

En anvendelse af ekstremværditeori til finansiell risikostyring

An application of Extreme Value Theory for
financial risk management

Christoffer R. Hansen (110562)

Kandidatafhandling
cand.merc.(mat.)

79/104 sider

116.999 anslag



Kandidat i erhvervsøkonomi og matematik

Copenhagen Business School

Vejleder: Dorte Kronborg

Afleveret d. 11. november 2021

Abstract

The purpose of this dissertation is to investigate the estimation process of financial risk measures and whether different methods can help optimize the estimates and give a better reflection of the risks related to a financial asset. The focus is on Extreme Value Theory (EVT) and its possible benefits when estimating risk for financial time series, and the methods chosen are the Block Maxima- and Peaks Over Threshold methods. Different methods are proposed, including a combined GARCH-EVT model for modelling the variance structure of a process, for estimating Value-at-Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES). In order to correctly apply the methods and estimate Value-at-Risk and Expected Shortfall, relevant theory of Extreme Value Theory, financial risk measures and heteroscedastic models is described. The theory is then applied in practice to three historical daily return series, the stock of Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S and A.P. Moeller – Maersk A/S (B stock), in an attempt to evaluate the risk measures, Value-at-Risk and Expected Shortfall, for different methods. A combined model of GARCH-EVT using Peaks Over Threshold to identify extreme values proved to result in higher risk estimates compared to the simple GARCH- and EVT models as well as the GARCH-EVT model using the Block Maxima method, indicating that methods which ignore tail risk or volatility structure tend to underestimate the financial risk of an asset.

1	Indledning	3
1.1	Motivation	3
1.2	Problemformulering	5
1.3	Metode	6
1.4	Finansiell data	7
2	Finansielle risikomål	7
2.1	Profit- og tabsfordeling	8
2.2	Value-at-Risk	8
2.3	Expected Shortfall	10
2.4	Diskussion af Value-at-Risk og Expected Shortfall	12
2.5	Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall	13
3	Ekstremværditeori	14
3.1	Ekstremværdifordelinger	15
3.2	Den generaliseret ekstremværdifordeling	17
3.2.1	Gumbel, Fréchet og Weibull	18
3.2.2	Maximum Domain of Attraction	20
3.3	Identificering af maksima værdier	21
3.3.1	The Block Maxima method	21
3.3.1.1	Return level og return period	27
3.3.1.2	Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall	30
3.3.2	The Peaks Over Threshold method	30
3.3.2.1	Bestemmelse af threshold u	35
3.3.2.2	Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall	38
4	Volatilitet i finansiell data	39
4.1	Heteroskedastiske modeller: ARCH og GARCH	39
4.2	ARCH model	39
4.3	GARCH model	40
5	Empirisk analyse	41

5.1	Introduktion af data.....	41
5.2	Anvendelse af ekstremværditeori	47
5.2.1	Block Maxima metoden	47
5.2.2	Peaks Over Threshold metoden	55
5.3	Anvendelse af ekstremværditeori og heteroskedastiske modeller.....	61
5.3.1	Konstruktion af heteroskedastisk model.....	61
5.3.2	Block Maxima og Peaks Over Threshold.....	63
5.4	Estimering og sammenligning af Value-at-Risk og Expected Shortfall estimater.....	74
6	Konklusion	77
7	Perspektivering	78
8	Litteraturliste.....	79
8.1	Bøger	79
8.2	Artikler	79
8.3	Hjemmesider.....	80
9	Bilag.....	81
9.1	Dekomposition af tidsrækkerne	81
9.2	ACF plots for lukkekurserne	82
9.3	QQ plots for kvartalsvise- og månedlige maksima værdier	83
9.4	Plots af parameterestimer mod thresholdværdier	84
9.5	ACF plots af standardiserede- og kvadrerede standardiserede residualer fra GARCH modeller	86
9.6	Likelihood ratio tests for GARCH-EVT modellerne med forskellige blokstørrelse	88
9.7	Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modeller med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse.....	89
9.8	Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modellerne med lavere thresholds.....	91
9.9	Plots af parameterestimer mod thresholdværdier for GARCH-EVT modellerne.....	92
9.10	AIC værdier for modeller med forskellige thresholds.....	93
9.11	Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modeller med højere thresholds	94
9.12	R kode	95

1 Indledning

1.1 Motivation

På det finansielle marked er risiko uundgåelig, idet markedet påvirkes af virksomheder, politik og meget mere. Det er derfor vigtigt som virksomhed og forbruger at være opmærksom på den risiko, der er forbundet med f.eks. investeringer, udlåning af penge, forsikringer og lignende. Der er mange måder at definere risiko for det finansielle marked og med forskellige synspunkter er risiko og omfanget heraf forskelligt. For banker, forsikringsselskaber eller børsnoterede selskaber vil risikoen for økonomisk tab, tab af kunder, investeringer eller lignende alt andet lige være større end risikoen for privatforbrugere, der søger at øge deres egne porteføljer af finansielle aktiver. Men risikoen for økonomisk tab er ikke den eneste risiko, der eksisterer på de finansielle markeder. Risiko på finansielle markeder kan inddelers i flere kategorier, hvoraf de følgende fire typer¹ af risici er de mest kendte:

- i) *Markedsrisiko* er risikoen for, at værdien af en investering eller position i et finansielt aktiv ændrer sig som konsekvens af markedsbevægelser.
- ii) *Kreditrisiko* er risikoen for et økonomisk tab, fordi låntager f.eks. ikke har mulighed for at tilbagebetale renter og resterende ydelse. Det er altså risikoen for at tabe penge, fordi modparten ikke kan opfylde sin del af en eventuel kontrakt.
- iii) *Operationelrisiko* er risikoen for, at interne processer i en virksomhed ikke fungerer optimalt og dermed leder til økonomisk tab. *Operationelrisiko* kommer ikke direkte fra et finansielt marked, men fra en virksomheds egne processer, operationer og lignende.
- iv) *Likviditetsrisiko* er risikoen for, at et finansielt aktiv ikke kan afhandles på det ønskede tidspunkt, hvilket kan lede til kursfald for aktivet.

I denne afhandling vil vi undersøge, hvordan anvendelsen af ekstremværditeori kan optimere finansiell risikostyring, idet relevante metoder vil blive testet på 3 valgte aktiekurser. Det vil dermed være markedsrisiko, som denne afhandling vil have fokus på, og

¹ McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2015). Quantitative Risk Management: concepts, techniques and tools, kapitel 1, side 5.

som værktøj til at bestemme markedsrisikoen forbundet med de tre aktiekurser vil vi estimere de finansielle risikomål, Value-at-Risk og Expected Shortfall. Oftest forbinder vi risiko med økonomisk tab, idet det er nødvendigt for virksomheder at påtage sig en form for risiko for i sidste ende at indhente et større afkast. Det samme gælder for private investorer, hvor en større risiko forbundet med en investering oftest resulterer i et højere afkast – eller i hvert fald en øget chance for et større afkast. Uanset hvilket perspektiv af finansiell risiko vi har, så er det interessant at undersøge, hvad omfanget af finansiell risiko kan have og hvilke konsekvenser det kan medføre for en aktør på det finansielle marked. Af samme årsager er finansiell risikostyring blevet et vigtigt fokusområde for virksomheder, organisationer og forbrugere, da et indblik i finansiell risiko er med til at styre virksomheders daglige drift og beslutningstagen, og samtidig er et vigtigt led i virksomheders succes på et finansielt marked. En virksomhed uden eller med dårlig statistisk modellering af risiko vil have svært ved at klare sig på et finansielt marked.

Finansiell risikostyring er dog ikke kun vigtig for finansielle institutioners beslutningstagen. Det er også påkrævet af regler opstillet af Bank for International Settlements (BIS), at finansielle institutioner rapporterer finansielle risikomål. BIS blev etableret i 1930 og er ejet af i alt 63 centralbanker, hvis respektive lande tilsammen holder 95% af verdens BNP². Deres formål er at sikre, at banker opfylder krav vedrørende risici og solvens, da det kan have katastrofale følger, hvis flere af bankerne ikke holder en stor nok kapitalbeholdning, og som konsekvens må erklæres konkurs. BIS udsteder lovmæssige krav for de finansielle institutioner for at sikre finansiell stabilitet. Nogle af disse krav står nævnt i Basel III, der blandt andet indeholder en beskrivelse af de anvendte finansielle risikomål, Value-at-Risk og Expected Shortfall, som finansielle institutioner påkræves at beregne og rapportere. I det nuværende Basel Framework står beskrevet under "MAR30 Internal models approach"³, at Value-at-Risk skal beregnes på daglig basis og skal benyttes af banker til at beregne kapitalbeholdningen for markedsrisikoen. Yderligere under det kommende "MAR33 Internal

² Bank of International Settlements (BIS). *About BIS – overview*.

Accessed at: <https://www.bis.org/about/index.htm> on September 20, 2021.

³ Bank of International Settlements (BIS). *MAR30 Internal models approach*.

models approach: capital requirements calculation”⁴, der træder i kraft i januar 2023, står der beskrevet, hvordan Expected Shortfall skal benyttes på samme måde som VaR til beregning af kapitalbeholdningen hos banker – ligeledes til at dække markedsrisikoen⁵. En af årsagerne til, at Expected Shortfall vil blive indskrevet sammen med Value-at-Risk som en del af de udstedte reguleringer vedrørende markedsrisiko og kapitalbeholdning vil vi komme ind på i et senere afsnit, idet vi vil kigge på nærmere på de to risikomål. Som vi kan se ud fra Basel III, der er udstedt af Bank of International Settlements, så er det ikke kun for de finansielle institutioners egen interesse, at finansiell risikostyring og optimering heraf er på listen over vigtige ledelsesoperationer. Det er også for at sikre finansiell stabilitet på de finansielle markeder. Af samme årsag synes det bestemt at være relevant at forsøge og optimere estimeringen af VaR og ES via benyttelsen af ekstremværditeori.

1.2 Problemformulering

I denne opgave vil vi undersøge, om brugen af ekstremværditeori kan bidrage til mere præcis estimering af to finansielle risikomål, Value-at-Risk og Expected Shortfall.

Hovedspørgsmålet i denne afhandling er, om anvendelsen af ekstremværditeori kan optimere estimeringen af risikomålene Value-at-Risk og Expected Shortfall og dermed give en bedre vurdering af risikoen forbundet med investeringer. Opgaven vil tage udgangspunkt i teori omkring ekstremværdier, finansielle risikomål og heteroskedastiske modeller, der sammen vil danne grundlag for en empirisk undersøgelse udført på 3 aktiekurser. For at kunne svare på hovedspørgsmålet anvender vi teorien på tre valgte aktiekurser, der til sidst resulterer i nogle estimater af Value-at-Risk og Expected Shortfall fra forskellige modeller, som vi sammenligner og konkluderer på.

Den første del af afhandlingen vil kort omhandle nogle af de generelle antagelser og observationer, som vi normalt tilknytter finansiell data. Dernæst vil vi gennemgå teori omkring tabsfordelinger, Value-at-Risk, Expected Shortfall, ekstremværditeori og de

⁴ Bank of International Settlements (BIS). *MAR33 Internal models approach: capital requirements calculation*.

⁵ Bank of International Settlements (BIS). *Basel Framework: MAR – Calculation of RWA for market risk*. RWA = risk-weighted assets.

Accessed at: https://www.bis.org/basel_framework/standard/MAR.htm on September 20, 2021.

heteroskedastiske ARCH og GARCH modeller. Vi vil efterfølgende benytte teorien til at estimere ekstremværdifordelinger, heteroskedastiske modeller og Value-at-Risk og Expected Shortfall for hver af de 3 aktiekurser. Først vil vi anvende ekstremværditeori på aktiekurserne og estimere de finansielle risikomål. Dernæst vil vi undersøge, om estimererne af Value-at-Risk og Expected Shortfall kan forbedres ved at modellere volatiliteten i aktiekurserne via en heteroskedastisk model. Efterfølgende vil vi kombinere de heteroskedastiske modeller med ekstremværditeori, idet vi vil estimere ekstremværdifordelinger på fordelingen af maksima værdier, der identificeres fra de standardiserede residualer vi kan beregne fra de heteroskedastiske modeller. Til slut vil vi sammenligne estimeringen af VaR og ES for de forskellige modeller og undersøge, hvorvidt anvendelsen af ekstremværditeori forbedrer estimererne af de to finansielle risikomål. Som afslutning herpå vil vi konkludere på de estimerede resultater, som vi forventer vil vise, at modellering af finansielle risikomål kan optimeres ved brug af korrekte metoder og dermed vil vi også besvare hovedspørgsmålet. Afhandlingen vil forhåbentlig vise, at det er muligt at optimere estimeringen af finansielle risikomål og dermed også give bedre estimerer for risikoen forbundet med investeringer.

1.3 Metode

Til den empiriske undersøgelse vil vi benytte statistiskprogrammet RStudio, hvori vi vil anvende forskellige pakker til estimering af ekstremværdifordelinger, Value-at-Risk, Expected Shortfall og heteroskedastiske modeller. Til ekstremværditeori er pakkerne "extRemes", "fExtremes" og "POT" blevet anvendt. Pakkerne indeholder funktioner til identificering af maksima værdier, estimering af den generaliseret ekstremværdifordeling samt estimering af den generaliseret Paretofordeling. Til modelkonstruktion af de heteroskedastiske modeller har jeg anvendt pakken "rugarch" med funktionerne "ugarchspec" og "ugarchfit", der fitter en heteroskedastisk model på data. Modelkonstruktionen består af et *for-loop*, der fitter ARCH- og GARCH modeller ved forskellige ordener og returnerer AIC og BIC værdier. Til estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall for GARCH modellerne er pakken "mosaic" anvendt til at finde fraktilen af

de estimerede t-fordelinger. For de resterende modeller er parameterestimer og ligninger vi vil præsentere løbende blevet anvendt til estimering af VaR og ES.

1.4 Finansiell data

Referencer for dette afsnit er McNeil, A. J., R. Frey and P. Embrechts (2015) kapitel 3.

Indenfor statistisk antager man ofte i forskellige sammenhænge, at data følger en normalfordeling, men denne antagelse ses sjældent at være korrekt, når man arbejder med finansiell data. Normalfordelingen har svært ved at modellere ekstreme hændelser for finansiell data, idet finansiell data oftest ses at have tungere haler end normalfordelingen. Dette er en af flere specifikke egenskaber (også kaldet "stylized facts"), som oftest kan observeres for finansiell data, såsom aktiekurser eller anden prisdata. For finansiell data er observationerne af tabsfordelingen oftest afhængige, og det skyldes blandt andet, at finansiell data oftest indeholder volatilitet, der varierer over tid og også kan ses at klyngedanne. Korrelationen i finansiell data er ikke altid synlig i et autokorrelationsplot for de reelle værdier, men det vil oftest være tydeligt, når man kigger nærmere på de absolutte- eller kvadrerede værdier af finansiell data. Klyngedannelsen af volatilitet og ekstreme observationer medfører, at det er svært at forudsige, hvordan den fremtidige udvikling af en tidsrække vil se ud baseret på historisk data og betingede forventede afkast ses dermed også ofte at være tæt på nul. Inden for tidsrækkeanalyse benyttes derfor modeller, der kan modellere volatilitet og klyngedannelsen, og som så kan anvendes til forecasting, estimering af finansielle risikomål eller lignende.

2 Finansielle risikomål

Referencer for dette afsnit er McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts (2015) kapitel 19; Ruppert, David and Matteson, David S. (2015) kapitel 19; Röman, Jan. R. M. (2017) volume 1 kapitel 2.9 og Röman, Jan R. M. (2017) volume 2 kapitel 9.

I dette afsnit vil vi have fokus på teori bag to finansielle risikomål kaldet Value-at-Risk og Expected Shortfall. Vi vil gennemgå teorien bag de to mål, diskutere de to måls roller som finansielle risikomål og til slut se på, hvordan de estimeres for en normalfordeling og en t-fordeling.

2.1 Profit- og tabsfordeling

Referencer for dette afsnit er McNeil, A.J., R. Frey, and P. Embrechts (2015) kapitel 2;

I denne afhandling vil vi som nævnt kigge på 3 aktiekurser og estimere Value-at-Risk og Expected Shortfall, men før vi berører teorien bag de to risikomål, kigger vi på tabsfordelinger. Estimeringen af VaR og ES benytter det vi kalder for profit- og tabsfordelinger. I dette speciale vil tabsfordelingerne være givet ved log afkastet af tidsrækkerne, da vi med de finansielle risikomål forsøger at give en vurdering af risikoen for ekstreme tab. Risici forbindes oftest også med økonomisk tab, hvilket vi også vil have fokus på i afhandlingen her. En profit- og tabsfordeling (P&L) kan estimeres med forskellige metoder; en analytisk tilgang der anvender en varians-kovarians metode, en historisk metode der anvender empirisk historisk data til at estimere P&L-fordelingen og en metode kaldet Monte Carlo, der anvender simuleringer til estimering af P&L-fordelingen. Vi vil ikke kigge nærmere på den analytiske- eller Monte Carlo metoden, da vi i denne afhandling vil estimere P&L-fordelingen ud fra de tre aktiers lukkekurser. P&L-fordelingerne vil været givet ved log afkastet af de historiske afkast, altså

$$r_t = -(\ln(S_t) - \ln(S_{t-1}))$$

Hvor S_t er den daglige lukkekurs, og r_t vil blive kaldt log afkastet.

2.2 Value-at-Risk

Inden for finansiell risikostyring anvendes oftest to risikomålinger; Value-at-Risk og Expected Shortfall, hvoraf Value-at-Risk er den mest anvendte og indgår sågar også i BIS' Basel

framework omkring regulering af banker og deres marked risiko⁶, som vi kom ind på tidligere. Value-at-Risk (VaR) er et mål for, hvor store potentielle tab en virksomhed eller investor kan risikere at miste over en given tidsperiode. VaR kan ses som en estimering af et "worst case" scenarie, hvorfor det f.eks. også anvendes af banker til at beregne, hvor stor en reservekapital de skal holde for at kunne dække potentielle porteføljetab. Risikomålet anvendes som et værktøj til at måle og kontrollere risikoniveauet for virksomheder, investorer, banker og lignende, idet VaR kun kigger på risikoen for tab i modsætning til volatilitet, der også benyttes som risikomåling og udtrykker risikoen for både positive- og negative udsving.

Value-at-Risk målet består af 3 komponenter; en tidshorisont, et konfidensniveau og værdien eller procenten af et tab. Til estimering af risikomålet benyttes to af parametrene; tidshorisonten Δt og konfidensniveauet $1 - \alpha$. Oftest anvendes en tidshorisont på 1-10 dage, samt et højt konfidensniveau på 95% eller 99%. Den sidste komponent er resultatet - værdien eller procenten af et tab - som vil være estimeringen af, hvor stort et tab vi med et konfidensniveau på $1 - \alpha$ forventer i den givne tidsperiode Δt at miste. Sagt på en anden måde: givet en tidshorisont og et konfidensniveau, så er Value-at-Risk en grænse, hvor man med et konfidensniveau på $1 - \alpha$ forventer, at tabet over den givne tidshorisont Δt er mindre end denne grænse. Value-at-Risk af et aktiv med tabsfordeling L vil være givet ved den mindste værdi af l , der sikrer, at tabsfordelingen L overstiger l med sandsynlighed $1 - \alpha$, hvor $\alpha \in (0,1)$ er konfidensniveauet. Value-at-Risk er defineret som

Definition 1⁷: Value-at-Risk

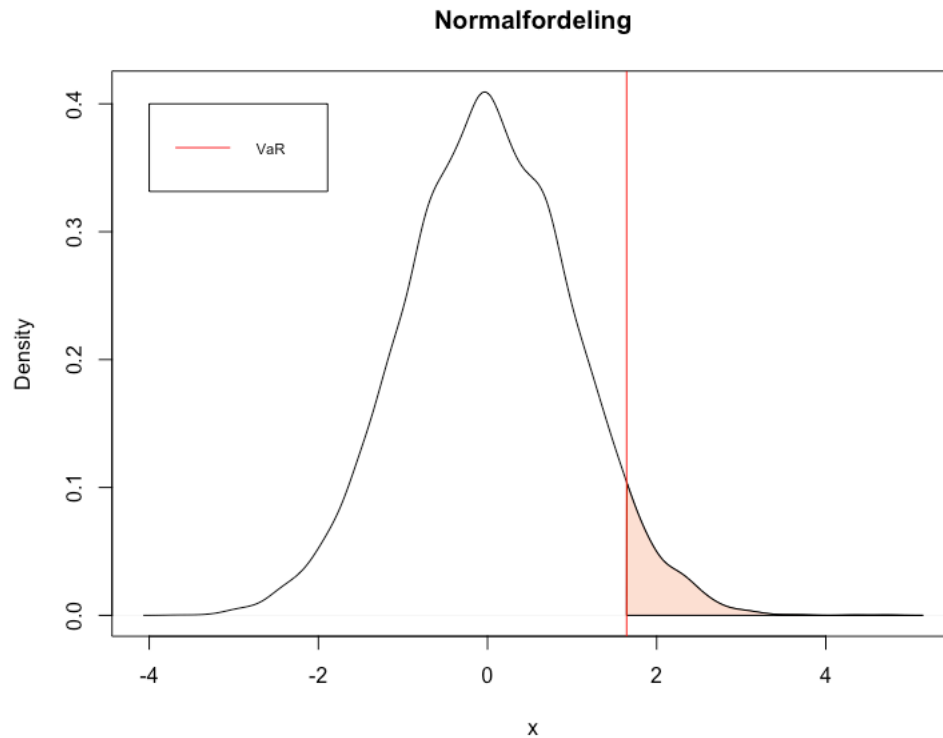
$$VaR_{\alpha}(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

VaR er altså en kvartil af tabsfordelingen F_L bestemt af konfidensniveau α . Risikomålet kan forstås som det største tab i løbet af tidshorisont Δt , som vi med sandsynlighed α kan

⁶ Basel Framework: Market Risk – Template MR4: Comparison of VaR estimates with gains/losses.
Link: https://www.bis.org/basel_framework/chapter/DIS/50.htm?inforce=20191215&published=20191215.
03/09-2021.

⁷ [McNeil et al. (2015), Definition 2.8]

forvente. Hvis vi f.eks. antager et konfidensniveau $\alpha = 0,05$, så kan vi maksimalt risikere over en given tidshorisont Δt at miste $VaR_{0,05}(L)$ med sandsynlighed 95%. I følgende figur kan vi se Value-at-Risk for en tabsfordeling F_L .



Figur 2-1: Value-at-Risk med konfidensniveau $\alpha = 0,05$ for en normalfordelt tabsfordeling med middelværdi $\mu = 0$ og varians $\sigma^2 = 1$. Det markerede areal viser tabet, såfremt VaR grænsen overskrides.

2.3 Expected Shortfall

Som vi vil komme ind på i næste afsnit, så har Value-at-Risk sine begrænsninger som risikomål, hvorfor Expected Shortfall (ES) er begyndt at blive set som et vigtigt risikomål inden for finansiell risikostyring. Vi så også tidligere, at Bank of International Settlements (BIS) fra år 2023⁸ vil implementere Expected Shortfall som risikomål i deres reguleringer og krav til bankers interne risikomodellering. Expected Shortfall måler risikoen i store dele af halen af en tabsfordeling, hvorimod Value-at-Risk kun tager højde for risikoen i halen op til konfidensniveauet α . ES bestemmes nemlig ved at tage et vægtet gennemsnit af de

⁸ BIS: MAR33 reference

tabsværdier i halen, der er større end VaR grænsen. Expected Shortfall kan derfor defineres på følgende måde:

Definition 2⁹: Expected Shortfall *”For et tab L med $E(|L|) < \infty$ og fordelingsfunktion F_L , så er ES ved konfidensniveau $\alpha \in (0,1)$ defineret som*

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_L) du$$

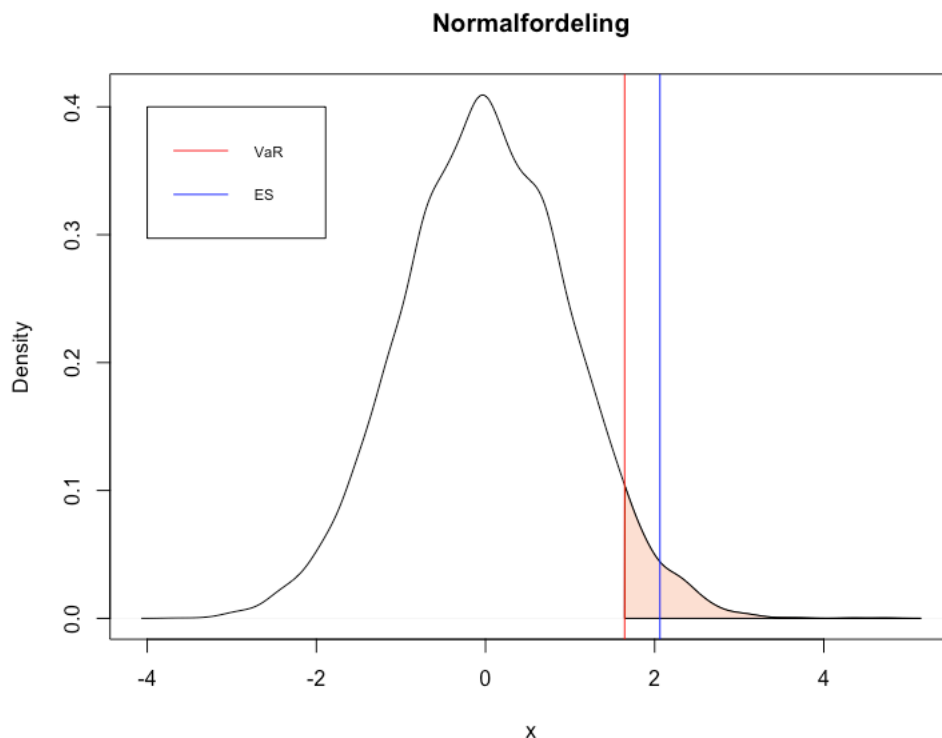
hvor $q_u(F_L) = F_L^\leftarrow(u)$ er kvartilfunktionen af F_L .”

Expected Shortfall er relateret til Value-at-Risk, idet vi med ES søger at kigge på omfanget af tab, der overstiger VaR grænsen. ES kan tolkes som det forventede tab, hvis ”worst case” scenariet defineret ved Value-at-Risk bliver overskredet. Som vi kan se i Definition 2 afhænger ES kun af tabsfordelingen L , men vi kan også opskrive ES i relation til VaR på følgende måde

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_\alpha(L) du \quad (1)$$

ES i relation til VaR kan tolkes som det forventede gennemsnitlige tab, givet at det forventede tab overstiger Value-at-Risk grænsen, idet ES beregnes ud fra gennemsnittet af VaR værdier hvor $u \geq \alpha$. Da ES fokuserer på tabsværdier, der overskrider VaR, er det givet, at $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$. I Figur 2-2 nedenunder kan vi se en tabsfordeling og relationen mellem VaR og ES målene.

⁹ [McNeil et al. (2015), Definition 2.12]



Figur 2-2: Value-at-Risk og Expected Shortfall med konfidensniveau $\alpha = 0,05$ under en normalfordelt tabsfordeling med middelværdi $\mu = 0$ og varians $\sigma^2 = 1$. Det markerede areal viser tabet, såfremt VaR grænsen overskrides. Bemærk, at $ES_{0,05} > VaR_{0,05}$.

2.4 Diskussion af Value-at-Risk og Expected Shortfall

Value-at-Risk og Expected Shortfall benyttes ofte som finansielle risikomål af investorer, banker, forsikringsselskaber og andre aktører på det finansielle marked med interesse for risikostyring, men de to risikomål har hver sine begrænsninger. Standard Value-at-Risk modeller antager, at finansiell data følger en normalfordeling og ser derved bort fra de tunge haler, som oftest ses for finansiell data, hvorfor de har svært ved at måle ekstreme prisændringer. Dette betyder, at Value-at-Risk estimeringen vil underestimere sandsynligheden for ekstreme prisændringer. Value-at-Risk fortæller heller intet om omfanget af de tab, der overstiger VaR grænsen. Generelt set er Value-at-Risk altså begrænset som risikomål, idet der er en risiko for, at den estimerede risiko er mindre end den reelle risiko grundet tabte ekstreme tab i fordelings haler. For at mindske den tabte information i situationer med tunge haler kan Expected Shortfall anvendes som risikomål, idet ES – som vi ved – har fokus på tab, der overstiger Value-at-Risk grænsen og estimeres

som et vægtet gennemsnit af disse tab. Da Expected Shortfall medtager ekstreme tab, der overstiger Value-at-Risk grænsen, og mindsker derved risikoen for, at ekstreme tab i halen går tabt i estimeringen, hvilket resulterer i et bedre estimat af den reelle risiko forbundet med et aktiv. Dette understøttes også, når vi kigger på egenskaben kaldet *subadditivitet*, der tillægges som et krav til et risikomål ifølge [Artzner et al. (1999)]. Subadditivitet bygger på, at en fusion af to aktiver ikke skaber øget risiko. Det vil f.eks. sige, at risikoen forbundet med to forskellige investeringer skal være mindre end risikoen forbundet med porteføljen, der indeholder de samme to investeringer. Det kan skrives således

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

for alle X_1 og X_2 . Denne egenskab er ikke opfyldt for Value-at-Risk, men det er den for Expected Shortfall, hvorfor ES kan ses som et mere attraktivt risikomål. Hvis subadditivitet overtrædes kan det påvirke risikoen og medføre beslutningstagen på et forkert grundlag, idet den reelle risiko for ekstreme tab kan være større end den estimerede risiko. Det er derfor vigtigt inden for finansiel risikostyring at være opmærksom på dette.

2.5 Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall

Vi har nu set på, hvad Value-at-Risk og Expected Shortfall fortæller, hvorfor vi i dette afsnit vil se på, hvordan disse to risikomål estimeres under en normalfordeling og en t-fordeling. Når tabsfordelingen for et givet aktiv er estimeret, er det muligt at finde kvartilen svarende til Value-at-Risk grænsen. Hvis vi antager, at tabsfordelingen F_L er normalfordelt med middelværdi μ og varians σ^2 , og at $\alpha \in (0,1)$, så er Value-at-Risk givet ved¹⁰

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

hvor Φ er fordelingsfunktionen for en normalfordeling og $\Phi^{-1}(\alpha)$ er α -kvartilen af Φ . I tidligere afsnit så vi, at VaR og ES er relateret via udtrykket i ligning (1), hvorfor ES kan beregnes som¹¹:

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}$$

¹⁰ [McNeil et al. (2015), ligning (2.18), p. 65]

¹¹ [McNeil et al. (2015), ligning (2.24), p. 70]

hvor ϕ igen er tæthedsfunktionen for en normalfordeling, og $\Phi^{-1}(\alpha)$ er α -kvartilen af dens fordelingsfunktion.

Oftest vil vi se, at tabsfordelingen ikke følger en normalfordeling, da tabsfordelingen ses at have tungere haler, og det kan da være fordelagtigt i stedet at antage, at den følger en standard t-fordeling. Vi antager dermed, at tabsfordelingen F_L nu er t-fordelt med v frihedsgrader, middelværdi μ og varians σ^2 , altså $F_L \sim t(v, \mu, \sigma^2)$. Så er Value-at-Risk givet ved¹²:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma t_v^{-1}(\alpha)$$

hvor t_v er fordelingsfunktionen for standard t-fordelingen. Expected Shortfall vil da være givet ved¹³:

$$ES_\alpha = \frac{g_v(t_v^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left(\frac{v + (t_v^{-1}(\alpha))^2}{v - 1} \right)$$

hvor g_v er tæthedsfunktionen og t_v er fordelingsfunktionen for en standard t-fordeling.

3 Ekstremværditeori

Referencer for dette afsnit er Coles, S. (2001) kapitel 3-5; McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts (2015) kapitel 5; Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (2012) kapitel 3.

Ekstremværditeori (EVT) er et område inden for statistik, der har fokus på ekstreme hændelser. Ekstremværditeori bygger på modellering af ekstreme observationer (også kendt som "outliers" i anden statistisk teori) i en sandsynlighedsfordeling og den anvendes til at finde sandsynligheden for at observere sjældne hændelser, der endnu ikke er observeret. Det kan f.eks. være sandsynligheden for næste store tsunami, oversvømmelse eller finanskrisen. EVT anvendes ofte til at undersøge sandsynligheden for en ekstrem hændelse, der ikke tidligere er blevet observeret og muligvis anses som værende uvirkelig ved estimeringstidspunktet. EVT har fokus på observationer, der befinder sig i halen af en sandsynlighedsfordeling, hvorfor man kan sige, at ekstremværditeori tager udgangspunkt i

¹² [McNeil et al. (2015), ligning (2.19), p. 66]

¹³ [McNeil et al. (2015), ligning (2.25), p. 71]

ekstremumsværdier (maksima- eller minima værdier). EVT anvendes inden for mange felter, men i denne afhandling vil vi benytte EVT i forbindelse med ekstreme tab på aktiemarkedet, hvorfor vi vil have fokus på maksima værdier, når vi kigger på profit- og tabsfordelingen. De følgende udledninger vil kunne findes ved brug af minima værdier også. I modsætning til mere almindelig statistisk teori, der har fokus på observationer omkring middelværdien i en fordeling, så har EVT som allerede nævnt fokus på observationer i halerne, hvorfor det er vigtigt at undersøge, hvordan fordelingen af ens data ser ud. Vi ved, at finansielle data ofte viser tungere haler og klyngedannelse i volatiliteten, og dermed afhængighed blandt haleværdierne, hvilket vi bliver nødt til at medtage, inden vi forsøger at estimere parametre og fitte en fordeling til ekstreme værdierne.

3.1 Ekstremværdifordelinger

Hvis vi antager, at M_n er maksima værdien af n stokastiske variable, så undersøger ekstremværditeori fordelingen af maksima, M_n , og ikke fordelingen af hele datasættet. Hvis vi antager, at $X_1, \dots, X_n$ er uafhængige stokastiske variable, der alle har samme fordeling, og hvor F er deres fordelingsfunktion, så kan vi skrive maksima M_n som

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

Hvor relationen til minima værdier kan opskrives således

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, \dots, -X_n\}$$

Ekstremværditeori har fokus på fordelingen af M_n , der kan findes for alle værdier af n , og det er denne fordeling af maksima værdier, der danner grundlag for EVT. Hvis vi tager udgangspunkt i definitionen af en fordelingsfunktion, der siger, at værdien af fordelingsfunktionen F i et punkt x er defineret som sandsynligheden for, at variabelen X er mindre end eller lig x , altså

$$F(x) = P(X \leq x)$$

så kan vi opskrive fordelingsfunktionen for vores maksima værdier ud fra definitionen som

$$\begin{aligned} P\{M_n \leq x\} &= P\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\} \cdot \dots \cdot P\{X_n \leq x\} \\ &= \{F(x)\}^n \end{aligned}$$

hvor fordelingsfunktionen $\{F(x)\}^n$ i praksis er ukendt. Det er denne fordelingsfunktion, der er grundstenen i ekstremværditeori. Da fordelingsfunktionen $\{F(x)\}^n$ er ukendt, kigger vi i stedet på dens adfærd, når $n \rightarrow \infty$. Hvis vi kigger på grænseværdien for $\{F(x)\}^n$, så ved vi, at når $n \rightarrow \infty$, så vil $\{F(x)\}^n \rightarrow 0$, så længe x er mindre end det højre endepunkt af F , x_F , der kan defineres ved

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$$

Endepunktet x_F er den største værdi x kan tage, når fordelingsfunktionen $F(x) < 1$. I tilfældet hvor $x \geq x_F$, da vil al sandsynlighedsmassen ligge i et punkt og fordelingsfunktionen vil da degenerere til en punktmasse. Vi har derfor for $x < x_F$, at

$$P(M_n \leq x) = \{F(x)\}^n \rightarrow 0, \quad \text{når } n \rightarrow \infty$$

Og for $x \geq x_F$, at

$$P(M_n \leq x) = \{F(x)\}^n = 1$$

For at undgå en degenererende fordelingsfunktion kan vi i stedet benytte en lineær normalisering af M_n^* givet ved

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n}$$

Normaliseringen af M_n^* undgår problemerne, når $n \rightarrow \infty$, hvorfor vi i stedet søger at finde en grænsfordeling for M_n^* ved passende følger af konstanter $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$. Normaliseringen gør som nævnt, at fordelingsfunktionen for M_n^* ikke degenererer, men i stedet konvergerer mod fordelingsfamilien kaldet generaliserede ekstremværdifordelinger. Sætning 1¹⁴ beskriver familien af generaliserede ekstremværdifordelinger, der er mulige for M_n^* .

Sætning 1 "Hvis der eksisterer en følge af konstanter $a_n > 0$ og b_n , så

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\} \rightarrow G(x), \quad \text{når } n \rightarrow \infty$$

hvor G er en ikke-degenereret fordelingsfunktion, så tilhører G en af de følgende familier:

- i) $G(x) = e^{-e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)}}, \quad -\infty < x < \infty$
- ii) $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^{-\alpha}}, & x > b \end{cases}$

¹⁴ [Coles, S. (2001), Theorem 3.1]

$$iii) \quad G(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^\alpha}, & x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

for parametrene $a > 0, b$ og, i tilfælde af familie ii) og iii), $\alpha > 0$."

Sætning 1 angiver, at hvis M_n kan stabiliseres via en normalisering med parametrene a_n og b_n , så må de normaliserede maksima værdier i variablen M_n^* have en af de tre generaliserede ekstremværdi (GEV) fordelinger, $G(x)$. De tre fordelinger i GEV familien er også kendt som Gumbel-, Fréchet- og Weibull i tilfældene i), ii) og iii). Hver af de tre fordelinger har en lokations- og skalaparameter, b og a , hvor Fréchet og Weibull yderligere har en formparameter α .

3.2 Den generaliseret ekstremværdifordeling

I forrige afsnit fandt vi ud af, at fordelingsfunktionen for M_n^* kan stabiliseres for at forhindre en degenererende fordelingsfunktion for maksima værdierne, når $n \rightarrow \infty$. Resultatet af dette er, at fordelingsfunktionen for M_n^* nu altid, hvis den konvergerer, vil konvergere mod én af de tre fordelinger i GEV familien; Gumbel-, Fréchet- eller Weibull. Disse tre fordelinger har ikke samme haleadfærd, hvorfor det er vigtigt at undersøge, hvilken af fordelingerne ens maksima værdier bedst kan fittes til. En måde at undersøge dette på er visuelt ved at kigge på et plot af maksima værdierne, sammenligne med de tre fordelinger og derefter estimere parametrene, men det er ikke altid lige nemt eller fejlfrit, og denne metode vil altid indeholde en risiko for, at en forkert fordeling vælges. Et alternativ til denne metode kan findes, idet fordelingsfunktionerne i Sætning 1 kan omskrives til en fælles fordelingsfunktion for de tre familier. Den fælles fordelingsfunktion kaldes for den generaliseret ekstremværdifordeling (GEV) og er givet ved nedenstående definition

Definition 3: Den generaliseret ekstremværdifordeling (GEV)

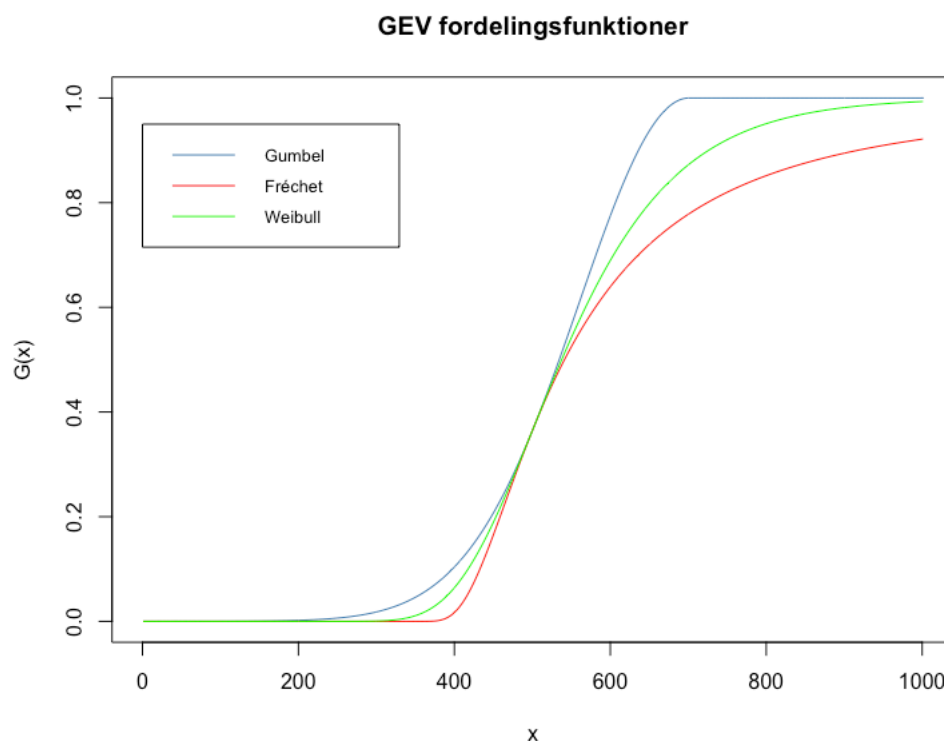
$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} e^{-\left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \xi \neq 0 \\ e^{-e\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}, & \xi = 0 \end{cases}$$

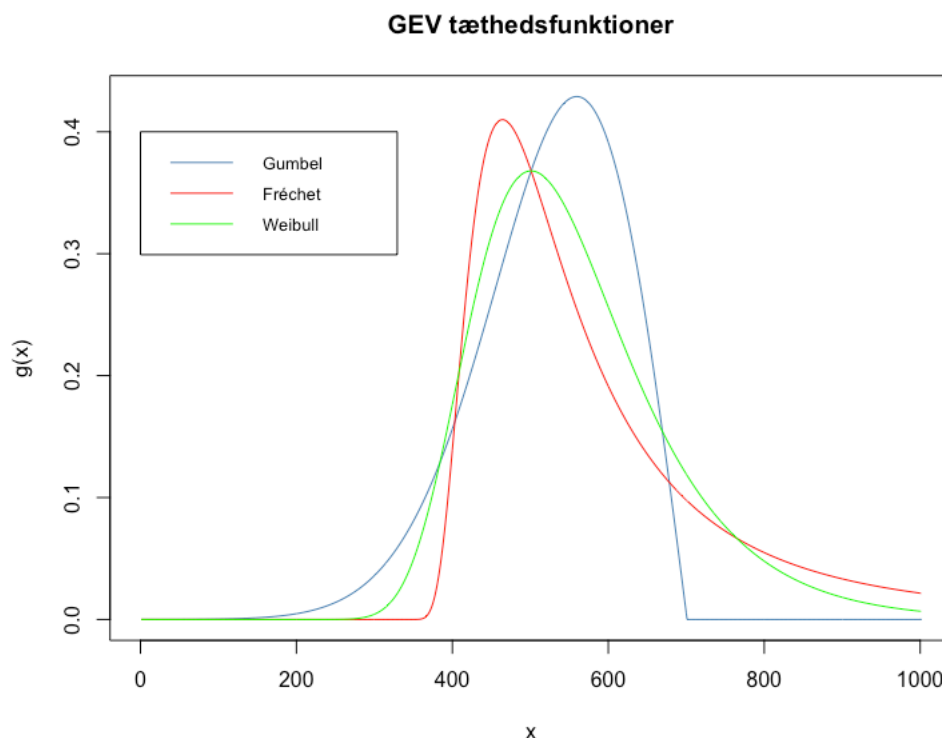
hvor der skal gælde, at $1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0$, og at $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ og $-\infty < \xi < \infty$.

GEV fordelingsfunktionen i Definition 3 har tre parametre, der er med til at beskrive adfærden af fordelingen. De tre parametre er lokationsparameter μ , skalaparameter σ og formparameter ξ . Det er formparameteren, der informerer, hvilken type af fordeling ens maksima værdier kan fittes bedst til, idet formparameteren og de resterende to parametre estimeres ud fra ens data.

3.2.1 Gumbel, Fréchet og Weibull

De tre typer af ekstremværdifordelinger kan som nævnt identificeres ud fra formparameteren ξ . Værdien af formparameteren ξ definerer typen af familie: hvis $\xi > 0$, så er fordelingen en Fréchet fordeling, hvis $\xi = 0$ er fordelingen en Gumbel fordeling og hvis $\xi < 0$ er fordelingen en Weibull fordeling. Figur 3-1 viser de tre tilfælde, hvor $\xi = -0.5$, $\xi = 0$ og $\xi = 0.5$ (henholdsvis Weibull, Gumbel og Fréchet fordelingerne).





Figur 3-1: Fordelings- og tæthedsfunktionerne for de tre familier: Gumbel ($\xi = 0$), Fréchet ($\xi = 0.5$) og Weibull ($\xi = -0.5$) med skalaparameter $\sigma = 1$.

På Figur 3-1 ser vi, hvordan de tre fordelinger adskiller sig fra hinanden. Vi kan se, at halernes opførsel ikke er ens for de tre fordelinger. Den højre del af halerne aftager forskelligt. Vi kan se, at Weibull fordelingen ender i et punkt, hvorfor Weibull familien altså er korthalet, og som den eneste af de tre fordelinger, er Weibull også endelig med et finit endepunkt i højre del af halen, givet ved $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$. For finansielle tidsrækker er det ikke rimeligt at antage en øvre grænse, og Weibull antages derfor ikke for at være et godt fit, når vi senere hen i afhandlingen vil estimere ekstremværdifordelinger på vores aktiekursers maksima værdier. For Gumbel og Fréchet har halerne ingen højre endepunkter, men vi kan se, at halen for Fréchet aftager langsommere end for Gumbel. Halen for Gumbel aftager eksponentielt, hvorimod det kan vises med en Taylor-udvikling, at halen for Fréchet aftager langsomt som en power law mod 1. Hvis vi kigger på Fréchet fordelingsfunktionen givet ved

$$\Phi_\alpha = e^{-x^{-\alpha}}$$

og dernæst anvender en Taylor-udvikling herpå, så får vi, at

$$1 - e^{-x^{-\alpha}} \sim x^{-\alpha}, \quad \text{når } x \rightarrow \infty^{15}$$

At Fréchet fordelingen langsomt aftager som en power law medfører, at halerne er tungere end for Weibull og Gumbel, og derfor ses Fréchet oftest at give det bedste fit for finansielle data, som vi også ved oftest har tunge haler.

3.2.2 Maximum Domain of Attraction

I de forrige afsnit har vi gennemgået den generaliserede ekstremværdifordeling, der indeholder de tre familier af ekstremværdifordelinger kaldet Fréchet, Gumbel og Weibull, men hvordan kan vi sikre os, at fordelingen af de normaliserede maksima værdier konvergerer i fordeling til en af de tre familier? Det kan vi ved at kigge på konstanterne a_n og b_n fra normaliseringen af maksima værdierne M_n^* . Konstanterne indgår i Sætning 2¹⁶ om Maximum Domain of Attraction, der siger følgende:

Sætning 2: *”En stokastisk variable X (eller dens fordelingsfunktion F) tilhører Maximum Domain of Attraction af ekstremværdifordelingen G , hvis der eksisterer en følge af konstanter $a_n > 0$, for alle n , og $b_n \in \mathbb{R}$, der opfylder, at*

$$a_n^{-1}(M_n - b_n) \xrightarrow{d} G$$

Vi skriver så $F \in MDA(G)$.”

Udtrykket i Sætning 2 kan omskrives, da fordelingsfunktionerne for ekstremværdifordelingerne er kontinuerte i $\mathbb{R}$. Normeringskonstanterne skal da opfylde, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

Sætning 2 siger altså, at hvis vi kan finde normeringskonstanter $a_n > 0$ og $b_n \in \mathbb{R}$, der opfylder grænseværdiudtrykket $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$, så tilhører fordelingsfunktionen F Maximum Domain of Attraction af ekstremværdifordelingen G . Dette resultat anvendes i

¹⁵ [Embrechts et al. (2012), 3.3.1 The Maximum Domain of Attraction of the Fréchet Distribution]

¹⁶ [McNeil et al. (2015), Definition 5.2]

Sætning 3, der er mest kendt som Fisher-Tippett's sætning¹⁷.

Sætning 3: *"Hvis $F \in MDA(H)$ for en ikke-degenereret fordelingsfunktion H , så må H være en fordeling af typen $G(x)$, nemlig den generaliseret ekstremværdifordeling."*

Sætning 2 og 3 betyder tilsammen, at hvis vi kan finde normeringskonstanter $a_n > 0$ for alle n og $b_n \in \mathbb{R}$, så fordelingen af de normaliserede maksima værdier konvergerer mod en ekstremværdifordeling G , så må fordelingsfunktionen F af maksima værdierne tilhøre den generaliserende ekstremværdifordeling G og kunne fittes med én af de tre familier; Fréchet, Gumbel og Weibull.

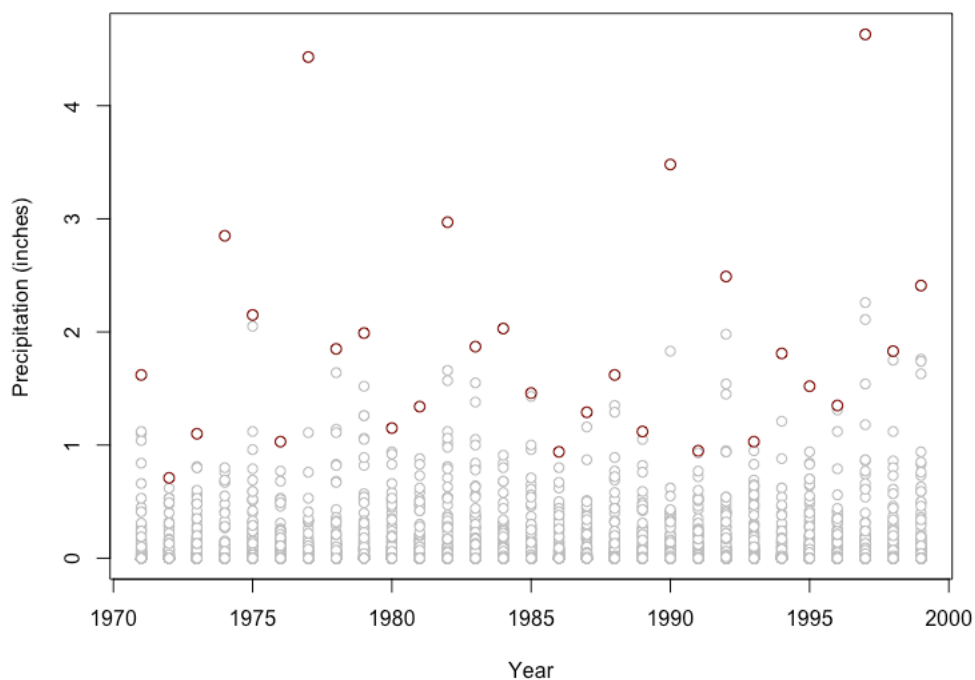
3.3 Identificering af maksima værdier

I ekstremværditeori anvendes oftest to metoder til at finde ekstreme værdier i halerne af en fordeling. Metoderne kaldes "Block Maxima" og "Peaks Over Threshold". Begge metoder har fordele og ulemper, hvilket vi vil komme ind på løbende, idet vi i de kommende afsnit vil gennemgå de to metoder.

3.3.1 The Block Maxima method

Block Maxima metoden bygger på idéen om at opdele data i mindre tidsintervaller heraf navnet "Block". Den samlede periode ens data spænder over, kan opdeles i m blokke af ens størrelse n , hvortil de ekstreme værdier da kan aflæses som største observation i hver blok, M_{nm} . Dette kan ses illustreret ved Figur 3-2.

¹⁷ [McNeil et al. (2015), Definition 5.3]



Figur 3-2: Block Maxima metoden med en årlig blok-størrelse. Datasættet hedder "Fort" og er hentet fra "extRemes" biblioteket i R. Data omhandler nedbørsmængder målt på en regnmåler i Fort Collins, Colorado. De røde punkter er de årlige maksima nedbørsmængder siden 1970.

I denne afhandling vil vi som nævnt kigge på aktiekurser, der indeholder daglige observationer (fra trading days) i en given periode, og denne type data kan f.eks. opdeles til årlige-, semesterlige- eller kvartalsvise blokke, hvor maksima værdier for hver blok kan analyseres som ekstreme værdier. Afhængigt af den samlede tidsperiode og antallet af ønskede ekstremværdier kan størrelsen af blokkene vælges. Når blok-størrelsen er bestemt og data er inddelt, genereres n -blok-maksima værdier for hver blok, M_n . For maksima værdien i blok j skriver vi M_{nj} , hvortil de samlede maksima værdier kan skrives som $M_{n1}, \dots, M_{nm}$. Fordelingen af n -blok maksima værdierne M_n vil så følge den generaliserede ekstremværdifordeling G i Definition 3 for et stort nok n under betingelserne for Maximum Domain of Attraction i Sætning 2. Såfremt fordelingsfunktionen F er i $MDA(G)$, kan den generaliserede ekstremværdifordeling estimeres ved brug af forskellige estimeringsmetoder. De mest anvendte er maksimum likelihood estimation (MLE) og sandsynlighedsvægtede momenter, men i denne afhandling vil vi alene have fokus på MLE. Ved anvendelse af maksimum likelihood estimering antager vi, at blok-størrelsen n er stor nok til, at vi kan antage, at fordelingen af blok-maksima værdierne er uafhængige, uagtet

om observationerne i vores datasæt er afhængige eller ej. Det kan vi, fordi vi antager, at en stor blok-størrelse vil give en stor nok afstand mellem maksima værdierne til vi kan sige, at de er uafhængige. I tilfældet hvor antagelsen om uafhængighed mellem maksima værdierne ikke er sand og data er afhængige, så vil maksima værdierne konvergere langsommere mod en GEV fordeling, da den effektive stikprøvestørrelse vil være $n\theta$ fremfor n . MLE kan opskrives ved brug af tæthedsfunktionen for GEV fordelingen, idet log-likelihood funktionen kan findes herfra. Tæthedsfunktionen for GEV fordelingen finder vi ved at differentiere fordelingsfunktionen fra Definition 3, altså

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \xi \neq 0 \\ e^{-e\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}, & \xi = 0 \end{cases}$$

For at differentiere ovenstående udtryk skal vi benytte kædereolen. Hvis vi begynder med at differentiere udtrykket for $\xi \neq 0$ med hensyn til x , så får vi følgende funktioner

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Første afledte af $f(x)$ finder vi nemt, men for at finde første afledte af $g(x)$ skal vi igen benytte kædereolen. Det giver os følgende

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{-\frac{1}{\xi}}, & i(x) &= 1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ h'(x) &= \frac{1}{\xi} x^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}, & i'(x) &= \frac{\xi}{\sigma} \end{aligned}$$

hvoraf

$$g'(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}$$

Hvis vi indsætter den første afledte $g'(x)$ i første anvendelse af kædereolen, så finder vi tæthedsfunktionen for $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} g_{\xi,\mu,\sigma}(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ g_{\xi,\mu,\sigma}(x) &= e^{-\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \cdot \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}, \quad \text{når } \xi \neq 0 \end{aligned}$$

På samme måde kan vi bestemme tæthedsfunktionen i tilfældet hvor $\xi = 0$. Igen ved brug af kædereolen får vi, at

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

Ligesom i tilfældet hvor $\xi \neq 0$ kan vi nemt finde den første afledte $f'(x)$, men vi skal igen benytte kædereolen for at bestemme $g'(x)$. Dette giver os

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-x}, & i(x) &= \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ h'(x) &= -e^{-x}, & i'(x) &= \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

Hvoraf

$$g'(x) = -e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

Fuldfører vi første kæderegel giver det os altså tæthedsfunktionen

$$g_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(-e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \right), \quad \text{når } \xi = 0$$

Hvis vi samler de to beviser for tæthedsfunktionen, så fås et samlet udtryk givet ved

$$g_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \cdot \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \left(-e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \right), & \xi = 0 \end{cases}$$

Herefter kan log-likelihood funktionen hurtigt defineres ved at indsætte den fundne tæthedsfunktion i nedenstående udtryk:

$$l(\xi, \mu, \sigma; M_{n1}, \dots, M_{nm}) = \sum_{i=1}^m \ln g_{\xi, \mu, \sigma}(M_{ni})$$

Det medfører følgende log-likelihood funktion¹⁸

$$\begin{aligned} l(\xi, \mu, \sigma; M_{n1}, \dots, M_{nm}) = \\ \begin{cases} -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \ln \left(1 + \xi \left(\frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)\right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi \left(\frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ -m \ln \sigma - \sum_{i=1}^m \left(\frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m e^{-\left(\frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)}, & \xi = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Log-likelihood funktionen skal maksimeres under parameter betingelserne $\sigma > 0$ og $1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma} > 0$ for alle i . Dette kan ikke løses eksplicit, men man kan anvende algoritmer til at

¹⁸ [Coles, S. (2001), ligning (3.7) og (3.9) p. 55]

finde maksimum¹⁹. Maximum-likelihood estimering af GEV fordelingen er dog ikke altid optimal, idet anvendelse af maximum likelihood metoder til bestemmelse af asymptotiske egenskaber af estimerne af parametrene i GEV fordelingen kompliceres af at endepunkterne i GEV modellen afhænger af parameterværdierne. Regularitetsbetingelserne for MLE er krav til de afledte af log-likelihood funktionen, og de sikrer blandt andet, at MLE estimerne er asymptotisk normalfordelte. For GEV fordelingen er dette kun gældende i enkelte tilfælde:

- For $\xi > -0,5$, så har maximum-likelihood estimerne de asymptotiske egenskaber.
- For $-1 < \xi < -0,5$, maximum-likelihood estimerne kan findes, men de har ikke de asymptotiske egenskaber.
- For $\xi < -1$, så er maximum-likelihood estimerne ikke til at estimere.

Tilfældet hvor $\xi \leq -0,5$ observeres for fordelinger med en meget kort øvre hale, hvorfor tilfældet sjældent observeres inden for anvendelse af ekstremværditeori i praksis. Det skyldes, at man sjældent ønsker at kigge på halefordelingen for en fordeling med meget korte haler, og det er derfor ikke interessant at medtage, når vi snakker om MLE estimering af EVT²⁰. Det problematiske ved tilfældene hvor MLE estimerne ikke kan estimeres eller ikke har de asymptotiske egenskaber er, at vi dermed ikke kan estimere varians-kovarians matricen. Varians-kovarians matricen er normalt givet ved den inverse af den observerede informationsmatrix $I_o(\theta)$ ²¹ over MLE estimerne, altså

$$I_o(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} l(\theta)$$

hvor $l(\theta)$ er log-likelihood funktionen og $\theta = \hat{\theta}$, hvor $\hat{\theta}$ er MLE estimatet. Så kan vi som sagt estimere varians-kovarians matricen

$$V = I_o(\theta)^{-1} \quad (3)$$

Udover at være vigtig i sig selv kan varians-kovarians matricen også anvendes til at estimere konfidensintervaller, som vi vil komme ind på senere under "Return level og return period". En løsning til problematikken er i stedet at anvende profil-likelihood i stedet. Profil-likelihood for en af de givne parametre μ , σ og ξ i GEV fordelingen kan bestemmes ved at

¹⁹ [Coles, S. (2001), p. 55-56]

²⁰ [Coles, S. (2001), p. 55]

²¹ [Coles, S. (2001), p. 32]

holde én af parametrene fast og dernæst maksimere log-likelihood funktionen for de resterende to. Dette gentages så for forskellige værdier af parameteren, hvoraf profil-likelihoodfunktionen af denne parameter så findes. Hvis vi f.eks. ønsker først at estimere ξ , så kan profil-likelihoodfunktionen for ξ findes ved at maksimere likelihoodfunktionen over μ og σ , mens ξ holdes fast, $\xi = \xi_0$. Dette gentages for en række værdier af ξ_0 . Profil-likelihoodfunktionen, $l_p(\xi)$, er derved en funktion af ξ . På baggrund af profil-likelihoodfunktionen kan vi bestemme konfidensinterval for ξ via²²

$$\left\{ \xi : l_p(\xi) > l_p(\hat{\xi}) - \frac{1}{2} \chi_{\alpha,1}^2 \right\}$$

hvor $\hat{\xi}$ er MLE estimatet, der maksimerer profil-likelihoodfunktionen, $l_p(\xi)$ og $\chi_{\alpha,1}^2$ er α -fraktilen af en χ^2 fordelingen med 1 frihedsgrad.

Vi har nu kigget på, hvordan BM metoden identificerer maksima værdier og estimerer parametrene i fordelingen af maksima via maximum-likelihood estimering, men BM metoden kan være problematisk at implementere i praksis, da valget af blok-størrelse kan påvirke resultaterne. For store blokke vil vi få færre ekstreme værdier, hvilket kan øge risikoen for at relevante observationer ikke medtages i modellen. Store blokke kan resultere i, at tilpasningen af maksima-værdierne til GEV fordelingen er mere præcis og samtidig at parameter estimeringen har et lavt bias. Til gengæld kan variansen for maksima-værdierne være stor, da antallet af ekstreme værdier vil være lav og kan variere meget. I tilfældet med et mindre valg af blok-størrelse risikerer estimeringen af parametrene at være biased, da der vil være flere ekstreme værdier og disse vil ligge tættere i forhold til hver enkelt tidsperiode (og dermed også risikere at være afhængige). Ved små blokke er der også en risiko for, at observationer vi normalt ikke ville kendetegne som ekstreme værdier vil blive medregnet. Det ses f.eks. i perioder med lavkonjunktur, hvor små blokke vil give flere værdier inden for lavkonjunkturen end store blokke ville have gjort. Valget af blok-størrelse er derfor en vigtig balance ved implementering af denne metode til generering af de ekstreme værdier, da for store eller for små blokke kan påvirke slutresultatet.

²² [Ruppert et al. (2015), p. 119]

3.3.1.1 Return level og return period

Efter maksima værdier er identificeret, f.eks. vha. BM metoden, og en generaliseret ekstremværdifordeling er fittet til ens maksima værdier, kan GEV fordelingen anvendes til at estimere to værdier kaldet *return level* og *return period*. Disse to mål giver et estimat på, hvornår ekstreme hændelser af en given størrelse eller tidshorisont kan forventes observeret. *Return level* benyttes til at estimere, hvornår en ekstrem hændelse af en bestemt værdi i gennemsnit forventes at blive overgået per $\frac{1}{T}$ år (hvis år er det anvendte tidsinterval). *Return period* benyttes i stedet til at estimere den gennemsnitlige tid vi forventer der går, før en given ekstrem hændelse forventes at blive observeret igen. Definitionerne på disse to mål er givet ved Definition 4²³ og Definition 5²⁴.

Definition 4: Return level “Lad H være fordelingsfunktionen for den empiriske fordeling af n -blok maksima værdierne. Det k 'te n -blok return level er $r_{n,k} = q_{1-\frac{1}{k}}(H)$, dvs. $(1 - \frac{1}{k})$ -kvartilen af H .”

Definition 5: Return period “Lad H være fordelingsfunktionen for den empiriske fordeling af n -blok maksima værdierne. Return perioden af hændelsen $\{M_n > u\}$ er da givet ved $k_{n,u} = \frac{1}{H(u)}$.”

Return level og *return period* kan tolkes som en form for risikomål, men i modsætning til Value-at-Risk og Expected Shortfall der estimeres ud fra hele fordelingen af ens data, så estimeres *return level* og *return period* kun ud fra fordelingen af de identificerede maksima værdier. Når en GEV fordelingen er fittet til maksima værdierne, kan vi estimere *return level* ved at invertere udtrykket i Definition 3 for GEV fordelingen, altså²⁵:

²³ [McNeil et al. (2015), Definition 5.13]

²⁴ [McNeil et al. (2015), Definition 5.14]

²⁵ [McNeil et al. (2015), Ligning (5.7) på s. 145]

$$\hat{r}_{n,k} = G_{\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}^{-1} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \begin{cases} \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(-\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right), & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right), & \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

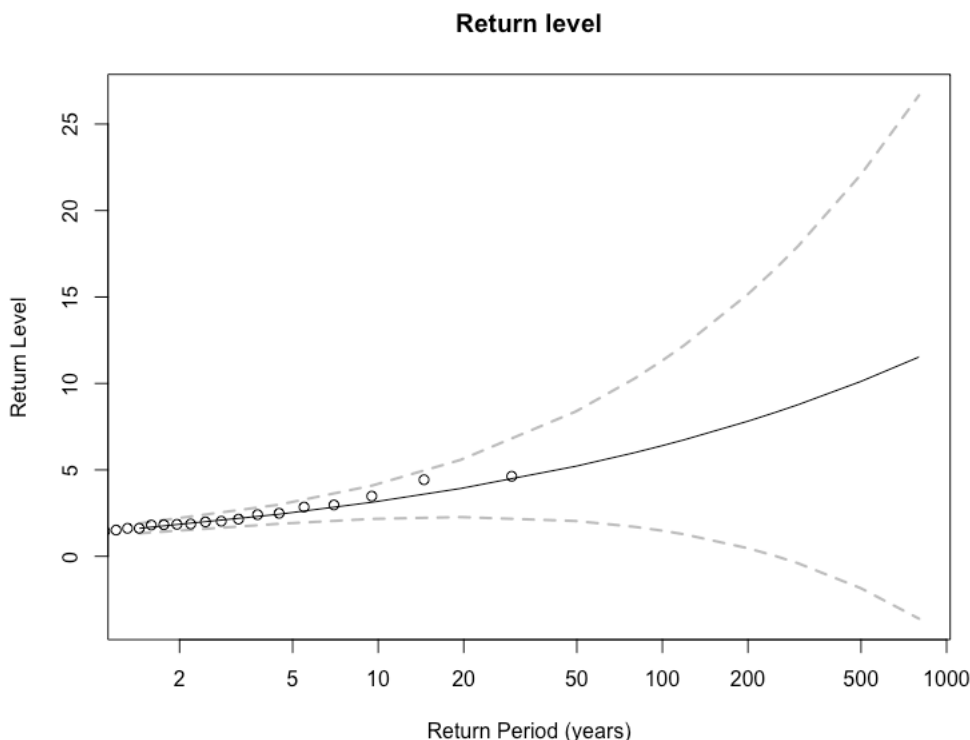
Her vil $\hat{r}_{n,k}$ være *return level* og *return period* da være $\frac{1}{k}$, da $\hat{r}_{n,k}$ forventes i gennemsnit at blive overskredet en gang hver $\frac{1}{k}$ år. *Return period* kan estimeres på følgende måde:

$$\hat{k}_{n,u} = \frac{1}{G_{\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}(u)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-\left(1 + \xi \frac{u - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}}, & \hat{\xi} \neq 0 \\ \frac{1}{e^{-e\left(-\frac{u - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}}, & \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Return level kan altså fortolkes som et niveau $\hat{r}_{n,k}$ vi i gennemsnit forventer vil blive overskredet i én ud af hver k 'te år (eller andet bestemt tidsinterval). *Return period* kan i stedet fortolkes som sandsynligheden for, hvornår en ekstrem hændelse i gennemsnit vil observeres igen. Efter estimering af *return levels* kan vi opstille et plot, der viser *return levels* for flere *return periods*. Et sådan plot kaldes et *return level plot*, og det kan anvendes til at vurdere, hvordan fittet af ens GEV model er på de identificerede maksima værdier. *Return level plots* indeholder estimerede *return levels* plottet mod $y_k = -\log \left(1 - \frac{1}{k} \right)$. Hvis vi i stedet plotter $\hat{r}_{n,k}$ mod $\log y_k$, så vil *return level* plottet være lineært for $\xi = 0$, mens det for $\xi < 0$ vil være konkavt og det for $\xi > 0$ vil være konvekst uden en endelig grænse. Et *return level plot* består altså af punkterne

$$\{(\log y_k, \hat{r}_{n,k}), 0 < p < 1\}$$

Hvis de estimerede *return levels* følger kurven bestemt af GEV modellen, kan vi antage, at GEV modellen er et godt fit på vores ekstreme værdier. Nedenfor ses et eksempel på et *return level plot*, hvor vi kan se estimererne af *return levels* og den sorte kurve følger hinanden fint.



Figur 3-3: Return level plot efter fit af GEV fordelingen på datasættet "Fort", der er hentet fra "extRemes" biblioteket i R. Formparameter estimeret til at være $\xi = 0,259$. Kurven ses også at være konveks.

Da *return levels* og *return periods* estimeres ud fra maximum likelihood estimerne, er der en vis usikkerhed forbundet med disse, og det kan derfor være interessant at estimere konfidensinterval. Konfidensinterval kan tilføjes til *return level plots* (kan ses i Figur 3-3 som stiplede linjer) og de kan beregnes ud fra estimerne af maximum likelihood estimeringen ved hjælp af Delta metoden. Variansen kan vises at være

$$\text{Var}(\hat{r}_{n,k}) \approx \nabla r_{n,k} V \nabla r_{n,k}$$

hvor V er kovarians-matricen, der kan findes ud fra MLE estimerne $\hat{\xi}$, $\hat{\mu}$ og $\hat{\sigma}$, som vi så tidligere i ligning (3). I udtrykket for variansen er $\Delta r_{n,k}$ givet ved

$$\nabla r_{n,k}^T = \left[\frac{\partial r_{n,k}}{\partial \mu}, \frac{\partial r_{n,k}}{\partial \sigma}, \frac{\partial r_{n,k}}{\partial \xi} \right]$$

Konfidensintervaller baseret på asymptotisk normalitet af maximum likelihood estimerne kan dernæst dannes ud fra variansen. For *return levels* og *return periods* er det oftest længere *return periods*, der er interessante at kigge på, men dette øger også usikkerheden for manglende præcision. Konfidensinterval for *return level* og *return period* beregnes på baggrund af maximum likelihood estimerne, hvor normalfordelingsapproximation kan være usikker. Taget den øgede usikkerhed i betragtning kan profil-likelihood metoder

anvendes i stedet til at bestemme konfidensintervaller. Konfidensintervaller kan bestemmes via profil-likelihood estimering ved at omskrive estimeringen af *return level* givet i ligning (4), så $r_{n,k}$ indgår i udtrykket. Vi får da, at

$$\mu = \begin{cases} r_{n,k} + \frac{\sigma}{\xi} \left(\left(-\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\xi} - 1 \right), & \xi \neq 0 \\ r_{n,k} - \sigma \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Hvis vi indsætter ovenstående udtryk for μ i log-likelihood funktionen i ligning (2) og estimerer via profil-likelihood metoden, finder vi konfidensinterval for *return level*, der så kan indsættes i *return level* plottet.

3.3.1.2 Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall

I dette afsnit vil vi gennemgå, hvordan estimeringen af Value-at-Risk og Expected Shortfall ser ud, når en ekstremværdifordeling er estimeret. Hvis vi antager, at halerne i en tabsfordeling F_L er fittet med den generaliseret ekstremværdifordeling (GEV), kan Value-at-Risk estimeres på følgende måde²⁶:

$$\widehat{VaR}_\alpha = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(1 - (-n \ln \alpha)^{-\hat{\xi}} \right), & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln(-n \ln \alpha), & \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Efter estimering af Value-at-Risk kan vi finde en approksimation af Expected Shortfall ud fra ligning (1), idet vi kan estimere den gennemsnitlige VaR ved forskellige konfidensniveauer i $\in (\alpha, 1)$ ved numerisk integration²⁷. Generelt ser vi dog, at Block Maxima metoden kommer til kort ved brug på finansiell data sammenlignet med Peaks Over Threshold, idet Block Maxima metoden ikke fanger klyngedannelse i volatiliteten og dermed ikke medtager alle ekstreme hændelser.

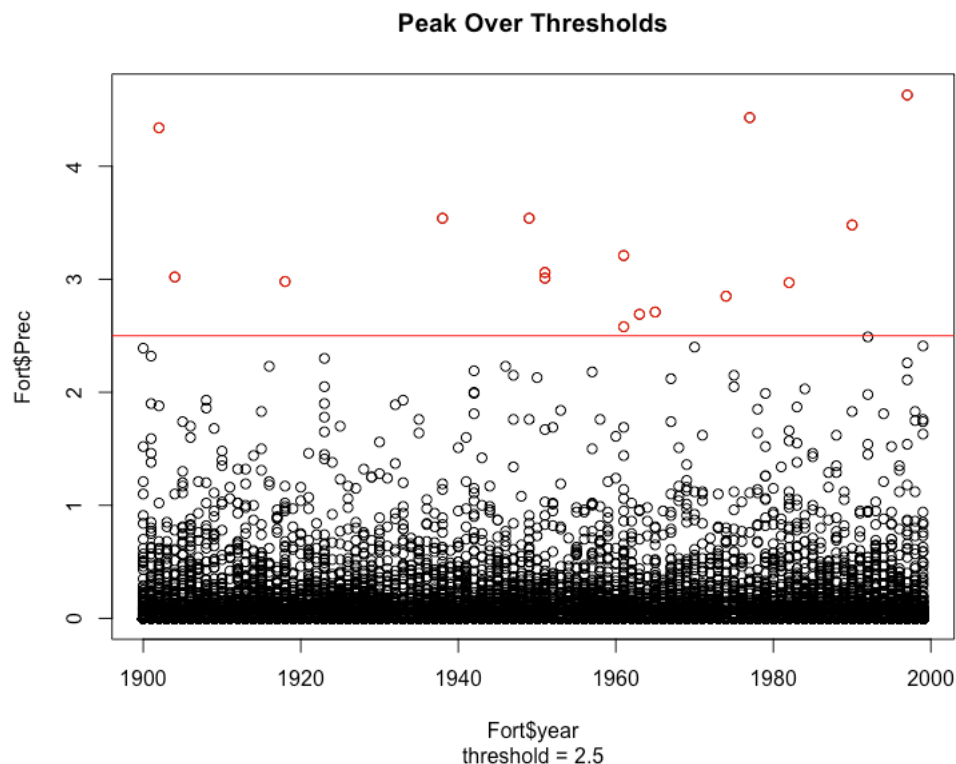
3.3.2 The Peaks Over Threshold method

I modsætning til Block Maxima metoden, der bygger på opdeling af data i blokke, benytter Peaks Over Threshold metoden en anden tilgang til identificering af maksima værdier. Som

²⁶ [Andersson, K. (2020), ligning (8), p. 11]

²⁷ [Andersson, K. (2020), p. 11]

tidligere nævnt kan Block Maxima metoden resultere i tab af maksima værdier, da der, for eksempel i tilfælde af klyngedannelse, kan være flere observationer, der kendetegnes som ekstreme hændelser, men som vil blive undladt i en model, fordi kun højeste maksima værdi for hver blok bruges. Dette problem kan Peaks Over Threshold metoden løse bedre, da den identificerer værdier, der overgår en grænse og samler disse som ekstreme værdier i en model. Til gengæld kan Peaks over Threshold metoden komme til kort, hvis data indeholder en sæson komponent, hvorfor det kan være smart at sæsonjustere ens data, før POT metoden anvendes til modellering af ekstreme værdier. Idéen med Peaks Over Threshold metoden er at identificere ekstreme værdier ud fra et threshold u , og dernæst fokusere på fordelingen af disse maksima værdier. Identificeringen af ekstreme værdier illustreres i Figur 3-4 nedenfor.



Figur 3-4: Peaks Over Threshold metode til identificering af maksima værdier, der er værdier over threshold u (den røde linje). Data er "Fort" fra biblioteket "extRemes" i R omhandlende nedbørsmængder for en regnmåler.

De røde punkter er maksima værdier, der overskrider $u = 2.5$.

BM metoden anvendte den generaliserede ekstremværdifordeling som en approksimation af maksima værdiernes fordeling, men POT metoden benytter i stedet en generaliseret Pareto fordeling til at beskrive de ekstreme værdier. Inden vi definerer GPD fordelingen vil

vi kigge på fordelingen af de ekstreme værdier. Som nævnt bliver ekstreme værdier i Peaks Over Threshold metoden genereret ud fra et valgt threshold u , hvor værdier der overgår u betragtes som maksima værdier, og dernæst fittes en fordeling af haleværdierne, der kan approksimeres af GPD fordelingen. Hvis vi antager, at $X_1, \dots, X_n$ er i.i.d. stokastiske variable, kan vi finde en excess fordelingsfunktion F_u for værdier af x , der ligger over threshold u . Denne excess fordeling vil bestå af de identificerede maksima værdier, og den er defineret i Definition 6 med middelværdi defineret i Definition 7.

Definition 6²⁸: Excess distribution over threshold u *"Lad X være en stokastisk variable med fordelingsfunktion F . Excess fordelingen over threshold u vil da have fordelingsfunktion*

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

For $0 \leq x < x_F - u$, hvor $x_F \leq \infty$ er det højre endepunkt af F ."

Definition 7²⁹: Mean excess function *"Mean excess function af en stokastisk variable med endelig middelværdi er givet ved*

$$e(u) = E(X - u \mid X > u)$$

Excess fordelingsfunktionen $F_u(x)$ beskriver sandsynligheden for, at en maksima værdi er mindre end eller lig x givet, at threshold u er overgået. Igen ønsker vi at finde den rigtige fordelingsfunktion F_u , men da denne er ukendt, vil vi i stedet at estimere en grænsefordeling, som maksima værdierne kan fittes til. Fordelingen der anvendes i POT metoden er som nævnt en generaliseret Pareto fordeling, der er givet ved Definition 8³⁰:

Definition 8: Generaliseret Pareto fordeling (GPD) *"Fordelingsfunktionen for den generaliseret Pareto fordeling er givet ved*

²⁸ [McNeil et al. (2015), Definition 5.17]

²⁹ [McNeil et al. (2015), Definition 5.18]

³⁰ [McNeil et al. (2015), Definition 5.16]

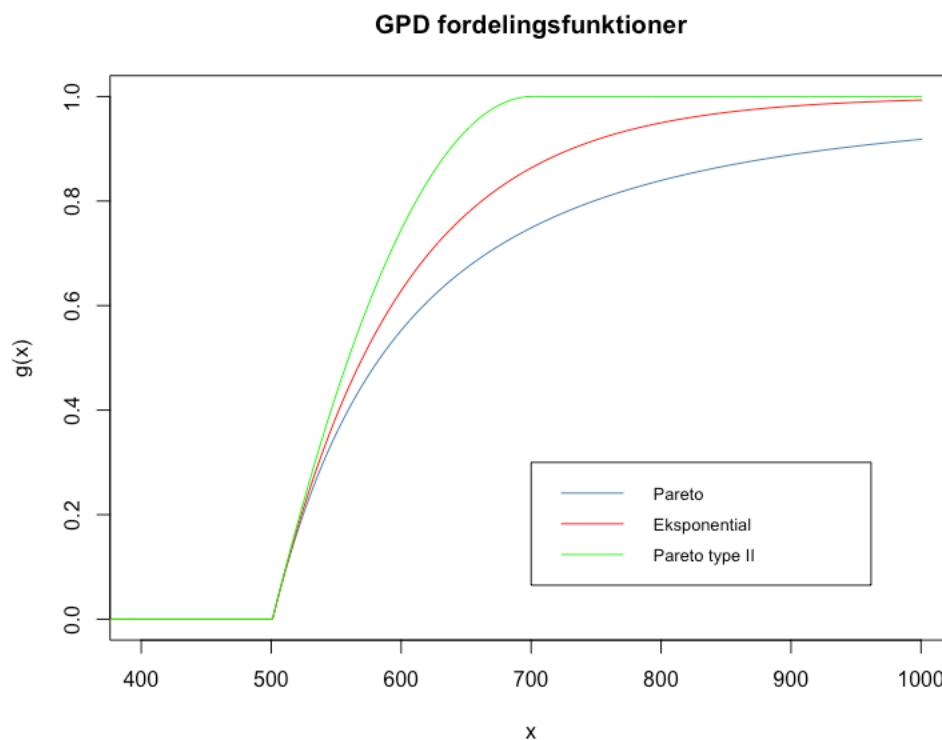
$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, & \xi = 0 \end{cases}$$

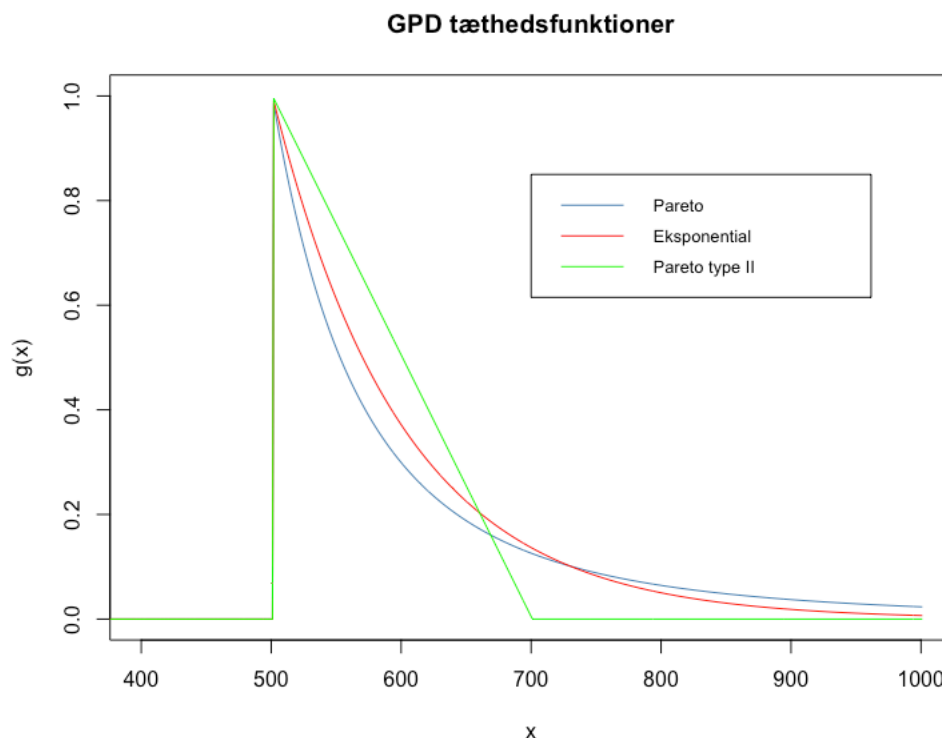
hvor $\beta > 0$ og $x \geq 0$, når $\xi \geq 0$ og $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$ når $\xi < 0$.

I Definition 8 er ξ og β henholdsvis kaldet form- og skalaparameter. Ligesom for GEV fordelingen i Definition 3, så indeholder GPD fordelingen i Definition 8 også særtilfælde afhængig af form- og skalaparametrene ξ og β . Når $\xi > 0$, så er fordelingsfunktionen $G_{\xi,\beta}(x)$ en Pareto fordeling med $\alpha = \frac{1}{\xi}$ og $\kappa = \frac{\beta}{\xi}$. Når $\xi = 0$ er GPD fordelingen en eksponentialfordeling og i sidste tilfælde, når $\xi < 0$, er fordelingen en Pareto type II fordeling. Middelværdien for GPD fordelingen er givet som

$$E(X) = \frac{\beta}{1 - \xi}, \quad \text{når } \xi < 1 \quad (7)$$

Vi kan se i nedenstående Figur 3-5, hvordan den generaliseret Pareto fordeling ser ud i de tre tilfælde $\xi > 0$, $\xi = 0$ og $\xi < 0$.





Figur 3-5: Fordelings- og tæthedsfunktioner for de tre tilfælde af GPD fordelingen; Pareto fordeling ($\xi = 0,5$), eksponentialfordeling ($\xi = 0$) og Pareto type II fordeling ($\xi = -0,5$) med skalaparameter $\beta = 1$.

På Figur 3-5 ser vi, hvordan fordelingsfunktionerne for GPD fordelingerne har ligheder med GEV fordelingerne, som vi så i Figur 3-1. Vi kan se, at når $\xi = 0,5$ og fordelingen er en Pareto fordeling, så aftager den langsommere end eksponentialfordelingen hvor $\xi = 0$. Vi kan også se, at Pareto type II med $\xi = -0,5$ aftager hurtigst af de tre fordelinger og samtidig har et endeligt højre endepunkt, som vi også så det for Weibull fordelingen. Vi kan også se, at for højere værdier af ξ bliver halerne for den generaliseret Pareto fordeling federe.

Vi har nu set, hvordan de tre typer af den generaliseret Pareto fordeling ser ud for forskellige værdier af formparameteren ξ , og lige som for GEV fordelingen estimeres denne og skalaparameter β også via maximum likelihood estimation. GPD fordelings parametre kan også estimeres via sandsynlighedsvægtede momenter, men vi vil igen have fokus på MLE. Som vi så det tidligere for GEV fordelingen, så kan log-likelihood funktionen igen bestemmes ved først at finde tæthedsfunktionen. Tæthedsfunktionen for GPD fordelingen findes ved at differentiere fordelingsfunktionen med hensyn til x og igen benytter vi kædereolen. Vi får da følgende tæthedsfunktion

$$g_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & \xi = 0 \end{cases}$$

Hvis vi igen sammenligner MLE for GEV- og GPD fordelingen, så ønsker vi for GPD fordelingen at kigge på omfanget af tab (også kaldet *excess loss*), når det valgte threshold u er overskrevet, og ikke på observationernes værdi som under GEV fordelingen. Hvis vi antager, at $X_1, \dots, X_n$ er observationer fra tabsfordelingen, så er N_u antallet af observationer, der overgår det valgte threshold u og disse observationer kan vi kalde $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{N_u}$. Vi er da interesseret i at finde forskellen på disse observationer og threshold u kaldet *excess loss*, altså $Y_j = \tilde{X}_j - u$. Vi kan da finde log-likelihood funktionen indeholdende disse værdier, og den er givet ved

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \beta; Y_1, \dots, Y_{N_u}) &= \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\beta}(Y_j) \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_u} \ln -\frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{Y_j}{\beta}\right)^{-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)}, & \xi \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{N_u} \ln \frac{1}{\beta} e^{-\frac{Y_j}{\beta}}, & \xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Log-likelihood funktionen skal maksimeres under parameter betingelserne $\beta > 0$ og $1 + \xi \frac{Y_j}{\beta} > 0$ for alle j , og det resulterer i estimeringen af en GPD fordeling med parameterestimerterne $\hat{\xi}$ og $\hat{\beta}$ for excess fordelingen F_u . I praksis kan maksimering af log-likelihood funktionen ikke løses eksplicit, men i stedet anvendes numeriske algoritmer til at finde estimerterne.

3.3.2.1 Bestemmelse af threshold u

I Peaks Over Threshold metoden er det valgte threshold u altafgørende for metodens effektivitet. Hvis threshold vælges for lavt, så vil flere ekstreme værdier end nødvendigt medtages, og der er en risiko for, at værdier vi normalt ikke ville anse som ekstreme nu identificeres sådan, hvilket kan give højere bias for parameterestimerterne. Omvendt vil et for højt threshold kunne betyde færre ekstreme værdier, der kan give en øget varians for

parameterestimerne. Det er samme problematik, som vi så vedrørende valg af blok-størrelse for Block Maxima metoden. Selvom valget af hvor grænsen for ekstreme værdier skal gå er vigtig, så findes der ikke en konkret måde at bestemme det bedst mulige valg på. Fremgangsmåden er at forsøge med forskellige thresholds, som vi baseret på vores data antager er fornuftige muligheder, og dernæst undersøger vi modellens fit. For at få en idé om hvad fornuftige thresholds værdier u kan være, kan vi benytte et plot kaldet *mean excess plot*. *Mean excess plots* antager, at vores ekstreme værdier over threshold værdien u følger en GPD fordeling, idet den anvender middelværdien af en GPD fordeling, som vi i ligning (7) så for $\xi < 1$ til at bestemme mean excess funktionen. I tilfældet hvor $\xi \geq 1$ er middelværdien uendelig. Hvis vi antager, at ekstreme værdier over et givent threshold u_0 er GPD fordelt, så kan mean excess funktionen defineret i Definition 7 skrives som³¹

$$E(X - u_0 | X > u_0) = \frac{\beta_{u_0}}{1 - \xi}, \quad \text{for } \xi < 1$$

hvor β_{u_0} er skalaparameteren for ekstreme værdier over threshold u_0 . Hvis ovenstående holder for threshold u_0 , må vi også kunne udtrykke mean excess funktionen for alle threshold værdier hvor $u > u_0$, så længe skalaparameteren β_u ændres i forbindelse med threshold værdien u . Mean excess funktionen vil da kunne skrives med en skalaparameter, der er en lineær funktion af u . Den er givet ved³²

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta_u}{1 - \xi} = \frac{\beta_{u_0} + \xi u}{1 - \xi}$$

hvor $\beta_u = \beta_{u_0} + \xi u$. Mean excess funktionen vil derfor være en lineær funktion af u , som vi kan bestemme efter identificering af de ekstreme værdier. Den empiriske mean excess funktion er givet ved³³

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) \cdot I_{\{X_i > u\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}$$

hvor I er enhedsmatricen. Ovenstående udtryk kan omskrives til følgende

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^n (X_i - u) \cdot I_{\{X_i > u\}}$$

³¹ [Coles, S. (2001), ligning (4.8), p. 78]

³² [Coles, S. (2001), ligning (4.9), p. 79]

³³ [McNeil et al. (2015), ligning (5.16), p. 151. Bemærk: threshold er defineret som u og ikke v]

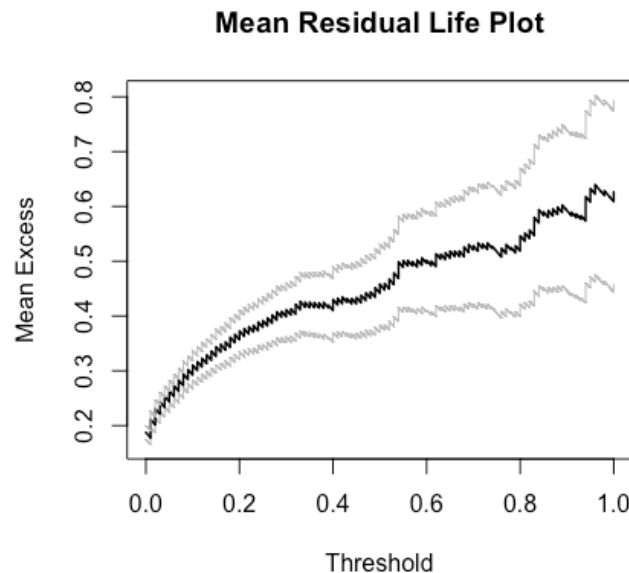
Idet

$$\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}} = \frac{1}{N_u}$$

hvor N_u som nævnt er antallet af ekstreme værdier over threshold u . Værdien af ME funktionen kan vi plotte ved forskellige thresholds af u , hvoraf vi får et mean excess plot. Mean excess plots indeholder altså punkterne

$$\{(u, e_n(u)) : u < x_{max}\}$$

hvor x_{max} er største værdi af observationerne $X_1, \dots, X_n$ fra ens data. Til mean excess plots kan der tilføjes konfidensinterval. Nedenstående ses et eksempel på, hvordan et mean excess plot kan se ud.



Figur 3-6: Mean Excess plot viser værdien af mean excess funktionen for forskellige thresholds u .
Data er "Fort" fra biblioteket "extRemes" i R omhandlende nedbørsmængder for en regnmåler

Aflæsning af et mean excess plot kan være vanskeligt, idet vi forsøger at identificere et sted i plottet, hvor det ser nogenlunde "lineært" ud. Det ses ofte som et knæk i kurven, hvortil threshold værdien kan aflæses på førsteaksen. Som vi kan se på Figur 3-6 mister vi data i takt med threshold værdien stiger, hvorfor der logisk nok er en øvre grænse for, hvor højt vi ønsker at sætte u , idet vi ønsker at undgå høj varians grundet få ekstreme værdier. Et mean excess plot siger også noget omkring formparameteren ξ . Hvis plottet viser en lineært opadgående trend, så er ξ positiv, hvorimod hvis plottet viser en lineært nedadgående trend, så er ξ negativ. I tilfældet hvor trenden bevæger sig horisontalt, så er ξ nul og excess

fordelingen er da en eksponentialfordeling. Ud fra Figur 3-6 kan vi f.eks. antage, at $\xi > 0$ idet kurven godt kan ses som en opadgående trend. Vi ser også, at threshold $u = 0.4$ kan være et fornuftigt valg, da vi her har et lille ”knæk” i kurven.

For BM metoden gennemgik vi, hvordan *return levels* og *return periods* kunne bestemmes. Disse mål kan vi også bestemme, når vi benytter Peaks Over Threshold metoden. Return levels kan vi estimere givet MLE estimerterne, hvortil vi kan konstruere et return level plot, som vi så i Figur 3-3. Return levels under Peaks Over Threshold metoden kan estimeres via³⁴

$$\hat{r}_{n,k} = \begin{cases} u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(m \frac{N_u}{n} \right)^{\hat{\xi}} - 1 \right), & \hat{\xi} \neq 0 \\ u - \hat{\sigma} \ln \left(m \frac{N_u}{n} \right), & \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

hvor N_u er antallet af maksima værdier over threshold u og n antallet af observationer. Fremgangsmåden for estimering af konfidensintervaller for return levels er ens under POT metoden, idet vi også her benytter Delta metoden til at estimere varians på baggrund af MLE estimerterne og dernæst kan estimere konfidensinterval direkte, som vi så det for BM metoden i ligning (5) under BM metoden. Profil-likelihood benyttes også for konfidensinterval under Peaks Over Threshold metoden.

3.3.2.2 Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall

Vi vil kort se på, hvordan estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall er givet, hvis fordelingen af maksima værdierne estimeres med den generaliseret Paretofordeling. Hvis vi antager, at halerne i en tabsfordeling F_L er fittet med den generaliseret Paretofordeling (defineres senere), så kan Value-at-Risk estimeres på følgende måde³⁵ for $\alpha \geq F(u)$

$$\widehat{VaR}_\alpha = q_\alpha(F) = \begin{cases} u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-\alpha}{F(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right), & \xi \neq 0 \\ u + \hat{\beta} \ln \left(\frac{1-\alpha}{F(u)} \right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

for $\hat{\xi} < 1$. Dette giver os også estimeringen af Expected Shortfall, der er givet ved³⁶

³⁴ [Coles, S. (2001), ligning (4.13) og (4.14), p. 81]

³⁵ [McNeil et al. (2015), ligning (5.18), p. 154] og [Andersson, K. (2020), ligning (15), p. 14]

³⁶ [McNeil et al. (2015), ligning (5.19), p. 154] og [Andersson, K. (2020), ligning (17), p. 14]

$$\widehat{ES}_\alpha = \begin{cases} \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ \widehat{VaR}_\alpha + \hat{\beta}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (9)$$

I praksis benytter vi parameterestimerne $\hat{\xi}$ og $\hat{\beta}$, der er givet efter estimering af GPD fordelingen, og indsætter, men vi benytter også en estimering af $F(u)$, der er givet ved N_u/n , hvor N_u er antallet af ekstreme værdier over threshold u og n er antallet af observationer i datasættet. Da parameterestimerne findes via maksimum likelihood estimering, kan vi nemt finde konfidensinterval for VaR og ES. Dette gøres ved at bruge profil-likelihood, som vi senere hen vil komme mere ind på.

4 Volatilitet i finansiel data

4.1 Heteroskedastiske modeller: ARCH og GARCH

Referencer for dette kapitel er Ruppert, David and Matteson, David S. (2015) kapitel 14; Nelson, Daniel B. (1991); S. Tsay, R. (2002) kapitel 3.

Inden for matematisk finansiering kan det være gavnligt at estimere volatiliteten for et aktiv. Volatilitet kan inden for økonomi være f.eks. prisvariationen over tid eller variationen i kurser og renter. Modeller der modellerer et aktivs volatilitet, dvs. den betingede varians for aktivets afkast, kaldes for betingede heteroskedastiske modeller. Som regel vil volatiliteten for finansiel data udvise klyngedannelse med perioder med hhv. høj og lav volatilitet, hvorfor $ARMA(p, q)$ modeller med antagelsen om konstant betinget varians vil komme til kort. Til at estimere volatilitet for en tidsrække kan benyttes $ARCH(q)$ og $GARCH(p, q)$ modeller.

4.2 ARCH model

For ARCH modeller antager man som regel, at støjen ε_t i en $ARCH(q)$ model enten følger en normalfordeling eller en standardiseret Student's t -fordeling. Vi antager, at støjen ε_t er en stærk hvid støj proces med enhedsvariens, hvoraf a_t så vil være en $ARCH(1)$ proces, hvis

$$a_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$= \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha_1 a_{t-1}^2}$$

Det antages, at $\omega > 0$ og $\alpha_1 \geq 0$, så $\omega + \alpha_1 a_{t-1}^2 > 0$ for alle t , og at $\alpha_1 < 1$, så a_t er stationær med endelig varians. Som vi kan se, så afhænger a_t af en kvadratisk funktion af sin egen værdi til tid $t - 1$, så store chok i form af a_{t-1}^2 vil føre til en større værdi af a_t .

For $ARMA(p, q)$ er den ubetingede middelværdi og varians konstant, og det samme gælder for $ARCH(q)$ processer, hvorimod den betingede varians dog ikke vil være konstant. Vi kan fortolke den betingede varians på følgende måde: da $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 a_{t-1}^2$ ser vi, at store værdier af a_{t-1} vil medføre en større værdi af σ_t , som så igen kan medføre en større værdi af a_t . Sagt på en anden måde, så vil volatiliteten påvirke værdierne i fremtiden, da en større værdi af a_{t-1} vil påvirke σ_t^2 , som igen vil påvirke a_{t+1} osv.

4.3 GARCH model

En anden proces er GARCH, der er en generalisering af ARCH processen. Hvis vi antager, at r_t er log afkastet for et aktiv, og at $a_t = r_t - \mu$ er det middelværdi-korrigerede log afkast, så vil a_t være en $GARCH(p, q)$ proces, hvis

$$\begin{aligned} E(a_t | a_{t-1}, \dots) &= 0 \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \end{aligned}$$

Hvor

$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2}$$

For GARCH modeller ser vi en ens adfærd for volatiliteten, som vi gør for $ARCH$ modeller. Igen vil en høj værdi af a_{t-1}^2 eller σ_{t-1}^2 resultere i en høj værdi af σ_t^2 , som igen vil påvirke a_t^2 osv. Forskellen mellem ARCH- og GARCH modellerne er, at tidligere værdier σ_{t-i} indgår i den nutidige værdi af σ_t , så klyngedannelse i volatiliteten er mere vedholdende end vi ser det i en $ARCH(q)$ proces. Volatiliteten i ARCH er mere i små perioder, hvorimod volatiliteten i $GARCH(p, q)$ processen er mere vedholden, idet tidligere værdier af σ_t indgår i den nutidige. På trods af dette er en af $GARCH(p, q)$ modellens svagheder, at den antager, at positive og negative chok vil have en ens effekt på volatiliteten, hvilket normalt ikke

opleveres. Vi ser oftest, at større negative afkast vil øge volatiliteten mere end større positive afkast. Denne effekt fanges ikke af GARCH, da GARCH modeller modellerer σ_t som funktion af tidligere værdier af σ_t^2 , uagtet om de tidligere værdier er positive eller negative. En anden svaghed er GARCH modellens parameterbetingelser, der kan forhindre modellen i at fange tilfældige svingninger i volatiliteten, fordi σ_t^2 ikke må være negativ.

5 Empirisk analyse

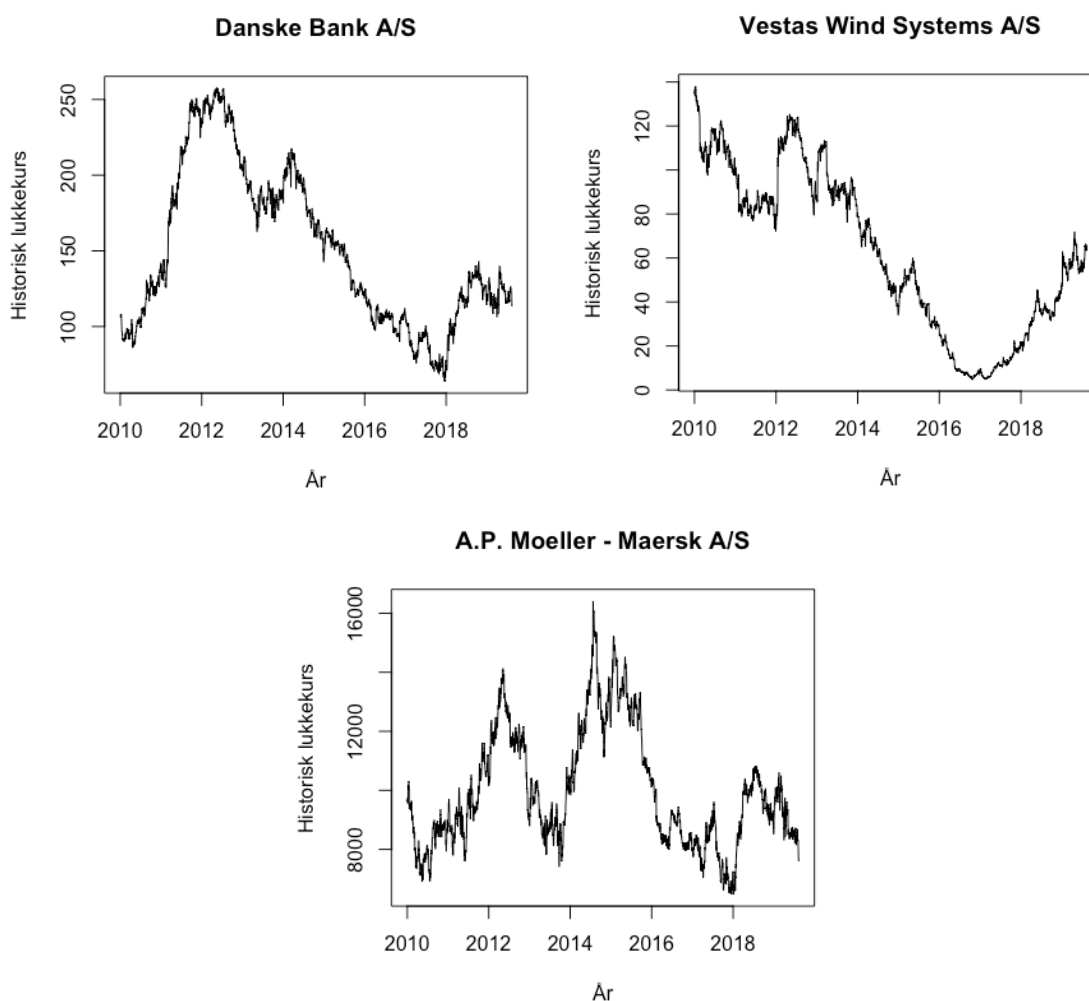
Vi har i de forrige afsnit gennemgået teori bag finansiell risiko, finansielle risikomål, ekstremværditeori og heteroskedastiske modeller, som vi nu vil anvende på tre aktiekurser. De tre aktiekurser valgt i denne afhandling er Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S (B aktien). De tre datasæt er hentet fra Nasdaq OMX Nordics egen hjemmeside³⁷ d. 21. oktober 2021. De kommende afsnit indeholder først en introduktion af de tre datasæt og dernæst en anvendelse af ekstremværditeori og heteroskedastiske modeller. Undervejs vil vi estimere Value-at-Risk og Expected Shortfall og til sidst vil vi sammenligne estimerne for de forskellige modeller. Anvendelsen af ekstremværditeori og volatilitetsmodellering vil blive præsenteret og diskuteret undervejs.

5.1 Introduktion af data

Som nævnt vil de tre datasæt i denne afhandling bestå af historiske afkast for Danske Bank, Vestas og Mærsk. Datasættene indeholder forskellige parametre, heriblandt åbningskurs, gennemsnitskurs for en handelsdag og lukkekurs, men vi vil benytte lukkekursen for hver handelsdag som vores tidsrækker. Observationerne strækker sig i perioden 01/01/2010 til 31/12/2019. For at undgå en mulig påvirkning på resultaterne, har jeg fravalgt observationer før finanskrisen i 2007-2009 og efter den globale Covid-19 pandemi, 2020-nu. Begge hændelser forårsagede dyk på de finansielle markeder, hvorfor vi i disse periode kan forvente at opleve ekstreme værdier, der kan have en effekt på vores anvendelse af ekstremværditeori og fit af de heteroskedastiske modeller. Vi fortsætter derfor med

³⁷ Nasdaq OMX Nordic: Aktier: Historiske priser
Hentet fra <http://www.nasdaqomxnordic.com/aktier/historiskepriser> d. 21/10/2021.

lukkekurser for de tre virksomheder i tidsperioden 01/01/2010-31/12/2019. De kan ses i nedenstående figur.



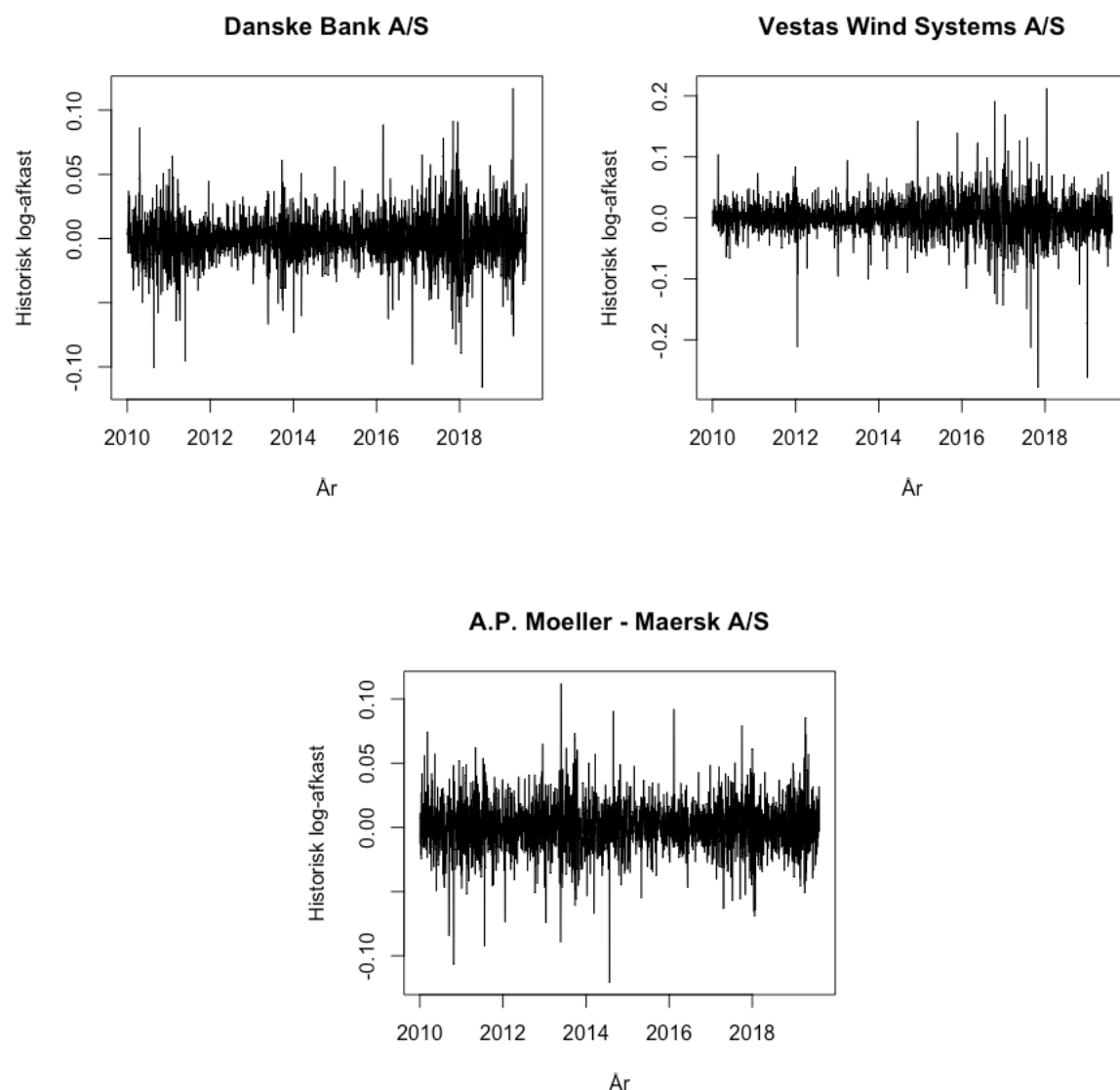
Figur 5-1: Lukkekurser for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S i perioden 01/01/2010 – 31/12/2019.

Ud fra de tre plots i Figur 5-1 ser vi, at ingen af de tre aktiekurser har bevæget sig ens i tidsperioden, men ens for dem alle er, at kurserne viser tegn på konjunktursvingninger. Vi ser også, at Danske Bank og Vestas i perioden 2012-2018 viser en nogenlunde ens nedadgående kurve. Ingen af de tre kurser kan siges at være stationære tidsrækker, hvilket vi for finansiell data heller ikke forventer. En dekomposition (eller "nedbrydning") af de tre tidsrækker viser igen tegn på, at de tre tidsrækker ikke er stationære. Dekompositionen kan ses i bilag 9.1, og den viser trend- og sæsonkomponenter for alle tre aktiekurser. Hvis vi også kigger på plots af autokorrelationen, der kan ses under bilag 9.2, for de tre kurser kan vi se, at de aftager meget langsomt og viser igen tegn på ikke-stationaritet. En tidsrække med en

trendkomponent vil have en tidsvarierende middelværdi, hvorfor vi kan konkludere, at aktiekurserne ikke er stationære, og vi kigger derfor i stedet på de logaritme transformerede afkast (også kaldet *log afkast*), som vi kan finde ved at beregne de logaritme transformerede lukkekurser og dernæst bestemme de differentierede tidsrækker af disse, altså

$$r_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$$

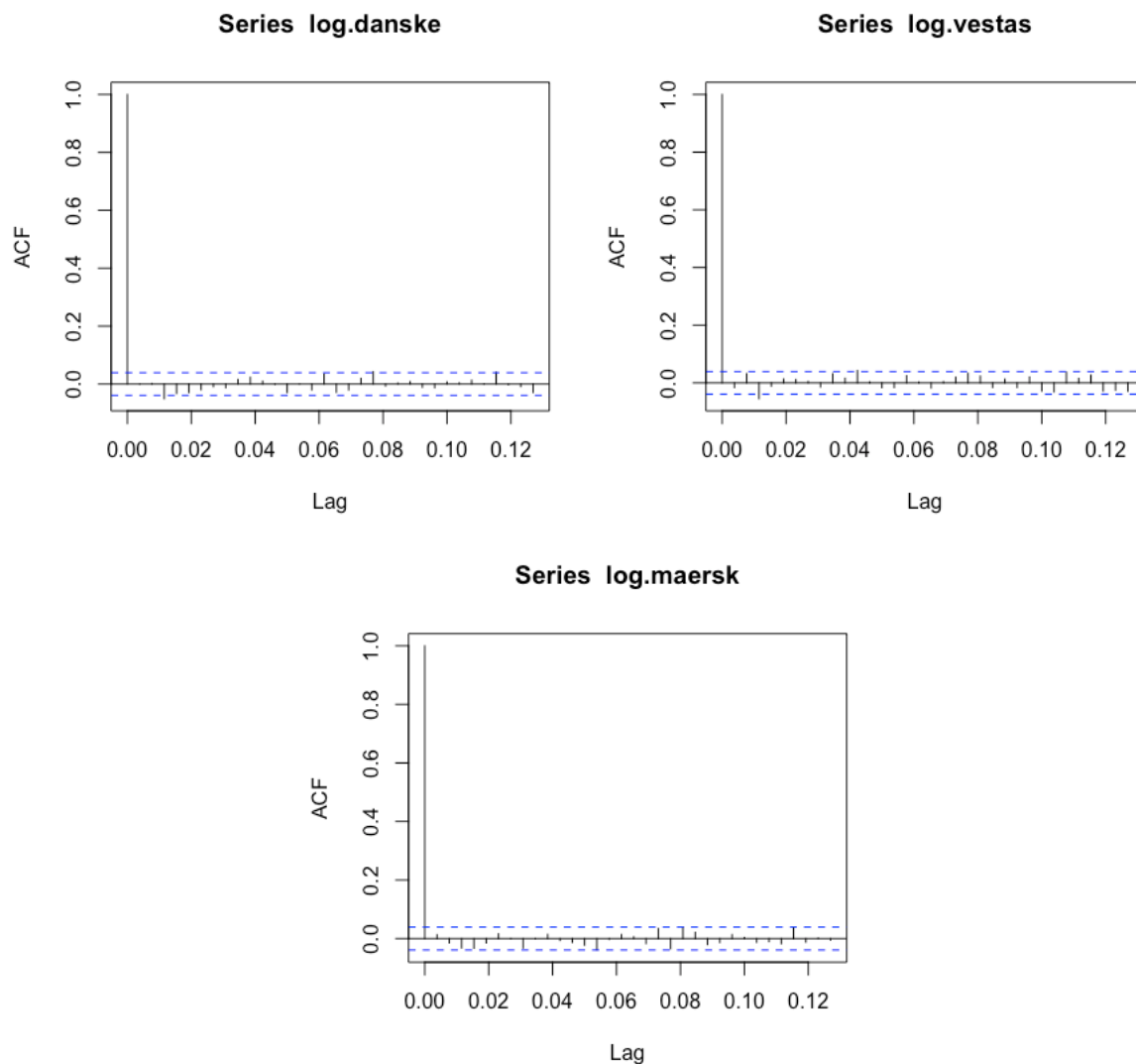
hvor r_t er det vi kalder log afkastet og S_t er den daglige lukkekurs. Log afkastet af finansielle aktiver ses ofte at vise tegn på stationaritet. Log afkastet for de tre virksomheder ser således ud



Figur 5-2: Log afkast for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

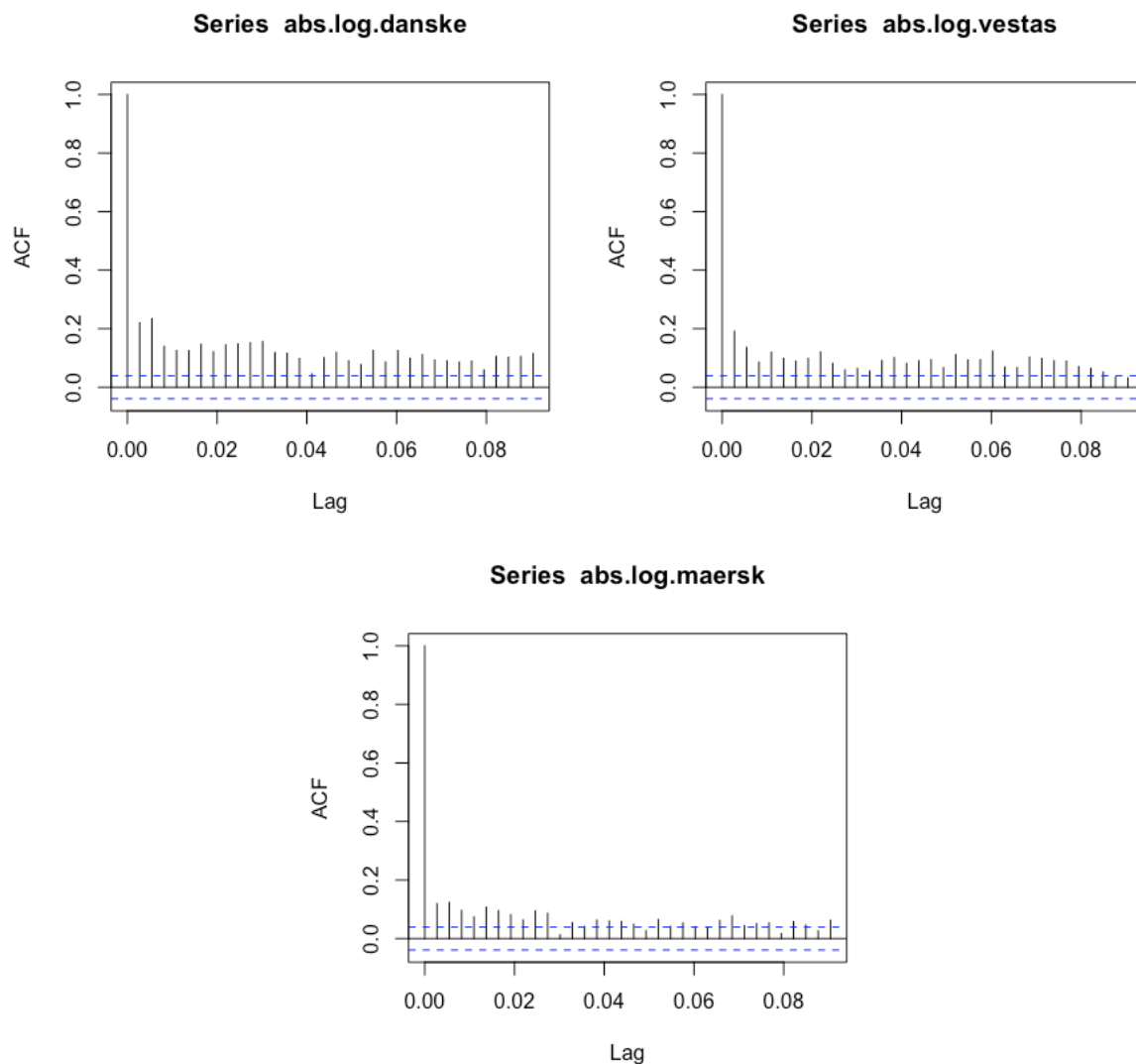
På Figur 5-2 kan vi se, at trendkomponenten ikke længere eksisterer for log afkastet, hvilket indikerer at middelværdien ikke længere er tidsvarierende. De tre tidsrækker er

tilbagevendende til et konstant niveau omkring nul, hvorfor de kan antages at være *mean-reverting*. Vi ser yderligere, at de tre log afkast over hele perioden har udsving inden for $[-0,1; 0,1]$ med få undtagelser for Vestas, der har enkelte værdier inden for $[-0,2; 0,2]$. På baggrund af dette kan vi antage, at den ubetingede varians er konstant for alle tre tidsrækker, hvorimod vi kan se tegn på, at den betingede varians muligvis ikke er konstant. Det kan vi, hvis vi kigger på forskellige perioder i tidsrækkerne, eksempelvis for Vestas i perioden 2010-2012 og 2016-2018, hvor der er forskel på størrelsesordenen. Det samme gælder for Danske Bank i perioden 2012-2014 og 2017-2019, hvor vi kan observere det samme. For Mærsk er det knap så tydeligt ud fra Figur 5-2, men omkring år 2016 er størrelsesordenen mindre end den ser ud til at være omkring år 2011. Forskellen i størrelsesordenen tyder på en ikke-konstant betinget varians, hvilket indikerer at processerne muligvis indeholder volatilitet, som vi kan modellere med en heteroskedastisk model. Vi antager dog, at tidsrækkerne er stationære processer, hvilket også bliver bekræftet af autokorrelationsplot (ACF plot), der kan ses nedenfor for de tre processer. Vi er opmærksomme på, at ACF plots for log afkastet for finansielle data ikke altid viser korrelation, hvorfor vi af ACF plots ikke alene kan bekræfte, at processerne er stationære. Oftest ser vi, at de absolutte værdier er korrelerede, hvilket vi vil undersøge senere hen. Men for nu antager vi, at processerne er stationære.



Figur 5-3: Plots af autokorrelationen for Danske Bank A/S (øverst venstre), Vestas Wind Systems A/S (øverst højre) og A.P. Møller – Mærsk A/S (nederst)

De tre plots af autokorrelationen viser, at ingen af de tre processer indeholder autokorrelation, idet der kun er max ét signifikant lag efter lag 0, hvilket vil sige, at mere end 95% falder inden for testgrænserne. Vi kan altså antage, at observationerne i de tre processer er ukorrelerede ud fra Figur 5-3. De tre plots viser heller ingen tegn på, at modellering af den betingede middelværdi, eksempelvis ved en $AR(p)$ eller $MA(q)$ proces, er nødvendig for tidsrækkerne. Vi undersøger dog også, om der for de absolutte værdier af log afkastet er korrelation, da det oftest er tilfældet med finansiel data, at vi først ser tegn på korrelerede værdier her. Vi forventer altså at se, at observationerne er korrelerede, hvilket også bekræftes af nedenstående ACF plots.



Figur 5-4: Plot af autokorrelation for tidsrækkerne bestående af absolutte værdier for Danske Bank A/S (øverst venstre), Vestas Wind Systems A/S (øverst højre) og A.P. Møller – Mærsk A/S (nederst).

På Figur 5-4 ser, at der er flere lags, der er signifikant større end nul, hvorfor de absolutte værdier for tidsrækkerne som forventet indeholder korrelation. Vi forventer, at korrelerede observationer vil påvirke resultatet af Block Maxima- og Peaks Over Threshold metoderne, men til at begynde med ignorerer vi dette og antager, at tidsrækkerne for log afkastet og de absolutte værdier følger en hvid støj proces, idet vi ønsker at estimere ekstremværdifordelinger og dernæst Value-at-Risk og Expected Shortfall.

5.2 Anvendelse af ekstremværditeori

Vi har som nævnt antaget, at observationerne i de tre processer er ukorrelerede og følger en hvid støj proces, selvom vi har set, at processerne viser tegn på at have en tidsinvariant ubetinget middelværdi og varians, at den betingede varians muligvis er tidsvarierende, og at tidsrækkerne for de absolutte værdier er korrelerede. På baggrund af vores antagelse fortsætter vi med at anvende ekstremværditeori på log afkastet for de tre processer, hvorefter vi får estimeringer af GEV- og GPD fordelinger for de tre tidsrækker, som vi kan anvende til at estimere de to risikomål, Value-at-Risk og Expected Shortfall. Vi anvender først Block Maxima metoden og kigger derefter på Peaks Over Threshold.

5.2.1 Block Maxima metoden

Vi begynder med Block Maxima metoden til at identificere processernes ekstreme værdier. Da data består af daglige observationer ville vi normalt begynde med en årlig blokstørrelse, hvor vi antager, at en årlig blokstørrelse er givet ved 260 handelsdage (det gennemsnitlige antal handelsdage på et år³⁸), men dette giver os kun 10 maksima værdier for de tre processer, hvilket er for lidt til at opnå gode parameterestimer. Til at begynde med benytter vi i stedet en halvårlig blokstørrelse, der giver os 20 maksima værdier. Estimering via MLE giver parameterestimer og konfidensinterval set i Tabel 5-1 for de tre processer.

	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,1564	[−0,187; 0,631]	0,3675	[−0,135; 1,087]	0,0286	[−0,289; 0,572]
$\hat{\mu} =$	0,0460	[0,039; 0,054]	0,0751	[0,062; 0,093]	0,0520	[0,044; 0,061]
$\hat{\sigma} =$	0,0149	[0,010; 0,022]	0,0279	[0,017; 0,045]	0,0164	[0,011; 0,025]

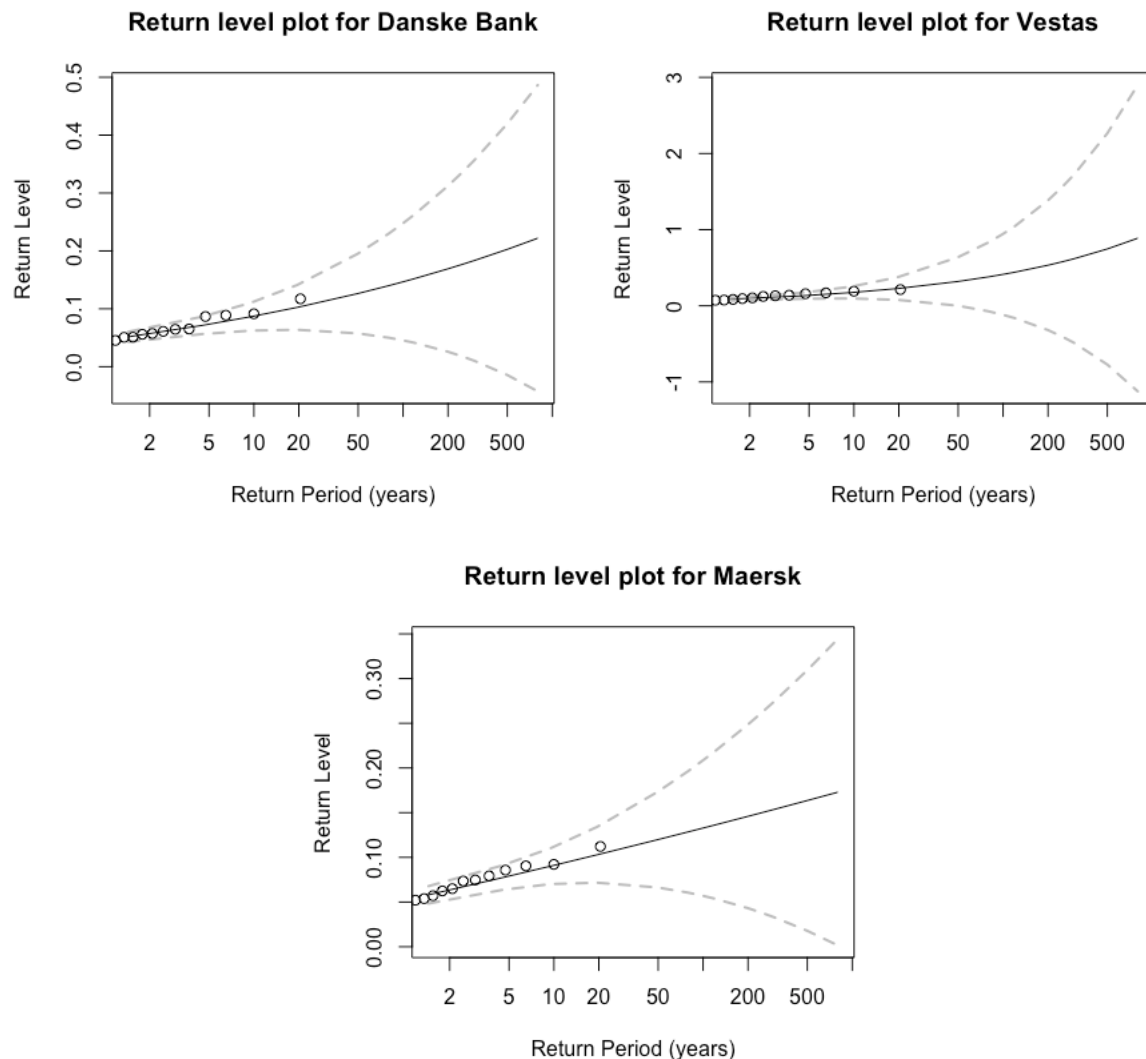
Tabel 5-1: Parameterestimer af GEV fordeling for halvårlig blokstørrelse.

KI = Konfidensinterval estimeret via profil-likelihood.

For alle tre tidsrækker ser vi, at $\hat{\xi} > 0$, altså at maksima værdierne bedst kan fittes til en Fréchet fordeling. Oftest ser vi for finansiel data, at Fréchet fordelingen giver bedste fit grundet de tungere haler, hvorfor det kan fortolkes som et tegn på, at vi muligvis har et fint

³⁸ [McNeil et al. (2015), Definition 5.13]. Antal trading days på et år antages under definition 5.13 af *return level*.

fit. Vi ser dog, at usikkerhederne for de tre modeller er store, hvilket kan skyldes for få maksima værdier eller volatilitet og afhængighed i de absolutte værdier af log afkastet, som vi tidligere afskrev. Vi kigger på fittet af modellerne ved at plote return levels. Return level plots kan ses nedenfor i Figur 5-5.



Figur 5-5: Return level plots for fit af GEV fordeling på halvårige maksima værdier for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

Her kan vi se, at modellerne umiddelbart giver et rigtig fint fit, idet de estimerede return levels følger kurverne bestemt af GEV modellerne. Vi bemærker også, at modellen for Mærsk ser ud til at give et bedre fit end modellen for Danske Bank, idet enkelte af de estimerede return levels for Danske Bank afviger en lille smule fra kurven. Bedste fit får vi for Vestas. For de tre modeller ser vi også, at kurverne er konvekse, da modellerne er fittet

af en Fréchet fordeling med parameterestimer, $\hat{\xi} > 0$. At vurdere ud fra de tre return level plots, så er fordelingen af maksima værdierne for Vestas og Mærsk fittet bedre af modellerne end de er for Danske Bank, om end fittet af modellerne generelt ser godt ud. Vi har dog forholdsvis store usikkerheder for parameterestimerne, så vi forsøger at ændre på blokstørrelsen og identificerer i stedet maksima værdier ud fra en kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse. En kvartalsvis blokstørrelse giver 39 maksima værdier, mens en månedlig blokstørrelse giver 119 maksima værdier. Vi antager, at månedlige maksima værdier vil ligge langt nok fra hinanden til ikke at være korrelerede og påvirke resultaterne. Vi fitter igen en GEV fordeling til maksima værdierne for hver proces via MLE og får parameterestimerne angivet i Tabel 5-2 og Tabel 5-3 for hhv. en kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse.

	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,2011	[−0,06; 0,593]	0,4347	[0,114; 0,839]	0,2179	[−0,054; 0,553]
$\hat{\mu} =$	0,0371	[0,032; 0,042]	0,0586	[0,051; 0,067]	0,0429	[0,038; 0,047]
$\hat{\sigma} =$	0,0135	[0,01; 0,018]	0,0214	[0,015; 0,030]	0,0119	[0,009; 0,016]

Tabel 5-2: Parameterestimer af GEV fordeling for maksima værdier givet ved kvartalsvis blokstørrelse.

KI = Konfidensinterval beregnet via profil-likelihood.

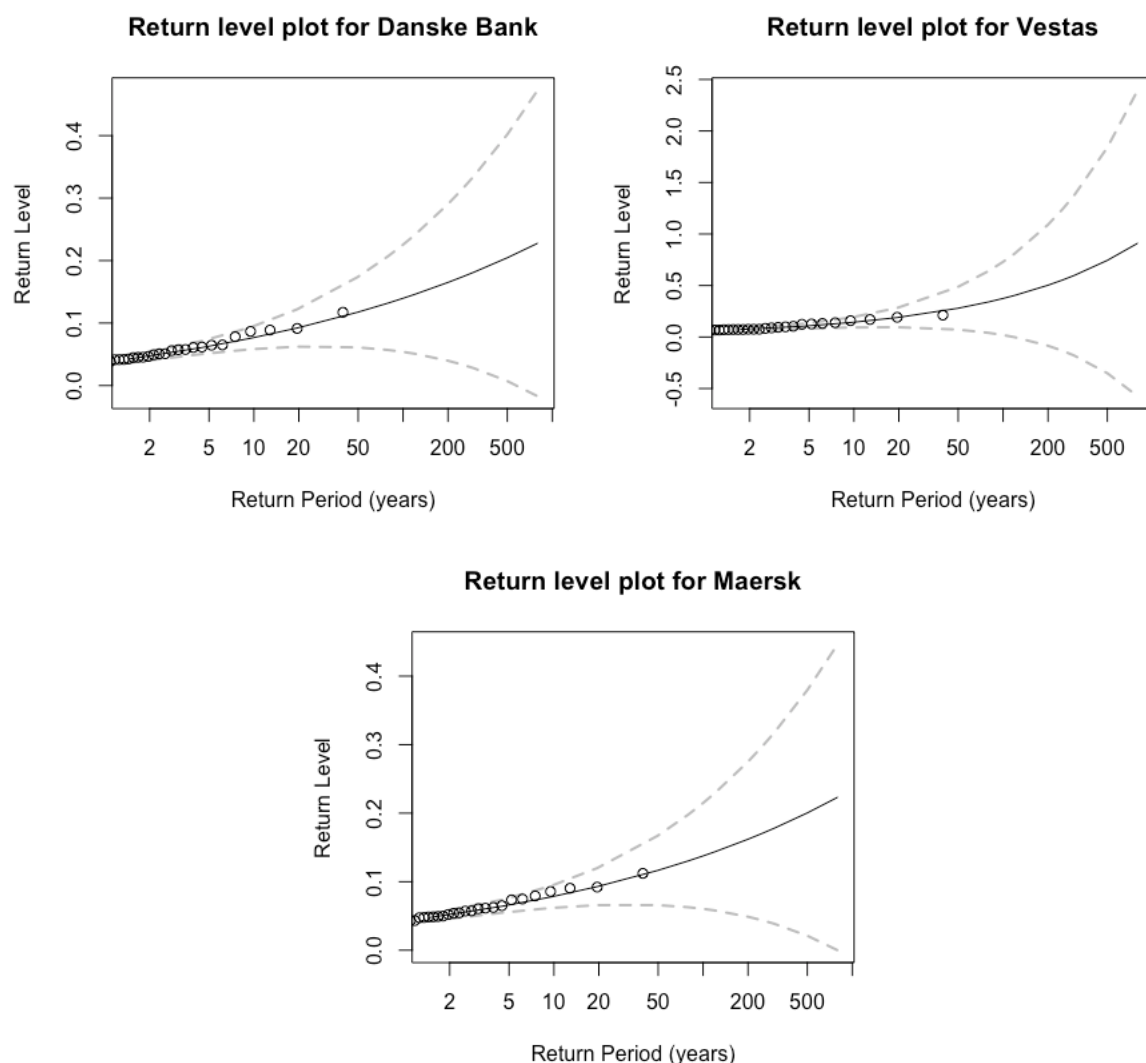
	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,1607	[0,028; 0,324]	0,2190	[0,094; 0,367]	0,1612	[0,021; 0,335]
$\hat{\mu} =$	0,0259	[0,023; 0,028]	0,0402	[0,036; 0,044]	0,0297	[0,027; 0,032]
$\hat{\sigma} =$	0,0112	[0,009; 0,013]	0,0185	[0,015; 0,021]	0,0107	[0,009; 0,012]

Tabel 5-3: Parameterestimer af GEV fordeling for maksima værdier givet ved månedlig blokstørrelse.

KI = Konfidensinterval beregnet via profil-likelihood.

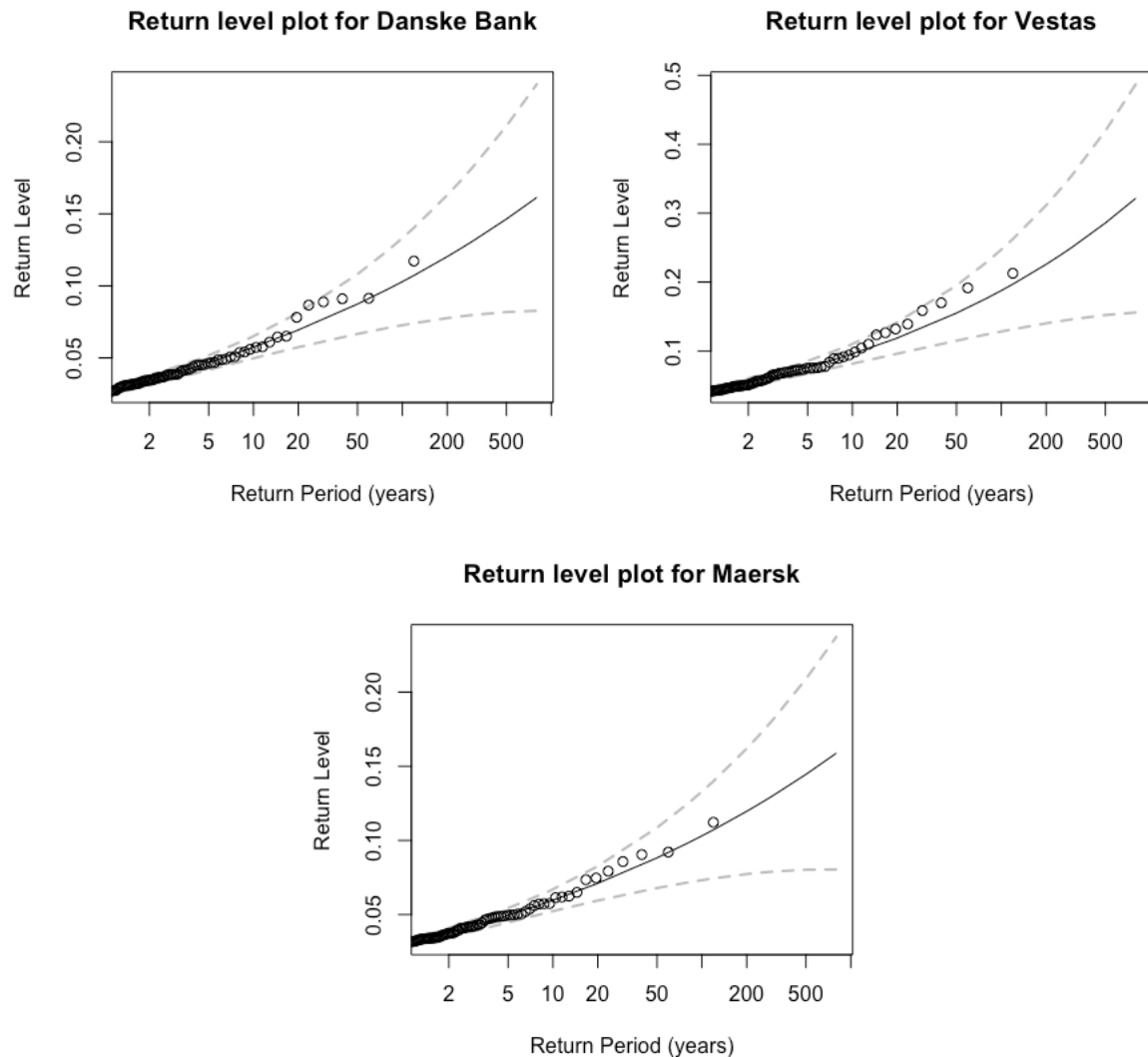
I Tabel 5-2 kan vi se, at de kvartalsvise maksima værdier for modellerne fortsat fittes bedst af en Fréchet fordeling, idet $\hat{\xi} > 0$. Vi ser også, at estimerne af formparameteren er blevet større i takt med blokstørrelsen er blevet mindre og antallet af maksima værdier er steget. I Tabel 5-3 fittes maksima værdierne for alle tre processer også bedst af Fréchet

fordelingen, idet $\hat{\xi}_{DB} > 0$, $\hat{\xi}_V > 0$ og $\hat{\xi}_M > 0$, men estimererne $\hat{\xi}$ er faldet sammenlignet med estimererne fra den kvartalsvise blokstørrelse. Baseret alene på forventningen om, at Fréchet fordelingen bør give bedste fit til maksima værdier for finansielle aktiver, kan vi ikke vurdere fittet af modellerne ved de tre forskellige blokstørrelser. Vi kigger derfor på return level plots igen for de kvartalsvise- og månedlige maksima værdier.



Figur 5-6: Return level plots for fit af GEV fordeling på kvartalsvise maksima værdier for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S

På Figur 5-6 ser vi, at fittet af Fréchet fordelingen på kvartalsvise maksima værdier for de tre modeller giver et godt fit, idet de estimerede return levels følger kurven bestemt af GEV modellen. Vi kigger på samme måde på return level plots for de månedlige maksima værdier, der kan ses i Figur 5-7 nedenfor.



Figur 5-7: Return level plots for fit af GEV fordeling på månedlige maksima værdier for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

Af Figur 5-7 ser vi først og fremmest at kurverne fortsat er konvekse, idet de månedlige maksima værdier for de tre virksomheder følger Fréchet fordelingen med $\hat{\xi} > 0$. Vi bemærker også, at de estimerede return levels generelt følger kurverne bestemt af modellerne okay, hvilket indikerer at modellerne giver et fint fit på maksima værdierne. Hvis vi sammenligner return level plots for de kvartalsvise- og månedlige maksima værdier, så ser vi dog, at fittet er bedre for modellerne med de kvartalsvise maksima værdier. De estimerede return levels for de månedlige maksima værdier afviger mere fra kurverne end vi ser ved en kvartalsvis blokstørrelse. De dårligere resultater kan være grundet det øgede antal maksima værdier og vi skal derfor være opmærksomme på, om blokstørrelsen bliver for stor og dermed øger risikoen for bias. Vi ved fra tidligere i teorien, at vi med valg af

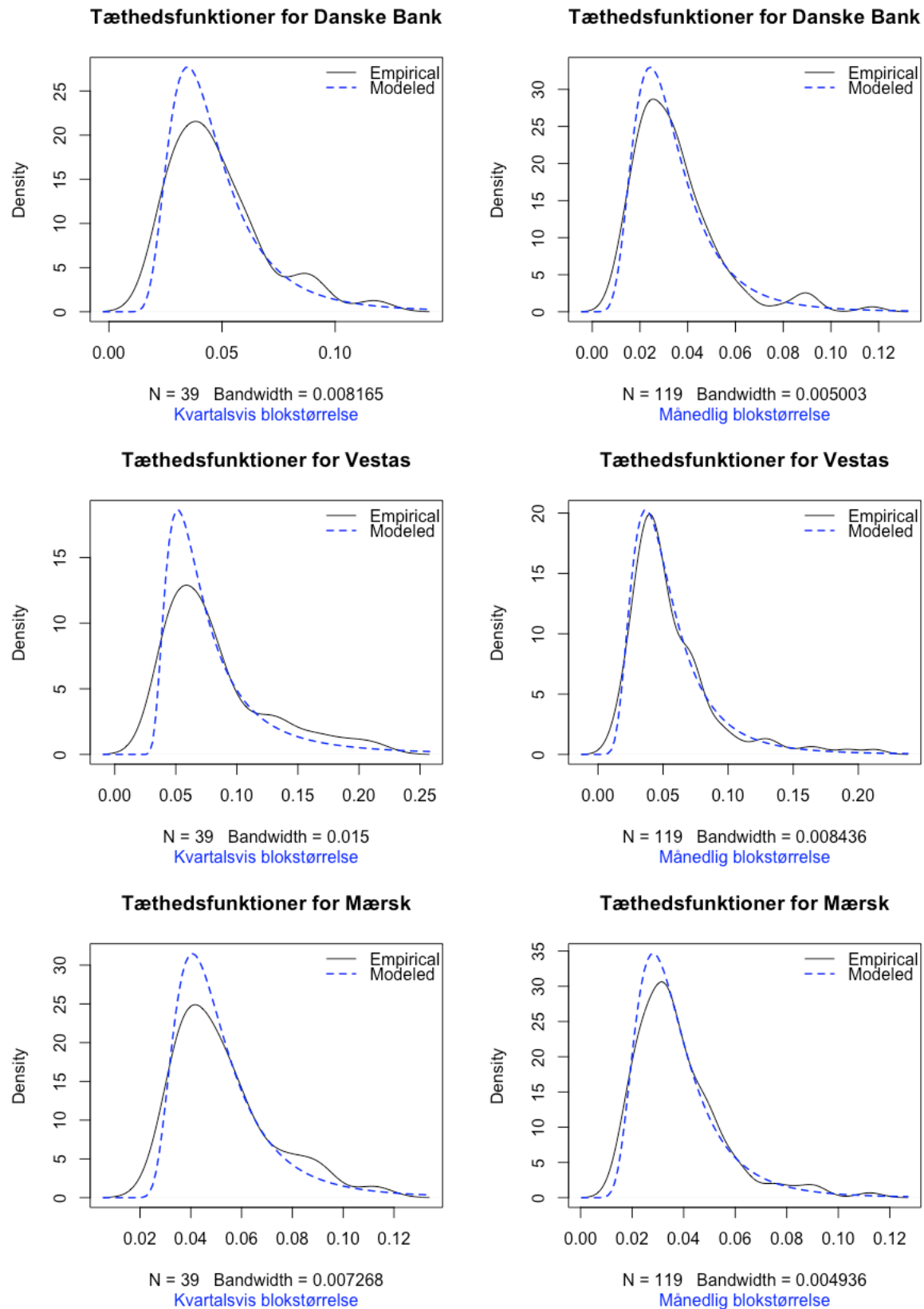
blokstørrelse skal være opmærksom på trade off'et af varians og bias. Hvis vi sammenligner Tabel 5-2 og Tabel 5-3 kan vi se, at usikkerhederne for parameterestimaterne er større for fittet af GEV fordelingen på de kvartalsvise maksima værdier, samt at nederste grænse i konfidensintervallene for formparameteren for Danske Bank og Mærsk ikke længere har en negativ værdi. På trods af den negative nedre grænse estimeres de månedlige maksima værdier til at følge en Fréchet fordeling bedst.

Udover at kigge på return level plots kan vi også se på AIC og BIC kriterierne i Tabel 5-4, der indikerer, at modellerne bliver bedre i takt med blokstørrelsen bliver mindre.

	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
Blokstørrelse	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
Halvårlig	−95,397	−92,410	−65,669	−62,682	−94,359	−91,372
Kvartalsvis	−197,536	−192,545	−151,638	−146,647	−206,407	−201,414
Månedlig	−663,766	−655,429	−528,961	−528,961	−675,361	−667,023

Tabel 5-4: AIC og BIC værdier for modeller med forskellige blokstørrelser

AIC og BIC værdierne er lavest for modellerne med månedlig blokstørrelse. Anvender vi likelihood ratio tests bekræfter de også, at modellerne med månedlig blokstørrelse giver bedste fit. Vi er opmærksomme på, at AIC, BIC eller LRT tests ikke tager stilling til trade off'et mellem varians og bias, hvorfor vi også kigger på plots af tæthedsfunktionen for modellerne med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse. Modellerne med en halvårlig blokstørrelse afskriver vi, da antallet af maksima værdier er for lavt. I Figur 5-8 nedenfor kan vi se plots af den estimerede- og empiriske tæthed for de 6 modeller.



Figur 5-8: Empirisk og estimeret tæthedsfunktion for kvartalsvise- og månedlige modeller for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

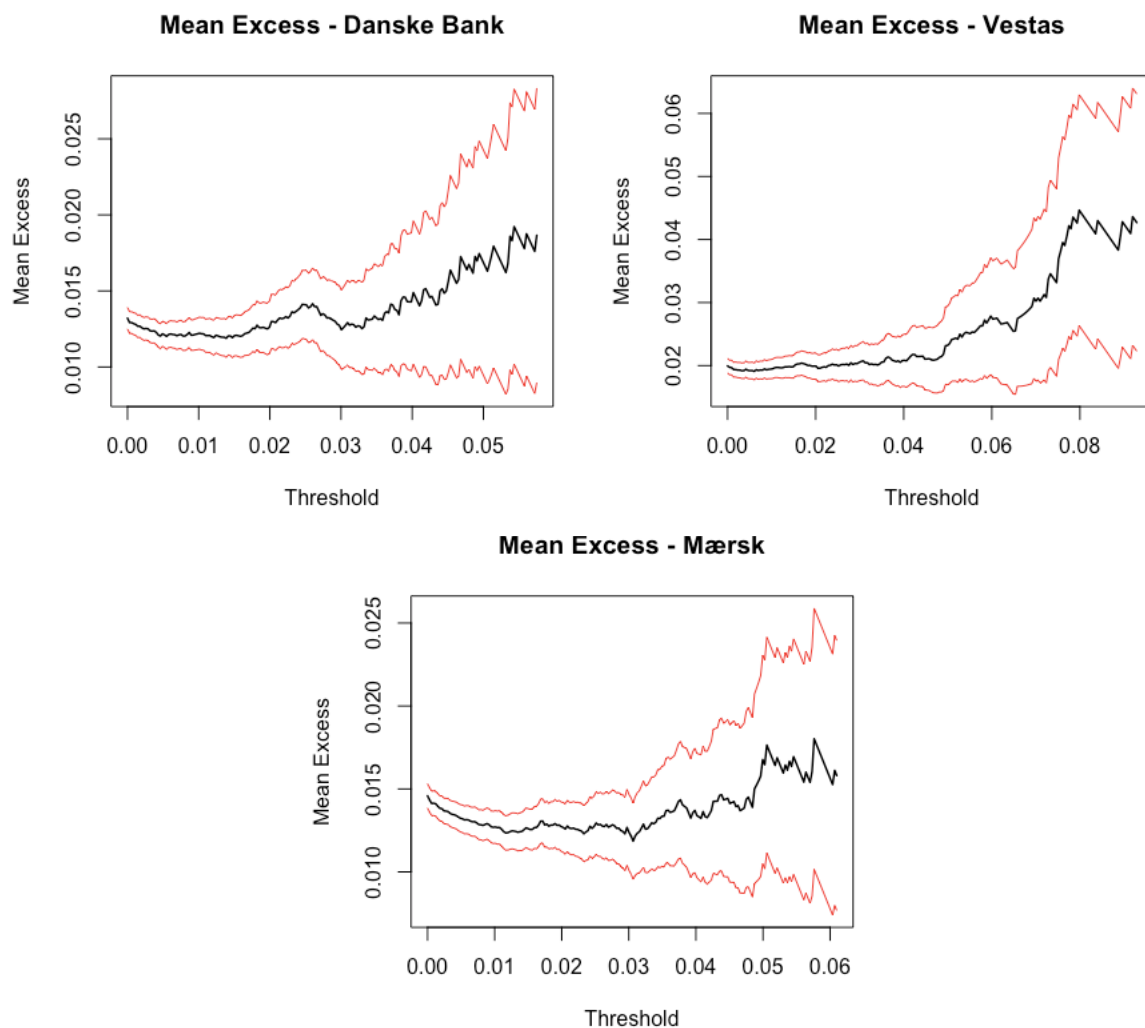
Af Figur 5-8 bemærker vi først, at den estimerede tæthed generelt giver et bedre fit for modellerne med en månedlig blokstørrelse. Vi ser ikke et lige så godt fit for modellerne med en kvartalsvis blokstørrelse. For alle tre modeller fås det bedste fit af den empiriske tæthed for modellen med månedlige maksima værdier, men modellerne er også bygget på cirka 3 gange så mange maksima værdier. Vi har desuden kigget på QQ plots af de kvartalsvise- og månedlige modeller, se bilag 9.3, der bekræfter samme observationer.

Efter anvendelse af BM metoden for en halvårlig-, kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse, har vi fået blandede resultater. For alle tre blokstørrelser blev formparameteren for de tre virksomheders maksima værdier estimeret til $\hat{\xi}_{DB,V,M} > 0$, hvorfor de bedst fittes med en Fréchet fordeling. Vi så store usikkerheder ift. konfidensinterval for estimerterne i Tabel 5-1, sammenlignet med usikkerhederne for kvartalsvise- og månedlige maksima værdier, der blev mindre i takt med antallet af maksima værdier steg. Visuelt så vi ikke en decideret forbedring af fittet fra den halvårige blokstørrelse til de to andre blokstørrelser, men vi så, at usikkerhederne blev forbedret, hvorfor vi generelt må sige, at fittet for de kvartalsvise- og månedlige maksima værdier er bedre. Årsagen til det mindre gode fit for de halvårige maksima værdier kan være, at antallet af maksima værdier er for lavt, eller at processerne ikke er ukorrelerede, som vi så i Figur 5-4. For den kvartalsvise blokstørrelse så vi en forbedring i fittet af en GEV fordeling på de fundne maksima værdier, og vi så, at estimerterne af formparameteren $\hat{\xi}$ steg. Sammenligner vi fittet af de kvartalsvise- og månedlige maksima værdier er fittet ikke blevet bedre for modellerne i takt med det større antal maksima værdier. Return level plots i Figur 5-6 og Figur 5-7 for de to blokstørrelser viste, at de estimerede return levels fra modellerne med en kvartalsvis blokstørrelse fulgte de modelbestemte kurver bedst. Da vi dernæst kiggede på Figur 5-8, der viser tæthederne for de to blokstørrelser, så vi, at modellerne med en månedlig blokstørrelse gav et bedre fit. Derudover så vi, at usikkerhederne blev mindre i takt med, at antallet af maksima værdier blev større. Tager vi tæthedsfunktionerne i Figur 5-8 og usikkerhederne for parameterestimerterne i betragtning, så ser vi, at bedste fit opnås ved en månedlig blokstørrelse. Modellerne med en månedlig blokstørrelse gav også et fint fit ud fra return level plots, hvorfor vi endeligt vælger at estimere VaR og ES ud fra modellerne med en

månedlig blokstørrelse for de tre log afkast. Vi har dermed parameterestimerne i Tabel 5-3x, der giver bedste fit for de tre virksomheder.

5.2.2 Peaks Over Threshold metoden

Vi har i tidligere afsnit benyttet Block Maxima til at identificere maksima værdier og fitte en GEV fordeling, hvorfor vi nu også vil anvende POT metoden til at bestemme de ekstreme værdier og dernæst estimere en GPD fordeling på disse. Vi benytter igen de absolutte værdier af tidsrækkerne, og vi ønsker at bestemme et threshold u , der giver nok maksima værdier til at mindske variansen, men samtidig ikke er for lav en grænse, så vi risikerer at medtage værdier, der ikke under normale betingelser ville blive kategoriseret som ekstreme hændelser. Til dette benytter vi os af mean excess plots, der ses nedenfor.



Figur 5-9: Mean excess plot af tidsrækkerne bestående af absolutte værdier af log afkastet for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

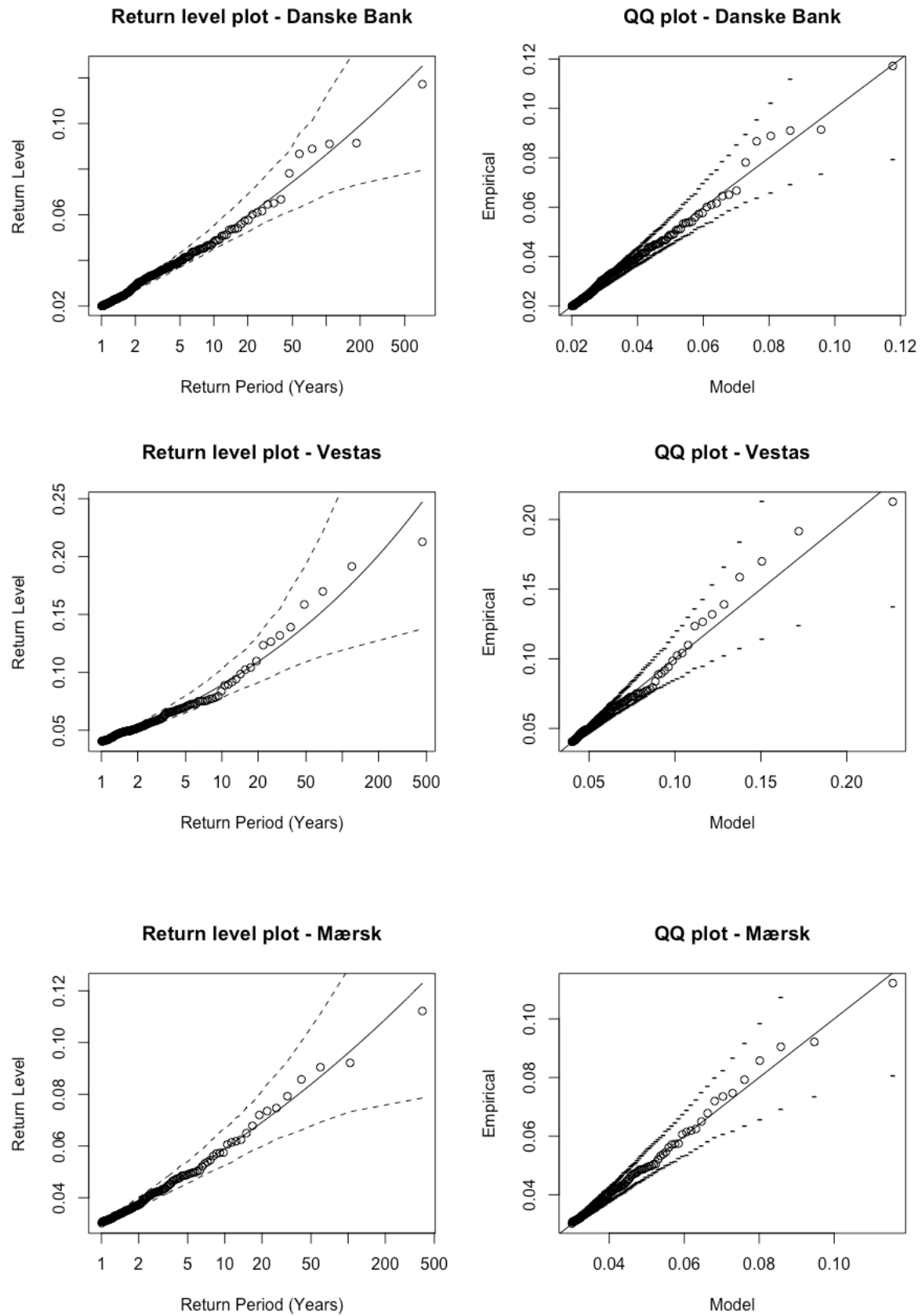
Ved første kig på Figur 5-9 kan det være vanskeligt at se, hvad et fornuftigt threshold u ville være. Hvis vi tager udgangspunkt i ME plottet for Danske Bank, kan vi se, at kurven omkring $u = 0,02$ har et "knæk", der bryder den opadgående trend, og vi antager derfor, at et threshold omkring 0,02 kan være et godt valg. Det samme ser vi også omkring $u = 0,03$, men i først omgang vælger vi et threshold $u_{DB} = 0,02$ for Danske Bank. På samme måde kan vi for Vestas og Mærsk hhv. aflæse, at thresholdværdier u omkring 0,04 og 0,03 kan være gode valg. Hvis vi kigger på plots af parameter estimater mod thresholdværdier, se bilag 9.4, så bekræfter disse også vores valgte thresholds, idet usikkerhederne begynder at stige kort efter $u_{DB} = 0,02$, $u_V = 0,04$ og $u_M = 0,03$. Vi ser dog for Danske Bank, at vi muligvis godt kunne vælge et threshold på $u_{DB} = 0,03$ i stedet, som vi også så tegn på ud fra ME plots. Vi fortsætter dog med $u_{DB} = 0,02$. Vi starter derfor med at bestemme maksima værdier for de tre tidsrækker givet thresholdværdierne. For Danske Bank har vi valgt threshold $u_{DB} = 0,02$, der resulterer i 251 maksima værdier, for Vestas et threshold $u_V = 0,04$, der resulterer i 162 maksima værdier og for Mærsk med threshold $u_M = 0,03$ får vi 140 maksima værdier. Efter fit af GPD fordelingen på maksima værdierne får vi følgende parameterestimater og konfidensinterval:

	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,0977	$[-0,020; 0,265]$	0,2099	$[0,057; 0,415]$	0,1059	$[-0,050; 0,335]$
$\hat{\beta} =$	0,0114	$[0,009; 0,013]$	0,0165	$[0,013; 0,020]$	0,0111	$[0,008; 0,014]$

Tabel 5-5: Parameterestimater for estimering af en GPD fordeling på maksima værdierne for Danske Bank A/S med $u_{DB} = 0,02$, Vestas Wind Systems A/S med $u_V = 0,04$ og A.P. Møller – Mærsk A/S med $u_M = 0,03$.

KI = Konfidensinterval estimeret via profil-likelihood.

Konfidensintervaller for parameterestimaterne er beregnet via profil-likelihood metoden, som vi tidligere gennemgik. Estimerne af formparameteren viser, at bedste fit fås af Pareto fordelingen da $\hat{\xi}_{DB,V,M} > 0$. Vi undersøger, hvordan modellernes fit er ved at kigge på return level plots og fraktil plots (QQ-plots), der afbilder fraktiler fra en teoretisk- og en estimeret fordeling. De kan ses i Figur 5-10.



Figur 5-10: Return level plots og QQ-plots af POT modellerne med threshold $u_{DB} = 0,2$ (Danske Bank A/S), $u_V = 0,04$ (Vestas Wind Systems A/S) og $u_M = 0,03$ (A.P. Møller – Mærsk A/S).

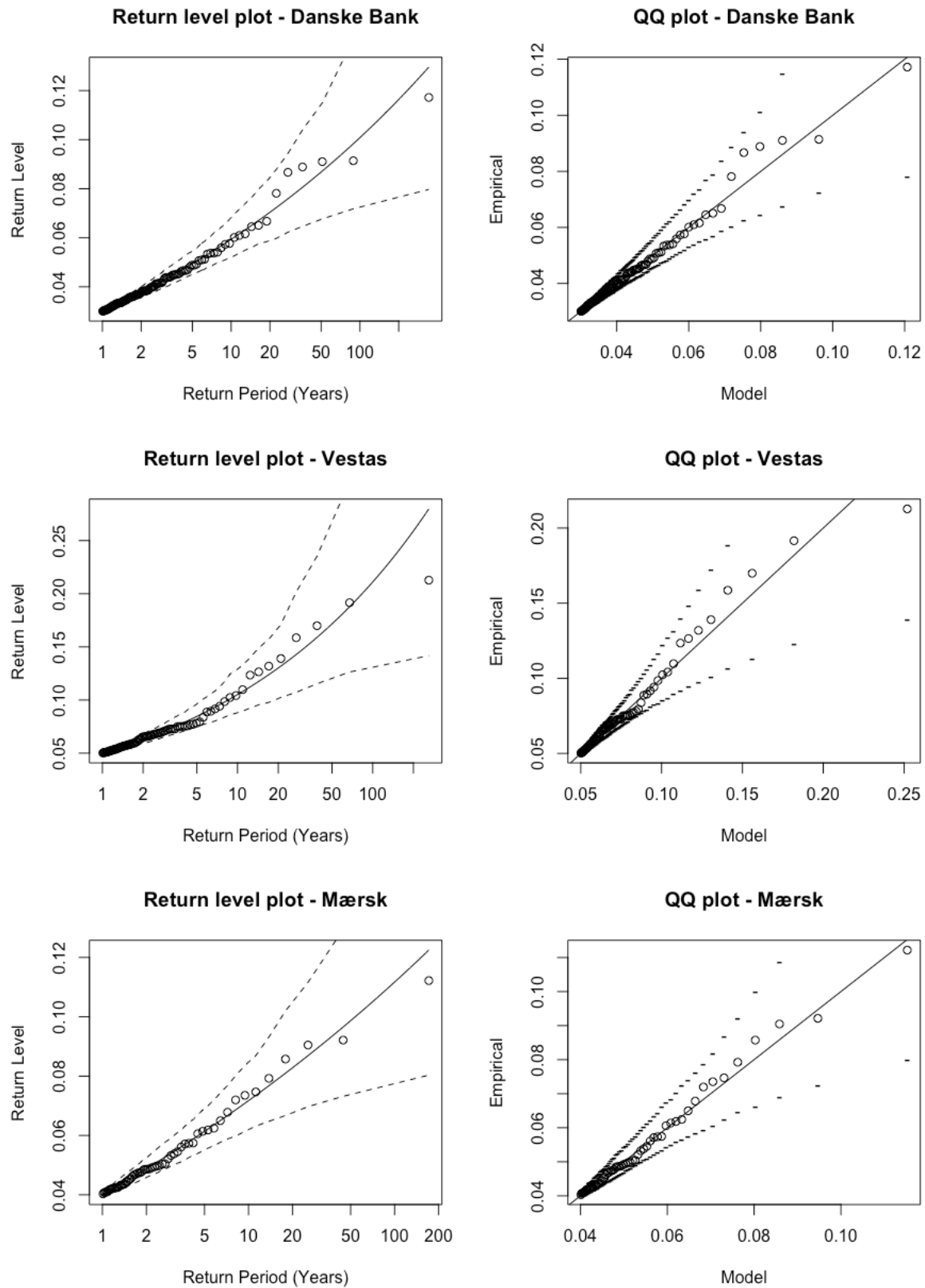
De tre return level plots viser, at ingen af modellerne giver et rigtig godt fit, men de er tilfredsstillende med tanke på, at vi ignorerede, at antagelsen om ukorrelerede observationer ikke er sand. Det mindst gode fit af de tre ses for Danske Bank, idet de estimerede return levels begynder at afvige en del fra kurven ved længere return periods. Omvendt er det bedste fit givet ved modellen for Mærsk, hvor det først er ved lange return periods, at de estimerede return levels begynder at afvige en smule fra kurven. Når vi kigger på de tre fraktil plots kan vi se det samme. De estimerede modeller for Danske Bank og Vestas følger de empiriske fordelinger på fornuftigt niveau, men de afviger stadig en smule. Afvigelserne i halen af fordelingerne er at forvente, da antallet af ekstreme værdier bliver mindre. Vi ser dog, at modellen for Mærsk følger den empiriske fordeling bedre og giver et fint fit. Selvom fittet af de tre modeller overordnet set er tilfredsstillende, vil vi alligevel estimere modeller med andre thresholds. Vi så også tidligere, at $u_{DB} = 0,03$ muligvis var et bedre valg. Det kan derfor være, at vi kan finde en mere optimal thresholdværdi og opnå bedre fit. Hvis vi kigger på plottet af log afkastet for Danske Bank i Figur 5-2 kan vi se, at de fleste værdier ligger under 0,04, men med mulige ekstreme værdier over. Hvis vi kigger på mean excess plottet i Figur 5-9 kan vi se, at usikkerhederne omkring $u_{DB} = 0,04$ er store, så vi vælger i stedet $u_{DB} = 0,03$, som vi så tidligere kunne være et godt valg. Vi prøver derfor med dette threshold og sammenligner de to modeller for Danske Bank. På samme måde finder vi nye thresholds for Vestas og Mærsk, der nu med thresholdværdier $u_V = 0,05$ og $u_M = 0,04$ bliver estimeret. De nye thresholds giver 120, 91 og 60 maksima værdier for hhv. Danske Bank, Vestas og Mærsk. De estimerede parametre og tilhørende konfidensinterval estimeret med profil-likelihood er givet i nedenstående tabel:

	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,1496	$[-0,022; 0,403]$	0,2835	$[0,056; 0,610]$	0,1004	$[-0,145; 0,496]$
$\hat{\beta} =$	0,0106	$[0,007; 0,013]$	0,0169	$[0,011; 0,023]$	0,0122	$[0,007; 0,017]$

Tabel 5-6: Parameterestimer for estimering af en GPD fordeling på maksima værdierne for Danske Bank A/S med $u_{DB} = 0,03$, Vestas Wind Systems A/S med $u_V = 0,05$ og A.P. Møller – Mærsk A/S med $u_M = 0,04$.

KI = Konfidensinterval estimeret via profil-likelihood.

Sammenligner vi parameterestimer og konfidensinterval i Tabel 5-5 og Tabel 5-6 bemærker vi først, at usikkerhederne er steget, idet de højere thresholds medfører færre maksima værdier. Vi bemærker også, at estimerne $\hat{\xi}_V$ og $\hat{\xi}_{DB}$ er steget i takt med thresholdværdierne er gået fra hhv. 0,04 til 0,05 og 0,02 til 0,03. Vi ser også, at konfidensintervallernes nedre grænse for $\hat{\xi}_{DB,M}$ er negativ for begge thresholds, hvorfor vi ikke kan være helt sikre på, at fordelingen af maksima værdierne bedst fittes til en Paretofordeling, om end de fleste værdier inden for de to konfidensinterval er positive. Sammenligner vi konfidensinterval vi estimerede for $\hat{\xi}_{DB,V,M}$ i modellerne med lavere thresholds (Tabel 5-5), så ser vi en mindre variation. Hvis vi nu også kigger på return level plots og fraktil plots, så kan vi af Figur 5-11 nedenfor se, hvordan de tre return plots alle viser en opadgående trend, da estimerne af formparameteren er positiv. Sammenligner vi plots i Figur 5-10 med dem i Figur 5-11, ser vi ikke et forbedret fit for modellen for Danske Bank med threshold $u_{DB} = 0,03$. De estimerede return levels begynder igen at afvige fra kurven for længere return periods, hvor antallet af ekstreme hændelser bliver mindre. Hvis vi sammenligner return level plots for de to modeller for Vestas, så kan vi kun se en minimal forbedring i fittet med threshold $u_V = 0,05$, men usikkerheden er også blevet større. Det samme kan vi se, når vi sammenligner de to fraktil plots, om end det visuelt er svært at se, hvilke af de to thresholds, der giver bedste fit for Vestas. For Mærsk modellerne er det ikke muligt at se en ændring i fittet ud fra en sammenligning af de to return level plots. De estimerede return levels følger kurverne næsten identisk for begge modeller. Det bekræftes også ved sammenligning af de to modellers fraktil plots, hvor vi heller ikke her ser en forskel i fittet efter ændring af threshold. På baggrund af ovenstående må vi konstatere, at et øget threshold ikke har optimeret modellernes fit. Til gengæld er usikkerhederne steget i takt med de øgede thresholdværdier, da færre maksima værdier medtages. For at undgå den øgede usikkerhed ved et lavere antal ekstreme værdier, fortsætter vi med de tre modeller med lavere thresholds. Modellerne med lavere thresholds giver også en større sikkerhed af hvilken fordeling der giver bedste fit af maksima værdierne. Dermed har vi parameterestimerne givet i Tabel 5-5, som vi bruger til estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall.



Figur 5-11: Return level plots og QQ-plots af POT modellerne med threshold $u = 0,03$ for Danske Bank A/S, $u = 0,05$ for Vestas Wind Systems A/S og $u = 0,04$ for A.P. Møller – Mærsk A/S.

5.3 Anvendelse af ekstremværditeori og heteroskedastiske modeller

I dette afsnit vil vi først estimere volatiliteten i log afkastet for Danske Bank, Vestas og Mærsk ved at estimere heteroskedastiske modeller, hvorefter vi vil anvende ekstremværditeori på de standardiserede residualer, dvs. residualerne divideret med deres estimerede standardafvigelse, for de heteroskedastiske modeller. Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall vil vi komme ind på i et efterfølgende afsnit.

5.3.1 Konstruktion af heteroskedastisk model

I tidligere afsnit så vi, at der ikke var tegn på, at modellering af den betingede middelværdi var nødvendig for de tre processer, hvorfor vi ikke anvender modeller til dette. I stedet kigger vi på modellering af den betingede varians, som så ud til ikke at være konstant. Det tyder på, at processerne indeholder volatilitet, som vi forhåbentlig kan modellere med ARCH eller GARCH modeller. Vi finder derfor de bedste ARCH og GARCH modeller for Danske Bank, Vestas og Mærsk ved at teste flere ordener og sammenligne AIC og BIC værdier. Vi får resultaterne i Tabel 5-7 og Tabel 5-8 nedenfor efter fit af ARCH og GARCH modeller med antagelse af Student t-fordelte innovationer.

ARCH modeller	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
$ARCH(1,0)$	-5,3537	-5,3444	-4,4980	-4,4887	-5,1455	-5,1362
$ARCH(2,0)$	-5,3808	-5,3692	-4,5113	-4,4997	-5,1558	-5,1441
$ARCH(3,0)$	-5,3841	-5,3700	-4,5134	-4,4994	-5,1583	-5,1444
$ARCH(4,0)$	-5,3860	-5,3697	-4,5214	-4,5051	-5,1583	-5,1420
$ARCH(5,0)$	-5,3881	-5,3695	-4,5229	-4,5042	-5,1624	-5,1438

Tabel 5-7: AIC og BIC værdier ved fit af forskellige ARCH modeller for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P.

Møller – Mærsk A/S.

GARCH modeller	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
$GARCH(1,1)$	-5,4091	-5,3975	-4,5379	-4,5263	-5,1709	-5,1569
$GARCH(1,2)$	-5,4093	-5,3953	-4,5383	-4,5243	-5,1708	-5,1545

<i>GARCH</i> (1,3)	-5,4111	-5,3948	-4,5412	-4,5249	-5,1705	-5,1519
<i>GARCH</i> (2,1)	-5,4034	-5,3944	-4,5370	-4,5231	-5,1701	-5,1538
<i>GARCH</i> (2,2)	-5,4085	-5,3922	-4,5374	-4,5212	-5,1700	-5,1514
<i>GARCH</i> (2,3)	-5,4103	-5,3916	-4,5404	-4,5218	-5,1697	-5,1488
<i>GARCH</i> (3,1)	-5,4076	-5,3912	-4,5361	-4,5198	-5,1693	-5,1506
<i>GARCH</i> (3,2)	-5,4077	-5,3890	-4,5365	-4,5179	-5,1692	-5,1482
<i>GARCH</i> (3,3)	-5,4095	-5,3885	-4,5396	-4,5186	-5,1689	-5,1456

Tabel 5-8: AIC og BIC værdier ved fit af forskellige GARCH modeller for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P.

Møller – Mærsk A/S.

I Tabel 5-7 og Tabel 5-8 kan vi se, at AIC og BIC værdierne i de fleste tilfælde peger på to forskellige modeller, om end forskellen mellem de to kriterier for de fleste modeller er lille, så undersøger vi via likelihood ratio tests, hvilke modeller vi skal vælge. For Vestas har vi *ARCH*(4,0) med log-likelihood værdi 5656,519 og *ARCH*(5,0) med log-likelihood værdi 5659,353, hvilket giver os en χ^2 -værdi på 5,668 med 1 frihedsgrad og dermed en p-værdi på 0,01728. Vi kan derfor forkaste nulhypotesen, der siger, at den reducerede model er den sande, hvorfor *ARCH*(5,0) vælges for Vestas. På samme måde bestemmes valg af *ARCH* og *GARCH* modeller i de resterende tilfælde, hvor AIC og BIC ikke indikerer samme model. Vi får da følgende modeller: for Danske Bank er de to bedste modeller givet ved *ARCH*(5,0) og *GARCH*(1,3), for Vestas er de *ARCH*(5,0) og *GARCH*(1,3) og for Mærsk er de *ARCH*(5,0) og *GARCH*(1,1). Hvis vi sammenligner AIC og BIC værdierne for *ARCH* og *GARCH* modellerne, så ser vi, at værdierne er mindst for *GARCH* modellerne. Samtidigt ser vi, at *ARCH* modellerne med mindste AIC værdier har relativt høje ordener q , hvorfor vi vælger at fitte *GARCH* modellerne til vores data og tester for autokorrelation i de standardiserede residualer og de kvadrerede standardiserede residualer (fremover rene- og kvadrerede residualer). I bilag 9.5 ser vi ACF plots for de tre modeller, og af disse kan vi se, at de rene residualer og de kvadrerede residualer ikke indeholder autokorrelation. Vi dobbelttjekker med Ljung-Box tests med p-værdier i Tabel 5-9, der bekræfter, at de rene- og kvadrerede residualer er ukorrelerede.

Ljung-Box test p-værdier	Danske Bank	Vestas	Mærsk
Rene residualer	0,4307	0,2368	0,6301
Kvadrerede residualer	0,8548	0,9916	0,7188

Tabel 5-9: Ljung-Box test p-værdier for test af autokorrelation i de rene residualer og de kvadrerede residualer for GARCH modellerne for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

Vi bemærker, at p-værdierne er højere end signifikansniveau på 0,05 og 0,01 for de rene- og kvadrerede residualer, hvorfor vi bekræftes i, at residualerne ikke indeholder autokorrelation. Vi ser på de mange ACF plots, at der kun ved meget få lags er autokorrelation, der overstiger grænserne, men da 95% ligger under grænserne kan vi antage, at de rene- og kvadrerede residualer er ukorrelerede. Da de rene residualer ikke udviser tegn på autokorrelation, antager vi, at de rene residualer er en svag hvid støj proces, og vi kan derfor fortsætte med anvendelse af ekstremværditeori.

5.3.2 Block Maxima og Peaks Over Threshold

I forrige afsnit fittede vi GARCH modeller til de tre tidsrækker. Af de GARCH modeller er det muligt at beregne de standardiserede residualer, dvs. residualerne divideret med standardafvigelsen, og af disse identificerer vi nu maksima værdier ved brug af Block Maxima- og Peaks Over Threshold metoderne. Vi starter med blokstørrelse for Block Maxima metoden, og lige som tidligere undersøger vi modeller med halvårlig-, kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse. Dette giver os 19, 39 og 119 maksima værdier for hhv. halvårlig-, kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse. At bruge 19 maksima værdier til at estimere tre parametre er ikke meget, hvorfor vi formoder blokstørrelsen er for lille til at give et tilfredsstillende fit. Vi fortsætter dog alligevel med at estimere fordelingerne for maksima værdierne givet af de tre blokstørrelser. Dette giver os nedenstående parameterestimer og konfidensinterval.

A	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,1600	[-0,192; 0,927]	0,3421	[-0,173; 0,914]	0,2848	[-0,066; 0,819]
$\hat{\mu} =$	3,0261	[2,713; 3,411]	2,8359	[2,554; 3,224]	2,7704	[2,502; 3,112]
$\hat{\sigma} =$	0,6362	[0,393; 0,996]	0,6064	[0,389; 0,984]	0,5742	[0,376; 0,910]

B	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,0880	[−0,128; 0,395]	0,2040	[−0,053; 0,578]	0,1518	[−0,046; 0,455]
$\hat{\mu} =$	2,3726	[2,132; 2,639]	2,3535	[2,147; 2,591]	2,3395	[2,144; 2,557]
$\hat{\sigma} =$	0,6979	[0,537; 0,928]	0,5992	[0,447; 0,810]	0,5765	[0,442; 0,767]

C	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,1271	[−0,007; 0,302]	0,0630	[−0,046; 0,200]	0,0620	[−0,037; 0,185]
$\hat{\mu} =$	1,6242	[1,507; 1,748]	1,5286	[1,402; 1,660]	1,6616	[1,548; 1,780]
$\hat{\sigma} =$	0,5812	[0,497; 0,682]	0,6416	[0,557; 0,747]	0,5833	[0,508; 0,678]

Tabel 5-10: Parameterestimer og konfidensinterval for modeller med forskellig blokstørrelse. Tabel A indeholder estimer for halvårlig blokstørrelse, Tabel B for kvartalsvis blokstørrelse og Tabel C for månedlig blokstørrelse.

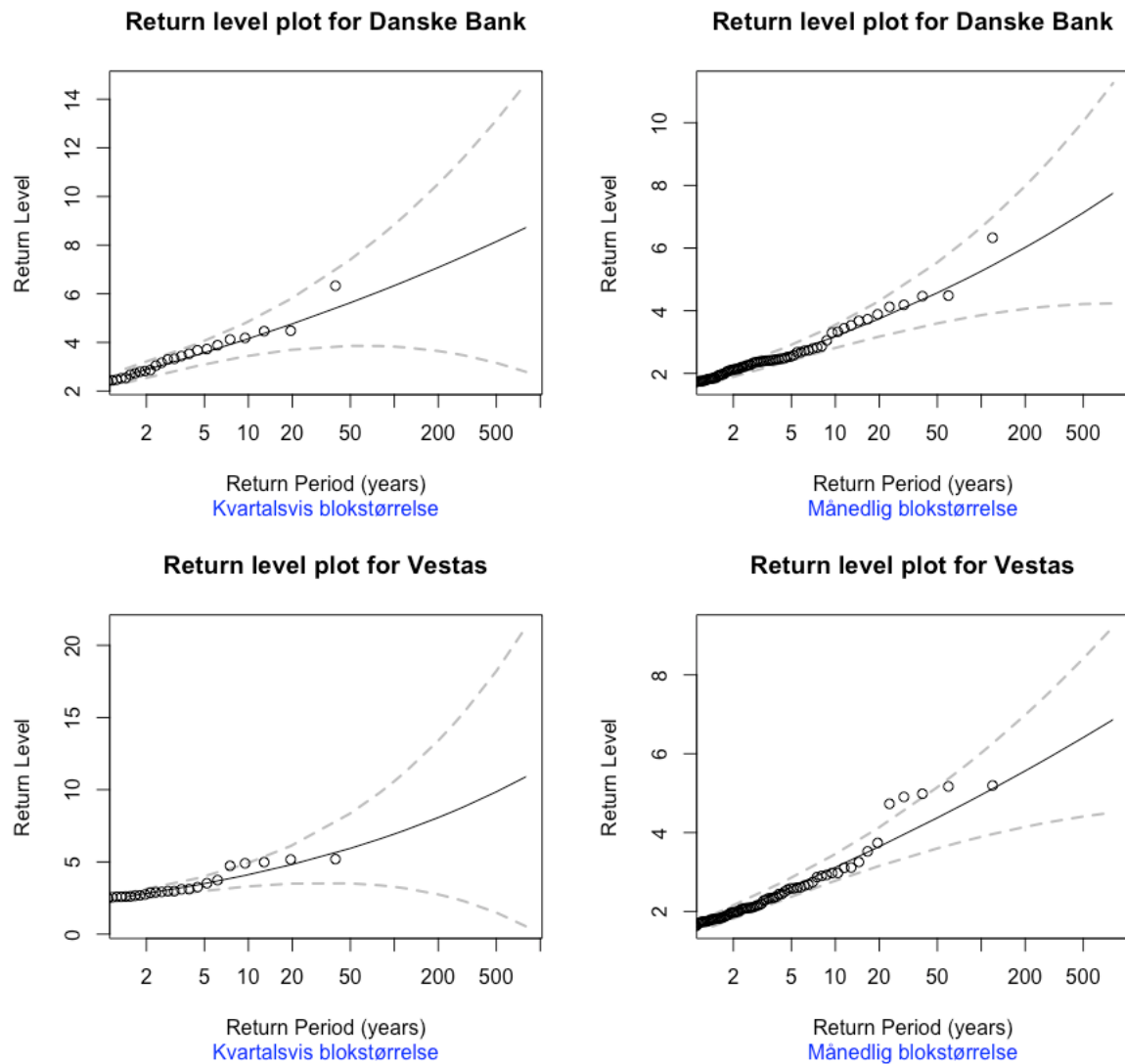
KI = Konfidensinterval beregnet via profil-likelihood.

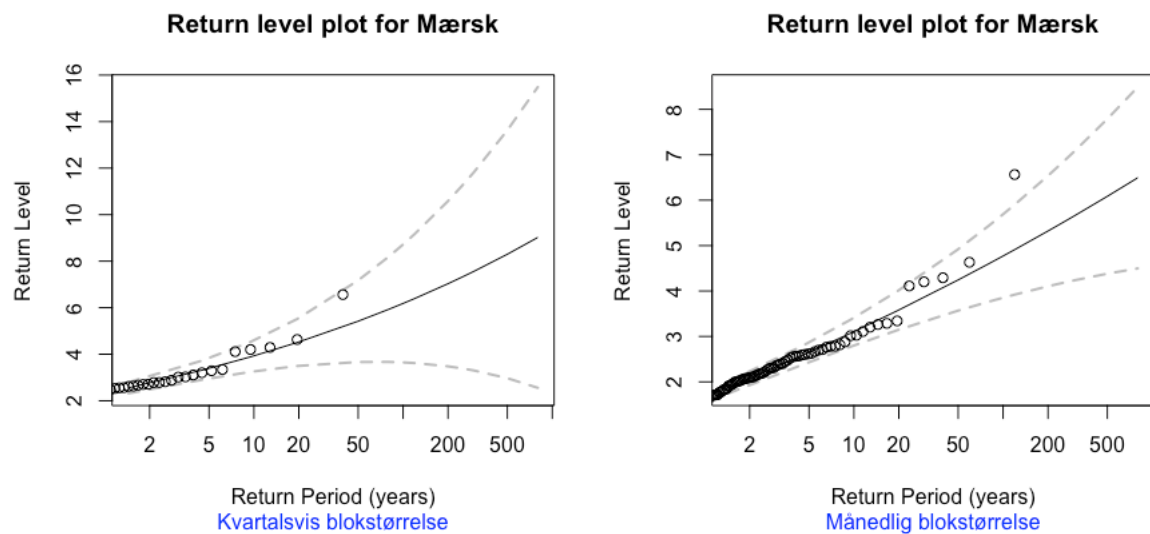
Ud fra Tabel 5-10 kan vi se, at alle modellerne estimerer, at fordelingen af maksima værdierne bedst fittes med en Fréchet fordeling, som vi oftest ser for finansiell data. Ingen af estimerne af $\hat{\xi} < 0$. Vi ser dog, at $\hat{\xi}$ bliver tættere på 0 i takt med antallet af maksima værdier stiger. Usikkerhederne bliver også mindre, og ingen af de nedre grænser i konfidensintervallene for formparameteren ved månedlig blokstørrelse er negativ, hvorfor vi kan konkludere, at Fréchet fordelingen giver bedste fit. Størrelsesforholdet på usikkerhederne mellem de tre blokstørrelser bliver mindre i takt med, at antallet af maksima værdier stiger som ventet. Hvis vi kigger på AIC og BIC værdier for modellerne med forskellig blokstørrelse, der kan ses i Tabel 5-11 nedenfor, så ser vi, at AIC og BIC er lavest for modellerne med en månedlig blokstørrelse. Dette bekræftes også af likelihood ratio tests, der kan ses i bilag 9.6.

	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
Blokstørrelse	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
Halvårlig	52,3027	55,1360	54,3554	57,1887	51,1083	53,9416
Kvartalsvis	105,1201	110,1108	89,3411	103,3318	92,8405	97,8312
Månedlig	269,788	278,126	284,0268	292,3642	260,9595	269,2969

Tabel 5-11: AIC og BIC værdier for modellerne med forskellig blokstørrelse.

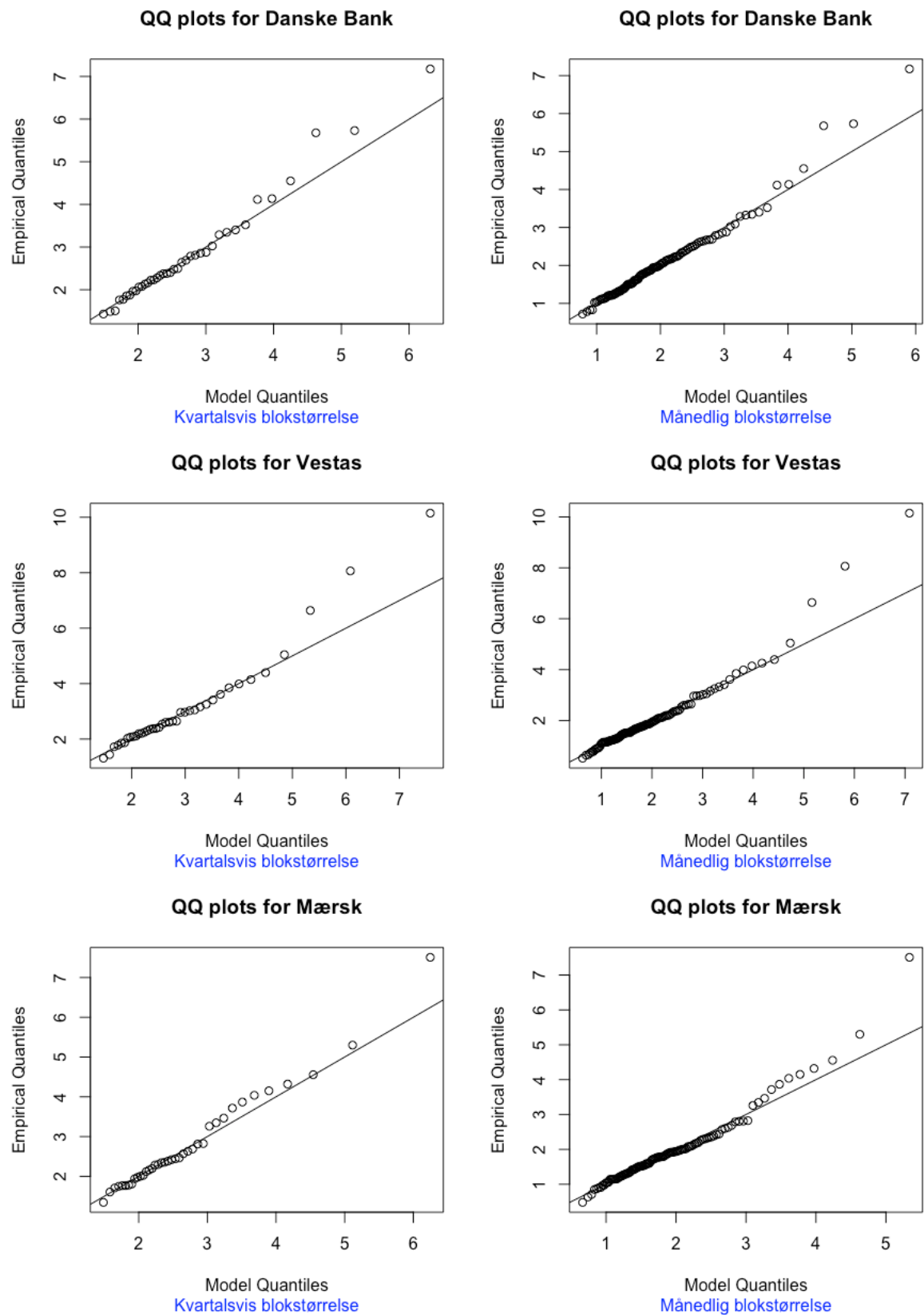
Vi undersøger fittet af modellerne visuelt, idet vi kigger på return level plots og fraktilplots (QQ plots). Vi ser bort fra modellerne med halvårlige maksima værdier, da antallet af maksima værdier er for små og giver for store usikkerheder. Dertil viser AIC og BIC samt likelihood ratio tests, at modellerne med kvartalsvise- og månedlige maksima værdier giver bedre fit. Return level plots og QQ plots for modellerne med kvartalsvise- og månedlige maksima værdier kan ses i hhv. Figur 5-12 og Figur 5-13 nedenfor.





Figur 5-12: Return level plots for GARCH-EVT modellerne med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

Af return level plots i Figur 5-12 bemærker vi først for alle modellerne, at de estimerede return levels generelt følger kurven bestemt af modellerne godt. Vi ser først, at de begynder at afvige ved høje return periods. Vi ser også, at usikkerhederne er mindre for modellerne med månedlige maksima værdier, og som konsekvens heraf ser vi estimerede return levels for Vestas og Mærsk modellerne, der overskrider usikkerhederne. For modellerne med kvartalsvise maksima værdier ser vi ikke helt så stor en afvigelse ved længere return periods, og ingen af de estimerede return levels overskrider usikkerhederne. Baseret på return level plots er der belæg for at fortsætte med en kvartalsvis blokstørrelse, dog kigger vi også på QQ plots inden vi fortsætter.

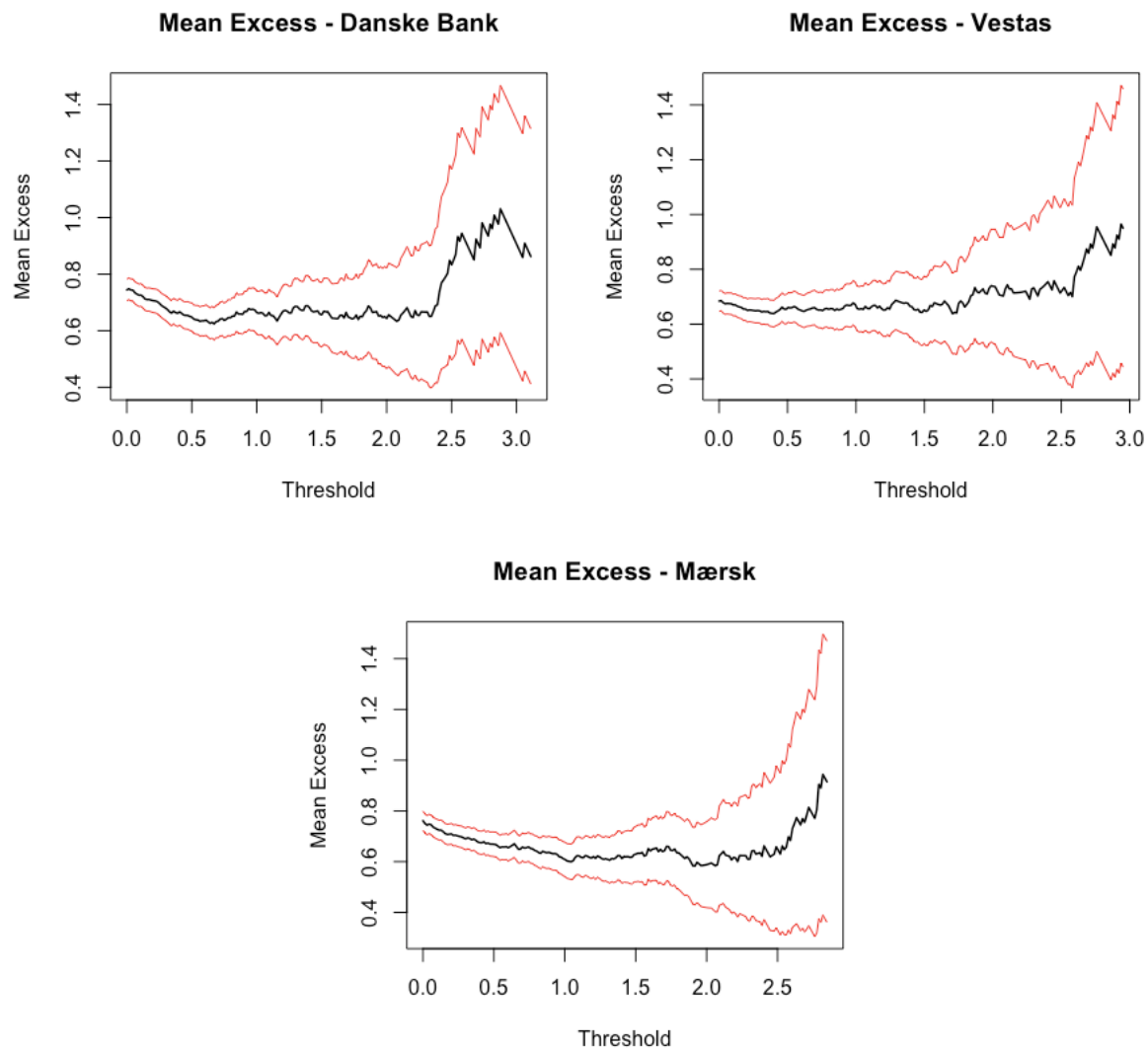


Figur 5-13: QQ plots for GARCH-EVT modellerne med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

På QQ plots i Figur 5-13 ser vi, at de estimerede modeller generelt følger de empiriske værdier. Vi ser, at modellerne afviger ved større værdier, hvilket er ens for modellerne med kvartalsvise- og månedlige maksima værdier. Det tyder på, at der er noget i halefordelingen af maksima værdierne, som vores modeller ikke fanger. Ud fra ovenstående QQ plots kan vi ikke bekræfte, hvilke af modellerne der giver det bedste fit. Vi kigger derfor på de modellerede- og empiriske tæthedsfunktioner for modellerne, hvilket kan ses i bilag 9.7. Ud fra tæthedsfunktioner ser vi samme observationer, som i Figur 5-13 af QQ plots, idet modellerne med kvartalsvise- og månedlige maksima værdier begge følger den empiriske tæthed fint. Dog ser vi for Mærsk, at en model på månedlige maksima værdier giver bedste fit. Vi ser ikke helt samme tydelige forskel i de to modellens fit for Danske Bank og Vestas.

Ud fra AIC og BIC værdierne samt likelihood ratio tests giver modellerne med månedlige maksima værdier bedste fit, men efter undersøgelse af QQ plots og plots af tæthedsfunktionerne så vi ikke en tydelig forbedring. Det gjorde vi kun i plot af tæthedsfunktionerne for Mærsk, hvor modellen med månedlige maksima værdier bedre fulgte den empiriske tæthed. I Figur 5-12 så vi på return level plots og observerede, at estimerede return levels overskred usikkerhederne for modellerne med månedlige maksima værdier for Danske Bank, Vestas og Mærsk, hvilket kan være belæg for at vælge modellerne med en kvartalsvis blokstørrelse. På trods af dette valgte vi modellerne med månedlige maksima værdier. Det var ikke muligt visuelt at se en forskel i fittet for modellerne (med undtagelse af Mærsk), dog opnåede vi mindre usikkerheder for parameterestimerterne ved de månedlige maksima værdier. Dertil så vi en tydelig forbedring i fittet for Mærsk.

Næste step er at anvende Peaks Over Threshold til at identificere maksima værdier af de standardiserede residualer fra GARCH modellerne. Vi starter med at kigge på mean excess plots for at få en idé om fornuftige valg af thresholds. Mean excess plots kan ses i Figur 5-14 nedenfor.



Figur 5-14: Mean excess plot for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

Ud fra de tre mean excess plots er det vanskeligt at se, hvad en fornuftig thresholdværdi er for de tre virksomheder, men vi ser, at usikkerhederne i alle tre plots begynder at stige i takt med thresholdværdierne bliver større. For alle tre modeller kan vi se, at omkring $u = 1,5$ begynder usikkerhederne langsomt at stige, hvorfor vi vil begynde med et threshold heromkring. For Danske Bank starter vi med et threshold på $u_{DB} = 1,2$, da kurven "knækker" ved denne værdi. For Vestas og Mærsk ser vi ikke et lige så tydeligt "knæk" i kurven, men ud fra de øgede usikkerheder vælger vi thresholds på $u_{V,M} = 1,3$ til at begynde med. Dette giver os 225, 174 og 213 maksima værdier for hhv. Danske Bank, Vestas og Mærsk. Vi vil nu estimere fordelingen af maksima værdierne, hvilket giver os følgende parameterestimer og konfidensinterval:

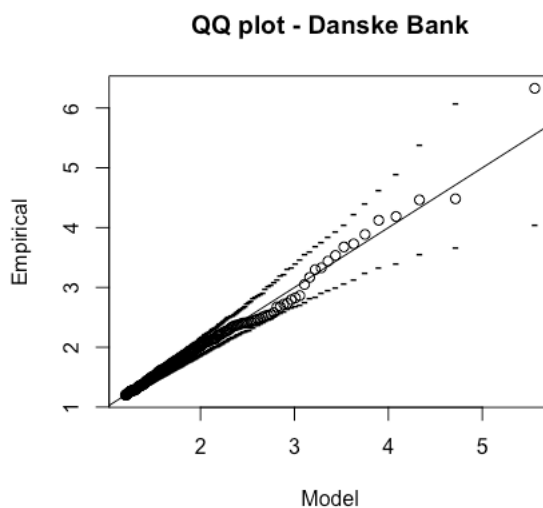
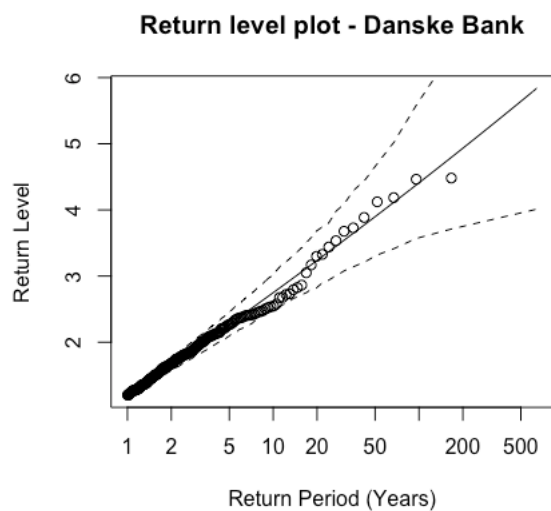
	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,0302	$[-0,074; 0,177]$	0,0442	$[-0,080; 0,216]$	0,0659	$[-0,045; 0,225]$
$\hat{\beta} =$	0,6495	$[0,536; 0,777]$	0,6507	$[0,522; 0,795]$	0,5681	$[0,463; 0,686]$

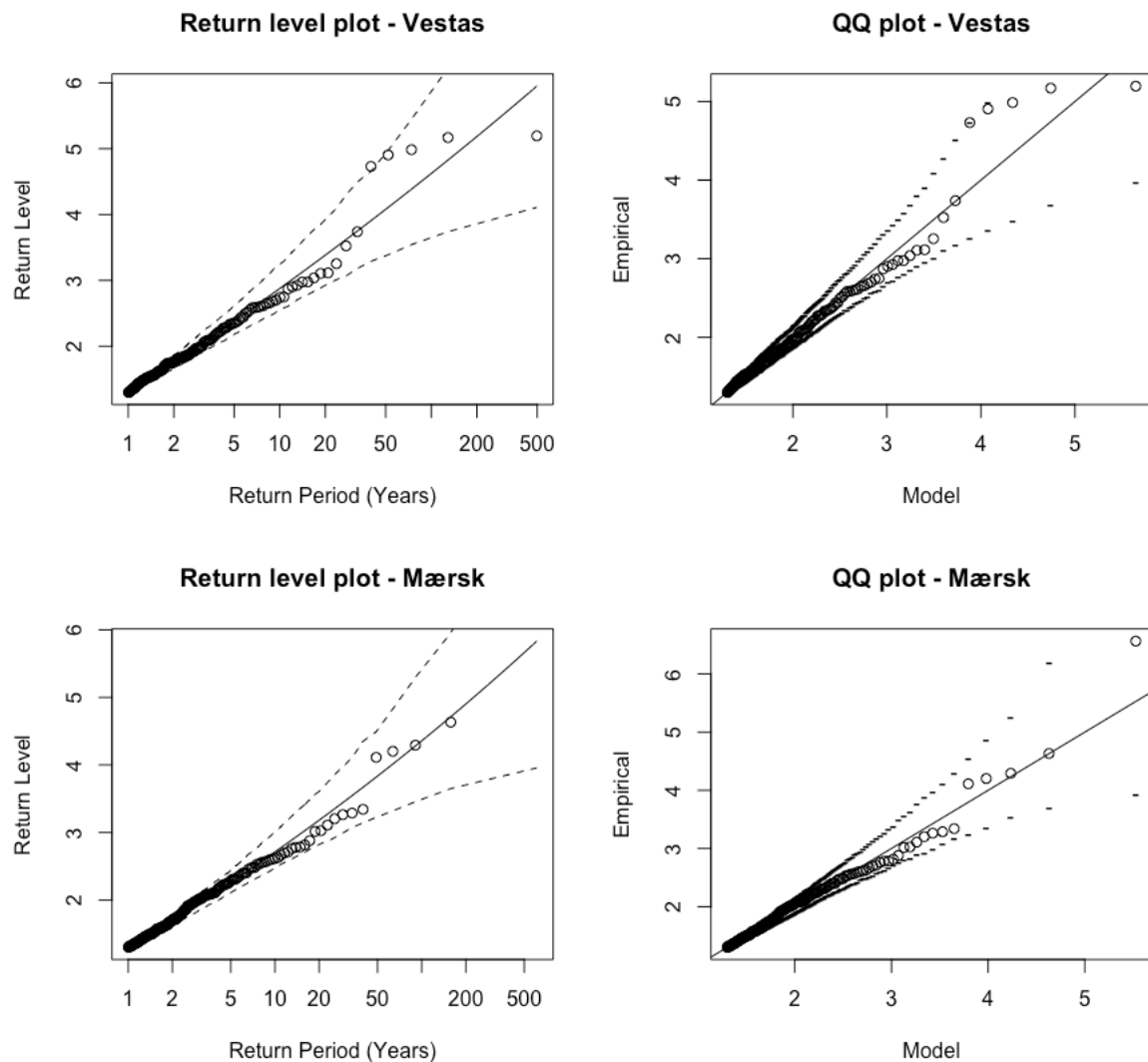
Tabel 5-12: Parameterestimer for estimering af en GPD fordeling på maksima værdierne for Danske Bank A/S, Vestas

Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S med $u_{DB} = 1,2$ og $u_{V,M} = 1,3$.

KI = Konfidensinterval estimeret via profil-likelihood.

Vi bemærker, at fordelingen af maksima værdier estimeres til at følge en Paretofordeling for alle tre modeller, om end estimerne $\hat{\xi}_{DB,V,M}$ er tæt på nul. Dog ser vi, at konfidensintervallene er forholdsvis store. Vi undersøger fittet af de tre modeller ved først at kigge på return level plots og QQ plots.





Figur 5-15: Return level- og QQ plots for modellerne for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S med threshold $u_{DB} = 1,2$ og $u_{V,M} = 1,3$.

Af Figur 5-15 ser vi, at modellerne generelt giver et godt fit. De estimerede return levels følger kurverne bestemt af de respektive modeller, og det samme ser vi i QQ plottene. Det er først ved længere return periods og større værdier, at estimeringerne begynder at afvige en lille smule fra kurven og de empiriske værdier. De største afvigelser ser vi for modellen for Vestas, om end fittet må siges at være tilfredsstillende på trods af dette. De mindste afvigelser ses for Danske Bank, hvor modellen giver et godt fit. Vurderingen af modellernes fit bekræftes igen af plot af de empiriske- og modellerede tætheder, der kan ses i bilag 9.8. Selvom vi generelt ser, at modellerne giver et fint fit, ønsker vi alligevel at undersøge, om vi ved andre thresholdværdier kan opnå bedre resultater. Vi ser også, at usikkerhederne

muligvis er for små i forhold, idet estimerede return levels for Vestas er tæt på at overskride øvre grænse af usikkerheden. Tidligere benyttede vi mean excess plots til at få en idé om thresholdværdier, men da dette er svært at aflæse, kigger vi nu i stedet på et plot af parameterestimerer mod thresholdværdier for de tre processer. De ses i bilag 9.9. Af de forskellige plots ser vi, at thresholdværdier over $u = 1,5$ øger usikkerhederne for parameterestimererne for Danske Bank og Mærsk. Vi ser for Vestas, at usikkerhederne først stiger ved en thresholdværdi på $u = 2$. Vi ser også, at vores første antagelser om thresholds på $u_{DB} = 1,2$ og $u_{V,M} = 1,3$ muligvis var for lave, hvorfor vi forsøger at øge vores valgte thresholds. Hvis vi sætter thresholds til at være $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$, får vi 164, 101 og 124 maksima værdier for hhv. Danske Bank, Vestas og Mærsk. Dette giver os følgende parameterestimerer og konfidensinterval:

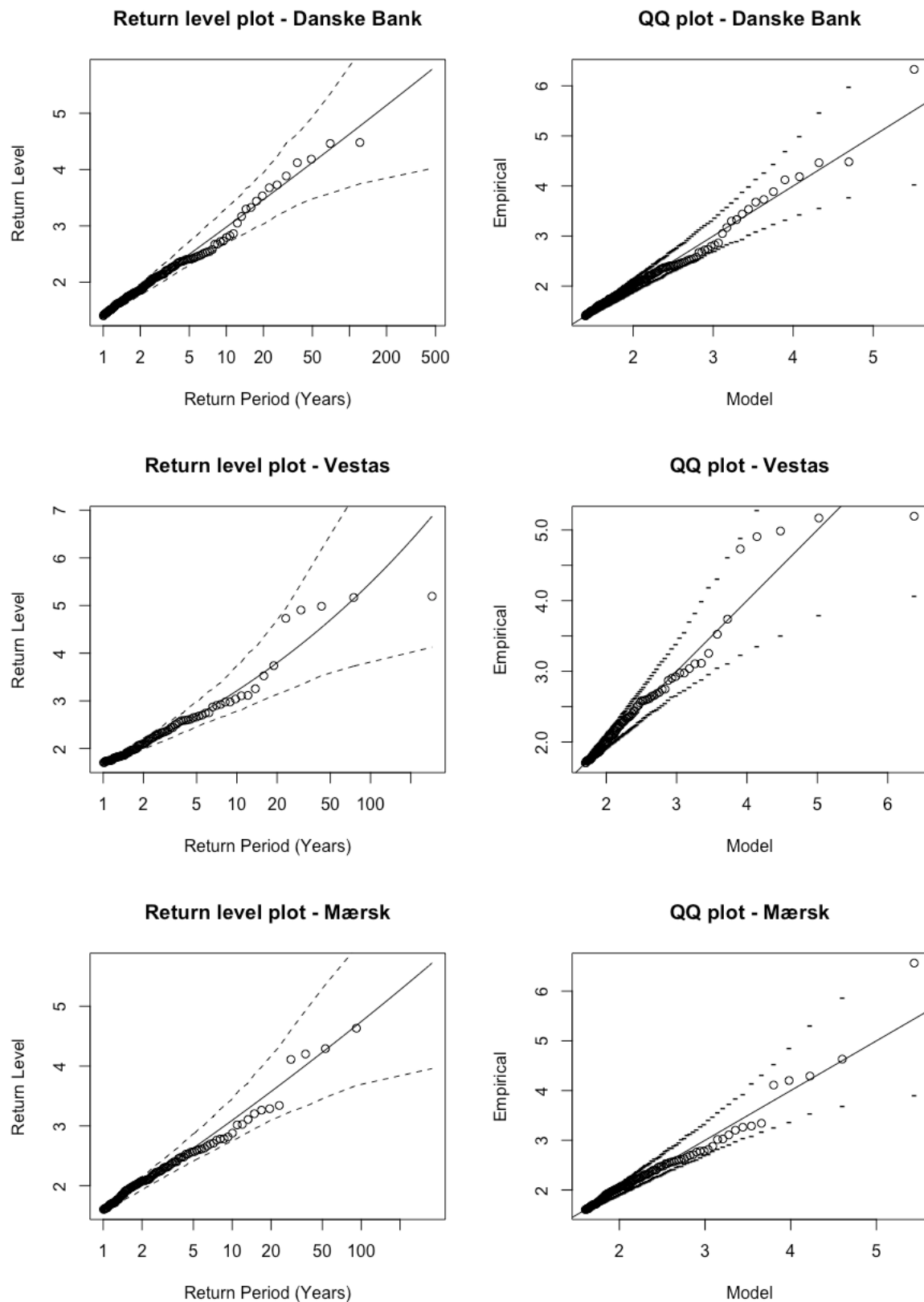
	Danske Bank		Vestas		Mærsk	
	Estimat	KI	Estimat	KI	Estimat	KI
$\hat{\xi} =$	0,0196	$[-0,095; 0,186]$	0,1762	$[-0,024; 0,474]$	0,0429	$[-0,081; 0,237]$
$\hat{\beta} =$	0,6701	$[0,542; 0,824]$	0,5322	$[0,383; 0,721]$	0,6174	$[0,484; 0,779]$

Tabel 5-13: Parameterestimerer for estimering af en GPD fordeling på maksima værdierne for Danske Bank A/S, Vestas

Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S med $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$.

KI = Konfidensinterval estimeret via profil-likelihood.

Vi bemærker først, at fordelingen af maksima værdier estimeres til at følge en Pareto fordeling, idet $\hat{\xi} > 0$ for alle tre modeller. Dernæst ser vi, at konfidensintervallene er blevet større i forhold til konfidensintervallene i Tabel 5-12, som vi også forventede, idet antallet af maksima værdier er faldet. Kigger vi på AIC værdierne (se bilag 9.10) for modellerne med thresholds $u_{DB} = 1,2$, $u_{V,M} = 1,3$ og $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$, $u_M = 1,6$, ser vi, at AIC værdierne er større ved for modellerne med lavere thresholds, hvilket tyder på, at modellerne med thresholds på $u_{DB} = 1,2$ og $u_{V,M} = 1,3$ giver et bedre fit. Vi kigger igen på fit af de tre modeller ved at fremstille return level plots og QQ plots.



Figur 5-16: Return level- og QQ plots for modellerne for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S med threshold $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$.

Af Figur 5-16 ser vi, at modellerne giver et godt fit, idet vi i return level plots kan se, at de estimerede return levels følger de modelbestemte kurver, og vi i QQ plots ser, at de estimerede værdier forholdsvis præcist følger de empiriske. Ser vi på plots af empiriske- og modellerede tætheder, der kan ses i bilag 9.11, opnår vi samme konklusion. Modellerne giver et godt fit og følger de empiriske tætheder godt. Hvis vi sammenligner return level plots og QQ plots for modellerne med threshold $u_{DB} = 1,2$, $u_{V,M} = 1,3$ og $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$, der kan ses i Figur 5-15 og Figur 5-16, bemærker vi, at usikkerhederne er blevet større, men at der ikke umiddelbart er tydelig forskel i fittet af modellerne. På baggrund af vores undersøgelse kan vi ikke konkludere hvilke af de to thresholds, der giver de bedste resultater, men da vi for lavere thresholds så estimerede return levels, der oversteg usikkerhederne, og samtidig havde modeller bygget på mange maksima værdier, vælger vi at fortsætte med modellerne, der har thresholds $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$.

5.4 Estimering og sammenligning af Value-at-Risk og Expected Shortfall estimerer

I de forrige afsnit har vi anvendt ekstremværditeori og statistiske modeller til modellering af volatilitet i finansiell data, og det har givet os en række modeller, som vi nu vil benytte til at estimere Value-at-Risk og Expected Shortfall. Til at begynde med estimerer vi de to finansielle risikomål på BM- og POT modellerne, hvor vi fra log afkastet af de tre tidsrækker undersøgte ekstremværdier og estimerede deres fordelinger. Dernæst forsøgte vi at starte med modellering af log afkastets volatilitet, idet vi estimerede en række ARCH- og GARCH modeller for log afkastet af hver tidsrække og fandt de bedste modeller for hver virksomhed. Dette resulterede i tre GARCH modeller, som vi kunne beregne standardiserede residualer af, og af disse estimerer vi VaR og ES. Til slut benyttede vi de standardiserede residualer fra GARCH modellerne og identificerede maksima værdier heraf via Block Maxima- og Peaks Over Threshold metoderne. Det resulterede i en BM- og POT model for hver af de tre virksomheder, hvorfra vi vil benytte parameterestimererne til estimering af VaR og ES.

Tidligere i teoriafsnittet omkring estimering af VaR og ES for BM metoden blev nævnt, at Peaks Over Threshold generelt giver bedre resultater ved undersøgelse af ekstremværdier for finansiell data, da Block Maxima metoden ikke fanger klyngedannelse. På baggrund af dette vil vi ikke estimere Expected Shortfall for modellerne bygget på BM metoden, men derimod kun kigge på Value-at-Risk estimater.

I estimeringen af Value-at-Risk og Expected Shortfall for GARCH modellerne, indgår den betingede middelværdi og varians, samt fordelingsfunktionen for en standardiseret t-fordeling. Når disse er estimeret, indsættes de i formelen for estimering af 1-dag Value-at-Risk, der er givet ved³⁹:

$$VaR_{\alpha}^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_q$$

Med

$$z_q = \sqrt{\frac{(v-2)}{v}} F_T^{-1}(q)$$

hvor $F_T(t)$ er fordelingsfunktionen for en standardiseret t-fordeling T med antal frihedsgrader $v > 2$. Den betingede middelværdi- og varians estimerer vi, idet vi foretager en 1-dags prædiktion på baggrund af de fittede GARCH modeller⁴⁰ og finder de to værdier. Estimeringen af Value-at-Risk og Expected Shortfall for modellerne baseret på EVT kan ses i ligningerne (6), (8) og (9). Samlet ses estimater af VaR og ES på baggrund af de opstillede modeller i Tabel 5-14 nedenfor.

Danske Bank	Value-at-Risk		Expected Shortfall	
	95%	99%	95%	99%
EVT m. månedlig blok	0,0082	0,0239	-	-
EVT m. $u_{DB} = 0,02$	0,0282	0,0495	0,0417	0,0653
$GARCH(1,3)$	0,0245	0,0502	0,0560	0,0865
$GARCH(1,3)$ -EVT m. månedlig blok	0,6849	1,5213	-	-
$GARCH(1,3)$ -EVT m. $u_{DB} = 1,4$	1,5827	2,6844	2,2699	3,3937

³⁹ [McNeil & Frey (2000), ligning (2), p. 276]

⁴⁰ [Ruppert et al. (2015), p. 562]

Vestas	Value-at-Risk		Expected Shortfall	
	95%	99%	95%	99%
EVT m. månedlig blok	0,0125	0,0370	-	-
EVT m. $u_V = 0,04$	0,0444	0,0779	0,0665	0,1090
$GARCH(1,3)$	0,0421	0,0753	0,0948	0,1581
$GARCH(1,3)$ -EVT m. månedlig blok	0,4316	1,4144	-	-
$GARCH(1,3)$ -EVT m. $u_V = 1,7$	1,5888	2,5427	2,2111	3,3690

Mærsk	Value-at-Risk		Expected Shortfall	
	95%	99%	95%	99%
EVT m. månedlig blok	0,0128	0,0278	-	-
EVT m. $u_M = 0,03$	0,0312	0,0510	0,0438	0,0659
$GARCH(1,1)$	0,0283	0,0458	0,0487	0,0726
$GARCH(1,1)$ -EVT m. månedlig blok	0,6634	1,5578	-	-
$GARCH(1,1)$ -EVT m. $u_M = 1,6$	1,5952	2,6237	2,2401	3,3148

Tabel 5-14: 1-dags Value-at-Risk og Expected Shortfall estimater for log afkast ved $\alpha = 0,95$ og $\alpha = 0,99$ for de konstruerede modeller for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

Af Tabel 5-14 ser vi, at vi får de laveste Value-at-Risk og Expected Shortfall estimater af modeller bygget kun på Block Maxima metoden, mens modellerne bygget på Peaks Over Threshold giver lidt større VaR og ES estimater. Dette indikerer, hvad vi kom ind på i teorien, hvor Block Maxima metoden grundet dens opbygning ikke medtager alle ekstreme værdier, hvis data indeholder klyngedannelse, som vi oftest ser for finansiell data. De lavere VaR og ES estimater kan være et tegn på, at Block Maxima modellerne ikke fanger al information i halefordelingerne af de tre log afkast. Vi ser også, at for de "rene" modeller afviger estimaterne af VaR og ES for GARCH- og POT modellerne næsten ikke. GARCH modellerne modellerer strukturen af den betingede varians for de tre log afkast og fanger dermed klyngedannelse i volatiliteten, mens POT metoden fanger nogle informationer i halefordelingen, som BM metoden ikke kunne. Af Tabel 5-14 ses de største VaR og ES estimater for de kombinerede GARCH-EVT modeller bygget på POT metoden, idet de

kombinerede modeller fanger både klyngedannelse i volatilitet, men også informationen i ekstremværdierne. Ud fra estimerne kan vi bekræfte, at de "rene" modeller underestimerer risikoen forbundet med de tre investeringer, såfremt vi kan antage, at GARCH-EVT modellerne med POT metoden giver et tilfredsstillende estimat af VaR og ES. Vi ser også, at GARCH-EVT modellerne med BM metoden resulterer i betydeligt lavere estimer af VaR og ES sammenlignet med GARCH-EVT modellerne med POT metoden. Helt generelt ser vi, at ekstremværditeori øger den estimerede risiko, da informationer i log afkastenes halefordelinger medtages. Af de to EVT metoder giver POT bedste estimer af VaR og ES.

6 Konklusion

Vi ønskede at undersøge, om estimeringen af de finansielle risikomål, Value-at-Risk og Expected Shortfall kunne optimeres med anvendelse af ekstremværditeori. Baseret på brugen af de forskellige modeller/metoder kan konkluderes, at anvendelsen af ekstremværditeori optimerer estimeringen af de finansielle risikomål og giver en mere præcis risikovurdering.

For at undersøge dette anvendte vi forskellige metoder til estimering af VaR og ES, idet vi benyttede ekstremværditeori – her BM og POT metoderne - og heteroskedastiske modeller, ARCH og GARCH, samt kombinationer af GARCH-EVT modeller. For de rene EVT modeller så vi, at fordelingen af maksima værdierne blev estimeret til at følge en Fréchet fordeling med tunge haler, idet $\xi > 0$. I teorien skulle vi også gerne se, at estimerne af haleindekset ξ er ens for GEV og GPD fordelingerne⁴¹, da formparameteren er ens i de to metoder, men det så vi ikke for de estimerede modeller. Af Block Maxima og Peaks Over Threshold metoderne så vi højere estimer af VaR og ES for POT modellerne, hvilket vi forventede, da vi med BM metoden kan risikere at miste ekstremværdier grundet metodens identificering af maksima værdier. Estimerne af VaR og ES var dog større for de rene GARCH modeller, der modellerede klyngedannelsen i volatiliteten for de tre tidsrækker. På trods af dette så vi de højeste VaR og ES estimer fra de kombinerede GARCH-EVT modeller bygget på POT

⁴¹ [Coles, S. (2001), p. 75-76]

metoden, der viste sig at resultere i betydeligt større estimater sammenlignet med estimaterne fra GARCH-EVT modellerne bygget på BM metoden. GARCH-POT modellerne estimerede VaR og ES betydeligt større end GARCH modellerne. Baseret på ovenstående indikerer vores undersøgelse altså, at anvendelsen af ekstremværditeori kan optimere estimeringen af VaR og ES, idet risikoen for større finansielle tab estimeres til at være større for de tre investeringer, når vi benytter en kombineret GARCH-EVT model. Det tyder på, at der er informationer i halefordelingen af de tre log afkast, som rene ARCH- og GARCH modeller ikke kan fange.

7 Perspektivering

I denne afhandling så vi, at anvendelsen af ekstremværditeori og heteroskedastiske modeller kan være med til at forbedre estimeringen af finansielle risikomål og dermed også finansiell risikostyring, idet et bedre beslutningsgrundlag bliver dannet. På trods af dette, har vi begrænset den empiriske analyse ved eksempelvis at udelukke modeller til modellering af den betingede middelværdi, såsom $ARMA(p, q)$, hvilket kunne have forbedret model fittet af GARCH og GARCH-EVT modellerne. Vi så også, at de fittede GARCH modeller havde forholdsvis høje ordener af p og q , hvilket en kombination af ARMA+GARCH model muligvis kunne have ændret på. En anden mulighed for at udvide undersøgelsen kunne have været at inddrage modeller, såsom AP-ARCH eller EGARCH, der kan fange asymmetrisk volatilitet og den gearingeffekt, som nogle gange kan observeres for finansiell data, hvor negative chok påvirker volatiliteten mere end positive chok. Alt dette kunne muligvis have resulteret i bedre model fit og dermed ledt til bedre estimater af Value-at-Risk og Expected Shortfall. Derudover kunne en udvidelse også være at kigge ind i "backtesting", der muligvis kunne benyttes som evalueringsværktøj af de forskellige estimater af Value-at-Risk og Expected Shortfall. Det kunne have givet et bedre grundlag til vurdering af estimaterne og dermed om metoderne/modellerne kan anvendes inden for finansiell risikostyring. Derudover kunne man også kigge på forskellige estimeringsmetoder i stedet for kun at benytte maximum likelihood estimering, eller udvide antallet af modeller og f.eks. forsøge at fitte en kombination af BM- og POT metoderne, hvor man først inddeler i blokke og dernæst finder værdier over thresholds.

8 Litteraturliste

8.1 Bøger

McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts (2015). Quantitative Risk Management: concepts, techniques and tools. Princeton University Press.

Coles, S. (2001). An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. Springer Series in Statistic.

Ruppert, David and Matteson, David S. (2015). Statistics and Data Analysis for Financial Engineering. *Second Edition*. Springer Texts in Statistics.

Röman, Jan R. M. (2017). Analytical Finance: Volume I. Springer Nature.

Röman, Jan R. M. (2017). Analytical Finance: Volume II. Springer Nature.

Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (2012). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.

S. Tsay, R. (2002), Analysis of Financial Time Series. First edition. John Wiley & Sons, Inc.

8.2 Artikler

McNeil, A. J. & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance* Vol. 7 (no. 3–4), pages 271–300.

Nelson, Daniel B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica* Vol. 59 (no. 2), pages 357-370.

Artzner, Philippe, F. Delbaen, J. M. Eber og D. Heath (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance* Vol. 9 (no. 3), pages 203-228.

Andersson, Klara (2020). A comparative study of VaR and ES using extreme value theory, Department of Economics, Lund University.

8.3 Hjemmesider

Bank of International Settlements (BIS). *About BIS – overview*.

Accessed at: <https://www.bis.org/about/index.htm> on September 20, 2021.

Bank of International Settlements (BIS). *Basel Framework: MAR – Calculation of RWA for market risk*. RWA = risk-weighted assets. Accessed at:

https://www.bis.org/basel_framework/standard/MAR.htm on September 20, 2021.

Bank of International Settlements (BIS). *Basel Framework: MAR30 – Internal models approach*. Accessed at:

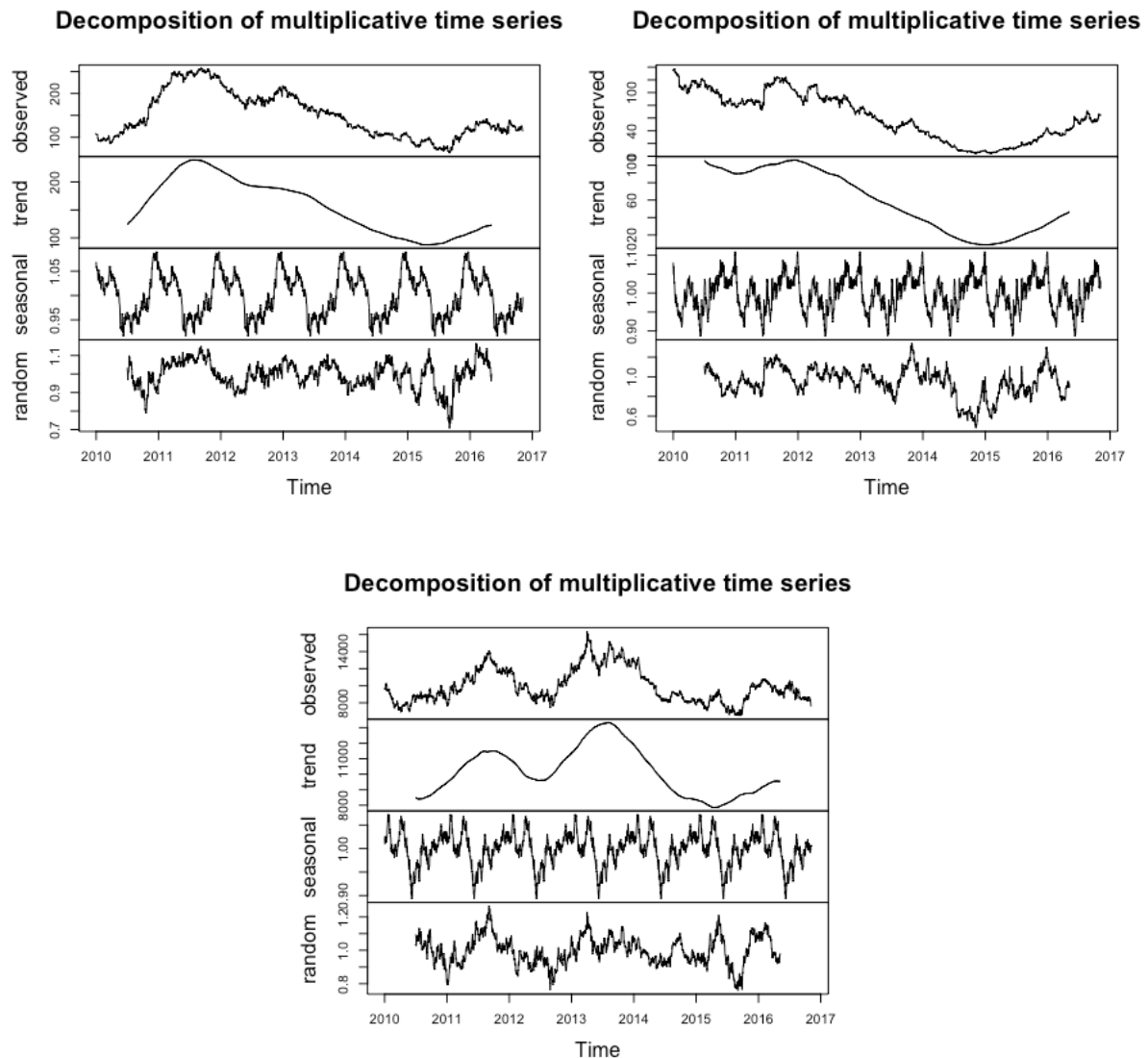
https://www.bis.org/basel_framework/chapter/MAR/30.htm?inforce=20191215&published=20191215 on November 1st, 2021.

Bank of International Settlements (BIS). *Basel Framework: MAR33 – Internal models approach: capital requirements calculation*. Accessed at:

https://www.bis.org/basel_framework/chapter/MAR/33.htm?inforce=20230101&published=20200605 on November 1st, 2021.

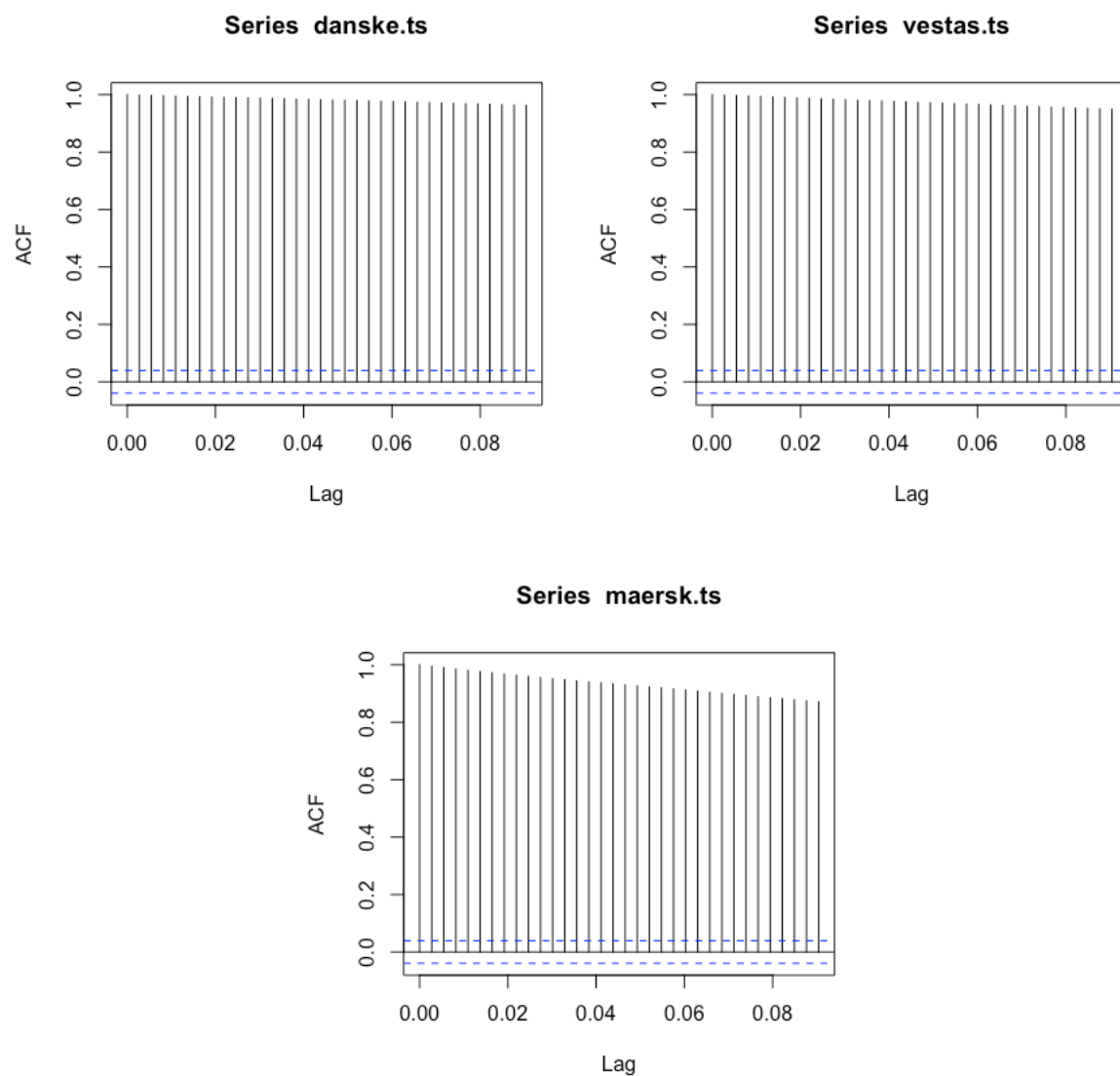
9 Bilag

9.1 Dekomposition af tidsrækkerne



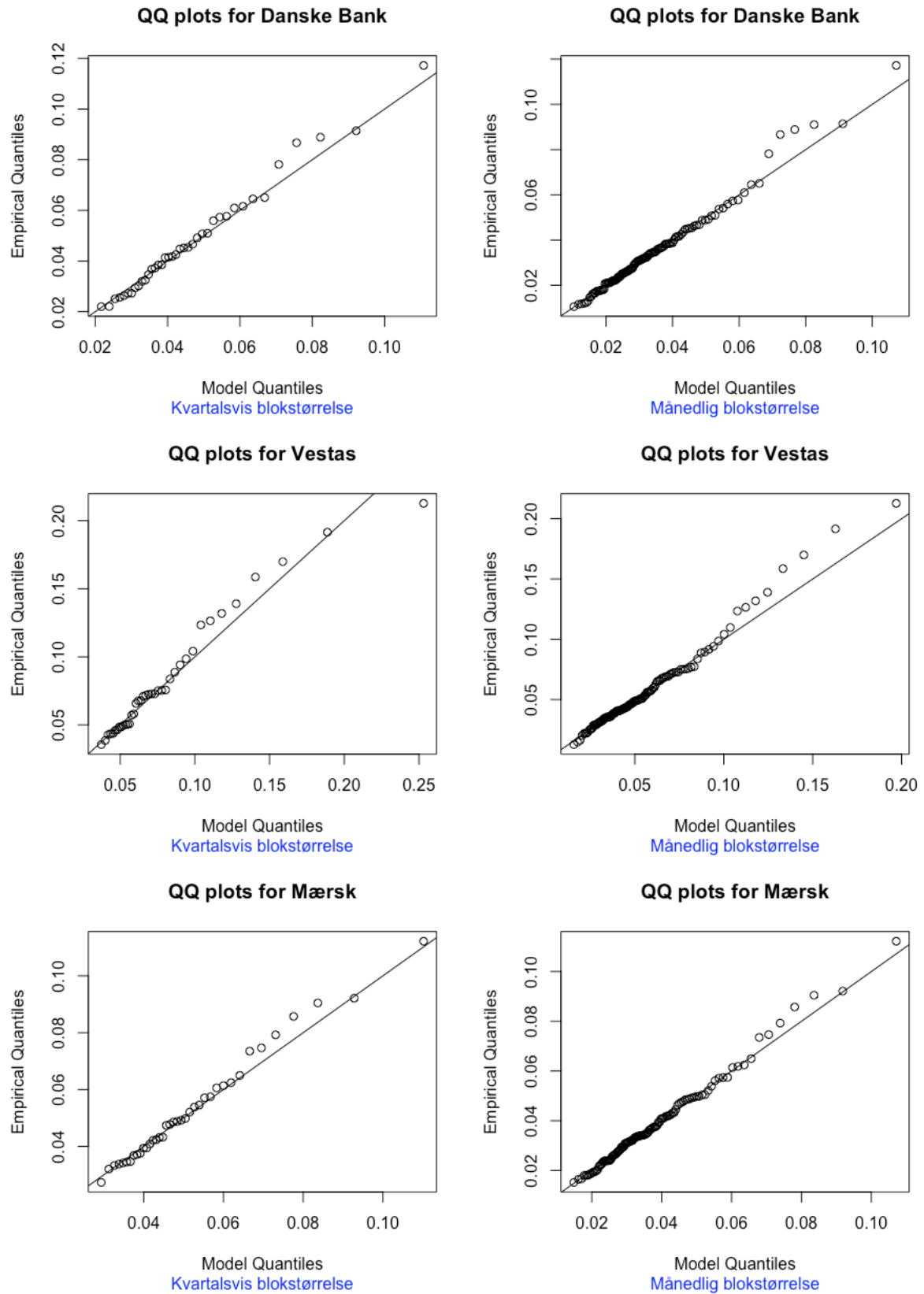
Figur 9-1: Dekomposition af Danske Bank A/S (øverst venstre), Vestas Wind Systems A/S (øverst højre) og A.P. Møller – Mærsk A/S (nederst).

9.2 ACF plots for lukkekurserne



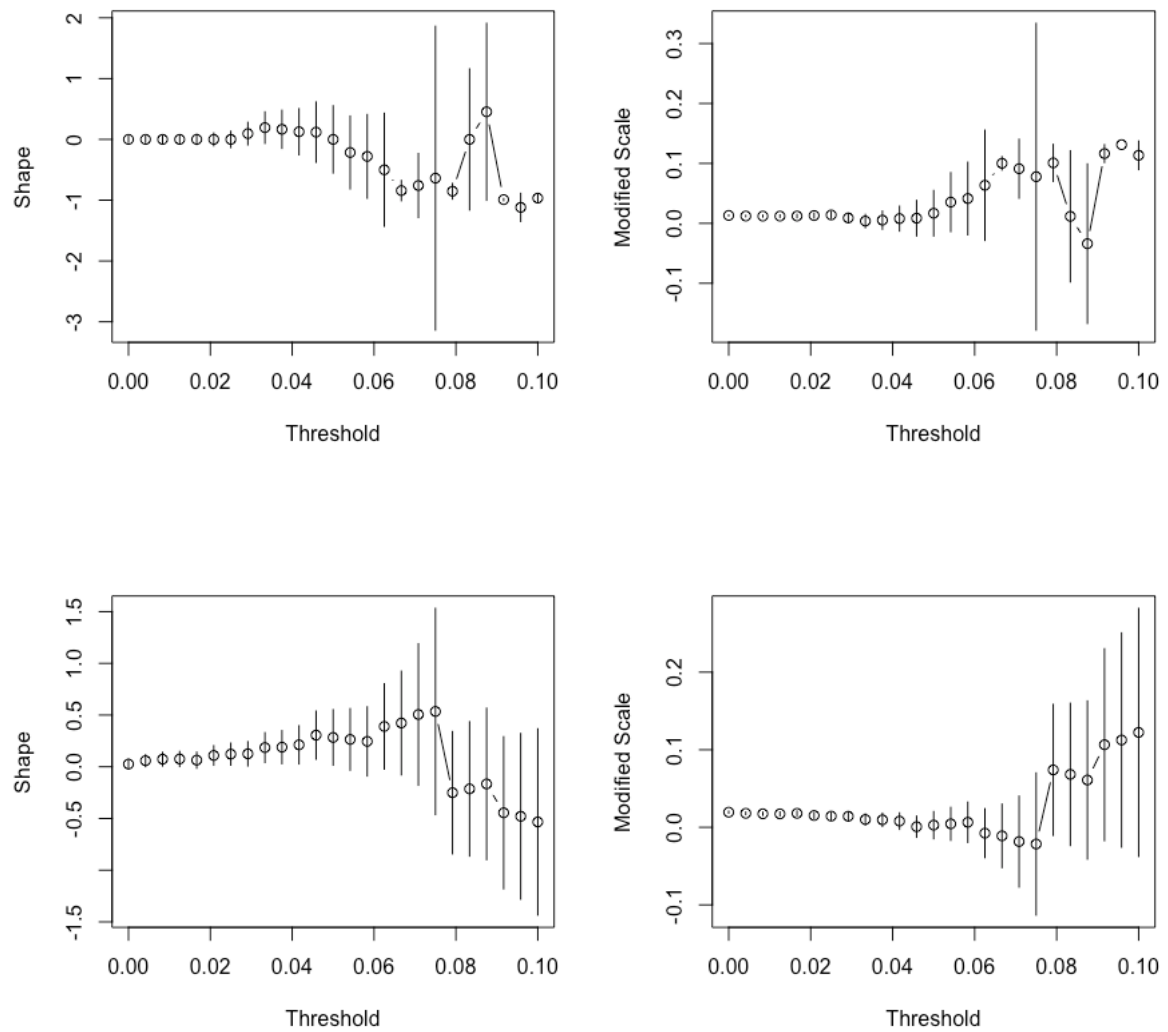
Figur 9-2: ACF plots af de historiske lukkekurser for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

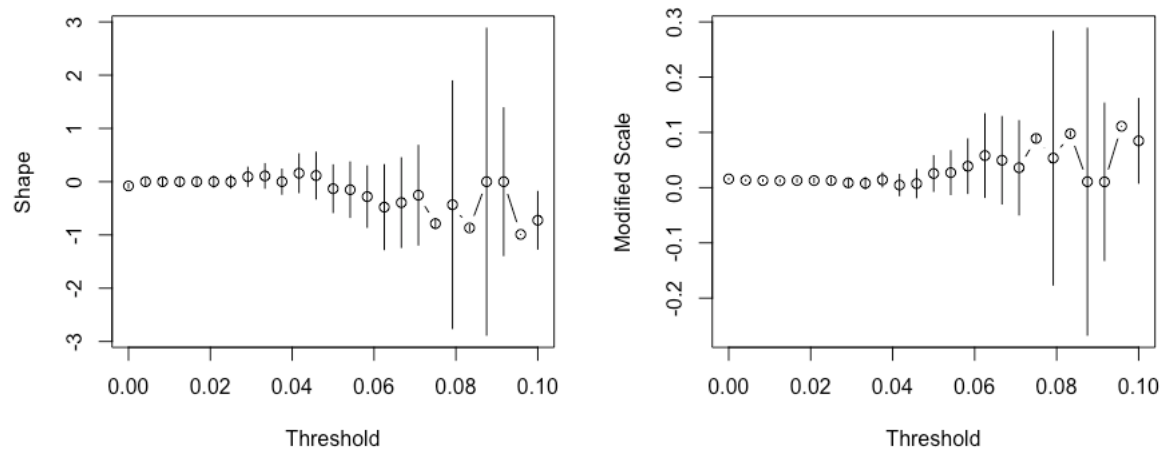
9.3 QQ plots for kvartalsvise- og månedlige maksima værdier



Figur 9-3: QQ plots af EVT modellerne med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

9.4 Plots af parameterestimer mod thresholdværdier

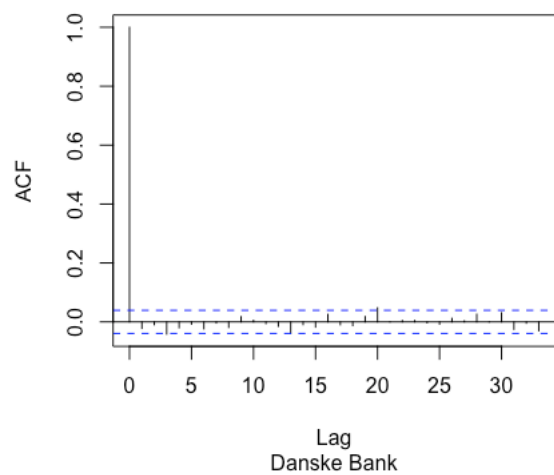




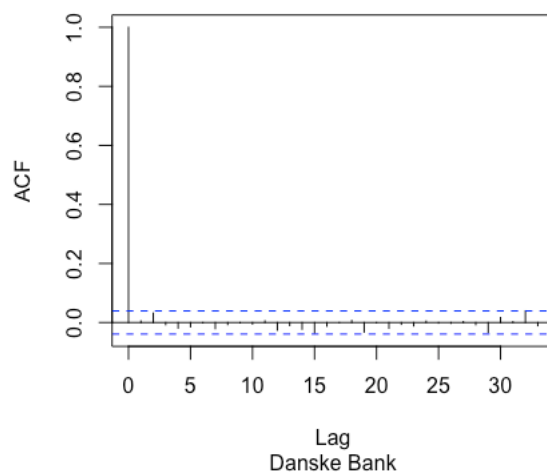
Figur 9-4: Plots af parameterestimer mod thresholdværdier for Danske Bank A/S (øverst), Vestas Wind Systems A/S (næstøverst) og A.P. Møller – Mærsk A/S (nederst).

9.5 ACF plots af standardiserede- og kvadrerede standardiserede residualer fra GARCH modeller

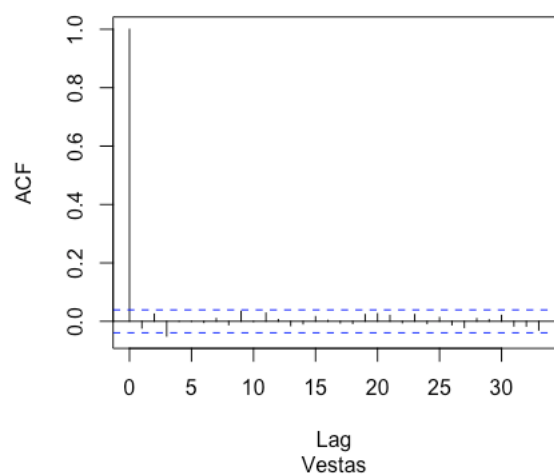
ACF plot af standardiserede residualer



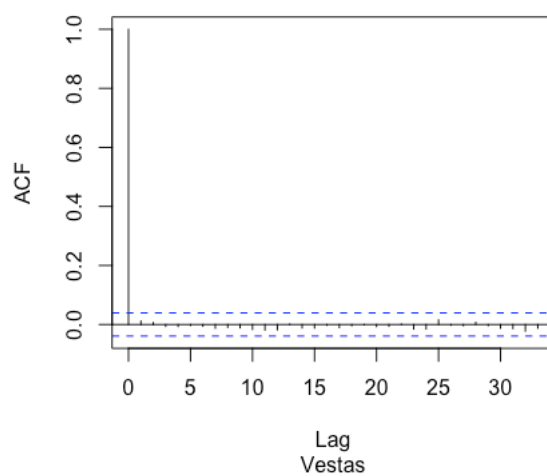
ACF plot af kvadrerede standardiserede residua

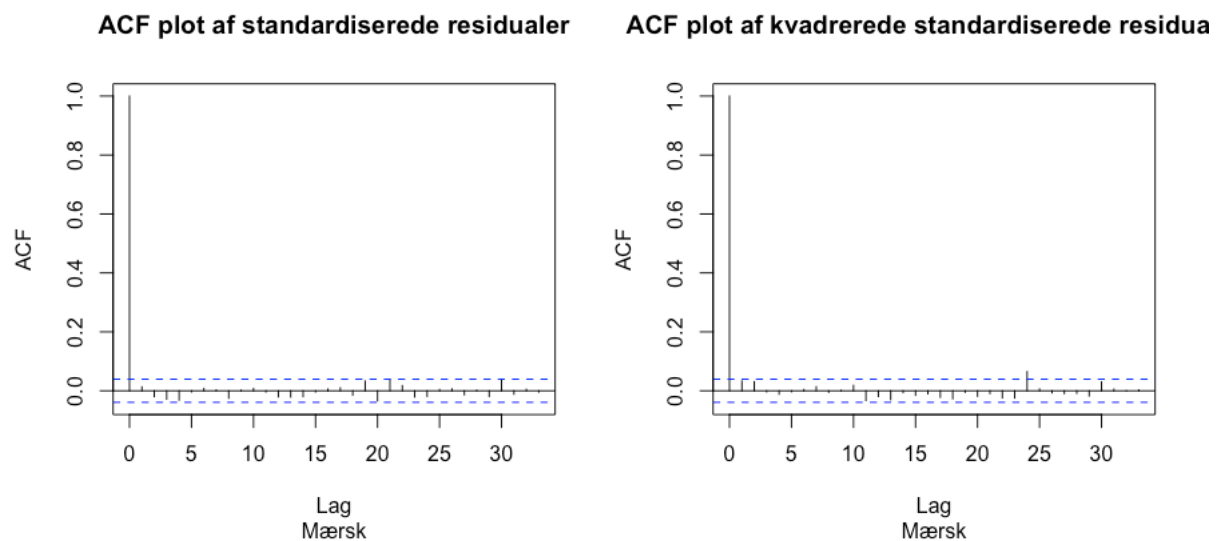


ACF plot af standardiserede residualer



ACF plot af kvadrerede standardiserede residua





Figur 9-5: ACF plots af standardiserede- og kvadrerede standardiserede residualer efter fit af GARCH modeller for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller - Mærsk A/S.

9.6 Likelihood ratio tests for GARCH-EVT modellerne med forskellige blokstørrelse

3 modeller for Danske Bank A/S:

- Halvårlige maksima værdier vs. kvartalsvise maksima værdier
Likelihood-ratio = $-52,817$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$
- Halvårlige maksima værdier vs. månedlige maksima værdier
Likelihood-ratio = $-217,49$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$
- Kvartalsvise maksima værdier vs. månedlige maksima værdier
Likelihood-ratio = $-164,67$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$

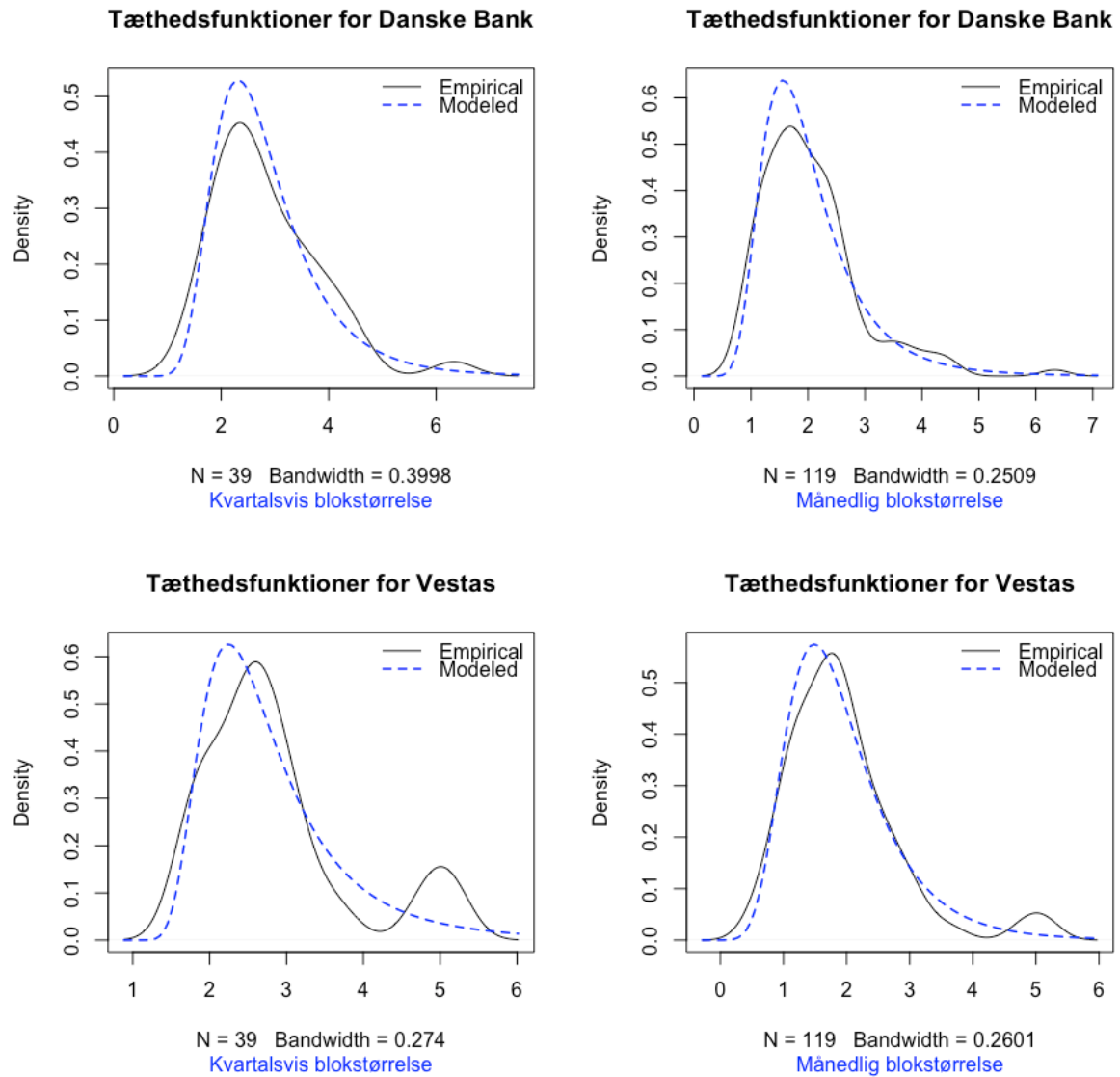
3 modeller for Vestas Wind Systems A/S:

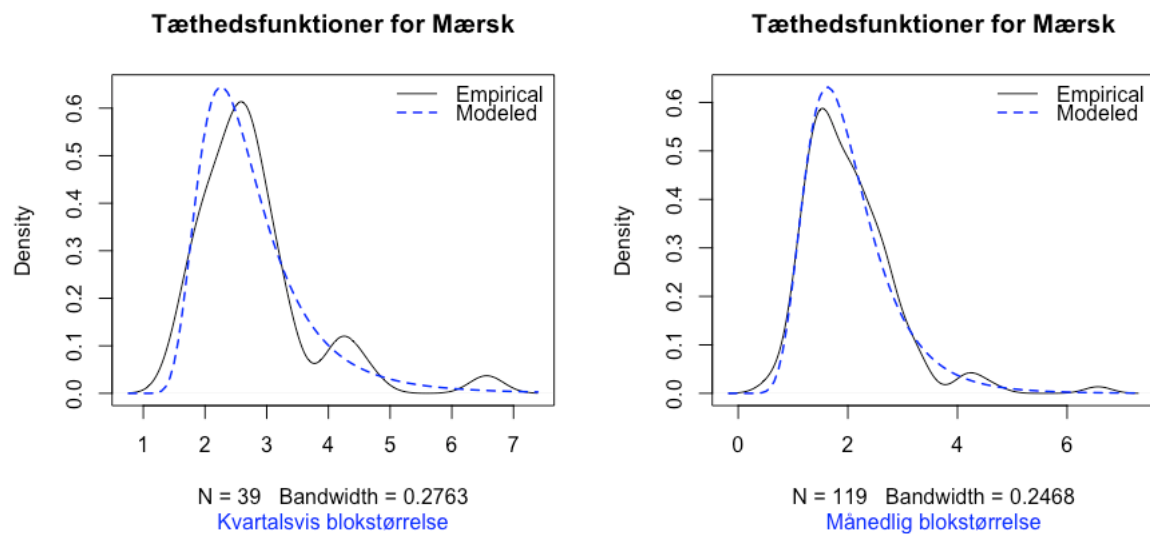
- Halvårlige maksima værdier vs. kvartalsvise maksima værdier
Likelihood-ratio = $-43,986$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$
- Halvårlige maksima værdier vs. månedlige maksima værdier
Likelihood-ratio = $-229,67$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$
- Kvartalsvise maksima værdier vs. månedlige maksima værdier
Likelihood-ratio = $-185,69$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$

3 modeller for A.P. Møller – Mærsk A/S:

- Halvårlige maksima værdier vs. kvartalsvise maksima værdier
Likelihood-ratio = $-41,732$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$
- Halvårlige maksima værdier vs. månedlige maksima værdier
Likelihood-ratio = $-209,85$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$
- Kvartalsvise maksima værdier vs. månedlige maksima værdier
Likelihood-ratio = $-168,12$ med $p\text{-værdi} = 1$ og $\alpha = 0,05$

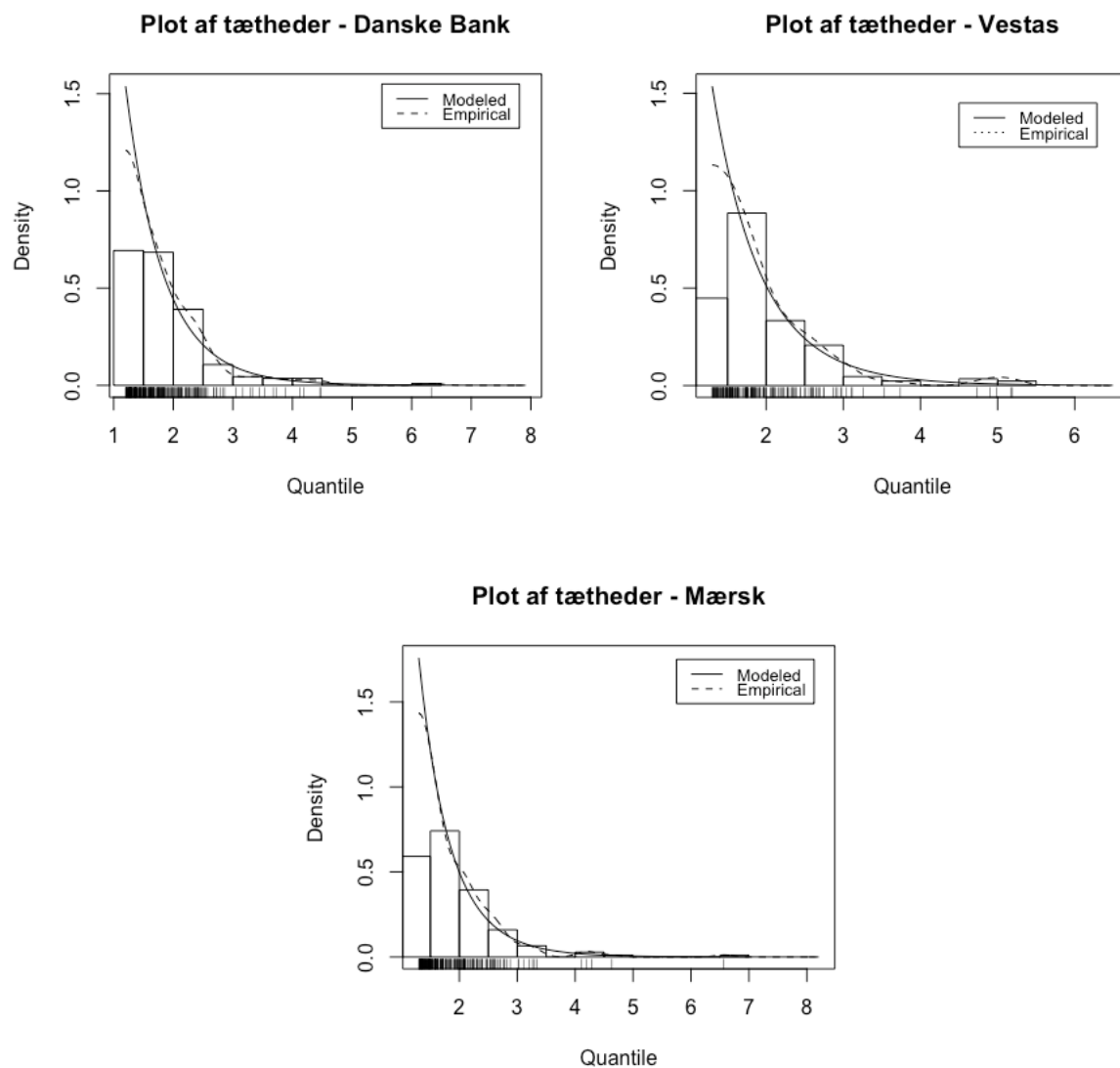
9.7 Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modeller med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse





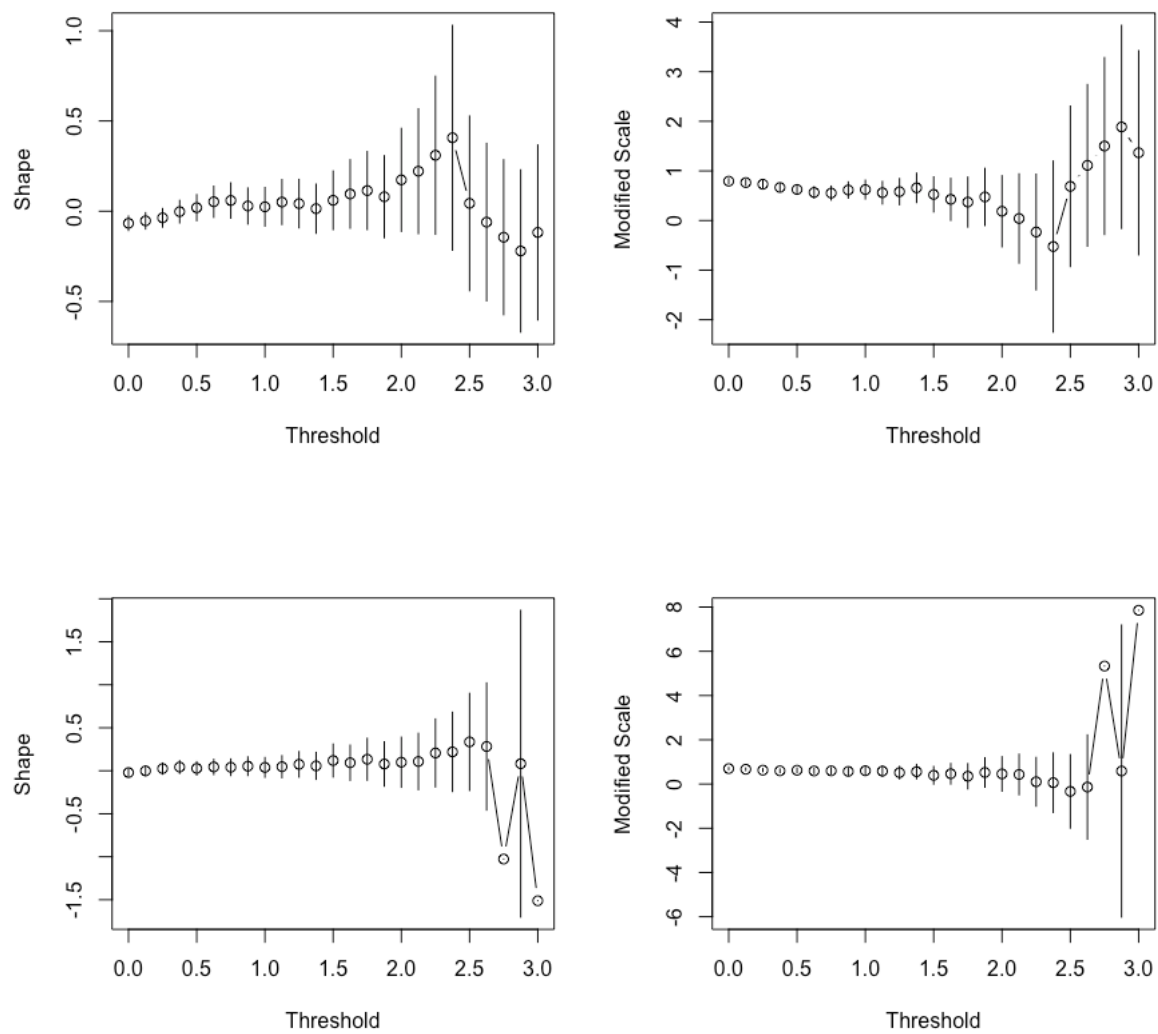
Figur 9-6: Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modellerne med kvartalsvis- og månedlig blokstørrelse for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S

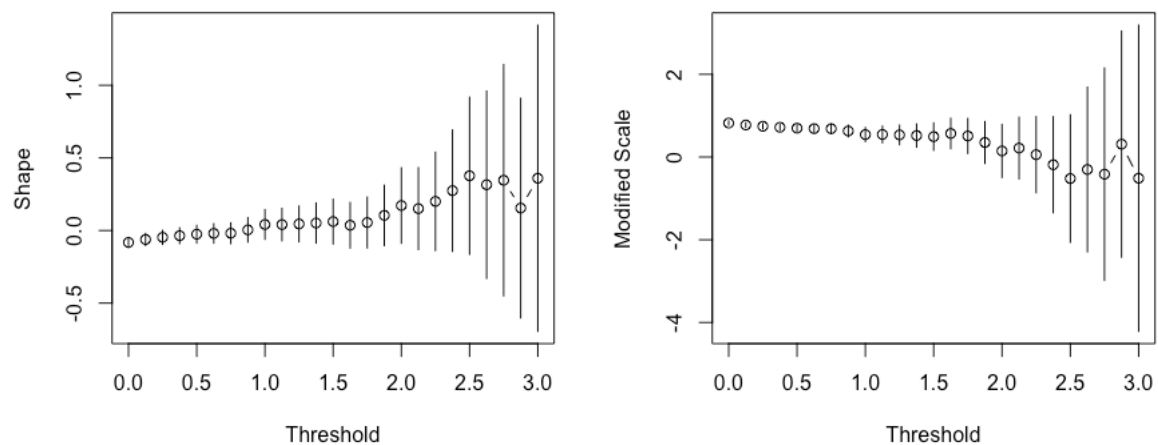
9.8 Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modellerne med lavere thresholds



Figur 9-7: Plot af empiriske- og modellerede tætheder for modeller med threshold $u_{DB} = 1,2$ og $u_{V,M} = 1,3$.

9.9 Plots af parameterestimer mod thresholdværdier for GARCH-EVT modellerne





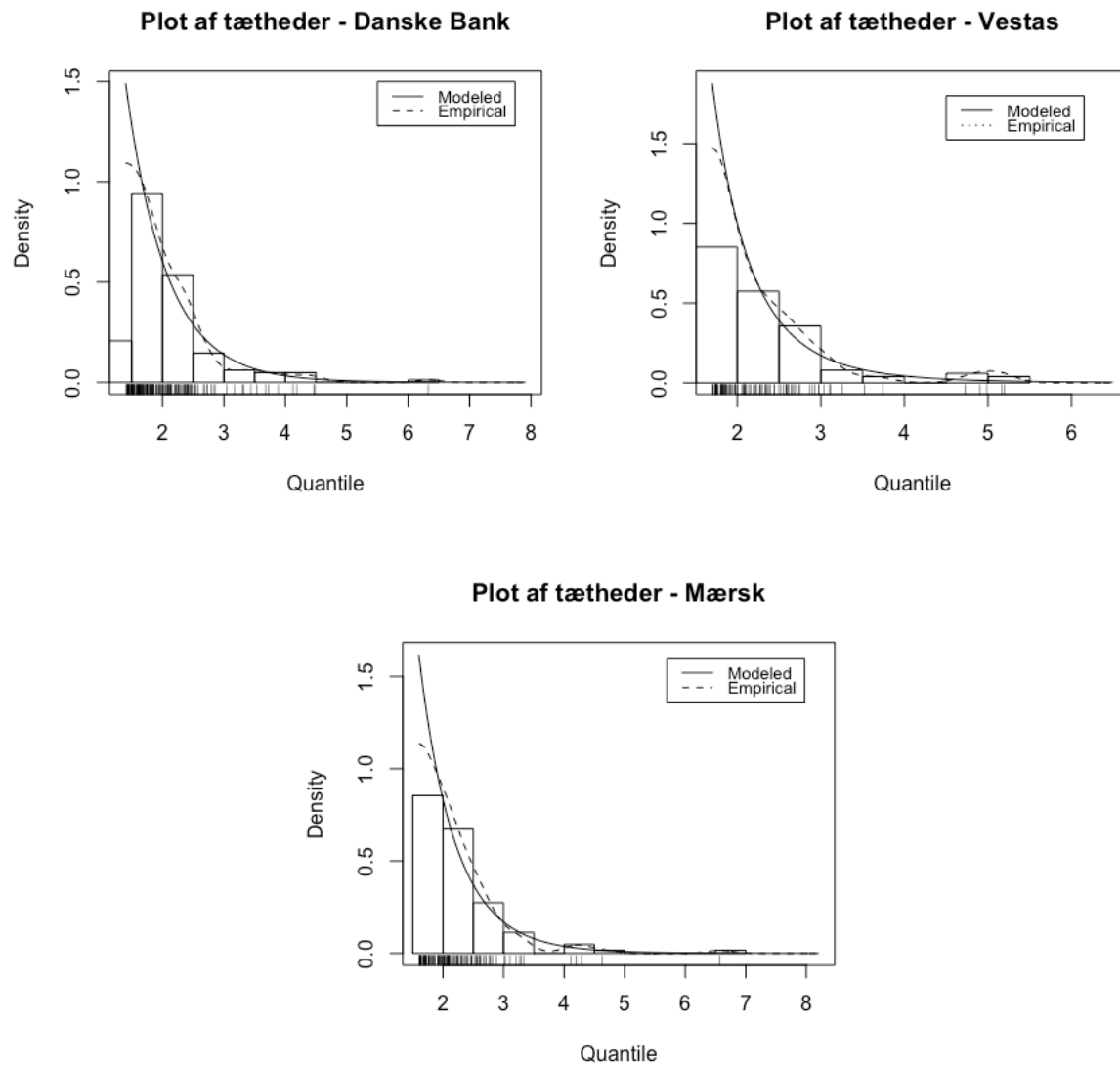
Figur 9-8: Parameterestimer mod thresholdværdier for Danske Bank A/S (øverst), Vestas Wind Systems A/S (næstøverst) og A.P. Møller – Mærsk A/S (nederst).

9.10 AIC værdier for modeller med forskellige thresholds

	Danske Bank	Vestas	Mærsk
Threshold	AIC	AIC	AIC
$u_{DB} = 1,2$ og $u_{V,M} = 1,3$	273,4408	217,8625	217,2029
$u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$	207,1619	114,1668	143,06

Tabel 9-1: AIC værdier for modellerne med høje og lave thresholds for Danske Bank A/S, Vestas Wind Systems A/S og A.P. Møller – Mærsk A/S.

9.11 Tæthedsfunktioner for GARCH-EVT modeller med højere thresholds



Figur 9-9: Plot af empiriske- og modellerede tætheder for modeller med threshold $u_{DB} = 1,4$, $u_V = 1,7$ og $u_M = 1,6$.

9.12 R Kode

Da den samlede R kode fylder 1580 linjer i R, svarerende til cirka 40 sider i Word, indsættes i stedet enkelte udtræk fra opgavens R kode, der viser, hvordan ekstremværditeori, heteroskedastiske modeller, VaR og ES er estimeret. De forskellige udtræk vil være eksempler på, hvordan de forskellige metoder osv. er blevet brugt.

Block Maxima metode af log afkast og estimering af GEV fordeling:

```
### månedlige maksima værdier  
# Danske Bank  
monthmax.danske <- blockMaxima(log.danske, block = 21)  
length(monthmax.danske)  
  
gev.danske <- fevd(x = monthmax.danske, type = "GEV", method = "MLE")  
summary(gev.danske)  
  
plot(gev.danske, type = "rl", main = "Return level plot for Danske Bank")
```

Block Maxima metode – konfidensinterval for parameterestimer via profil-likelihood:

```
#konfidensinterval for parameterestimer  
ci(gev.danske, type = "parameter")  
#location  
ci(gev.danske, type = "parameter", method = "proflik", which.par = 1,  
   xrange = c(0.01, 0.04), nint = 100, verbose = TRUE)  
#scale  
ci(gev.danske, type = "parameter", method = "proflik", which.par = 2,  
   xrange = c(0.007, 0.02), nint = 100, verbose = TRUE)  
#shape  
ci(gev.danske, type = "parameter", method = "proflik", which.par = 3,
```

```
xrange = c(0.01, 0.5), nint = 100, verbose = TRUE)
```

Peaks Over Threshold metode af log afkast og estimering af GPD fordeling:

```
#finder maksima værdier (blocks: semi-annual = 130, quarterly = 65, monthly = 21)
```

```
### månedlige maksima værdier
```

```
# Danske Bank
```

```
monthmax.danske <- blockMaxima(log.danske, block = 21)
```

```
length(monthmax.danske)
```

```
gev.danske <- fevd(x = monthmax.danske, type = "GEV", method = "MLE")
```

```
summary(gev.danske)
```

```
plot(gev.danske, type = "rl", main = "Return level plot for Danske Bank")
```

```
#konfidensinterval for parameterestimer
```

```
ci(gev.danske, type = "parameter")
```

```
#location
```

```
ci(gev.danske, type = "parameter", method = "profilik", which.par = 1,
```

```
  xrange = c(0.01, 0.04), nint = 100, verbose = TRUE)
```

```
#scale
```

```
ci(gev.danske, type = "parameter", method = "profilik", which.par = 2,
```

```
  xrange = c(0.007, 0.02), nint = 100, verbose = TRUE)
```

```
#shape
```

```
ci(gev.danske, type = "parameter", method = "profilik", which.par = 3,
```

```
  xrange = c(0.01, 0.5), nint = 100, verbose = TRUE)
```

Peaks Over Threshold metode – konfidensinterval for parameterestimer via profil-likelihood:

```
#konfidensinterval for parameteterestimerne
# danske bank
gpd.pfshape(gpd.danske, range = c(-0.05, 0.4), conf = 0.95)
gpd.pfscale(gpd.danske, range = c(0.005, 0.02), conf = 0.95)

# vestas
gpd.pfshape(gpd.vestas, range = c(0.001, 0.45), conf = 0.95)
gpd.pfscale(gpd.vestas, range = c(0.01, 0.03), conf = 0.95)

# maersk
gpd.pfshape(gpd.maersk, range = c(-0.065, 0.35), conf = 0.95)
gpd.pfscale(gpd.maersk, range = c(0.005, 0.017), conf = 0.95)
```

Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall efter fit af GEV- og GPD

fordelinger:

```
### BM METODE ###
```

```
#vi definerer estimerne fra fit af GEV, da
```

```
#dette gør det muligt at bruge formel fra afhandling
```

```
# danske bank
```

```
mu.danske <- gev.danske[["results"]][["par"]][["location"]]
```

```
sigma.danske <- gev.danske[["results"]][["par"]][["scale"]]
```

```
xi.danske <- gev.danske[["results"]][["par"]][["shape"]]
```

```
n.danske <- length(monthmax.danske)
```

```
var95.danske <- mu.danske-(sigma.danske/xi.danske)*
```

```
(1-(-n.danske*log(0.95))^-xi.danske))
```

```
var99.danske <- mu.danske-(sigma.danske/xi.danske)*
```

```
(1-(-n.danske*log(0.99))^-xi.danske))
```

```
#### POT METODE ####
```

```
#Value at Risk og Expected Shortfall estimering
```

```
#vi definerer estimerterne fra fit af GPD, da
```

```
#dette gør det muligt at bruge formler fra afhandling
```

```
# danske bank
```

```
gpdxi.danske <- 0.09770
```

```
gpdbeta.danske <- 0.01141
```

```
nu <- length(exceed.danske)
```

```
n <- length(log.danske)
```

```
var95 <- 0.02+(gpdbeta.danske/gpdxi.danske)*(((1-0.95)/(nu/n))^(-gpdxi.danske)-1)
```

```
var99 <- 0.02+(gpdbeta.danske/gpdxi.danske)*(((1-0.99)/(nu/n))^(-gpdxi.danske)-1)
```

```
es95 <- var95/(1-gpdxi.danske)+(gpdbeta.danske-gpdxi.danske*0.02)/(1-gpdxi.danske)
```

```
es99 <- var99/(1-gpdxi.danske)+(gpdbeta.danske-gpdxi.danske*0.02)/(1-gpdxi.danske)
```

Bestemmelse af bedste ARCH og GARCH modeller på log afkastet:

```
##### HETEROSKEDASTISK MODEL #####
```

```
#tager log afkast og fitter bedste ARCH/GARCH model
```

```
#finder bedste ARCH og GARCH model ud fra AIC og BIC informationskriterier.
```

```
# danske bank:
```

```
#finder bedste ARCH model
```

```
k <- NULL
```

```
r <- NULL
```

```
i = 1
```

```
for(i in 1:5) {
```

```

A <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(i,0))
, mean.model = list(armaOrder=c(0,0))
, distribution.model="std")

modelfit <- ugarchfit(spec = A, data = log.danske, solver = "hybrid")
r <- c("AIC" = infocriteria(modelfit)[1], "BIC" = infocriteria(modelfit)[2],
      "Orden" = c(i,0))
k <- rbind(k,r)
A <- NULL
modelfit <- NULL
}
(k <- as.data.frame(k))
min(k$AIC)
min(k$BIC)
#bedste ARCH er ARCH(5,0) jf. AIC og ARCH(3,0) jf. BIC.

#finder nu bedste GARCH model
k <- NULL
r <- NULL
i=1
j=1
for(i in 1:3) {
  for(j in 1:3){
    A <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(i,j))
, mean.model = list(armaOrder=c(0,0))
, distribution.model="std")

    modelfit <- ugarchfit(spec = A, data = log.danske, solver = "hybrid")
    r <- c("AIC" = infocriteria(modelfit)[1], "BIC" = infocriteria(modelfit)[2],
          "Orden p" = c(i, j))
  }
}

```

```

k <- rbind(k,r)
A <- NULL
modelfit <- NULL
}
}
(k <- as.data.frame(k))
min(k$AIC)
min(k$BIC)
#bedste GARCH model er GARCH(1,3) jf. AIC og GARCH(1,1) jf. BIC

```

Bedste ARCH og GARCH modeller fittes og standardiserede residualer defineres:

```

#vi fitter nu bedste modeller for de tre virksomheder
# danske bank: GARCH(1,3)
garch.danske <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,3))
,mean.model = list(armaOrder=c(0,0))
,distribution.model="std")
danske.fit <- ugarchfit(spec = garch.danske, data = log.danske)

# vestas: GARCH(1,3)
garch.vestas <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,3))
,mean.model = list(armaOrder=c(0,0))
,distribution.model="std")
vestas.fit <- ugarchfit(spec = garch.vestas, data = log.vestas)

# maersk: GARCH(1,1)
garch.maersk <- ugarchspec(variance.model = list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,1))
,mean.model = list(armaOrder=c(0,0))

```

```

      ,distribution.model="std")
maersk.fit <- ugarchfit(spec = garch.maersk, data = log.maersk)

#autokorrelation testes for residualerne
# danske bank
sres.danske <- danske.fit@fit$residuals / danske.fit@fit$sigma
ssres.danske <- (danske.fit@fit$residuals / danske.fit@fit$sigma)^2
acf(sres.danske, main = "ACF plot af standardiserede residualer",
    sub = "Danske Bank")
acf(ssres.danske, main = "ACF plot af kvadrerede standardiserede residualer",
    sub = "Danske Bank")

Box.test(sres.danske, lag = 10)
Box.test(ssres.danske, lag = 10)

```

Estimering af Value-at-Risk og Expected Shortfall efter fit af ARCH og GARCH modeller:

```

#### ESTIMERING AF VaR og ES ####
# danske bank
#danske.fit er mit GARCH fit
print(danske.fit) # shape = df = 4.894970

#finder betinget middelværdi og betinget varians
pred.danske <- ugarchforecast(danske.fit, data = sres.danske, n.ahead = 1)
print(pred.danske)

mu.danske <- fitted(pred.danske)
sig.danske <- sigma(pred.danske)

```

#1-dags VaR med betinget middelværdi- og standardafvigelse fra obs 1.

```
z95 <- sqrt((4.894970-2)/4.894970)*
```

```
(qdist(distribution = "std", shape = 4.894970, p = 0.95))
```

```
z99 <- sqrt((4.894970-2)/4.894970)*
```

```
(xqt(distribution = "std", df = 4.894970, p = 0.99))
```

```
VaR.danske95 <- mu.danske+sig.danske*z95
```

```
VaR.danske99 <- mu.danske+sig.danske*z99
```

```
ESst(p = 0.95, mu = mu.danske, sd = sig.danske, df = 4.894970)
```

```
ESst(p = 0.99, mu = mu.danske, sd = sig.danske, df = 4.894970)
```