrics[20], hvilket også ofte anses som værende en af de mest udbredte estimatorer i den virkelige verden[21]. Vi bruger også her to forskellige implicitte hedgestrategier, den ene hvor vi har en fast implicit hedgevolatilitet, som vi fastsætter når vi køber/sælger optionen, og den anden med implicit hedgevolatilitet interpoleret i volatilitetsfladen.

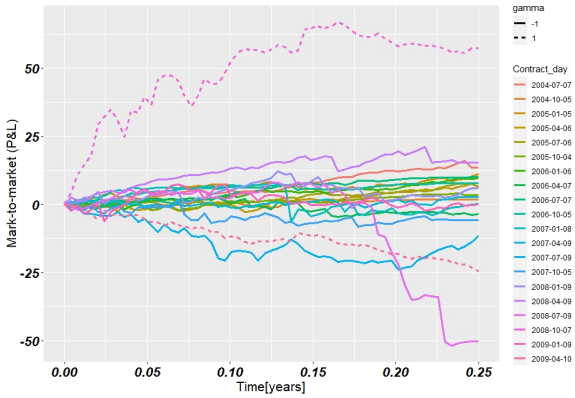
[20] Jorge Mina & Jerry Yi Xiao (april 2001): Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard, RiskMetrics Group, Inc.

[21] Ricardo Suganuma (oktober 2000): Reality Check for Volatility Models, oktober 2000, University of California, San Diego

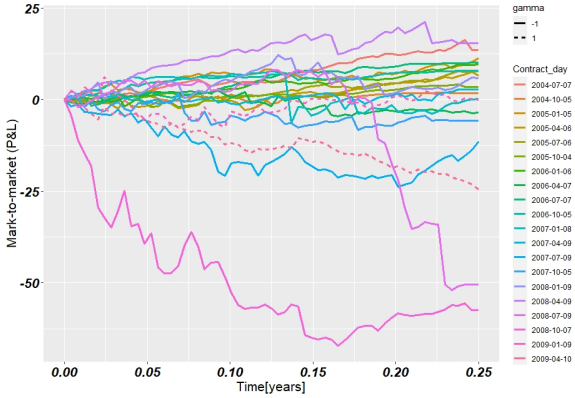
11.6.1 EWMA fast hedgevolatilitet

Ved brug af en fast implicit hedgevolatilitet for hver option, betragter vi P&L-stier for EWMA-købsstrategierne i figur 17 nedenfor:

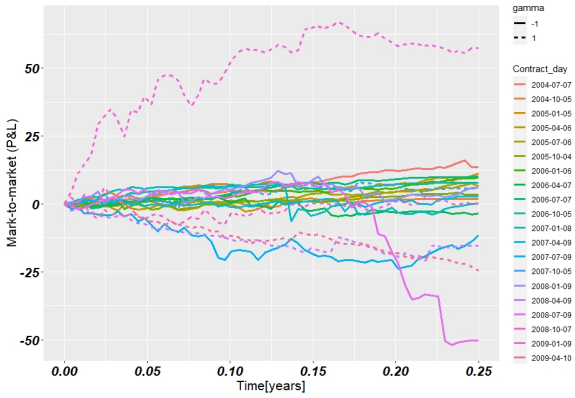
(a) λ=0.89687 (RMSE)



(b) λ=0.98235 (HRMSE)



(c) λ=0.97 (RiskMetrics)



Figur 17: P&L-STIER FOR $x = \sigma^{imp}$ MED σ^{act} MODELLERET VED EWMA

Ovenstående figur viser P&L-stierne for afdækningsstrategien med fast implicit hedgevolatilitet, givet når vi køber/sælger optionen, og λ er estimeret ved brug af hhv. RMSE, HRMSE og RiskMetrics. Her repræsenterer de massive linjer i hvert plot stier med kort position i optionen ($\gamma = -1$), og de tilsvarende stiplede linjer stier med lang position i optionen ($\gamma = 1$). Resultaterne for de individuelle optioners P&L-resultater kan ligeså iagttages i nedenstående tabel 5:

Kontraktdato	$EWMA_{RMSE}$	$EWMA_{HRMSE}$	$EWMA_{RiskMetrics}$
2004-07-07	13.52013	13.52013	13.52013
2004-10-05	1.82318	1.82318	1.82318
2005-01-05	11.36685	11.36685	11.36685
2005-04-06	6.50737	6.50737	6.50737
2005-07-06	7.73943	7.73943	7.73943
2005-10-04	3.53228	3.53228	3.53228
2006-01-06	9.63166	9.63166	9.63166
2006-04-07	-3.54824	-3.54824	-3.54824
2006-07-07	10.03546	10.03546	10.03546
2006-10-05	7.91673	7.91673	7.91673
2007-01-08	0.20808	0.20808	0.20808
2007-04-09	2.83874	2.83874	2.83874
2007-07-09	-11.43907	-11.43907	-11.43907
2007-10-05	-5.79911	-5.79911	5.79911
2008-01-09	5.86928	5.86928	5.86928
2008-04-09	15.38216	15.38216	-15.38216
2008-07-09	-50.41407	-50.41407	-50.41407
2008-10-07	57.35539	-57.35539	57.35539
2009-01-09	0.05373	-0.05373	-0.05373
2009-04-10	-24.48797	-24.48797	-24.48797
Total	58.09201	-56.72622	38.81846

Tabel 5: RESULTATER FOR EWMA-STRATEGIERNE MED FAST HEDGEVOLATILITET

Mod forventning leder λ estimeret ved HRMSE til et gevaldigt tab. Omvendt ses det at RMSE leder til den største gevinst, til trods for at denne fejlstatistik ikke tager højde for tidsvariation i volatiliteten, og derfor må anses som en mindre sofistikeret estimator for finansielt data kendetegnet ved heteroskedasticitet.

Denne gevinst er ligeså større end resultatet for strategien med RiskMetrics optimale estimator $\lambda = 0.97$ anvendt af Mina og Xiao før den seneste finanskrise i 2009, som altså må siges at være et umiddelbart kontraintuitivt resultat. Imidlertid skaber perioder med finansiel uro store variationer i stokastiske fænomener som volatilitet, hvorfor RiskMetrics optimale estimator, som ikke inkluderer data fra den seneste finanskrise, må formodes at være dårligere tilpasset til kriseperioden i 2008-2009.

Vi betragter nu hvorvidt nogen af strategierne med 95% sikkerhed tjener penge. Dette sker ligeså ud fra konfidensintervallet for RMSE, HRMSE og RiskMetrics (HRMSE inkl. selvom vi ved denne strategi yder tab). Middelværdien, standardafvigelsen og 95% konfidensintervallet for alle tre strategier er da givet ved nedenstående tabel:

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
$EWMA_{RMSE}$	2.90460	19.74119	-5.74720	11.55640
$EWMA_{HRMSE}$	-2.83631	19.75164	-11.49269	5.82007
$EWMA_{RiskMetrics}$	1.94092	19.86530	-6.76527	10.64711

Tabel 6: KONFIDENSINTERVAL FOR EWMA STRATEGIERNE MED FAST HEDGEVOLATILITET

Ingen af EWMA-strategierne garanterer en gevinst med 95% sikkerhed. De har alle lavere middelværdier og højere standardafvigelse end Black-Scholes strategierne, jf. tabel 4, hvorfor det vil være bedre at anvende den tidligere repræsentation $\sigma_\tau^{act} = \sqrt{R_{\tau-1}^2}$ end EWMA-estimeret realiseret volatilitet i

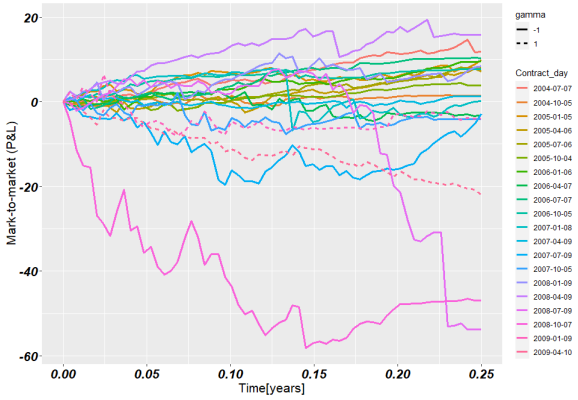
evaluering af $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$. Det er tydeligt at HRMSE yder en negativ afsluttende P&L, men hvis denne P&L med 95% sikkerhed er negativ, kan vi udlede en volatilitetsarbitrage ved at bruge den modsatte købsstrategi - f.eks. hvis $\gamma = -1$ ifølge HRMSE vil en modsat købsstrategi $\gamma = 1$ med 95% sikkerhed yde en volatilitetsarbitrage.

11.6.2 EWMA med interpoleret hedgevolatilitet

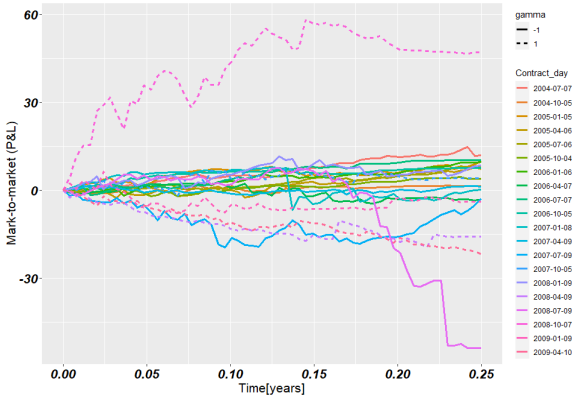
Ved brug af den interpolerede implicitte hedgevolatilitet for hver option hver dag betragtes resultaterne for EWMA-strategierne:

(a) λ=0.89687 (RMSE)

(b) λ=0.98235 (HRMSE)



(c) λ=0.97 (RiskMetrics)



Figur 18: P&L-STIER FOR $x = \sigma_t^{imp}$ MED σ^{act} MODELLERET VED EWMA

Kontraktdato	$EWMA_{RMSE}$	$EWMA_{HRMSE}$	$EWMA_{RiskMetrics}$
2004-07-07	11.89768	11.89768	11.89768
2004-10-05	1.48275	1.48275	1.48275
2005-01-05	9.79447	9.79447	9.79447
2005-04-06	7.10229	7.10229	7.10229
2005-07-06	8.03833	8.03833	8.03833
2005-10-04	3.92987	3.92987	3.92987
2006-01-06	9.56889	9.56889	9.56889
2006-04-07	-3.15573	-3.15573	-3.15573
2006-07-07	10.33827	10.33827	10.33827
2006-10-05	7.68482	7.68482	7.68482
2007-01-08	0.16915	0.16915	0.16915
2007-04-09	1.33448	1.33448	1.33448
2007-07-09	-2.88319	-2.88319	-2.88319
2007-10-05	-4.14272	-4.14272	4.14272
2008-01-09	8.37884	8.37884	8.37884
2008-04-09	15.77426	15.77426	-15.77426
2008-07-09	-53.76396	-53.76396	-53.76396
2008-10-07	46.98630	-46.98630	46.98630
2009-01-09	3.92188	-3.92188	-3.92188
2009-04-10	-22.00112	-22.00112	-22.00112
Total	60.45557	-41.36079	29.34872

Tabel 7: RESULTATER FOR EWMA-STRATEGIERNE MED INTERPOLERET HEDGEVOLATILITET

I resultaterne betragter vi igen en negativ afsluttende P&L for $EWMA_{HRMSE}$ modellen. Den hovedsagelige forskel mellem resultatet i HRMSE og de andre estimatorer er givet forskellige positioner i portefølje nr. 18 - HRMSE har for option positionen $\gamma = -1$, hvor de andre har $\gamma = 1$, hvilket giver RMSE og RiskMetrics en gevinst i denne portefølje. $EWMA_{RMSE}$ giver den største gevinst med en afsluttende P&L på 60.45557. Dette sker til trods for at denne fejlstatistik ikke tager højde for tidsvariation i volatiliteten/variansen. Denne gevinst er også større end RiskMetrics estimator anvendt af Mina og Xiao før den seneste finanskrise i 2009. RMSE's større gevinst ses i tabel 7, primært at skyldes de sidste 5 optioner i vores datasæt, hvor vi ser de største porteføljetab/-gevinster.

Grunden til dette finder vi i betydningen af strategiernes indbyrdes estimatorer samt markedets volatilitetsfluktuationer. RMSE strategiens lavere estimator yder en hurtigere tilpasningshastighed, hvormed den med større modtagelighed for markedets umiddelbare ændringer hurtigt tilpasser sig udviklingen i markedet. Da de øvrige strategier har væsentlig højere estimatorer, skal de bruge mere tid på at tilpasse sig denne udvikling. Under højkonjunktur er dette ikke noget stort problem for HRMSE og RiskMetrics grundet små ændringer i markedet. HRMSE og RiskMetrics er i modsætning til RMSE mindre modtagelige overfor volatilitetsstøj. Siden den implicitte volatilitet i markedet springer voldsomt i værdi under de sidste 5 optioner i data, pga. finanskrisens indtog, bliver strategiernes langsomme tilpasning til markedsudviklingen en stor svaghed. Denne svaghed forplanter sig under finanskrisen i lavere afsluttende P&L'er. Vi udspecificerer denne forskel i tilpasningshastighed nærmere i næste afsnit.

Hvis vi vender tilbage til $EWMA_{HRMSE}$, betragtes modellens estimator at svare omtrent til RiskMetrics optimale estimator $\lambda = 0.97$. Dog bliver de respektive P&L'er meget forskellige; HRMSE's

estimator resulterer i et tab, mens RiskMetrics estimator yder en gevinst. P&L-forskellen mellem HRMSE og RiskMetric er større end den tilsvarende P&L-forskel mellem RMSE og RiskMetric, på trods af at RMSE ikke tager højde for tidsvarierende volatilitet. Dette er ikke umiddelbart tydeligt i parameterestimationen, da forskellen mellem modellernes estimerede λ i HRMSE og RiskMetric er mindre end den tilsvarende parameterforskel i RMSE og RiskMetric. Dette viser vigtigheden i parameterestimation og betydningen af fejlstatistikkers forskelligheder i de resulterende estimatorer, da små fejl kan resultere i store forskelligheder og evt. tab.

Hvis RiskMetrics estimator var optimalt da Mina & Xiao kalibrerede det i 2001, viser disse resultater en tendens til tidsvariation i parameteren λ. Variationerne kan muligvis være forårsaget af konjunkturskift i økonomien. Inkorporering af dette vil tilpasse modellen bedre til lokale volatilitetsmodelleringer, da parameteren da inddrager de periodevis skiftende dynamikker i volatiliteten. Dette er imidlertid mere krævende, da λ skal kalibreres fra tid til anden. Vi skal således også efterfølgende sammenligne de forskellige fejlstatistikker (RMSE, HRMSE, osv.) under kalibreringen, og betragte hvorvidt disse stemmer overens. Dette gør vores ellers meget simple model mere kompleks, da modellens parameter skal testes periodevis og evt. revideres ud fra historisk data. Uden denne kalibrering med markedsdata vil EWMA modellens validitet som volatilitetsmodel kompromitteres, og en eventuel hedge med udgangspunkt i modellen vil være unødvendigt risikabel.

Vi kan for de interpolerede implicitte hedgevolatiliteter ligeså opstille følgende middelværdi, standardafvigelse og 95% konfindensinterval i nedenstående tabel for hver EWMA-strategi:

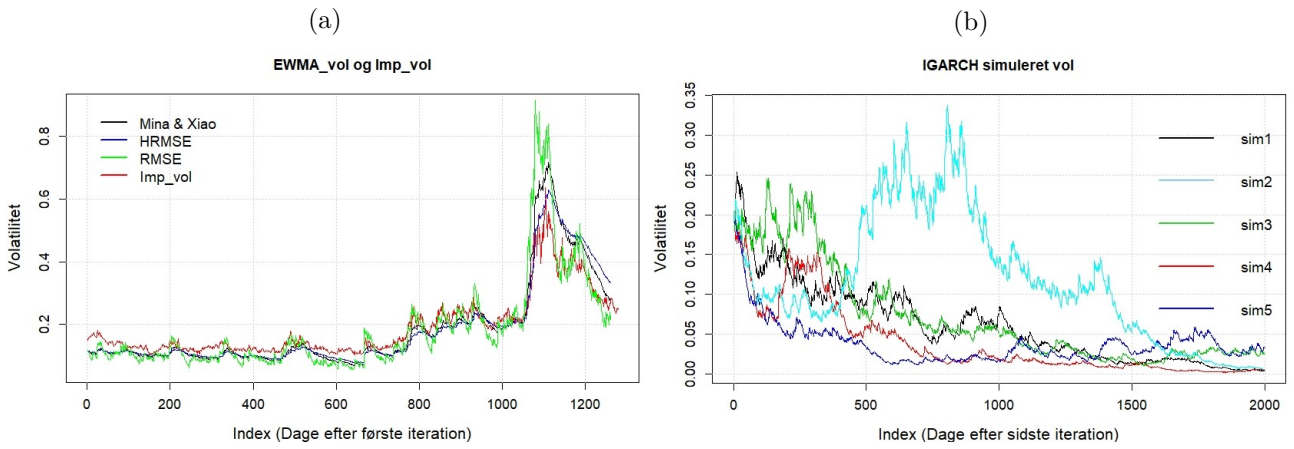
	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
$EWMA_{RMSE}$	3.02278	18.35172	-5.02007	11.06563
$EWMA_{HRMSE}$	-2.06804	18.49058	-10.17175	6.03567
$EWMA_{RiskMetrics}$	1.46744	18.55093	-6.66272	9.59759

Tabel 8: KONFIDENSINTERVAL FOR EWMA-STRATEGIERNE MED INTERPOLERET IMPLICIT HEDGEVOLATILITET

Ligesom i tabel 6 kan vi heller ikke med interpoleret hedgevolatilitet bekræfte at strategierne genererer en volatilitetsarbitrage med 95% sikkerhed. Vi ser dog i tabel 8, at intervallerne er blevet tættere grundet en laverede standardafvigelse. Den lavere standardafvigelse følger af færre afvigelser fra den forventede P&L-værdi for implicit hhv. interpoleret volatilitet end fast hedgevolatilitet.

11.6.3 Kommentar til EWMA

Selvom vi i hele afsnit 11.6 udelukkende bruger EWMA estimation af den realiserede volatilitet til at evaluere $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$, har afdækningsvolatiliteten en stor indflydelse på den afsluttende P&L. Betragt i figur 19a udviklingen i den implicitte ATM-volatilitet og hvordan hver af EWMA-strategierne estimerer den realiserede volatilitet. I figur 19b betragtes ligeså en IGARCH(1,1) simulation af fremtidige volatiliteter:



Figur 19: Estimerede og simulerede volatiliteter

I figur 19a ser vi en af forklaringerne bag HRMSEs dårlige resultat. Grundet dens høje λ tilpasser dens estimerede volatilitet sig langsommere til udsving i markedet end de andre metoder. Det ses tydeligt i chokket i højre side af grafen, hvor vi oplever de første faser af finanskrisen 2008. I starten af chokket halter HRMSE volatiliteten efter de øvrige metoder og topper også senere. Da volatiliteten igen aftager i markedet, tager det længere tid for HRMSE at tilpasse sig det lavere volatilitetsniveau, og ender til slut også meget højere end de øvrige metoder.

Det høje λ giver en stor vægt i tidligere volatiliteter, men dermed vægter HRMSE nutidige observationer af afkastet meget lavere end de alternative estimatorer. De nutidige observationer af afkastet er modellens eneste reference til markedets udvikling, hvorfor denne lave vægt yder en noget forsinket tilpasning.

De simulerede IGARCH(1,1)-volatiliteter fortæller også vigtige ting om førnævnte teori bag EWMA-modellen. Her betragtedes IGARCH(1,1)-processen med $\omega = 0$, som modellen bygger på, hvori variansen konvergerer mod langtidsniveauet $\omega = 0$ for $t \to \infty$. Vi udleder dermed en uoverensstemmelse mellem de estimerede og simulerede volatiliteter i hhv. figur 19a og 19b. De estimerede volatiliteter passer ikke ind i modellens teori om konvergens mod 0. De simulerede volatiliteter i et tidsrum efter vores data ophører, konvergerer derimod med sikkerhed mod 0 når $t \to \infty$, som Nelsom beskrev det.

Dermed er IGARCH(1,1) med $\omega = 0$ en fejlhæftet volatilitetsmodel, under simulation af den fremtidige volatilitet, da vi kræver et strengt positivt niveau for volatiliteten på markedet. Et volatilitetsniveau på nul vil resultere i et kollaps af optionsteorien, da der ikke længere vil være nogen risiko/usikkerhed i udfald for det underliggende aktiv og optionen. Volatilitetsniveauet i figur 19a er ligeså strengt positivt. Med disse resultater kan vi dermed udlede, at EWMA-modellen baseret på markedsdata retter den driftløse IGARCH(1,1) til, da den markedsbaserede volatilitet ikke kollapser mod nul. Dette skyldes at den dagligt bliver opdateret med aktuel data fra markedet, og ikke kan forecaste volatiliteten

frem mere end en dag.

11.6.4 Konklusion på EWMA med implicit volatilitet

EWMA-modellen med parameteren λ bestemt ved RMSE og HRMSE kan begge forbedres ved brug af varierende hedgevolatilitet. Modsat ser vi, at EWMA med RiskMetrics λ får lavere afsluttende P&L-resultat med varierende hedgevolatilitet. Den eneste forskel der er på de tre strategier, er hvornår vi køber og sælger optionen. F.eks. sælger HRMSE-strategien option nr. 18, hvilket ender med at give den tabet 46.98630. Dette er den umiddelbart store forskel på, at RMSE og RiskMetrics får en positiv afsluttende P&L til forskel fra HRMSE, da disse strategier køber option nr. 18.

Dermed konkluderer vi at RMSE og HRMSE har hhv. den "bedste" og "dårligste" købsstrategi blandt disse tre metoder baseret på det givne datasæt. Dette gør sig gældende, både når vi benytter den implicitte volatilitet som en fast- eller varierende hedgevolatilitet. Dog er der for ingen af disse strategiers konfidensintervaller, der indikerer, at vi med 95% sikkerhed vinder en volatilitetsarbitrage.

11.7 P&L for EGARCH med implicit volatilitet

I forbindelse med estimation af den realiserede volatilitet ud fra EGARCH-modellen tager vi udgangspunkt i "rugarch"-pakken i R, som hjælper os med at lave EGARCH-modellen. EGARCH modellens estimation sker ud fra de 110 tidligere værdier af log-afkast på indeksprisen, der skal definere vores gennemsnitlige afkast μ. Derudover antager vi, at afkastet følger modellen:

$$R_t = \mu + \varepsilon_t,$$

hvor R_t er log afkastet på tidspunkt t, og ε_t er fejlen i modellen på tidspunkt t.

Vi går ud fra, at fejlen er tidsafhængig og ikke-konstant, derfor skal vi bruge EGARCH til at estimere variansen på fejlene. Når vi har estimeret de 5 parametre i EGARCH-modellen på et tidspunkt t, vil vi herefter simulere variansen frem til tidspunkt $t+1$ for at forecaste niveauet på den fremtidige volatilitet.

Betragt f.eks. d. 6. juli 2004. På dette tidspunkt har vi alle nødvendige oplysninger for at estimere i EGARCH givet ved de 110 forrige afkast, dette giver os estimaterne:

- $\mu = -0.000669$
- $\omega = -0.677847$
- $\alpha = -0.222240$
- $\beta = 0.931815$
- $\gamma_{EGARCH} = -0.319918$

Ovenstående parametre udgør koefficienterne i den fittede EGARCH-model af variansen i ε_t, γ_{EGARCH} må ikke forveksles med γ, som viser om vi køber eller sælger. Denne fittede model bruges til simuleringen af variansprocessen en dag frem, dvs. 7. juli 2004, med udgangspunkt i simulation ved "ugarchsim" fra "rugarch"-pakken. I denne simulering bruges de seneste estimerede parametre i vores fittede model

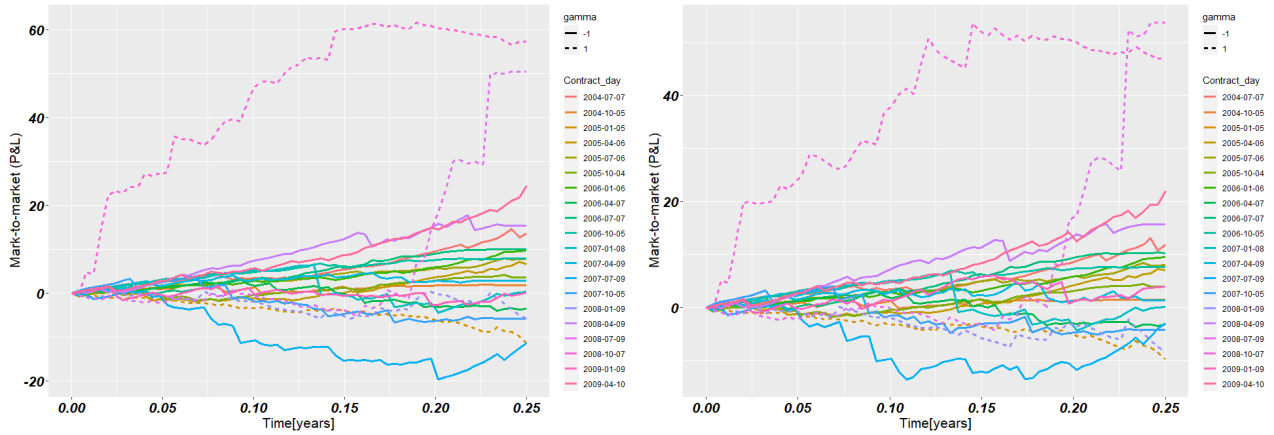
til at estimere fremtidigt afkast, hvor vi da er mere interesserede i det fremtidige variansniveau. Med andre ord simulerer EGARCH-modellen variansen σ^2_{t+1} ud fra tid-t parametrene. Resultatet af denne simulering er således et kvalificeret gæt på volatiliteten for 7. juli 2004. Med ovenstående parametre i den fittede model får vi følgende resultat/sigma:

$$\sigma^{act}_{daglig} = 0.00677413$$
$$\implies \sigma^{act}_{\text{årlig}} \approx \sigma^{act}_{daglig} \cdot \sqrt{252} = 0.107536$$

Vi kan observere, at ATM-optionen på S&P 500 indekset d. 7. juli 2004 med 3 måneder til udløb handledes til den implicitte volatilitet 0.1544. Da vi i de ovenstående resultater forventer en lavere årlig realiseret volatilitet vil vi derfor sælge call optionen ($\implies \gamma = -1$).

Denne fremgangsmetode udfører vi hver gang vores igangværende option udløber, og vi skal til at købe eller sælge en ny option. Købestrategien i EGARCH er således baseret på at repræsentere den realiserede volatilitet σ^{act} ved den EGARCH-estimerede årlige realiserede volatilitet $\sigma^{act}_{\text{årlig}}$ og evaluere uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$ ligesom før. Dette udleder følgende P&L-stier for EGARCH købestrategien med afdækning ved hhv. fast og interpoleret implicit hedgevolatilitet:

(a) EGARCH fast hedge volatilitet (b) EGARCH interpoleret hedge volatilitet



Figur 20: P&L-stier for afdækning med impl. hedgevolatilitet, σ^{act} modelleret ved EGARCH

Resultaterne for de enkelte P&L-stier ses i tabel 9:

Kontraktdato	$EGARCH_{fixed}$	$EGARCH_{float}$
2004-07-07	13.52013	11.89768
2004-10-05	1.82318	1.48275
2005-01-05	-11.36685	-9.79447
2005-04-06	6.50737	7.10229
2005-07-06	7.73943	8.03833
2005-10-04	3.53228	3.92987
2006-01-06	9.63166	9.56889
2006-04-07	-3.54824	-3.15573
2006-07-07	10.03546	10.33827
2006-10-05	7.91673	7.68482
2007-01-08	0.20808	0.16915
2007-04-09	2.83874	1.33448
2007-07-09	-11.43907	-2.88319
2007-10-05	-5.79911	-4.14272
2008-01-09	-5.86928	-8.37884
2008-04-09	15.38216	15.77426
2008-07-09	50.41407	53.76396
2008-10-07	57.35539	46.98630
2009-01-09	0.05373	3.92188
2009-04-10	24.48797	22.00112
Total	173.42382	175.63911

Tabel 9: RESULTATER FOR EGARCH-STRATEGIERNE

Vi betragter en markant højere afsluttende P&L for strategien med fixed implicit volatilitet på 173.42382 i forhold til alle tidligere strategier. Den tilsvarende strategi med en float implicit volatilitet har en afsluttende P&L på 175.63911, hvilket er en stigning på lidt over 1%. Det vil sige, at det også i EGARCH kan betale sig at opdatere hedgevolatiliteten med nylig data fra volatilitetsfladen.

Vi vil nu udregne middelværdierne, standardafvigelserne og konfidensintervallerne for disse to strategier, og undersøge om der er en mulighed for positiv gevinst.

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
EGARCH fix	8.67119	17.87312	0.83809	16.50429
EGARCH float	8.78196	16.28563	1.64459	15.91932

Tabel 10: KONFIDENSINTERVAL FOR EGARCH STRATEGI MED IMPL. VOL

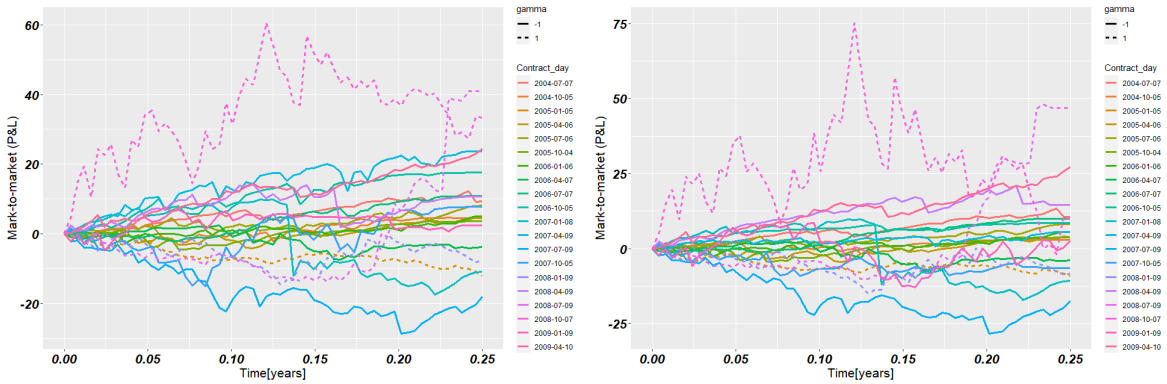
Ud fra tabel 10 iagttages begge strategier at give en positiv P&L-gevinst indenfor et 95% konfidensinterval. EGARCH med interpolerede hedgevolatilitet har en mindre standardafvigelse, hvilket giver et tættere konfidensinterval med en højere nedre grænse men lavere øvre grænse. Anvendelse af den interpolerede hegdevolatilitet yder en mindre hedgefejl over alle porteføljer. Mange af de negative individuelle P&L-resultater forbedres, men værdien af portefølje 18 er imidlertid også reduceret. Samlet set vurderes EGARCH at have en rigtig god købsstrategi, og får dermed en høj afsluttende P&L. Da købsstrategien er den samme for EGARCH med hhv. fast og varierende implicit hedgevolatilitet, kan forskellen mellem P&L'erne udelukkende tilskrives afdækningen af optionen. I betragtning af standardafvigelsen yder EGARCH float en mere sikker strategi, men EGARCH fix har på den anden side en højere mulig gevinst angivet af det øvre konfidensniveau. Det afhænger således af investors risikoaversion hvilken strategi vedkommende foretrækker.

11.8 EWMA og EGARCH med realiseret volatilitet

Stierne fra de seneste afsnit om EWMA og EGARCH er som nævnt genereret ved anvendelse af implicit hedgevolatilitet. Vi vil nu udføre samme øvelse for afdækning ved realiseret hedgevolatilitet. I EGARCH-strategien vil vi ligeså opstille en *forecastet* realiseret volatilitet, som varierer under afdækningshorisonten analog til den interpolerede implicitte volatilitet. I denne sammenhæng kalibreres EGARCH-modellen til de seneste 110 daglige log-afkast umiddelbart før optionen købes og i samme stund forecastes den realiserede volatilitet 62 dage frem, hvilket vi undervejs anvender til afdækning. Købestrategien for optionen tager i EGARCH dog stadig udgangspunkt i den føromtalte 1-dags-simulering.

P&L-stierne for EGARCH med hhv. fast og forecastet realiseret hedgevolatilitet ses nedenfor i figur 21:

(a) EGARCH FIXED (b) EGARCH FLOAT

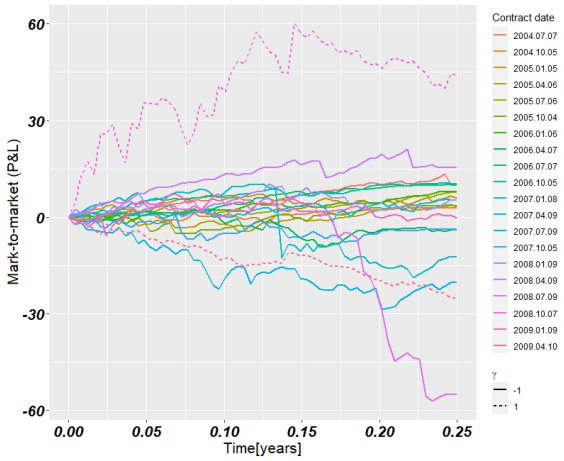


Figur 21: P&L-STIER FOR AFDÆKNING MED $\sigma^h = \sigma^{act}$, REALISERET VOLATILITET MODELLERET VED EGARCH

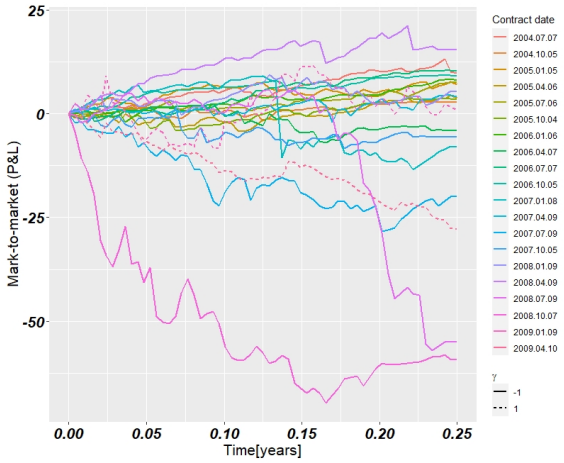
Disse P&L-stier er væsentlig anderledes i form og slutværdi end de tilsvarende EGARCH-stier med implicit hedgevolatilitet jf. tidligere figur 20. For float strategien (forecastet realiseret volatilitet) betragtes den afsluttende P&L 104.72956, hvilket er væsentlig lavere end den tilsvarende afsluttende P&L på 155.12453 for fixed (fast realiseret volatilitet). Resultaterne for de individuelle P&L-stier kan også betragtes i tabel 7 på side 85. Vi betragter et lavere resultat for afdækning med forecastet end fast realiseret volatilitet, hvilket umiddelbart strider mod resultaterne fra den implicitte afdækning. Vi beskriver disse resultater nærmere i næste afsnit.

Samme øvelse opstiller vi for EWMA-modellens estimation af den realiserede volatilitet. Vi er ikke i stand til realistisk at forecaste realiseret volatilitet i EWMA, da den prædikterede IGARCH(1,1) volatilitetsproces konvergerer mod langtidsniveauet $\omega = 0$. Derfor vil vi udelukkende tage udgangspunkt i afdækning med fast realiseret hedgevolatilitet. De dertilhørende P&L-stier betragtes dermed:

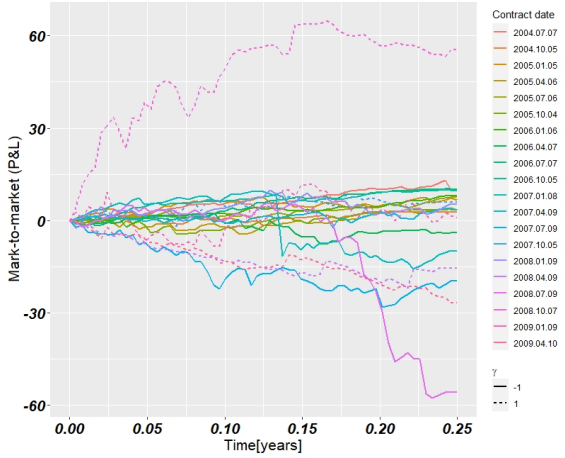
(a) λ=0.89687 (RMSE)



(b) λ=0.98235 (HRMSE)



(c) λ=0.97 (RiskMetrics)



Figur 22: P&L-stier for $x = \sigma^{act}$, realiseret volatilitet modelleret ved EWMA

Igen iagttager vi markante ændringer i ovenstående P&L-stier med afdækning ved realiseret hedgevolatilitet i forhold til de tilsvarende stier for EWMA med afdækning ved implicit hedgevolatilitet. De afsluttende P&L-resultater har ligeså ændret sig, men er imidlertid faldet i værdi jf. tabel 11. Dette mønster går igen for samme øvelse med EGARCH, hvorfor vi i næste afsnit også vil se nærmere på disse resultater og sammenligne dem med hinanden.

Kontraktdato	$RMSE$	$HRMSE$	$RiskMetrics$	$EGARCH_{fixed}$	$EGARCH_{float}$
2004-07-07	8.09334	8.87379	9.14867	9.44450	10.62487
2004-10-05	2.79150	3.00770	2.94503	4.58013	3.02242
2005-01-05	7.33902	8.42251	8.10476	-11.96755	-9.15423
2005-04-06	3.58283	3.98732	3.82333	4.31025	3.76420
2005-07-06	7.74261	7.64032	7.65365	8.10466	8.23335
2005-10-04	3.78412	3.69635	3.72431	3.72553	3.74623
2006-01-06	8.31442	8.48264	8.30283	5.15633	5.64017
2006-04-07	-3.82290	-3.78014	-3.77767	-3.77896	-3.83110
2006-07-07	10.07499	10.50102	10.31217	10.93568	9.97300
2006-10-05	10.48776	9.30645	9.81535	17.59707	8.65714
2007-01-08	-11.89940	-7.60150	-9.48745	-10.81197	-10.63881
2007-04-09	5.52069	4.50912	3.77715	23.62183	5.56754
2007-07-09	-17.82148	-17.43593	-17.16371	-17.80488	-17.28236
2007-10-05	-3.85075	-5.66141	5.89041	7.74846	-6.47611
2008-01-09	5.50802	5.64752	5.54384	-7.61389	-8.25287
2008-04-09	15.35225	15.36653	-15.51370	10.69165	14.60982
2008-07-09	-55.14748	-55.04243	-55.66222	41.01381	46.93129
2008-10-07	44.30830	-59.39271	55.41083	33.30855	9.46553
2009-01-09	0.74893	-0.04313	-0.09821	2.50445	2.83778
2009-04-10	-26.56625	-29.06442	-28.14069	24.35888	27.29170
Total	14.54052	-88.58038	4.60865	155.12453	104.72956

Tabel 11: RESULTATER FOR LOKAL VOL STRATEGIERNE MED INTERPOLERET HEDGEVOLATILITET

Vi betragter markant reducerede resultater for samtlige EWMA-strategier med afdækning ved realiseret hedgevolatilitet. Vi betragter middelværdi, standardafvigelse og konfidensinterval for de individuelle porteføljers P&L-resultater i hver strategi jf. tabel 12, og finder også her markante ændringer i forhold til tabel 6, 8 og 10.

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
$EWMA_{RMSE}$	0.72703	19.16722	-7.67322	9.12728
$EWMA_{HRMSE}$	-4.42902	20.80179	-13.54564	4.68760
$EWMA_{RiskMetrices}$	0.23043	20.76875	-8.87171	9.33257
EGARCH fix	7.75623	14.92775	1.21397	14.29848
EGARCH float	5.23648	14.11548	-0.94979	11.42274

Tabel 12: KONFIDENSINTERVAL FOR EGARCH STRATEGI MED IMPL. VOL

Middelværdierne er væsentlig lavere og standardafvigelsen væsentlige højere for samtlige EWMA-strategier. For EGARCH ser vi lavere middelværdier, men oplever derimod også lavere standardafvigelser end for den tilsvarende afdækning med fast/interpoleret implicit hedgevolatilitet. For EGARCH fix betragtes et positivt 95% konfidensinterval, hvorledes strategien med 95% sikkerhed yder en volatilitetsarbitrage. Derimod kan vi med en ændret hegdevolatilitet stadig ikke generere en volatilitetsarbitrage med 95% sikkerhed for EWMA-strategierne.

11.8.1 Kommentar til EGARCH

En af de store forskelle der er ved EGARCH med fast realiseret- ift. øvrige hedgevolatilitetter, er portefølje 10 som handles d. 5. oktober 2006. Her får strategien en betydelig større P&L med fast realiseret hedgevolatilitet. Årsagen til dette er hovedsageligt at EGARCH estimerer den realiserede hedgevolatilitet til 0.042 eller 4.2%. Evaluering af uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$ giver, med den implicitte

volatilitet 0.1228 eller 12.28%, således en kort position i call-optionen. Med denne lave hedgevolatilitet er vores delta væsentlig større, og i denne periode udvikler indeksprisen sig fra $1353.22 til $1412.84. Dvs. med den større position i underliggende tjener porteføljen flere penge i takt med en stigende indekspris. Det præcis samme sker for portefølje 12 (som starter den 9. april 2007). Her estimerer EGARCH vores hedgevolatilitet til 0.03038 eller 3.038%. Vi sælger optionen grundet højere implicit volatilitet, hvilket medfører at vores delta er større med denne reducerede hedgevolatilitet og i samme periode stiger spotprisen fra $1444.61 til $1531.85.

For EGARCH med varierende hedgevolatilitet ses et negativt resultat for portefølje 14 (som starter d. 5. oktober 2007), men den samme portefølje har et positivt resultat ved anvendelse af EGARCH med fast hedgevolatilitet. Årsagen til den dårlige præstation i EGARCH med varierende hedgevolatilitet er periodens simulerede EGARCH-volatiliteter. Modellen estimerer, når vi handler optionen, at volatiliteten stiger fra 0.05595 eller 5.595% til 0.17681 eller 17.681% under optionens levetid. Med denne volatilitetsudvikling øges positionen i det underliggende aktiv, fordi sandsynligheden for drastiske ændringer i indeksprisen er større. Efterhånden som optionen nærmer sig udløb vokser volatiliteten gradvist, men med kortere tid til at realisere spring i indeksprisen. Dvs. to modsatrettede effekter på vores delta-position. I denne periode fluktuerer spotprisen meget op og ned, men hovedsageligt med retning nedad da spotprisen starter ved $1557.59 og ender ved $1409.13. Med den voksende implicitte volatilitet i denne periode får EGARCH med varierende hedgevolatilitet ikke lige så meget ud af de positive ændringer undervejs. Især midtvejs i optionens levetid betragtes store ændringer i spotprisen, især opadgående, og her får EGARCH med den faste hedgevolatilitet på 0.05595 mere ud af den positive ændring end EGARCH med den varierende (og voksende) hedgevolatilitet.

De samme effekter kan ligeså betragtes i portefølje 18 (som starter d. 7. oktober 2008). Her starter volatiliteten ved 0.75703 eller 75.703% og ender ved 2.47431 eller 247.431%. Det er også i denne periode at spotprisen har de største ændringer med daglige ændringer på over $30 (i denne periode ses daglige ændringer på mere end $30 hele 25 gange i både positiv og negativ retning). Med dette niveau for den realiserede volatilitet og et markant lavere niveau for den implicitte volatilitet på 40.07% taler uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$ klart for en lang position i optionen. Under afdækningen findes ligeså store afdækningsfejl, da sandsynligheden for at ende ITM skævvrides væsentligt når hedgevolatiliteten nærmer sig 247.431%, næsten uanset hvor stor forskel vi ser mellem strike- og spotprisen. Dette giver markant større positioner i det underliggende aktiv, end hvis vi f.eks. havde afdækket med implicit volatilitet eller bare holdt startvolatiliteten fast. Disse store positioner er i sidste ende hæftet med omkostninger, da spotprisen sænkes fra $996.23 til $890.35 og optionen ender OTM.

11.9 Sammenligning af resultater for EWMA og EGARCH

For bedre at kunne analysere og sammenligne alle de empiriske resultater betragtes strategiernes afsluttende P&L-resultater i nedenstående tabel:

Metode \ Hedgevolatilitet	Fast σ^{imp}	Interpoleret σ^{imp}	Fast σ^{act}
EWMA (RMSE: $\lambda = 0.89687$)	58.09201	60.45557	14.54052
EWMA (HRMSE: $\lambda = 0.98235$)	-56.72622	-41.36079	-88.58038
EWMA (RiskMetrics: $\lambda = 0.97$)	38.81846	29.34872	4.60865
EGARCH	173.42382	175.63911	155.12453

Tabel 13: P&L-STIER FOR EWMA OG EGARCH

Bemærk at EGARCH float ikke er repræsenteret i tabellen ovenfor, da vi ingen resultater har for EWMA-strategierne med ligende hedgevolatilitet. I ovenstående tabel ses betydningen af hvilken volatilitet vi anvender til afdækning. Alt efter hvilken metode vi bruger til at estimere/forecaste volatiliteten på markedet, og hvilke afdækning vi anvender, ses vidt forskellige P&L-resultater. For hver metode ændres købestrategien ikke for de forskellige hedgevolatiliteter, dvs. resultaterne rækkevis udelukkende kan sammenlignes på afdækningspræstation.

Vi betragter en bedre afdækning med den interpolerede implicitte volatilitet i EWMA-strategierne, da P&L'erne for disse har lavere standardafvigelse end de tilsvarende med fast implicit hedgevolatilitet. For $EWMA_{HRMSE}$, som har mange stier med negative værdier, betyder dette færre udsving og dermed bedre P&L-resultat, og for $EWMA_{RiskMetrics}$, som har mange stier med positive værdier, reduceres værdien på mange af disse stier. $EWMA_{RMSE}$ har et højere P&L-resultat med den interpolerede volatilitet, hvilket skyldes en bedre respons i afdækningen på de observerede daglige volatilitetsændringer. Afdækningen svarer her til afdækningen anvendt i Black-Scholes med interpoleret implicit hedgevolatilitet, dvs. forbedringen direkte svarer til den samme forbedring vi tidligere iagttog for Black-Scholes med interpoleret ift. fast implicit hedgevolatilitet.

Hvis vi betragter EGARCH ses mindre forskelle mellem de afsluttende P&L'er for hhv. fast og interpoleret implicit volatilitet, men en større forskel mellem disse og afdækning med realiseret volatilitet. Trods de implicitte strategiers højere resultater er standardafvigelserne for disse strategier hhv. 17.87312 & 16.28563 højere end standardafvigelsen på strategien med fast realiseret hedgevolatilitet på sølle 14.92775. Da strategierne udnytter samme købsstrategi for optionen, må risikoen forbundet med P&L-resultaterne da være mindre i strategien med realiseret volatilitet. Imidlertid er standardafvigelsen et udtryk for variation i P&L-resultaterne efter afdækningshorisonten. For EGARCH-strategien med realiseret volatilitet betragtes meget fluktuerende stier jf. figur 21. Standardafvigelsen beretter ikke om mængden af stokastik i stierne under afdækningshorisonten, hvorfor den i teorien burde være større under afdækning med implicit volatilitet (da implicitte stier divergerer, som vist i Willmott eksperimentet).

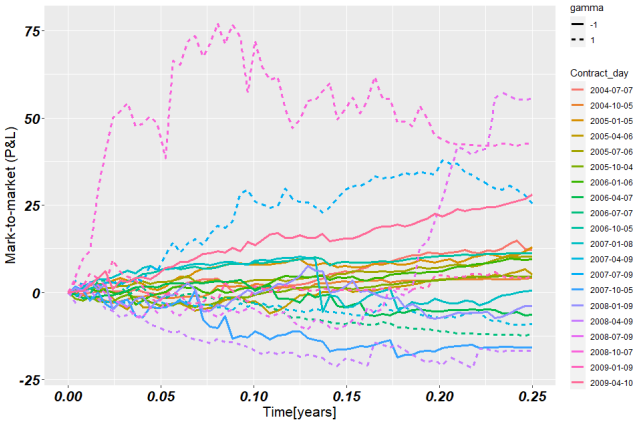
Hvis vi nu vender blikket tilbage til størrelsen på de afsluttende P&L'er, så kan det diskuteres, hvilken model der er bedst. EGARCH yder en markant højere gevinst i den afsluttende P&L, en fordel for en option/Equity-trader der søger at maksimere overskuddet ved handel med optioner og replikerende strategier. Modellens bedste afsluttende P&L er næsten 300% større end EWMA-modellens

bedste. Hvis vi i stedet bestræber os på at opnå P&L-resultater svarende til den perfekte hedge, så er EWMA-modellen formodentlig bedre. Med udgangspunkt i RMSE eller RiskMetrics betragtes de P&L-resultater der sandsynligvis kommer tættest på denne teoretiske værdi, og dermed en perfekt hedge i betragtning af de optionsvise P&L-resultater. I opsummering fungerer EGARCH godt i et profitmaksimerende perspektiv og EWMA godt i bestræbelse på resultater svarende til de teoretiske resultater vi så i Willmott. I det lys skal det i øvrigt bemærkes, at RiskMetrics estimator er den mest optimale i EWMA-modellens bestræbelse på at tilnærme den teoretiske P&L-værdi.

11.10 Hestons empiriske resultater

De lokale volatilitetsmodeller EWMA og EGARCH er indenfor volatilitetsmodellering ikke det mest komplekse, vi agter at teste. Den stokastiske volatilitet i Heston er væsentlig mere avanceret og krævende at anvende til estimering af den realiserede volatilitet. Estimation i Heston tager udgangspunkt i de simulerede værdier for det underliggende aktiv og volatiliteten, som beskrevet i afsnit 9.7.2. I simuleringen har vi behov for at kende parametrene v_0, κ, θ, η og ρ, hvis optimale værdier estimeres i en kalibreringsmetode svarende til den beskrevet i afsnit 9.8. I denne metode rekalibreres parametrene for hver option på data dagen før vi agter at købe/sælge optionen.

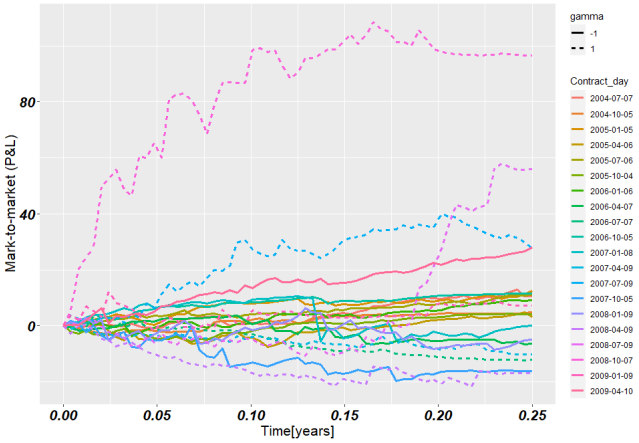
Købsstrategien i Heston-modellen bygger på evaluering af den modificerede ulighed $\sigma^{imp} > \sigma^H$, hvori vi agter at købe optionen, såfremt denne er sand, og sælge hvis den er falsk. Her udgør σ^H den unikke volatilitet der løser $V_t^{BS}\left(\sigma^H\right) = V_t^{Heston}\left(\sigma^H\right)$ (vi kalder den derfor Hestons implicitte volatilitet). Med denne opsætning betragtes P&L-stier for Heston-modellen med kalibrering inkl. Feller-betingelsen:



Figur 23: P&L-STIER FOR HESTON MED FELLER-BETINGELSE

Figur 23 angiver P&L-stierne for Heston-modellen med omtalte købsstrategi og afdækning ved Hestons Δ. Modellens parametre er vist i Bilag B. De ovenstående P&L-stier giver os en afsluttende P&L på 162.53516. I denne strategi har vi benyttet alle parameterkriterier fra afsnit 9.8 i kalibreringen, men som beskrevet i afsnittet kan kriterium v) (Feller-betingelsen) udelades. Med denne betingelse udeladt ender strategien med komplet andre resultater. Resultaterne for denne kalibrering, hvor Feller-

betingelsen ikke indgår, kan betragtes i følgende:



Figur 24: P&L-STIER FOR HESTON UDEN FELLER-BETINGELSE

Vi ser på ovenstående figur, at P&L-stierne for denne kalibrering er anderledes end i figur 23, og det afsluttende P&L-resultat er ligeså større. I denne kalibrering er det afsluttende P&L-resultat 215.94099, hvilket er væsentlig højere end for kalibreringen med Feller-betingelsen. De fundne parametre for kalibreringen er vist i Bilag C.

11.10.1 Sammenligninger af Heston resultater

Som nævnt i sidste afsnit er det muligt at udelukke Feller-betingelsen fra kalibreringen beskrevet i afsnit 9.8. Feller-betingelsen påtvinger grænsen $2\kappa\theta - \eta^2 \geq 0$ under optimering af konvergenshastigheden κ i variansprocessen. Dette sørger for at variansen i CIR-processen aldrig kan ramme den reflekterende barriere i 0. Men parameteren κ begrænses imidlertid allerede af kriterium iv), hvorfor det er muligt at udelade Feller-betingelsen fra kalibreringen. Derfor vil denne strategi fremadrettet være kendt som $Heston_{kappa}$. Såfremt Feller-betingelsen udelades øges fleksibiliteten i parameterkalibreringen, hvilket skulle muliggøre bedre estimation af volatiliteten. Vi betragter specifikt at den afsluttende P&L for $Heston_{kappa}$ er omtrent 33% større end strategien hvor Feller-betingelsen indgår i kalibreringen.

Købsstrategien for disse to P&L-resultater er identiske, dvs. vi køber/sælger samme optioner under begge kalibreringsmetoder. Betragt f.eks. den første portefølje (som handledes d. 2. juli 2004), her lå den implicitte ATM-volatilitet i markedet på 0.1544 eller 15.44%, mens Heston (med Feller-betingelsen) estimerer en implicit volatilitet på 0.1695 eller 16.95%, hvorfor vi agter at sælge optionen. Den implicitte volatilitet for $Heston_{kappa}$ estimerer en volatilitet på 0.16977 eller 16.977%, dvs. vi også her vil sælge optionen. Da de to strategier udleder approksimativt samme volatilitet, og derfor har samme købsstrategi for optionen, må ændringen i de to resultater udelukkende komme fra strategiernes afdækning (i modsætning til EWMA, hvor forskellige estimatorer gav forskellige købsstrategier).

Da parametrene er kalibreret med hver sin metode, bliver størrelsen af de dertilhørende Δ'er for-

skellig i de to strategier. Specifikt tager $Heston_{kappa}$ større positioner i det underliggende aktiv i de rette porteføljer. Således tjener strategien mere, da den replikerende portefølje yder en større indtægt, hvis vi sælger optionen, og som regel et mindre tab hvis vi køber. I nedenstående tabel 14 findes de individuelle porteføljers P&L-resultater:

Kontraktdato	Heston	Heston_{kappa}
2004-07-07	12.28010	10.49653
2004-10-05	4.19484	4.89936
2005-01-05	13.05903	12.61026
2005-04-06	5.01973	3.26341
2005-07-06	10.36770	10.96298
2005-10-04	4.46130	4.26216
2006-01-06	9.59332	9.15101
2006-04-07	-6.30127	-6.30119
2006-07-07	-12.12751	-12.17625
2006-10-05	11.20624	11.53886
2007-01-08	0.45716	0.14306
2007-04-09	-9.09068	-10.16717
2007-07-09	25.46469	27.57798
2007-10-05	-15.85332	-16.31428
2008-01-09	-3.87001	-5.07172
2008-04-09	-16.79468	-16.93656
2008-07-09	55.39944	56.00052
2008-10-07	42.66598	96.63676
2009-01-09	4.28424	7.35413
2009-04-10	28.11886	28.01114
Total	162.53516	215.94099

Tabel 14: RESULTATER FOR HESTON-STRATEGIERNE

Den primære forskel mellem de to Heston-kalibreringers resultater findes igen i portefølje 18 (handlet d. 7. oktober 2008), hvor P&L-stien for $Heston_{kappa}$ ender på 96.63676. Dette er højere end alle andre tidligere strategier for denne portefølje. Heston kalibreringen med Feller-betingelsen udleder P&L-resultatet 42.66598 for denne portefølje, hvilket er mere i tråd med tidligere resultater fra f.eks. EGARCH-strategien.

Begge strategier har i denne portefølje lang position i optionen, hvorfor de begge vinder P&L-gevinst, mens indeksprisen bevæger sig meget. I løbet af den første måned af portefølje 18's afdækningshorisont har begge strategier en hurtigt voksende P&L-sti. Men derefter falder P&L-stien for Heston med Feller-betingelsen, mens stien for $Heston_{kappa}$ fortsætter væksten lidt endnu. $Heston_{kappa}$'s utrolige resultat skyldes de længere positioner strategien er villig til at tage i underliggende på et tidligere tidspunkt. Den replikerende portefølje har en kort position i indekset, hvilket giver en indtjening, da indeksprisen falder i perioden. Forskellen mellem P&L-stierne finder vi da i $Heston_{kappa}$'s tidligere reaktion på bevægelsen i indeksprisen.

Vi betragter nu strategiernes middelværdi, standardafvigelse & konfidensinterval, for bl.a. at tjekke om vi med 95% sikkerhed finder volatilitetsarbitrage:

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
Heston	8.12676	18.57164	-0.01247	16.26599
Heston$_{kappa}$	10.79705	26.42927	-0.78588	22.37997

Tabel 15: KONFIDENSINTERVAL FOR HESTON-STRATEGIER

Vi ser i ovenstående tabel, at vi ikke med 95% sikkerhed kan generere en arbitragemulighed for Heston-strategierne. Vi så tidligere positive nedre konfidensniveauer for en række af EGARCH-strategierne, men de højeste øvre konfidensniveauer betragtes nu for Heston i tabel 15.

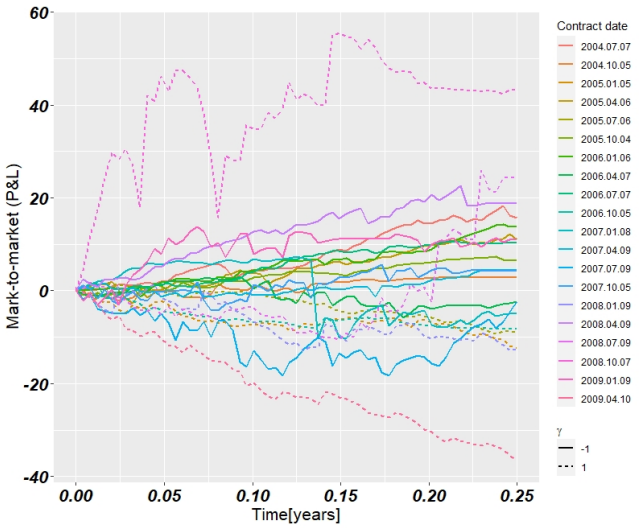
Dette skyldes formodentlig at strategierne tager højde for mere information i markedet sammenlignet med EGARCH og EWMA. Kalibreringen af Heston anvender nemlig hele volatilitetsfladen, hvilket f.eks. ikke indgår i den tidligere EGARCH-kalibrering baseret på log-afkast.

11.11 Empiriske resultater for volatilitetsfrie strategier

Da volatilitetsfrie strategier ingen forudsætning har for at evaluere uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$, anvender vi det absolutte log-afkast i underliggende umiddelbart inden optionen handles til at repræsentere den realiserede volatilitet dvs. $\sigma_t^{act} \approx \sqrt{R_{t-1}^2 \times 252}$. Denne approksimation af den realiserede volatilitet er model- og antagelsesfri, og således nemmest at implementere for markedsdeltagere uden kendskab til den realiserede volatilitet / mulighed for at modellere den.

11.11.1 Real Δ

Real Δ er i denne sammenhæng den eneste modelfrie strategi, i og med den tager udgangspunkt i markedspriserne på optionen og indekset alene. Trods minimum-varians Δ's volatilitetsfrie konstruktion bygger denne dog på Black-Scholes modellens Δ'er, hvorfor strategien ikke er fuldstændig modelfri. Vi betragter Real Δ's P&L-stier i figur 25:



Figur 25: P&L-STIER FOR REAL Δ

Strategien lader til at yde en afdækning med særdeles fluktuerende P&L-stier under afdækningshorisonten. Trods stiernes noget stokastiske udvikling lader de ikke til at konvergere mod et fast endepunkt, som Willmott eksperimentet konkluderer for afdækning med realiseret volatilitet. Tværtimod lader slutværdien for hver P&L-sti at variere meget kraftigt. Følgende tabel 16 viser de individuelle optioners P&L-resultater:

Kontraktdato	Real Δ
2004-07-07	15.59345
2004-10-05	2.87192
2005-01-05	-12.46135
2005-04-06	11.02795
2005-07-06	-9.00357
2005-10-04	6.54948
2006-01-06	13.98579
2006-04-07	-2.34160
2006-07-07	10.27313
2006-10-05	-8.21060
2007-01-08	-4.77831
2007-04-09	4.33128
2007-07-09	-2.31538
2007-10-05	4.24692
2008-01-09	-12.67332
2008-04-09	18.82022
2008-07-09	24.53541
2008-10-07	43.27205
2009-01-09	11.07349
2009-04-10	-36.73102
Total	78.06595

Tabel 16: RESULTATER FOR REAL Δ

Som set i tabel 16 yder Real Δ strategien en samlet P&L på 78.06595, et resultat som bemærkes er lavere end resultatet vi fik ved anvendelse af benchmarkstrategien, Black-Scholes med fixed volatilitet, samt volatilitetsmodellerne EGARCH og Heston. Det ses dog også at være bedre end tilsvarende resultater, vi tidligere så for EWMA strategierne.

Denne model afhænger ikke af en volatilitet, som de tidligere modeller har gjort, men derimod fuldt ud af information om værdierne for det underliggende aktiv og optionen. Dette viser sig ikke at være fordelagtigt, når vi sammenligner dens afsluttende P&L med de øvrige modeller. Dog ses det, at Real Δ strategien opnår en højere P&L end samtlige EWMA strategier. Både Real Δ og EWMA er simple modeller, i forhold til f.eks. EGARCH og Heston, som ikke kræver megen information om markedet. Vi forventer da heller ikke meget lukrative P&L-resultater. Strategier med større krav til markedsinformation som f.eks. EGARCH og Heston udleder ligeså højere afsluttende P&L'er.

Hvis vi ser på Real Δ's konfidensinterval, kan vi bedre se hvordan denne model vil klare sig på dette marked:

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
Real Δ	3.9033	16.61901	-3.38017	11.18676

Tabel 17: KONFIDENSINTERVAL FOR REAL Δ

Vi ser, at vi med 95% sikkerhed ikke kan udlede en arbitragemulighed. Derudover ser vi Real Δ udpræsteret på middelværdi og standardafvigelse af modeller med mere information om markedet. Konfidensintervallet i tabel 17 viser os derfor, at vi kan forvente et større tab og mindre gevinst sammenlignet med konfidensintervallerne for EGARCH og Heston.

Dette underbygger vores tidligere vurdering, at mere sofistikerede afdækningsmodeller udpræsterer denne simple model. Imidlertid har Real Δ en højere middelværdi og lavere standardafvigelse end samtlige EWMA strategier både med fast og interpoleret implicit volatilitet. Dvs. strategien giver et gennemsnitligt højere udbytte end EWMA-strategierne.

Real Δ anvender samme købsstrategi som Black-Scholes med hhv. fast og interpoleret implicit volatilitet, dvs. forskellen på Real Δ og disse strategier kan direkte betragtes i strategiens afdækningspræstation. Begge Black-Scholes strategier udleder højere forventet P&L for de enkelte optioner, men ligeså højere standardafvigelse jf. tabel 4 end Real Δ. I Black-Scholes med interpoleret implicit hedgevolatilitet betragter vi højere nedre konfidensniveau end for Real Δ, dermed kan det også bedre betale sig at anvende denne strategi end Real Δ.

11.11.2 Minimum-varians Δ

I minimum-varians Δ strategien er der flere muligheder for kalibrering af backbone-effekt. Idéelt ville vi for en given option anvende backbone-effekt kalibreret til det data vi observerer under optionens løbetid. Dette er imidlertid ikke muligt, da disse datapunkter ikke er tilgængelige før optionen er udløbet. Vi står således med 3 alternativer:

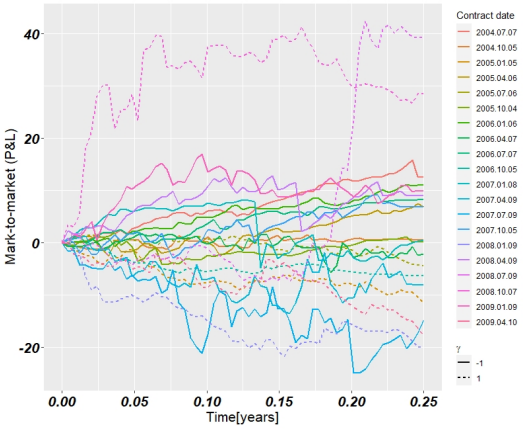
i) **Lagged:** For en given 3-måneders option V_τ handlet på tidspunkt τ anvendes backbone-effekt kalibreret til den 3-måneders option $V_{\tau-3M}$, der udløber umiddelbart før V_τ handles. Backbone-effekt er i så fald en tidsforskudt (lagged) backbone-effekt, der ikke nødvendigvis passer til V_τ, men anvendes i mangel af bedre. For de 20 optioner vi handler i perioden 2004-2009, kræves således estimering af $20 \times (a, b, c)$ parametre i den kvadratiske approksimation af backbone-effekten.

ii) **Daglig rekalibrering:** For option V_τ anvendes en backbone-effekt kalibreret til tidligere optionsdata ligesom ovenstående, men nu rekalibreres backbone-effekten dagligt med seneste optionsdata vi observer undervejs i afdækningshorisonten for optionen V_τ. For de 20 optioner vi handler kræves således en mere krævende estimering af $62 \times 20 \times (a, b, c)$ parametre.

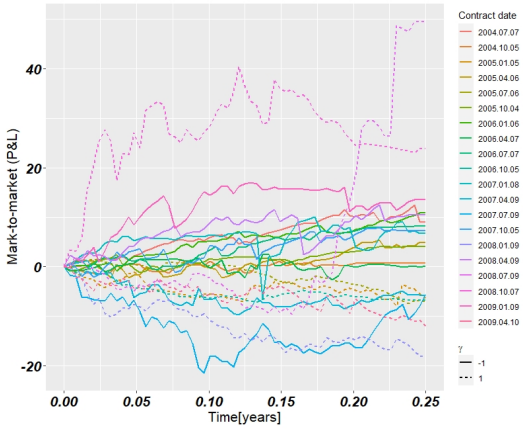
iii) **Fast backbone-effekt:** Backbone-effekten antages at være fast for samtlige 3-måneders optioner, og kalibreres således med det fulde datasæt for 3-måneders optioner. Dette er ganske vist en kalibrering, der kræver kendskab til fremtidige datapunkter, men det sker med udgangspunkt i antagelsen om backbone-effektens faste form for samtlige 3M optioner. Det vil derfor være muligt for en optionshandler at kalibrere denne backbone-effekt på historisk optionsdata observeret forinden begyndelsen på vores tidshorisont, for senere at anvende den i minimum-varians Δ strategiens afdækning af mere nylige optioner. Dette forudsætter at backbone-effekten er fast for samtlige 3M SPX-optioner, og derfor uafhængig af hvilket 3M optionsdatasæt den er kalibreret til. Dette kræver kun estimering af $1 \times (a, b, c)$ parametre.

11.11.3 Resultater samt sammenligning

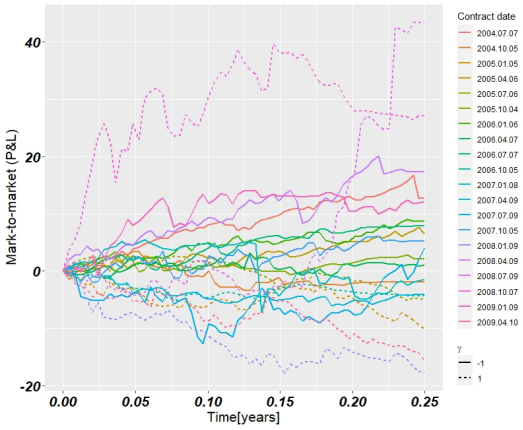
(a) MINIMUM-VARIANS-Δ LAGGED



(b) MINIMUM-VARIANS-Δ DAGLIG REKALIBRERING



(c) MINIMUM-VARIANS-Δ FAST BACKBONE



Figur 26: P&L-STIER FOR MINIMUM-VARIANS-Δ

Kontraktdato	MinVar-Δ (lagged)	MinVar-Δ (daglig rekalibrering)	MinVar-Δ (fast backbone)
2004-07-07	12.45968	9.04369	12.81636
2004-10-05	0.56593	0.75028	-1.88339
2005-01-05	-11.55532	-6.37025	-10.10778
2005-04-06	6.80020	4.82699	6.54842
2005-07-06	-4.49440	-7.08749	-4.83449
2005-10-04	0.15505	4.03144	2.18669
2006-01-06	11.09854	10.98737	8.82112
2006-04-07	-2.14515	0.18829	1.13587
2006-07-07	8.17271	8.19186	7.87727
2006-10-05	-6.33343	-6.77531	-4.30575
2007-01-08	0.48832	6.92100	-1.49503
2007-04-09	-8.12829	-5.80746	-4.07951
2007-07-09	-14.88128	-5.57358	4.05109
2007-10-05	6.79690	7.25464	5.17873
2008-01-09	-20.08283	-18.28605	-17.63097
2008-04-09	9.02760	10.46230	17.36700
2008-07-09	39.30597	49.60996	43.38204
2008-10-07	28.49793	23.87359	27.05536
2009-01-09	9.84185	13.50098	12.13273
2009-04-10	-17.80371	-11.96558	-15.60783
Total	47.78627	87.77667	88.60793

Tabel 18: RESULTATER FOR MINIMUM-VARIANS Δ STRATEGIER

I ovenstående figur 26 og tabel 18 kan vi se resultaterne for minimum-varians-Δ strategierne. Det ses hurtigt at strategierne minimum-varians-Δ med fast backbone-effekt og daglig rekalibrering har de bedste afsluttende P&L'er i tabellen på hhv. 88.60793 og 87.77667, og lagged strategien har dermed den dårligste afsluttende P&L på 47.78627. Dette er en lille forbedring i forhold til Real Δ strategien. Dog ser vi stadig at strategierne ikke udleder ligeså høje afsluttende P&L'er som de mere sofistikerede volatilitetsmodeller EGARCH og Heston. Så disse minimum-varians-Δ strategiers resultater underbygger vores forventning om dårligere P&L-resultater for simple modeller ligesom Real Δ, og vores præference for afdækning med volatilitetsmodeller bortset fra EWMA.

Hvis vi ser isoleret på minimum-varians-Δ strategierne, så ses det at samtlige strategier har dårligere afsluttende P&L'er end vores benchmarkstrategi. Dette virker ved første øjekast mærkeligt, da minimum-varians-Δ er en slags udvidelse af Black-Scholes. Modellen benytter Δ'er fra Black-Scholes, men tager højde for backbone-effekten i volatiliteten modsat Black-Scholes. Grunden til de lavere afsluttende P&L'er skyldes formentlig modellens bedre evne til at afdække. Høje afsluttende P&L'er forudsætter store afdækningsfejl i den replikerende portefølje. Minimum-varians strategierne må formodes at være bedre til at minimere afdækningsfejlen end Black-Scholes, hvilket resulterer i reducerede P&L-resultater. Dette vil vi analysere nærmere i afsnit 12.

Derudover viser resultaterne for minimum-varians-Δ strategierne os, at når vi benytter sidste porteføljes backbone-effekt, bliver den afsluttende P&L ringere end i de tilsvarende strategier, hvor vi benytter andre backbone-effekter. Kun i 3 ud af de 20 porteføljer klarer minimum-varians-Δ lagged strategien sig bedst af de tre kalibreringsmetoder. Det viser, at vi er bedre tjent med en løbende rekalibreret backbone-effekt eller en fast backbone-effekt for hele perioden.

Den umiddelbare årsag til denne ringe præstation i minimum-varians-Δ lag skyldes formodentlig uoverensstemmelse mellem den laggede backbone-effekt og backbone-effekten der passer til optionens afdækningshorisont. Den daglige rekalibrering viser en klar forbedring i approksimationen af backbone-effekten, blot ved anvendelse af mere nylig optionsdata. De nye dataobservationer tilpasser modellens backbone-effekt bedre til de seneste tendenser i markedet - tendenser som den laggede strategi ikke opfanger før næste kalibrering.

Udover at den daglige rekalibrering yder bedre afsluttende P&L'er med nyere data, ses det også at strategiens afsluttende P&L er ca. 1% lavere end minimum-varians-Δ strategien med fast backbone-effekt. Dog kan vi i den virkelige verden bedre implementere strategien med daglig rekalibrering og stå inde for dens præstation i med det givne datasæt.

Det er ligeså spekulativt, hvorvidt antagelsen om fast backbone faktisk holder. I betragtning af den forbedring vi ser mellem lagged- og daglig rekalibrering strategierne, kan antagelsen anfægtes. Denne forbedring er netop tegn på en ændring i backbone-effekten for forskellige afdækningshorisonter. Ændringen må især formodes at være markant for optioner, der handles på tidspunkter med finansiel uro i markedet. Finansiel uro er synonym med prisfluktuationer og derfor højere volatilitet, hvorfor følsomheden i volatiliteten overfor det underliggende aktiv ligeså øges.

I tabel 19 finder vi ligeså lidt lavere forventede P&L'er for minimum-varians strategierne ift. Black-Scholes strategierne jf. tabel 4 og markant lavere standardafvigelse i P&L-resultaterne.

	Middelværdi	Standardafvigelse	CI ($\alpha = 0.05$)	CI ($\alpha = 0.95$)
MinVar Δ (lagged backbone)	2.38931	14.62832	-4.02171	8.80034
MinVar Δ (daglig rekalibrering)	4.38883	14.55833	-1.99152	10.76919
MinVar Δ (fast backbone)	4.43040	14.11887	-1.75736	10.61815

Tabel 19: KONFIDENSINTERVAL FOR MINIMUM-VARIANS-STRATEGIER

Dette stemmer godt overens med vores forventning om at minimum-varians strategiens bedre afdækning fører til lavere hedgefejl og derfor lavere P&L-resultater. Da konfidensintervallet for samtlige minimum-varians-strategier har negative nedre konfidensniveauer kan det med 95% sikkerhed udelukkes, at strategien skulle generere en arbitragemulighed.

11.12 Sammenligning af resultater

Når vi sammenligner alle resultaterne med hinanden, ser vi bl.a., at afdækningsstrategier med en interpoleret implicit volatilitet har højere afsluttende P&L'er end de tilsvarende strategier med enten fast implicit volatilitet eller realiseret volatilitet. Dette gælder kun for Black-Scholes, EWMA (RMSE), -(HRMSE) og EGARCH-strategierne, da der i Real Δ og minimum-varians Δ strategierne ikke anvendes hedgevolatilitet. I Heston har vi ikke haft mulighed for interpolere volatiliteten i samme volatilitetsflade, da denne er tilpasset Black-Scholes optionspriser.

Tendensen vi observerer ved større P&L-resultater for afdækning med implicit ift. realiseret hedgevolatilitet, er forårsaget af den konceptuelle forskel mellem implicit og realiseret volatilitet. Implicit volatilitet er markedets forventning til volatiliteten under optionens levetid modsat realiseret volatilitet, som er et udtryk for standardafvigelsen på risikokilden i det underliggende aktiv. Dette estimat af volatiliteten kan resultere i gevaldige afdækningsfejl, da hedgeporteføljen med realiseret hedgevolatilitet er udsat for de direkte chok i risikokilden. Disse chok på hedgeporteføljen kan resultere i en gevinst, såfremt købestrategien er korrekt opsat. Undervejs reduceres optionens tilbageværende løbetid hvorledes indvirkningen af chok på porteføljen reduceres. Med effekten af chok reduceret når optionen har kort tid til udløb, justeres værdien af hedgeporteføljen op/ned til værdiforskellen mellem optionen med realiseret og implicit volatilitet. Dette sker selvfølgelig kun approksimativt med vores begrænsede kendskab til den realiserede volatilitet og diskrete afdækningsfrekvens.

Hvis vi afdækker med interpoleret implicit volatilitet justeres afdækningspositionen til det reelle volatilitetsniveau i markedet og således afdækningsporteføljen øjeblikkeligt delta-neutral. Dette fører til en afdækning, som er mere følsom for udviklingen i volatiliteten. Men øget følsomhed giver også hyppigere fluktuationer i P&L-stierne, hvilket øger stokastikken under afdækningshorisonten.

Vi har også set, at de simple modeller ikke kan opnå samme afsluttende P&L'er, som de mere sofistikerede modeller, der kræver mere information om markedet. Markedsmodellerne Real Δ og minimumvarians Δ som ikke tager højde for volatiliteten, og EWMA som kun kræver information om prisen på det underliggende aktiv udpræsteres af mere komplekse modeller som EGARCH og Heston. Både EGARCH og Heston estimerer flere parametre til beskrivelse af flere effekter i markedet. Heston kræver endda også information om hele optionsmarkedet dvs. priser på adskillige optioner til forskellige strikes og løbetider, hvilket EGARCH ikke gør. Disse modeller kan bedre udnytte markedsdata ud fra de adskillige modelparametre sammenlignet med de øvrige modeller.

De øvrige modeller har også store faldgruber, hvor kalibreringsmetoden er vigtigt for markedsmodellerne. Vægtparameteren for den historiske volatilitet i EWMA har stor påvirkning på modellens estimat af morgendagens volatilitet. Bruges den forkerte metode til at estimere λ i EWMA, kan det give os en ringe købsstrategi, som vil resultere i tab. Hvis vi benytter en forkert kalibrering i minimumvarians-Δ, udgår potentielt større P&L-resultater. Samme problem så vi også i Heston modellen, hvor vi benyttede os af to forskellige kalibreringer. Her var der også stor forskel i kalibreringernes afsluttende P&L'er. Belægget for at kalibrere ud fra en given forestilling om markedet har derfor stor betydning for de resulterende P&L-resultater.

I betragtning af konfidensintervallerne er EGARCH den eneste strategi, som har et positivt 95% konfidensinterval. Dog ikke EGARCH med varierende realiseret volatilitet under afdækningshorisonten. Det betyder at EGARCH er den mest attraktive strategi for arbitrageurs både med afdækning

ved implicit og realiseret volatilitet.

Hvorvidt konfidensintervallet for en given strategi er godt relativt til de andre, afhænger af optionstraderens risikoaversion. En meget risikoavers trader ønsker et positivt konfidensinterval og en lav standardafvigelse for P&L-resultater i de enkelte optioner, da dette reducerer risikoen for negative P&L-resultater. I så fald vil EGARCH-strategien være det oplagte valg, især EGARCH med fast realiseret hedgevolatilitet har et højt nedre konfidensniveau og en lav standardafvigelse relativt til alternative strategier. En mindre risikoavers trader vil muligvis være tilbøjelig til at acceptere intervaller med svagt negative nedre konfidensniveauer og større forventet P&L. I så fald vil EGARCH og især Heston strategierne være passende, da disse har høje middelværdier. Heston har ligeså større standardafvigelse, hvilket øger det øvre konfidensniveau, og traderen i så fald kan vinde større gevinster. En komplet risikoneutral investor vil udelukkende fokusere på den maksimale forventede P&L og dermed vælge $Heston_{kappa}$, for hvilken vi også betragter den højeste samlede P&L.

12 Evaluering af hedgefejl

Udgangspunktet for studiet er hvorvidt afdækning forbedres med mere komplekse volatilitetsmodeller end Black-Scholes, og samtidig om disse modeller yder deterministiske slutværdier og glatte stier for afdækning med hhv. realiseret- og implicit volatilitet. Afdækningsfejlen i et interval $\left[t, t+\Delta t\right]$ kan generaliseres til $\varepsilon_t^M = \Delta V_t - \Delta_t^M \Delta S_t$ for en afdækningsstrategi M med positionen Δ_t^M i underliggende, hvor ΔV_t og ΔS_t angiver hhv. prisændring i optionen og underliggende. Det har ikke været muligt at fremskaffe markedspriser på SPX-optioner med samme strike / tid til udløb, som de anvendte her, hvorfor vi bruger Black-Scholes modellen til modellering af optionspriser. Dette giver naturligvis et bias i afdækningsfejlen, som vi kommenterer undervejs.

12.1 GAINs

Som tidligere nævnt anvender vi Black-Scholes modellen med fast implicit hedgevolatilitet som benchmark for afdækningsvurdering, da denne er nemmest at implementere og kræver mindst markedsdata. Afdækningsfejlen for denne $\varepsilon_t^{BS} = \Delta V_t - \Delta_t^{BS}(\sigma_{i,t})\Delta S_t$ giver dermed anledning til at opstille følgende udtryk for gavnen (GAIN) nævnt i Hull-&-Whites testafsnit[22]:

$$\text{GAIN} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\varepsilon_j^M\right)^2}{\sum_{j=1}^{m}\left(\varepsilon_j^{BS}\right)^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\Delta V_j - \Delta_j^M \Delta S_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{m}\left(\Delta V_j - \Delta_j^{BS}(\sigma_{i,j})\Delta S_j\right)^2} \tag{12.1}$$

Brøken beskriver forholdet i SSE mellem en given strategi og vores benchmark. Her er m antallet af afdækninger, hvor vi i vores tilfælde anvender $m = 62$ for en daglig afdækningsfrekvens på alle dage

[22] John Hull & Alan White (24. maj 2017): Optimal Delta Hedging for Options. Journal of Banking and Finance, Vol. 82, september 2017, side 7

frem til udløb. Det antages nemlig at være 63 arbejdsdage over en 3 måneders afdækningshorisont (vi afdækker ikke sidste dag, da optionen præcis har værdien $(S_T - K)^+$). Med udgangspunkt i hele dataperioden 2004-2009 ses følgende GAIN-statistikker for alle vores strategier:

	GAIN
Black-Scholes (float)	-0.06031
EWMA (RiskMetrics)	-0.58761
EWMA (HRMSE)	-0.20073
EWMA (RMSE)	-0.32550
EGARCH	-1.11723
Real Δ	-0.43932
Minimum-varians Δ (lag)	-0.11607
Minimum-varians Δ (rekalibrering)	0.00903
Minimum-varians Δ (fast backbone)	0.25828
Heston	-1.11143
HestonKappa	-0.84727

Tabel 20: GAIN-STATISTIK, FULD HORISONT

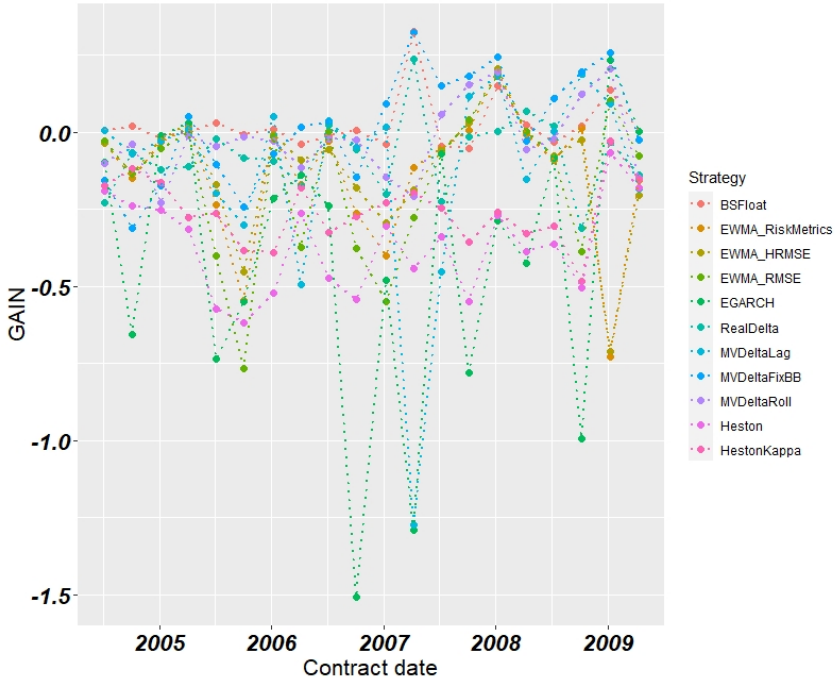
Her tager alle lokale volatilitetsmodeller udgangspunkt i afdækning med den realiserede volatilitet modellen frembringer, og volatiliteten holdes konstant under afdækningshorisonten. Dette resultat virker i første øjekast modstridende med P&L-resultaterne vi betragtede tidligere. Især Heston og EGARCH opnåede fortrinlige P&L-resultater, mens de i denne statistik ikke lader til at yde en forbedret afdækning ift. Black-Scholes modellen med faste parametre. Black-Scholes med interpolerede volatilitet resulterede ligeså i højere forventet P&L og lavere standardafvigelse i P&L-resultater for de enkelte porteføljer, mens GAIN-statistikken her beskriver en forværring af afdækningen med 6% ift. samme strategi med faste parametre. Til sidst ser vi også, at vores hypotese om bedre afdæking i minimum-varians-Δ strategierne holder bortset fra strategien med lagged backbone. Både strategien med daglige rekalibreringer og fast backbone har positive GAINs, hvilket betyder at strategien har mindre afdækningsfejl end Black-Scholes strategierne.

12.1.1 Optionsvis præstation

For at få et mere tydeligt billede af GAINs opstiller vi da samme øvelse for de individuelle optioner. For hver option V_τ betragtes hermed:

$$\text{GAIN}(V_\tau) = 1 - \frac{SSE\left(\varepsilon^M\left(V_\tau\right)\right)}{SSE\left(\varepsilon^{BS}\left(V_\tau\right)\right)}, \qquad \tau \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n\},$$

hvor $\text{GAIN}(V_\tau)$ angiver forbedringen udelukkende under afdækning af optionen V_τ, og $n = 20$ angiver antallet af ikke-overlappende 3-måneders optioner, vi handler på tidspunkterne $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ i dataperioden 2004-2009. Resultatet ses i nedenstående figur:



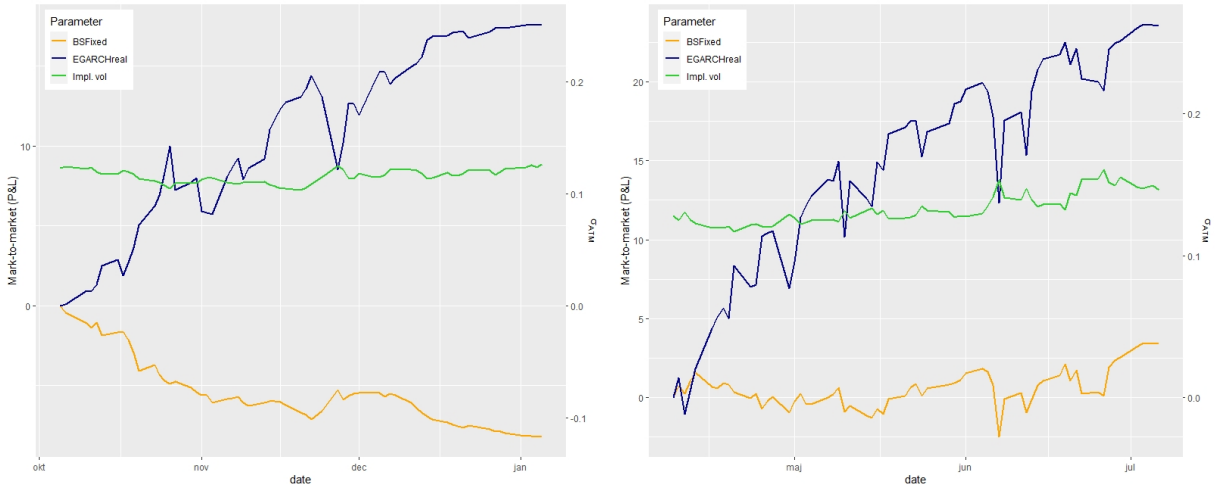
Figur 27: Optionsvis GAIN-statistik,
Black-Scholes med fast impl. hedgevol som benchmark

I figur 27 er det første, der springer i øjnene, hvor dårlige afdækningsforbedring EGARCH-strategien yder, dernæst hvorfor disse GAINs er lavere i opløbet til finanskrisen 2008-2009 end under finanskrisen. Trods den umiddelbare uoverensstemmelse mellem strategiernes P&L-resultater og de opstillede GAINs, findes sammenhængen i forholdet mellem afdækning og P&L. En perfekt afdækning vil yde den trivielle hedgefejl 0, hvilket resulterer i en flad P&L-sti langs 1. aksen. De strategier, for hvilke vi udleder de største P&L-værdier, skal således have store afdækningsfejl, da vi netop tjener penge på afdækningsfejl ud fra volatilitetsforskellen $\sigma^{act} - \sigma^{imp}$. For samtlige strategier hvor afdækningen foregår med realiseret volatilitet betragtes en store afdækningsfejl, da optionsprisen er baseret på den implicitte volatilitet. Som Willmott eksperimentet også konkluderede, vil afdækning med realiseret volatilitet medføre stokastiske stier. Disse stier har markant større daglige værdiændringer end tilsvarende afdækning med implicit volatilitet. Hedgefejl må da forventes at være større i strategier med realiseret end implicit volatilitet.

De mest iøjnefaldende GAINs ses for EGARCH-strategien i portefølje 10 og 12, som har afdækningshorisont før finanskrisen 2008-2009. Disse porteføljers GAIN er hhv. -150.9% og -129%, en voldsomt forværret afdækning ift. benchmark-strategien. I disse porteføljer har EGARCH-strategien med fast realiseret hedgevolatilitet P&L-værdierne 17.59707 og 23.62183, hvilket er markant højere end P&L-værdierne for Black-Scholes (fixed) på -8.19014 & 3.38851 jf. stierne i figur 28 og figur 14a:

12.1.1.1 Eksempel: EGARCH-stier for portefølje 10 & 12

(a) PORTEFØLJE 10, KONTRAKTDATO 5. OKTOBER 2006 (b) PORTEFØLJE 12, KONTRAKTDATO 9. APRIL 2007



Figur 28: ATM-VOLATILITET & P&L-STIER
FOR HHV. BENCHMARK OG EGARCH MED REAL HEDGEVOL

På trods af EGARCH-strategiens korte- og benchmarkens lange position i optionen for portefølje 10, hvilket naturligvis har en betydelig indflydelse P&L-værdien ved udløb, betragtes vidt forskellige afdækninger under optionens levetid. P&L-stien for benchmark-strategien iagttages at være næsten glat, kun afbrudt af få sporadiske fluktuationer i figur 28a. Imidlertid afdækkes der i EGARCH-strategien med realiseret volatilitet, hvilket bl.a. yder disse mere frekvente spring i P&L-stien. Strategiens korte position i optionen spekulerer dermed i forskellen $\sigma^{imp} - \sigma^{act}$. Det korte Γ i EGARCH-strategien giver positiv udvikling i P&L-stien så længe vi oplever få bevægelser i indeksprisen. Vi betragter her et fald i P&L-stien mens den implicitte volatilitet stiger, hvilket er ensbetydende med større fluktuationer i spotprisen drevet af en større realiseret volatilitet. De dårlige GAINs i EGARCH-strategien kan her direkte afspejles i de markant større ændringer i P&L-stien for EGARCH end benchmark.

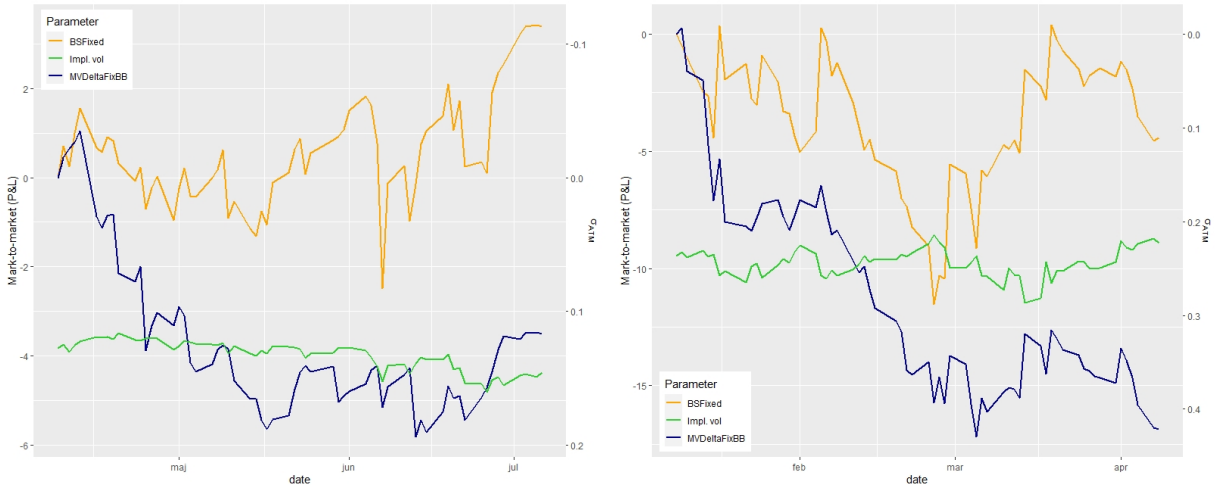
I både portefølje 10 og 12 findes mere voldsomme ændringer i P&L-stien for EGARCH, da dens afdækning med realiseret volatilitet er direkte udsat for chok forårsaget af risikokilden i prisprocessen for det underliggende aktiv. De store fluktuationer giver strategien store hedgefejl, som akkumuleres over afdækningsperioden og giver os P&L-værdien som resultat. Med andre ord ville vi ikke observere så markant større P&L-værdier i EGARCH-strategien ift. benchmark, havde det ikke været for stor forskel i værdien af den replikerende strategi og optionen.

12.1.1.2 Bedre afdækning med backbone-dynamik

Den største forbedring ses for minimum-varians Δ (fast backbone), igen et resultat der måske kan virke kontraintuitivt i betragtning af strategiens noget stokastiske P&L-stier. Minimum-varians strategierne afdækker ikke med hverken realiseret eller implicit volatilitet, men de tager udgangspunkt i Black-Scholes Δ'er baseret på implicit hedgevolatilitet. Så vi må klassificere dem som strategier med implicit

hedgevolatilitet i mangel af bedre. Dette er bl.a. en af årsagerne til den observerede forbedring ift. benchmark-strategien. Betragt f.eks. P&L-stierne i portefølje 12 og 15 hvor minimum-varians Δ (fast backbone) strategien opnår de højeste afdækningsforbedringer (hhv. 32.3% og 24.5%) ift. benchmark-strategien (Black-Scholes med faste parametre):

(a) PORTEFØLJE 12, KONTRAKTDATO 9. APRIL 2007 (b) PORTEFØLJE 15, KONTRAKTDATO 1. JANUAR 2008



Figur 29: ATM-VOLATILITET & P&L-STIER
FOR HHV. BENCHMARK OG MIN-VAR Δ (FAST BACKBONE)

I begge porteføljer får minimum-varians-Δ-strategien et ringere P&L-resultat end benchmark, men P&L-stierne for minimum-varians-Δ-strategien er i begge porteføljer lidt fladere og lader til hurtigere at stabilisere de stokastiske fluktuationer. På trods af minimum-varians-Δ-strategiens ringere resultater må vi da konkludere, at den yder en bedre afdækning med disse fladere stier. Årsagen til denne bedre afdækningen findes i modellens inkorporering af backbone-effekten. Modellens kompleksitet ligger netop i estimation af volatilitetens følsomhed i underliggende. Effekten af hvilken vi betragter i P&L-stiens hurtige stabilisering under fluktuationer i volatiliteten.

12.1.2 Sammenligning med P&L

Vi ser ikke en direkte sammenhæng mellem de afsluttende P&L'er og de dertilhørende GAINs. Dog fortæller GAIN som nævnt tidligere, hvor meget afdækningsfejl vores strategier indeholder. Dertil sagt vil det ikke nødvendigvis resultere i en bedre eller dårligere P&L. Vi konstruerer netop P&L ud fra akkumulerede daglige hedgefejl, hvori vores købsstrategi også spiller en vigtig rolle for fortegnet på P&L-resultatet. Dette tager GAIN ikke højde for, da fortegnet på afdækningsfejlen ikke indgår i statistikken.

Hvis vi i stedet betragter de numeriske daglige hedgefejl i konstruktionen af P&L-stien, vil dette svare til mængden af hedgefejl. Dermed vil der være en direkte sammenhæng mellem GAIN og P&L, hvor en højere GAIN vil resultere i en lavere P&L. Dette skyldes at den højest opnåelige GAIN er 1, hvilket resulterer i perfekt afdækning af optionen. Med en sådan strategi vil P&L-stien ligeså være 0,

da optionen perfekt kan replikeres.

GAIN beskriver afdækningsfejlen under optionens levetid, hvilket ikke er direkte sammenligneligt med P&L-resultaterne, da disse kun udgør stiernes slutværdi. Men GAIN viser dog et tydeligt billede af mængden af stokastik i stierne for en given strategi ift. benchmark. Strategier der har udledt store P&L-resultater som EGARCH og Heston ses at have dårlige GAINs, da der for disse strategier betragtes meget stokastik i P&L-stierne. Denne stokastik forårsager store fluktuationer undervejs i P&L-stierne, hvilket direkte forplanter sig i de observerede GAINs. Som nævnt tidligere forventer vi meget stokastiske stier for afdækning med realiseret hedgevolatilitet, og forventer derfor ikke afdækningsforbedringer for disse strategier.

Sidst bør vi nævne at minimum-varians Δ strategiernes flotte afdækningsforbedring ift. benchmarkstrategien, sandsynligvis er positivt influeret af det optionsprisbias, vi skaber ved at anvende Black-Scholes formlen til at prissætte optionerne. Dette vil yde lavere afdækningsfejl for minimum-varians strategierne, da disse både tager udgangspunkt i den implicitte volatilitet, ligesom benchmarkstrategien, og strategierne er kalibreret på Black-Scholes modellens Δ'er. Havde vi anvendt modelfrie optionspriser observeret i markedet, ville afdækningspræstationen i minimum-varians Δ strategierne formentlig være forringet.

12.2 Flere statistikker for hegdefejl

For at få et mere generelt billede af fordelingen af afdækningsfejl for hver strategi analyserer vi en række statistiske mål for afdækningsfejlen i de givne strategier. Samtidig giver det os et validitetscheck af de føropstillede GAINs. Vi anvender den numeriske hedgefejl, da vi i så fald kun behøver bekymre os om den øvre hale i fordelingen. Lad derfor den numeriske hedgefejl under afdækning af en option V_t være givet ved $\varepsilon_{V_t}^{abs} = \left|\Delta V_t - \Delta_t^M \Delta S_t\right|$, hvorved vi kan sammenligne strategiernes individuelle afdækningspræstationer.

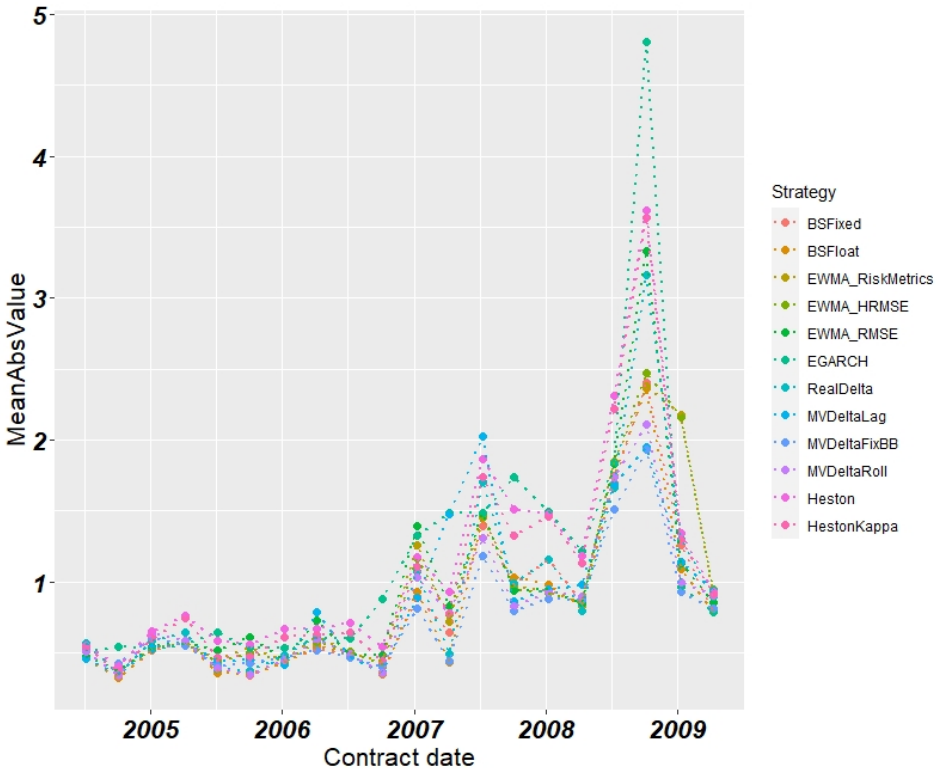
12.2.1 Forventet afdækningsfejl

Først og fremmest kan vi betragte den forventede numeriske afdækningsfejl $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{V_t}^{abs}\right] = \mathbb{E}\left[\left|\Delta V_t - \Delta_t^M \Delta S_t\right|\right]$ for samtlige strategier i hele dataperioden 2004-2009:

	Forventet Hedgefejl
Black-Scholes (fixed)	0.82482
Black-Scholes (float)	0.80414
EWMA (RiskMetrics)	0.92417
EWMA (HRMSE)	0.91804
EWMA (RMSE)	0.94201
EGARCH	1.15420
Real Δ	0.90494
Minimum-varians Δ (lag)	0.88781
Minimum-varians Δ (rekalibrering)	0.81226
Minimum-varians Δ (fast backbone)	0.75009
Heston	1.12313
HestonKappa	1.05306

Tabel 21: Forventet hedgefejl, fuld horisont

Disse resultater er forholdsvis sammenfaldende med GAIN-statistikkerne fundet i tabel 20. Høje forventede hedgefejl for strategier med afdækning ved realiseret hedgevolatilitet og lavere fejl for minimum-varians-Δ-strategierne. I modsætning til GAIN-statistikkerne har Black-Scholes med interpolerede parametre en lavere forventet hedgefejl end benchmark (Black-Scholes med faste parametre). EGARCH-strategien har den største forventede hedgefejl, umiddelbart efterfulgt af Heston. Igen får vi et bedre overblik over strategiernes afdækningspræstation ved betragtning af de optionsvise forventede fejl for de $n = 20$ optioner vi handler i årrækken 2004-2009 jf. figur 30:



Figur 30: Optionsvis forventet numerisk hedgefejl

Samtlige strategier har en forholdsvis lav forventet hedgefejl frem til 2007, herefter hedgefejlen forøges markant for en række strategier - især under finanskrisen 2008-2009. Markedet observerer de tidligste

tegn på finansiel uro i 2007, hvor den forventede hedgefejl stiger for samtlige strategier. På grund af usikkerheden i markedets handel med *over-the-counter* kreditderivater, som *Credit Default Swaps* og *Collateralized Mortgage Obligations*, øgedes mistilliden mellem investeringsbankerne og deres evne til at overholde deres forpligtelser.

Mistilliden lagde grund til finansiel uro, der på samme tid forøgede volatiliteten i Equity-markederne, hvorfor risikokilden vi søger at afdække med delta-hedging formodentlig blev mere uforudsigelig. Efterfølgende falder den forventede hedgefejl, da strategierne bedre tilpasser sig de nye tilstande. Men i efteråret 2008 forøges hedgefejlen til hidtil usete niveauer for samtlige strategier. Nogle strategier tilpasses for langsomt og følger ikke med de drastiske finansielle ændringer i markedet, mens andre overreagerer i afdækningen. I begge tilfælde viser de fleste strategier en imperfekt afdækning af risikokilden, som sandsynligvis også er af en anden dynamisk form end før krisen.

Den førnævnte lavere forventede hedgefejl for Black-Scholes (float) end benchmark går igen i figur 30. Forskellen i afdækningsfejl mellem de to strategier er triviel frem til portefølje 12 og 15, der handles hhv. i foråret 2007 og januar 2008. Ved disse porteføljer er den forventede afdækningsfejl i Black-Scholes (float) lavere end benchmark. Dette er umiddelbart et tegn på en bedre afdækning i strategien med interpoleret volatilitet, i og med denne strategi er delta-neutral og derfor mindre eksponeret mod risikokilden i aktivet.

Her ses en voldsom forventet hedgefejl på 4.802 for EGARCH-strategien i portefølje 18, hvilket er sammenfaldende med P&L-stierne for EGARCH i figur 21a - portefølje 18 svarer til stien der drastisk vokser først og fluktuerer hyppigt over afdækningshorisonten. Disse hyppige fluktuationer er med til at give markante hedgefejl og dermed en dårligere afdækning af risikokilden (trods de pæne P&L-resultater).

12.2.2 Standardafvigelse

Med middelværdien opstillet vil det være naturligt at kigge på standardafvigelsen på den numeriske hedgefejl:

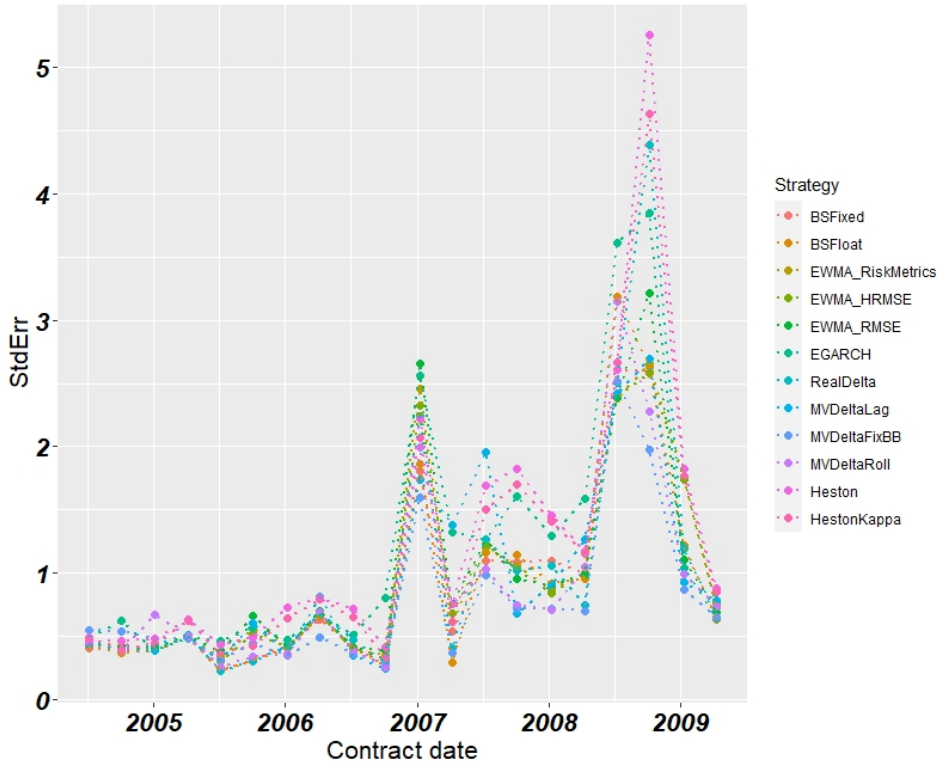
$$Std.err. = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon_{V_t,i}^{abs} - \mathbb{E}\left[\varepsilon_{V_t}^{abs}\right]\right)^2},$$

hvor m igen angiver antallet af afdækninger under optionens levetid. Standardafvigelsen giver et billede af afvigelsen fra den forventede værdi for en given strategi jf. tabel 22:

	Standardafvigelse
Black-Scholes (fixed)	1.23072
Black-Scholes (float)	1.29647
EWMA (RiskMetrics)	1.33473
EWMA (HRMSE)	1.31887
EWMA (RMSE)	1.42201
EGARCH	1.82079
Real Δ	1.52989
Minimum-varians Δ (lag)	1.28902
Minimum-varians Δ (rekalibrering)	1.23104
Minimum-varians Δ (fast backbone)	1.03218
Heston	1.83667
HestonKappa	1.71638

Tabel 22: Standardafvigelse, fuld horisont

Igen betragtes en større standardafvigelse i numeriske hedgefejl for Black-Scholes (float) end Black-Scholes (fixed) strategien. Dvs. under hele dataperioden 2004-2009 afviger float-strategien mere fra den forventede værdi. Dette hænger godt sammen med de GAINs vi betragter for float-strategien, da opadgående afvigelser i hedgefejlen yder lavere GAINs pga. kvadreringen af hedgefejl i GAINs-statistikken. Heston har en større standardafvigelse end EGARCH, selvom forskellen mellem dem kun er marginal. Hvis vi betragter standardafvigelsen for hedgefejlen i de enkelte optioner, får vi imidlertid en større forskel på EGARCH og Heston jf. figur 31:



Figur 31: Optionsvis standardafvigelse af hedgefejl

Heston-strategien har markant højere standardafvigelse end EGARCH i portefølje 18, dog er denne lavere for portefølje 11 i januar 2007. Bemærk gerne hvorledes en række strategier f.eks. (a) benchmark

og EGARCH har en højere forventet hedgefejl, men lavere standardafvigelse end hhv. (b) Black-Scholes (float) og Heston. Disse strategier (a) har lavere forventede hedgefejl, da fluktuationerne, vi betragter for dem, er hyppigere, men mindre end de fluktuationer vi betragter i (b). Til gengæld har (b)'s større fluktuationer, som forekommer mindre hyppigt, en kraftigere virkning på standardafvigelsen, da fejlen her kvadreres.

Vi ser derudover en stor standardafvigelse for de fleste strategier i portefølje 11, som handles i januar 2007. Dette er igen sammenfaldende med store fluktuationer i de P&L-stier, vi betragter i denne periode, men her lader de fleste strategier til at være påvirket. I denne periode vises de tidligste tegn på den finansielle nedsmeltning vi senere skulle opleve, hvilket sandsynligvis har haft stor indflydelse på samtlige strategiers evne til at afdække risikoen i markedet.

12.2.3 Value-at-Risk

Value-at-Risk (VaR) er hyppigt anvendt indenfor risikovurdering med udgangspunkt i en stikprøve af afkast eller tab. Lad R angive en fordeling af afkast, S positionen i en portefølje der yder disse afkast. Dermed er tabsfordelingen $\mathcal{L}$ spejlingen af afkastfordelingen $\mathcal{L} = -S \times R$. For en given sandsynlighed α f.eks. $\alpha = 5\%$ beskriver $\mathrm{VaR}_{\mathcal{L}}(\alpha)$ det maksimale tab, vi oplever med $1 - \alpha = 95\%$ sandsynlighed. I og med VaR udgør $1 - \alpha$-fraktilen i tabsfordelingen ses:

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L} \geq \mathrm{VaR}(\alpha)\right) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{VaR} = F_{\mathcal{L}}^{-1}(\alpha),$$

hvor VaR udgør VaR-fraktilen i en kontinuert tabsfordeling $\mathcal{L}$ med fordelingsfunktion F. Dette vil vi med sandsynlighed α tabe mindst $\mathrm{VaR}(\alpha)$. I vores tilfælde kendes fordelingen af hedgefejl ikke, hvorfor vi tager udgangspunkt i det ikke-parametriske estimat:

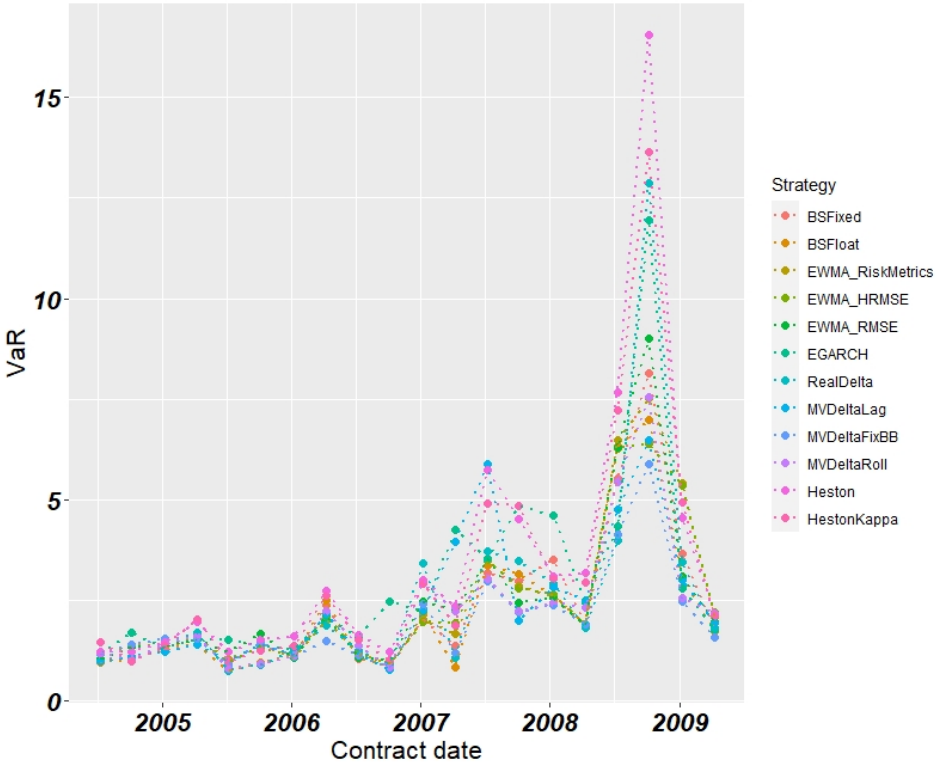
$$\widehat{\mathrm{VaR}}_M(\alpha) = \hat{q}(\alpha),$$

hvor $\hat{q}(\alpha)$ udgør α-fraktilen i den empiriske fordeling af hedgefejl for strategien M. Vi betragter VaR-statistikker for samtlige strategier, for at se hvilke strategier der har de højeste 95%-fraktiler i hedgefejl. Dette giver et skøn på den maksimale hedgefejl vi oplever i et "worst case"-scenarie. For hele dataperioden kan VaR, dvs. 95%-fraktilen i hedgefejlfordelingen, betragtes for de forskellige strategier i tabel 23:

	Value-at-Risk
Black-Scholes (fixed)	2.69151
Black-Scholes (float)	2.61928
EWMA (RiskMetrics)	2.92241
EWMA (HRMSE)	3.00943
EWMA (RMSE)	2.98366
EGARCH	3.92445
Real Δ	2.97490
Minimum-varians Δ (lag)	2.84658
Minimum-varians Δ (rekalibrering)	2.56111
Minimum-varians Δ (fast backbone)	2.21975
Heston	3.43599
HestonKappa	3.44751

Tabel 23: Value-at-Risk, fuld horisont

Her er EGARCH igen strategien med den største fejlstatistik på 3.92445, dvs. vi med 95% sandsynlighed er sikre på ikke at afdække med større fejl end dette VaR-niveau. Benchmark-strategien har ligeså en større VaR end Black-Scholes (float), hvilket muligvis er overraskende i betragtning af benchmarkens lavere standardafvigelse. Dette skyldes imidlertid de hyppigere fluktuationer i benchmark-strategien, hvilket forskyder fordelingen af hedgefejlen i benchmark-strategien op. De bestemte VaR-statistikker for de enkelte porteføljer i data kan betragtes i nedenstående figur 32:



Figur 32: Optionsvis VaR(α), $\alpha = 0.05$

I modsætning til tidligere viste GAINs og forventet hedgefejl, er det ikke EGARCH, der har den største fejl under finanskrisen. For den notoriske portefølje 18 betragtes VaR i Heston og $Heston_{kappa}$ på hhv. 16.53842 & 13.654512. Ifølge denne statistik findes dermed en større risiko for hedgefejl ved

afdækning med Heston. Dette passer godt sammen med de standardafvigelser vi så tidligere for Heston. Strategien yder meget høje P&L-resultater pga. de store fluktuationer i stierne undervejs. De kraftige fluktuationer kommer som resultat af kraftige impulser fra risikokilden. Dette giver en stokastisk udvikling i P&L-stierne for afdækning med realiseret hedgevolatilitet, og denne stokastik vi ser undervejs i P&L-stien afdækkes ikke. Den manglende afdækning kommer til udtryk her, hvor vi ser store 95%-fraktiler i fordelingen af hedgefejl for strategien.

Derudover ses store VaR-statistikker for minimum-varians Δ (lag) strategien i portefølje 13 handlet i juli 2007. Portefølje 13 har afdækningshorisont fra 9. juli 2007 og 3 måneder frem, en periode hvori indeksprisen falder markant og derefter gradvist vokser tilbage. I denne periode vil det derfor især være ufordelagtigt at backbone-effekten, som strategien er afhængig af, er lagged 3 måneder. Dette har betydelig effekt på strategiens afdækningsfejl, hvilket bl.a. kan ses i disse store VaR-statistikker.

12.2.4 Conditional Value-at-Risk

Trods Value-at-Risks hyppige anvendelse i risikoanalyse overholder målet ikke nødvendigvis subadditivitet, hvilket beskriver hvorledes risikomålet for en portefølje ikke bør overstige summen af risikomål for de individuelle positioner. Lad $\mathcal{L}_1$ og $\mathcal{L}_2$ angive to arbitrære tab med diskrete fordelinger. VaR opfylder ikke subadditivitet da $\mathrm{VaR}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \nleq \mathrm{VaR}(\mathcal{L}_1) + \mathrm{VaR}(\mathcal{L}_2)$ (for kontinuerte tabsfordelinger overholdes kravet uden undtagelse).

Subadditivitet kræves ofte af risikomål, da kravet til sikkerhedsstillelse er mindre for en diversificeret portefølje end summen af positioner i porteføljen, i og med porteføljen har bortdiversificeret den idiosynkratiske risiko i markedet. En række alternative risikomål opfylder imidlertid subadditivitet, deriblandt risikomålet Conditional Value-at-Risk (CVAR, også kaldet Expected Shortfall), defineret ved:

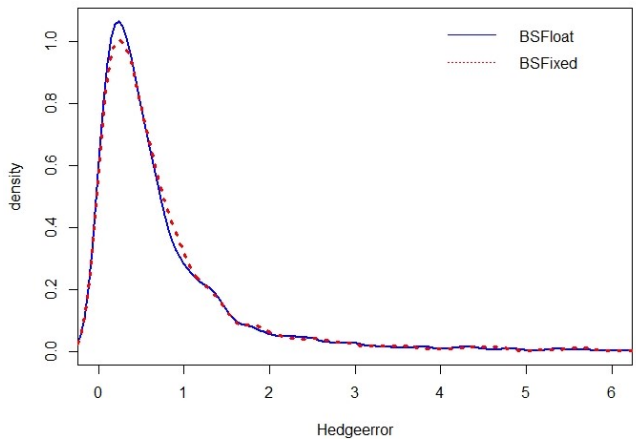
$$\mathrm{CVaR} = \mathbb{E}\left[\mathcal{L} \middle| \mathcal{L} \geq VaR(\mathcal{L})\right] = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \mathrm{VaR}_{\mathcal{L}}(u)du$$

I ovenstående ses det at CVaR følger en kontinuert udviklkling modsat VaR, som er diskret. CVaR kan tolkes som den forventede hedgefejl givet vi befinder os i et "worst case"-scenarie. Vi opstiller CVaR, da der i halen af hedgefejl kan findes et uventet antal ekstreme observationer, hvilket VaR ikke tager højde for. Vi betragter da følgende CVaR for de udvalgte strategier:

	Conditional Value-at-Risk
Black-Scholes (fixed)	4.94776
Black-Scholes (float)	5.05330
EWMA (RiskMetrics)	5.37589
EWMA (HRMSE)	5.30943
EWMA (RMSE)	5.58169
EGARCH	7.11093
Real Δ	5.27135
Minimum-varians Δ (lag)	5.09228
Minimum-varians Δ (rekalibrering)	4.57200
Minimum-varians Δ (fast backbone)	3.92276
Heston	7.25803
HestonKappa	6.80891

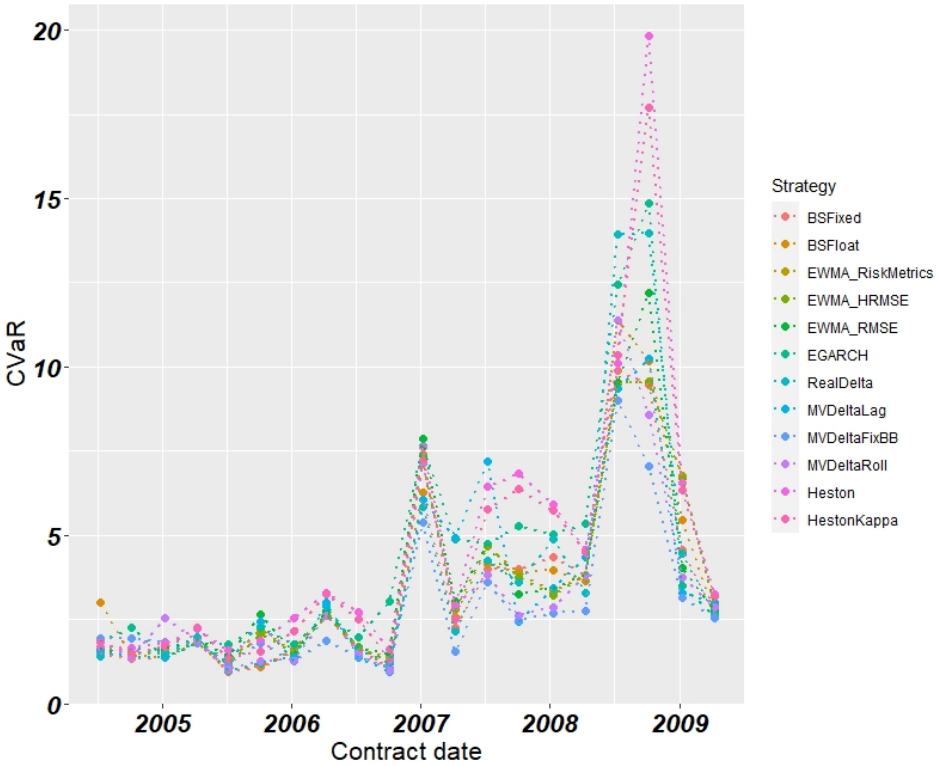
Tabel 24: Conditional Value-at-Risk, fuld horisont

Her ses den højeste statistik også for EGARCH og Heston. Her kan det bemærkes, at trods Value-at-Risk var større i benchmark-strategien end Black-Scholes (float), er CVaR her større for Black-Scholes (float). Dette skyldes fordelingen af hedgefejl i Black-Scholes (float) har en tungere øvre hale, hvilket vi ser i figur 33:



Figur 33: Fordeling for hedgefejl,
I Black-Scholes (fixed) & (float)

Denne tungere hale spiller ikke nogen stor rolle i Value-at-Risk målet, men i og med CVaR er statistik for den forventede værdi af halen over VaR, vil en tungere hale således have en højere CVaR. Dette fortæller os også, at skulle afdækningsfejlen overstige VaR 95%-niveauet er den forventede afdækningsfejl større i Black-Scholes (float) end benchmark. De enkelte optioners CVaR kan betragtes i figur 34:



Figur 34: Optionsvis CVaR

I modsætning til før ligger CVaR for Heston højere end de øvrige i porteføljerne 13 til 18, hvilket fortæller os at den forventede haleværdi i Heston er markant større end andre strategier. Heston med kalibrering af Feller-betingelsen har ligeså højere CVaR end $Heston_{kappa}$. Som tidligere set yder $Heston_{kappa}$ en højere afsluttende P&L, hvilket ligeså bygger på strategiens hedgefejl. Dermed forventes Heston at være eksponeret mod større potentielle hedgefejl i tider, hvor vi overstiger 95%-niveauet, og kan dermed potentielt overgå $Heston_{kappa}$ i mulig P&L-gevinst, da modellerne har samme købestrategi. Dette kan imidlertid også resultere i gevaldigt store tab, hvis købsstrategien opsætter ukorrekte positioner i optionen pga. anvendelsen af fejlestimerede volatiliteter i evaluering af $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$.

Ligesom i figur 31 med strategiernes standardafvigelse, kan store afvigelser betragtes i januar 2007 og slutningen af 2008. De store værdier i januar 2007 ses bl.a. ikke i VaR, og kunne betragtes som tidlige indikatorer på en mulig krise. Større CVaR-værdier for samtlige strategier er tegn på markant flere ekstreme fluktuationer. Ekstreme fluktuationer forekommer oftest i krisetider, og umiddelbart før krisetider mens markedet gradvist destabiliserer. Vi bemærker dog markant lavere CVaR-værdier for minimum-varians-Δ-strategierne, da backbone-effekten/følsomheden i volatiliteten her yder et tidligt signal om de ændrede markedstilstande.

Det er især de lokale-/stokastiske volatilitetsmodeller EWMA, EGARCH og Heston, der oplever største spring i antallet af haleobservationer. Sandsynligvis fordi estimationen af den realiserede volatilitet er særdeles vanskelig i disse tider. Den voksende finansielle uro, som vi ser tegn på, forplanter sig direkte

i volatiliteten, hvilket igen forplanter sig direkte i afdækningen. Kraftigere fluktuationer i volatilitetsbaserede strategier der normalt oplever milde fluktuationer, er tegn på fundamentale ændringer i volatilitetsdynamikken, hvad vi formoder må forekomme under krisetider.

12.3 Opsamling på observerede hedgefejl

Den generelle tendens vi betragter i denne evaluering er store hedgefejl for strategier med høje P&L-resultater. Dette er ikke et modstridende resultat, da de daglige hedgefejl netop driver P&L-stierne. For strategier med store hedgefejl betragtes stor stokastik i de dertilhørende P&L-stier. Stokastik der under den rette købsstrategi resulterer i store gevinster.

Som set i bl.a. standardafvigelsen, VaR og CVaR på hedgefejlene findes langt større afdækningsfejl i strategier som EGARCH og Heston. Disse er noget højere i Heston end EGARCH, da P&L-stierne i Heston-strategien fluktuerer kraftigere (men mindre hyppigt) end tilsvarende P&L-stier i EGARCH. Dette byder også et dilemma, om hvorvidt afdækningsfejlen i en strategi foretrækkes at være gennemsnitligt lavere eller mindre afvigende end alternative strategier. De kraftigere spring i Heston strategiens P&L-stier er forårsaget af længere positioner i det underliggende aktiv. Heston passer i den sammehæng bedre til en mere risikovillig investor end EGARCH, hvori de stokastiske spring i P&L-stien er spredt ud over flere afdækningstidspunkter. EGARCH vil i så fald passe bedre til en mere risikoavers investor end Heston vil pga. risikospredningen af de stokastiske spring.

Der skal i den forbindelse også nævnes, at delta-hedging med Heston-modellens volatilitet strider med modellens antagelser om risikoafdækning. I Heston-modellen findes risikokilder i hhv. pris- og variansprocessen, hvorledes afdækningen i modellen foregår ved delta- og vega-hedging. Det er i den forbindelse modellens antagelse at optionsrisikoen ikke kan afdækkes alene ved delta-hedging, hvad vi forsøger at gøre med de opstillede hedgeporteføljer. Den primære afdækning med positionen i det underliggende aktiv er i Heston-modellen justeret ud fra den sekundære afdækning med en position i en sekundær option, som afhænger af volatilitetsprocessen. I Heston er delta-positionen:

$$\Delta^{Heston} = \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \frac{\partial V_1}{\partial S}.$$

Den partielle afledte $\frac{\partial V}{\partial S}$ svarende til et Black-Scholes Δ med $\sigma_t = \sqrt{v_t}$ er fratrukket følsomheden i værdien af den sekundære afdækning. Dermed vil udelukkende delta-hedging i Heston-modellen give eksponering mod risikokilden i volatilitetsprocessen, da denne afdækning udgår.

Sidst bør nævnes, at trods minimum-varians Δ strategiens overlegne afdækning har strategien et negativt konfidensinterval for P&L-resultaterne. Det vil derfor være udelukket for arbitrageurs at vælge denne strategi, mens en investor, der udelukkende ønsker at afdække risikoen i optionen, vil være bedre stillet med denne strategi. Med udgangspunkt i afdækningsrisikoen alene vil minimum-

varians Δ strategien med daglig rekalibrering udpræstere de mere sofistikerede volatilitetsmodeller. Hvis vi i stedet betragter minimum-varians Δ strategiens afdækningspræstation og de dertilhørende afsluttende P&L'er, kan vi bl.a. se at minimum-varians Δ strategien udnytter sin afdækningsfejl til profit i P&L-stierne bedre end f.eks. EWMA- og Real Δ-strategierne. Med forbedret afdækning og højere P&L-resultater i minimum-varians Δ strategien er denne alt andet lige en bedre strategi både afdæknings- og profitmæssigt.

13 Konklusion

Vi kan konkludere, at det har været muligt at opstille flere komplekse afdækningsmodeller med det givne data om S&P 500-indekset fra 2004-2009. Med disse modeller har vi formået at teste forskellige strategier med flere typer af volatiliteter og købsstratgier. Disse undersøgelser har givet os resultater, som beretter, at mere komplekse modeller som EGARCH og Heston giver højere afsluttende P&L'er end de øvrige og mere almindelige strategier såsom Black-Scholes.

Vi kan også konkludere at EGARCHs købsstrategi giver de bedste P&L-resultater, hvis man søger eksistensen af arbitragemuligheder / en sikker gevinst. EGARCH med en fast/interpoleret implicit hedgevolatilitet, samt med en fast realiseret hedgevolatilitet, yder alle et positivt konfidensinterval for de enkelte optioners P&L opsamlet under afdækningshorisonten. I EGARCHs købsstrategi købes de to optioner som ender med at give de højeste afsluttende P&L'er, nemlig portefølje 17 og 18. Årsagen til at netop disse to porteføljer får en enorm afsluttende P&L er de temmeligt store hedgefejl i disse porteføljer. Næsten alle porteføljer har en forventet hedgefejl over 2, dvs. vi med de forkerte købsbeslutninger for optionen kan miste store summer penge.

$Heston_{kappa}$ giver klart den største afsluttende P&L af alle vores strategier. Det er dog også denne strategi, der har den største standardafvigelse i P&L-værdi for optionerne, hvilket medfører et konfidensinterval uden strengt positive værdier - dermed udelukkes muligheden for volatilitetsarbitrage i strategien. Modsat er EWMA strategierne de dårligst præsterende målt på afsluttende P&L'er og konfidensinterval. Modellen simplicitet givet ved volatilitetsestimation ud fra 1 parameter resulterer i adskillige omkostningstunge købsbeslutninger for optionen.

Vores analyse af hedgefejl og relativ afdækningspræstation ser vi, strategierne imellem beretter noget kontraintuitivt, at de bedst præsterende strategier også har største afdækningsfejl. Dette kan vi dog forklare ud fra konstruktionen af P&L-stierne, da disse er direkte baseret på størrelsen af afdækningsfejl undervejs i optionens levetid. EGARCH- og Heston strategierne udleder de største hedgefejl og værste afdækningspræstation relativt til Black-Scholes med fast implicit hedgevolatilitet, fordi store P&L-resultater er drevet af store mængder afdækningsfejl undervejs. En perfekt afdækning af optionsrisikoen vil resultere i en flad P&L-sti omkring 0, hvilket ikke tjener nogen gevinst. De opstillede

statistikker for afdækningsfejl i EGARCH- og Heston strategien er ligeså influeret af de daglige stokastiske P&L-fluktuationer. Disse fluktuationer er større for en strategi med afdækning ved realiseret hedgevolatilitet, som vi så i Willmott eksperimentet, derfor betragter vi ikke afdækningsfejlen kritisk for den udledte arbitrage.

Den bedste afdækningspræstation ses i minimum-varians Δ strategierne med daglig rekalibreret- og fast backbone. Strategien er hjulpet af dens konstruktion på Black-Scholes Δ og det bias vi lægger i optionspriserne, når disse ikke er observeret i markedet, men baseret på Black-Scholes formlen. Dette påvirker naturligvis den relative afdækningsforbedring, men ikke desto mindre yder strategien en forbedret afdækning på grund af dens inkorporering af backbone-effekten (volatilitetens følsomhed i spotprisen) i afdækningspositionen. Imidlertid har strategien et negativt nedre konfidensniveau, hvorfor den ikke vil være interessant til arbitrageformål.

Hovedresultatet i FToDT er, at vi kan garantere en positiv gevinst ved at købe/sælge optionen ud fra evaluering af uligheden $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$. Da vi opstillede FToDT i Willmott eksperimentet kunne vi let bestemme niveauet for den realiserede- relativt til den implicitte volatilitet, og vurdere hvorvidt dette kræver en lang eller kort position i optionen. Dette viser sig at være mere problematisk med virkelighedens optionsdata og vores manglende kendskab til den realiserede volatilitet.

De forskellige volatilitetsmodeller, vi har anvendt til at estimere den realiserede volatilitet, yder vidt forskellige resultater. EWMA's estimation af den realiserede volatilitet har udledt positive afsluttende P&L-resultater for 2 ud af 3 kalibreringer, men ingen volatilitetsarbitrage. I Heston-strategien ser vi de største afsluttende P&L-resultater, men grundet den høje standardafvigelse i disse resultater kan vi heller ikke her bekræfte en sikker gevinst. Det har kun været muligt at bekræfte en arbitragemulighed ved anvendelse af EGARCH's modellering af den realiserede volatilitet. Det har sågar været muligt at generere dette volatilitetsarbitrage i EGARCH uanset anvendelsen af implicit eller realiseret volatilitet. Derfor er hovedresultatet i FToDT, hvorvidt vi kan garantere positiv genvist, bekræftet - men kun ved anvendelse af EGARCHs estimation af den realiserede volatilitet. Da vi betragter en positiv genvist garanteret ved EGARCH, kan vi også konkludere, at det er muligt at anvende hovedresultatet i FToDT empirisk.

Som tidligere nævnt betragtede vi i Willmott eksperimentet mærkbart forskellige stier ud fra hvilken hedgevolatilitet der indgik i afdækningen. Specifikt så vi stokastiske stier med deterministisk endepunkt for afdækning med realiseret volatilitet, og synligt glatte stier med stokastiske endepunkter for afdækning med implicit hedgevolatilitet. Det har ikke været muligt at replikere disse tendenser i P&L-stierne for virkeligt optionsdata. Stier med implicit hedgevolatilitet anvendt i afdækningen fluktuerer stokastisk i modstrid med tendenserne set i Willmott eksperimentet. Mange af de implicitte stier er relativt flade, men ikke desto mindre afbrudt af stokastiske fluktuationer undervejs. Især stier

hvor afdækningshorisonten er under perioder med finansiel uro, som portefølje 18, er uomstrideligt stokastiske.

Mange af stierne hvori afdækningen foregik med implicit hedgevolatilitet, f.eks. EGARCH-stierne i figur 20a, fluktuerer mindre kraftigt end tilsvarende stier med realiseret hedgevolatilitet i figur 21a. Dette hænger sammen med teorien, da afdækning med realiseret hedgevolatilitet påvirkes af direkte impulser fra risikokilden i det underliggende aktiv. For afdækning med realiseret hedgevolatilitet betragter vi stokastiske stier for samtlige volatilitetsmodeller, men disse stier konvergerer ikke mod et entydigt endepunkt. Disse stier viser dog en mærkbar tendens til at samles mere efterhånden som optionens udløb nærmere sig, men de ender ikke i et unikt endepunkt som Willmott eksperimentet udleder. Vi konkluderer, at dette skyldes vores mangelfulde kendskab til den realiserede volatilitet og vores lavfrekvente rebalancering.

Afslutningsvis har det været muligt at undersøge strategierne ud fra deres P&L-stier samt statistiske værktøjer såsom konfidensintervaller, GAINs, standardafvigelser osv. Dette har ført til, at vi har kunnet bestemme, hvilke strategier er optimale for forskellige typer af optiontraders i markedet og hovedresultatet for FToDT.

Vi knytter som opsummering derfor følgende svar på vores problemformulering:

i) FToDT's resultat om volatilitetsarbitrage, såfremt $\sigma^{act} > \sigma^{imp}$ a.s. for en lang option, bekræftes med 95% sikkerhed da EGARCH-strategien leverer strengt positive konfidensintervaller uafhængigt af om optionen afdækkes med realiseret eller implicit volatilitet. Willmott eksperimentets konklusioner, stokastiske stier med deterministisk endepunkt for hedgeporteføljer med realiseret hedgevolatilitet og glatte stier med stokastiske endepunkter for tilsvarende porteføljer med implicit hedgevolatilitet, er ikke umiddelbart observerbare ud fra vores undersøgelser af S&P 500 optionsdata. Imidlertid forudsætter vi disse konklusioners gyldighed ved en øget hedgefrekvens og bedre estimation af den realiserede volatilitet.

ii) Teoremets anvendelighed gælder ikke hedgeporteføljer med varierende hedgevolatilitet under afdækningshorisonten, men vores resultater viser ligeså volatilitetsarbitrage ved optioner købt/solgt med EGARCH-modellering af den realiserede volatilitet, og bedre afdækning med interpoleret implicit hedgevolatilitet i Black-Scholes modellen. For disse porteføljer konkluderer vi da, at der må eksistere en udvidelse af FToDT, som tillader varierende volatilitet i hedgeporteføljer og beskriver disse porteføljers P&L-stier.

14 Perspektivering

I fremtidige studier er det værd at undersøge om man ville kunne optimere EWMA strategierne, da EWMA bygger på principperne i IGARCH(1,1), en heteroskedastisk volatilitetsmodel ligesom EGARCH. Siden at EGARCH har klaret sig godt, og formår som den eneste strategi at sikre en gevinst med 95% sikkerhed, bør EWMA kunne forbedres. EGARCH bliver f.eks. rekalibreret hver gang en ny portefølje starter, hvilket ikke er afprøvet for EWMA. Sådan en rekalibrering vil muligvis forbedre EWMA strategierne. En sådan rekalibrering tager udgangspunkt i den historiske volatilitet og vægten λ. Vi så nemlig tidligere, at EWMA strategien med RMSEs λ gav bedre afsluttende P&L'er end RiskMetrics's λ fra 2001. Dette viser, at λ varierer over tid, og rekalibrering af denne parameter vil da forhåbentlig føre til en bedre optimering EWMA strategien.

Begge Heston-modeller har høj vol-at-vol i portefølje 18. Heston med Feller-betingelsen har ligeså den mindste korrelation og ekstremt høj konvergenshastighed i denne portefølje. Dette viser nogle interessante tendenser, som større krumning i volatilitetsfladen forårsaget af de høje vol-at-vol værdier, og mere uforudsigelighed i volatilitetens følsomhed i spotprisen forårsaget af denne reducerede korrelation. Portefølje 18 handles under finanskrisen hvor disse tendenser ikke vil være utænkelige. Den høje konvergenshastighed passer dog ikke ind med den øgede stokastik, vi som regel betragter i krisetider, hvorfor vi formoder denne uoverensstemmelse i parameteren κ er forårsaget af den ufleksible kalibrering med Feller-betingelsen. Disse tendenser lægger op til videre undersøgelser af ændringer i variansprocessens dynamiske struktur hhv. før, under og efter krisetider.

Ligeså ville kalibreringen af Heston sandsynligvis blive bedre med anvendelse af en global optimeringsalgoritme. Vi har som nævnt kun været i stand til at optimere Heston-kalibreringen med en lokal optimering grundet begrænset computerkraft. Med større computerkraft og mere tid vil det formodentlig være muligt at tage udgangspunkt i en global optimering. Dette skulle også udjævne skævvredne parameterestimationer som f.eks. κ i portefølje 18 for kalibreringen med Feller-betingelsen.

Et andet element, der ville være interessant for fremtidige studier, er at introducere mere data. Dette data kunne f.eks. være en udvidelse af det nuværende datasæt med over en længere årrække. Et større datasæt med flere porteføljer vil bedre kunne prædiktere den sande middelværdi af den afsluttende P&L, og på den måde gøre resultaterne mere eksakte. En anden vinkel kunne være anvendelse af et datasæt fra et andet marked end S&P 500-indekset. Dette datasæt vil muligvis præsentere nye tendenser eller verificere vores fundne resultater.

En grundlæggende antagelse i denne opgave som ikke stemmer overens med virkeligheden, er at der ingen transaktionsomkostninger findes i markedet. Dette er dog en integral del af virkelighedens handel med finansielle produkter. Resultaterne kunne med introduktion af transaktionsomkostninger gøres

mere virkelighedsnære, da handel på det finansielle marked omfatter disse finansielle gnidninger. Dette ville være brugbart at have med, når man skal hedge en option, da afdækningsfrekvensen således har en betydning for de pådragne transaktionsomkostninger. Transaktionsomkostninger har en central betydning for afdækning, da vi skal betale et handelsgebyr i hver rebalancering af det underliggende aktiv. Dette kunne enten gøres ved et fast gebyr, f.eks. \$1 pr. transaktion, eller med en rate der betales som andel af værdien i underliggende, f.eks. $\$0.01 \times S_t$ pr. transaktion ved tidspunkt t. Hvis omkostningen er fast akkumuleres en samlet omkostning på \$63 for en portefølje med daglig afdækning. Denne omkostning vil således give underskud i samtlige porteføljer undtagen portefølje 18 i $Heston_{kappa}$ strategien, som med omkostningen da har resultatet $\$96.63676 - \$63 = \$33.63676$. Dette eksempel viser, at introduktionen af denne simple omkostning ændrer gevaldigt på betingelserne for succesfuld omkostningsminimerende afdækning, da det nu ikke længere er trivielt, hvor mange gange vi bør afdække under optionens levetid.

Modeller til prisfastsættelse af optioner, som Heston og Black-Scholes, kan ligeså forbedres ved at tillade stokastisk rente. Både i Black-Scholes og Heston har vi antaget at renten er konstant, når vi bruger modellerne til at prissætte optioner og til at finde delta. Antagelsen om konstant rente er fejlagtig i betragtning af vores data, da vi betragter renteændringer fra dag til dag i datasættet. Med en stokastisk rente vil vore modeller bedre kunne følge virkelighedens renteudvikling, og på den måde blive mere virkelighedstro. Denne stokastiske rente kunne f.eks. modelleres ud fra Vasiček-modellen, som har vundet tilbagegang i litteraturen om rentestruktur, da renten i denne model er normalfordelt, og derfor kan blive negativ - hidtil har CIR-modellen været oplagt til rentestruktur, men de negative renter observeret i det seneste årti taler for Vasičeks bedre anvendelighed til dette formål.

15 Litteraturliste

15.1 Primær litteratur

Bøger:

- Jan R. M. Röman (2017): Analytical Finance: Volume I, Springer Nature, 1. version
- Jim Gatheral (2006): The Volatility Surface - A Practitioner's Guide, John Wiley & Sons, Inc.

Artikler:

- Simon Ellersgaard, Martin Jönsson & Rolf Poulsen (14. september 2016): The Fundamental Theorem of Derivative Trading - exposition, extensions and experiments, Routledge Taylor & Francis Group
- Steven L. Heston (1993): A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies, Vol. 6, nr. 2, 1993, s. 327-343

15.2 Sekundær litteratur

Bøger:

- Arlie O. Petters & Xiaoying Dong (2016): An Introduction to Mathematical Finance with Applications, Springer-Verlag New York, 1. version
- David Ruppert & David S. Matteson (2015): Statistics and Data Analysis for Financial Engineering - with R examples, Springer-Verlag New York, 2. version
- Ronald W. Shonkwiler (2013): Finance with Monte Carlo, Springer-Verlag New York, 1. version

Artikler:

- Alexander Lipton (2002): The Vol Smile Problem: Risk Analysis, Vol. 15, 2002, s. 61-65
- Bernard Bollen (2015): What should the value of lambda be in the exponentially weighted moving average volatility model?. Applied Economics, Vol. 47, nr. 8, 2015, s. 853-860
- Daniel B. Nelson (marts 1991): Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. Econometrica, Vol. 59, nr. 2, marts 1991, s. 347-370
- Fischer Black & Myron Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy, Vol. 81, nr. 3, maj - juni 1973, s. 637-654
- John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr. & Stephen A. Ross (marts 1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, Vol. 53, nr. 2, marts 1985, s. 385-407

- John Hull & Alan White (24. maj 2017): Optimal Delta Hedging for Options. Journal of Banking and Finance, Vol. 82, september 2017, s. 180-190
- Jorge Mina & Jerry Yi Xiao (april 2001): Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard, RiskMetrics Group, Inc.
- Karl Sigman (2006): Geometric Brownian motion, Columbia University
- Ricardo Crisóstomo (december 2014): An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab, Comisi óon Nacional del Mercado de Valores, nr. 58
- Ricardo Suganuma (oktober 2000): Reality Check for Volatility Models, oktober 2000, University of California, San Diego
- Rolf Poulsen, Klaus Reiner Schenk-Hoppé & Christian-Oliver Ewald (26. februar 2006): Risk Minimization in Stochastic Volatility Models: Model Risk and Empirical Performance, Quantitative Finance, Vol. 9, nr. 6, 2006, s. 693-704
- Takaki Hayashi & Per A. Mykland (april 2004): Evaluating hedging errors: An asymptotic approach. Mathematical Finance, Vol. 15, nr. 2, april 2005, s. 309-343
- William Feller (28. august 1950): Two Singular Diffusion Problems. Annals of Mathematics, anden serie, Vol. 54, nr. 1, juli 1951, s. 173-182

Links:

- Key ECB interest rates (European Central Bank): `https://www.ecb.europa.eu/stats/policy_and_exchange_rates/key_ecb_interest_rates/html/index.en.html`

16 Bilag

16.1 Bilag A

I disse tabeller svarer kolonnetallet til hedgefrekvensen for en 3-måneders hedgehorisont. F.eks. svarer frekvensen 63 til at hedge dagligt i løbet af horisonten (ca. 63 arbejdsdage på 3 måneder), 1512 til hedge hver time, 90720 til hvert minut og 5443200 til hvert sekund. 5000 er hedgefrekvensen anvendt i Willmott eksperimentet, men derudover arbitrært.

simulationer/hedge punkter	63	1512	5000	90720	5443200
sim1	2.973667	2.003801	1.974970	1.991382	1.992117
sim2	2.192504	2.006151	1.987644	1.988810	1.995922
sim3	2.601306	1.967840	1.986230	1.970301	1.995828
sim4	2.049017	2.019484	2.044873	2.005129	1.991673
sim5	2.488880	2.066486	1.990061	1.993445	1.994480
sim6	1.903600	2.267153	2.039974	1.992428	1.993001
sim7	3.619602	2.173047	2.027324	1.967451	1.991303
sim8	2.448625	2.041203	2.029376	1.980928	1.993762
sim9	1.932845	1.959661	2.005860	1.986925	1.995124
sim10	2.000973	1.884494	1.934691	2.004405	1.994154
mean	2.421102	2.038932	2.002100	1.988120	1.993736

Tabel 25: Terminal P&L-værdier med $\sigma_h = \sigma_r$

simulationer/hedge punkter	63	1512	5000	90720	5443200
sim1	4.476635	1.890025	1.050013	0.831449	0.798208
sim2	1.405701	1.311900	1.186294	2.607941	3.554495
sim3	1.932240	3.337663	1.645785	1.495635	2.505572
sim4	2.999691	0.906199	1.623858	1.722166	3.108857
sim5	1.452203	0.930945	2.089949	1.523408	2.565037
sim6	1.793953	1.908362	2.373626	1.086131	1.907237
sim7	4.963781	3.113140	1.653146	2.939892	1.222644
sim8	2.409584	2.028089	2.041223	1.148609	0.302481
sim9	4.116707	2.294731	1.965831	1.492321	3.161024
sim10	2.024011	1.153666	2.643611	1.933670	0.574185
mean	2.757451	1.787472	1.827334	1.678122	1.969974

Tabel 26: Terminal P&L-værdier med $\sigma_h = \sigma_i$

16.2 Bilag B

Portefølje / Parameter	V_0	θ	η	ρ	κ
Portefølje 1	0.02894	0.04280	0.27255	-0.89571	0.86584
Portefølje 2	0.02070	0.04334	0.24167	-0.82733	0.67373
Portefølje 3	0.02093	0.04229	0.23546	-0.81181	0.65547
Portefølje 4	0.01794	0.03914	0.22432	-0.77197	0.64275
Portefølje 5	0.01486	0.04436	0.22433	-0.83820	0.56720
Portefølje 6	0.01627	0.06829	0.19213	-0.88476	0.27025
Portefølje 7	0.01369	0.05082	0.22777	-0.83428	0.51046
Portefølje 8	0.01239	0.08405	0.15324	-0.76521	0.15671
Portefølje 9	0.01720	0.03905	0.24591	-0.85040	0.77442
Portefølje 10	0.01308	0.03614	0.25640	-0.90247	0.90962
Portefølje 11	0.01531	0.04061	0.22885	-0.84440	0.64473
Portefølje 12	0.01333	0.03472	0.25274	-0.87220	0.91989
Portefølje 13	0.02004	0.04106	0.26613	-0.85095	0.86240
Portefølje 14	0.03063	0.05883	0.30335	-0.92442	0.78215
Portefølje 15	0.05964	0.07840	0.37743	-0.93540	0.90845
Portefølje 16	0.05186	0.07840	0.36521	-0.86628	0.85064
Portefølje 17	0.05090	0.07570	0.34034	-0.90492	0.76511
Portefølje 18	0.88643	0.01235	1.02864	-0.03533	42.84126
Portefølje 19	0.13430	0.21252	0.42343	-0.87480	0.42182
Portefølje 20	0.14323	0.15899	0.50533	-0.80955	0.82232

Tabel 27: Parametre til Heston

16.3 Bilag C

Portefølje / Parameter	V_0	θ	η	ρ	κ
Portefølje 1	0.03075	0.05012	0.42738	-0.68529	0.74153
Portefølje 2	0.02183	0.04765	0.38896	-0.65463	0.70083
Portefølje 3	0.02239	0.05053	0.38399	-0.61505	0.56814
Portefølje 4	0.01909	0.04645	0.34727	-0.58912	0.54203
Portefølje 5	0.01553	0.04846	0.33434	-0.67651	0.56790
Portefølje 6	0.01691	0.05455	0.30060	-0.72476	0.46474
Portefølje 7	0.01393	0.05291	0.28029	-0.73924	0.51311
Portefølje 8	0.01239	0.08404	0.15325	-0.76521	0.15674
Portefølje 9	0.01722	0.03906	0.25127	-0.84040	0.78139
Portefølje 10	0.01393	0.04198	0.29031	-0.75008	0.65304
Portefølje 11	0.01549	0.04123	0.27000	-0.76879	0.66880
Portefølje 12	0.01342	0.03443	0.32053	-0.78524	1.05165
Portefølje 13	0.02029	0.04114	0.33155	-0.76395	0.96322
Portefølje 14	0.03170	0.06139	0.42037	-0.77784	0.84465
Portefølje 15	0.06136	0.08290	0.48148	-0.80636	0.90355
Portefølje 16	0.05237	0.08035	0.40480	-0.80995	0.84200
Portefølje 17	0.05177	0.08039	0.40702	-0.79941	0.72281
Portefølje 18	0.24527	0.08941	1.63022	-0.71253	3.79866
Portefølje 19	0.16212	0.18332	0.83059	-0.78991	1.09952
Portefølje 20	0.14371	0.16488	0.54652	-0.75186	0.76782

Tabel 28: Parametre til Heston Kappa

16.4 Bilag D

Portefølje \ γ	$\sigma_t^{act} = \sqrt{r_{t-1}^2 \times 252}$	EGARCH
Portefølje 1	-1	-1
Portefølje 2	-1	-1
Portefølje 3	1	1
Portefølje 4	-1	-1
Portefølje 5	1	-1
Portefølje 6	-1	-1
Portefølje 7	-1	-1
Portefølje 8	-1	-1
Portefølje 9	-1	-1
Portefølje 10	1	-1
Portefølje 11	-1	-1
Portefølje 12	-1	-1
Portefølje 13	-1	-1
Portefølje 14	-1	-1
Portefølje 15	1	1
Portefølje 16	-1	-1
Portefølje 17	1	1
Portefølje 18	1	1
Portefølje 19	-1	-1
Portefølje 20	1	-1

Tabel 29: γ FOR DIVERSE KØBSSTRATEGIER