Analytiske anvendelser af Den Erhvervsøkonomiske Metode

Bentzen, Eric

Analytiske anvendelser af

Den Erhvervsøkonomiske Metode

Eric Bentzen

Februar 2023

Institut for Produktion og Erhvervsøkonomi

Copenhagen Business School

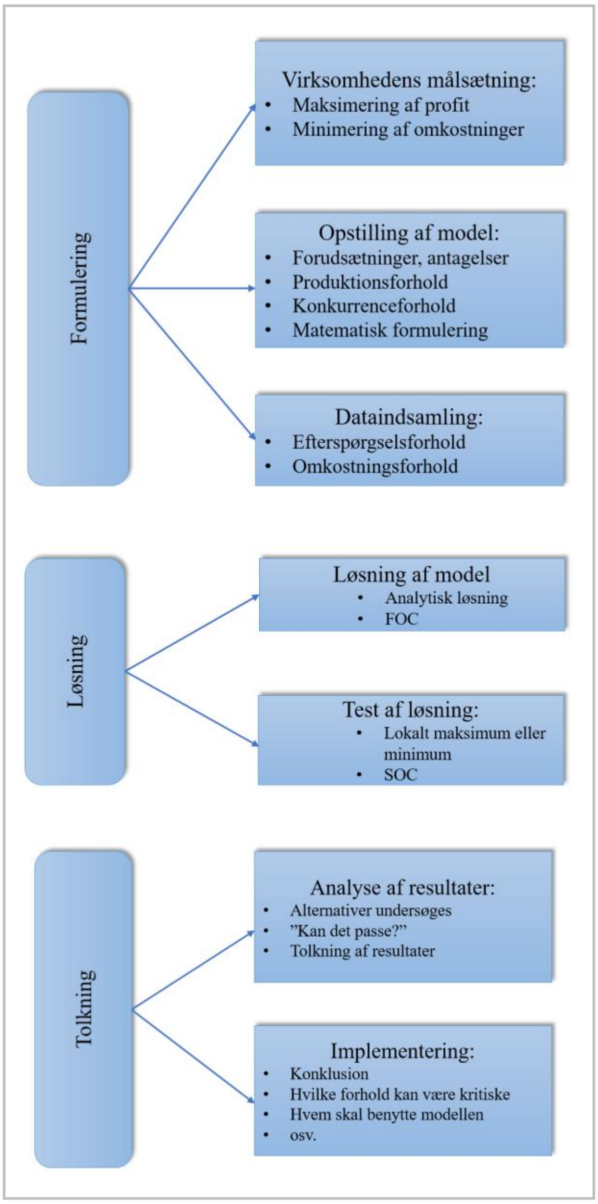
Indledning

Dette notat er udarbejdet som et supplement til Managerial Economics. Notatet tager sit afsæt i en analytisk præsentation og anvendelse af Den Erhvervsøkonomiske Metode, som en struktureret metode til formulering, løsning og tolkning af erhvervsøkonomiske problemstillinger,

Den Erhvervsøkonomiske Metode

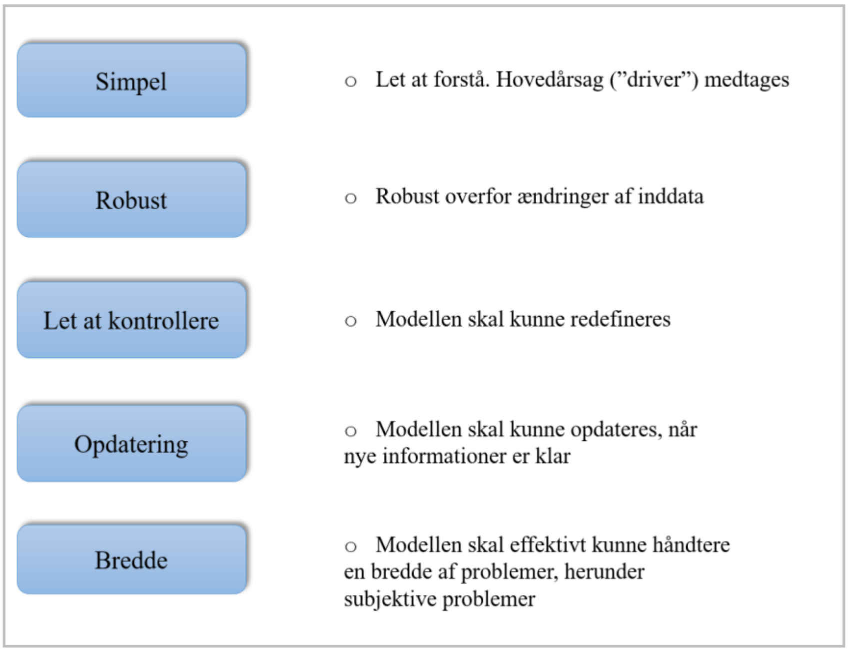
Antag, at en virksomhed har en overordnet målsætning om maksimering af profit eller minimering af omkostningerne.

Et forslag til en struktureret metode vil være følgende, hvor vi har opdelt i hovedkategorierne: Formulering, Løsning og Tolkning.



Det er vigtigt, at alle 3 hovedkategorier formuleres og beskrives så præcist som det er muligt. I den forbindelse er der overvejelser man kan gøre ved formuleringen af modellen. Overvejelserne vedrører karakteristika ved en god model.

Karakteristika ved en god model er følgende:



Eksempel 1

En virksomhed sælger 2 produkter, der er delvis substitutter for hinanden. Hvis prisen på det ene produkt stiger, vil efterspørgslen på det andet produkt stige.

Efterspørgselsfunktionerne for de 2 produkter er følgende:

$Q_1 = 517 - 3{,}5P_1 + 0{,}8P_2$

$Q_2 = 770 - 4{,}4P_2 + 1{,}4P_1$

hvor

P_1 angiver prisen på produkt 1 og P_2 angiver prisen på produkt 2.

Hvad skal prisen være på det 2 produkter, når virksomheden ønsker at maksimere den totale omsætning.

Benytter vi Den Erhvervsøkonomiske Metode giver det følgende forslag til løsning.

Formulering

Virksomhedens målsætning

Vi antager, at virksomheden ønsker at maksimere sin samlede omsætning.

Opstilling af model

Virksomheden sælger 2 produkter der er delvis substitutter for hinanden. Dvs. der eksisterer en sammenhæng mellem de 2 produkter.

Virksomheden ønsker at maksimere omsætningen, dvs. vi betragter modellen:

$$\underset{Q_1,Q_2 \geq 0}{\text{Max}} \; TR = TR_1 + TR_2$$

med

$TR_1 = P_1 \times Q_1$

$TR_2 = P_2 \times Q_2$

Analytisk løsning af model

Med angivelse af de 2 efterspørgselsfunktioner, betragtes de inverse efterspørgselsfunktioner.

$Q_1 = 517 - 3{,}5P_1 + 0{,}8P_2$

$Q_2 = 770 - 4{,}4P_2 + 1{,}4P_1$

$\Longrightarrow$

$Q_1 - 517 = -3{,}5P_1 + 0{,}8P_2$

$Q_2 - 770 = +1{,}4P_1 - 4{,}4P_2$

Anvendes algebra kan det løses således:

$$\begin{pmatrix} Q_1 - 517 \\ Q_2 - 770 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 & +0{,}8 \\ +1{,}4 & -4{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 & +0{,}8 \\ +1{,}4 & -4{,}4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 - 517 \\ Q_2 - 770 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}30812 & -0{,}05602 \\ -0{,}09804 & -0{,}2451 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 - 517 \\ Q_2 - 770 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$P_1 = (-0{,}30812)(Q_1 - 517) + (-0{,}05602)(Q_2 - 770)$

$P_2 = (-0{,}09804)(Q_1 - 517) + (-0{,}2451)(Q_2 - 770)$

$\Leftrightarrow$

$P_1 = 202{,}433 - 0{,}30812Q_1 - 0{,}05602Q_2$

$P_2 = 239{,}414 - 0{,}09804Q_1 - 0{,}2451Q_2$

Herefter fås 2 TR funktioner

$TR_1 = (202{,}433 - 0{,}30812Q_1 - 0{,}05602Q_2)Q_1$

$TR_2 = (239{,}414 - 0{,}09804Q_1 - 0{,}2451Q_2)Q_2$

Samlet TR funktion

$TR = (202{,}433 - 0{,}30812Q_1 - 0{,}05602Q_2)Q_1 + (239{,}414 - 0{,}09804Q_1 - 0{,}2451Q_2)Q_2$

Herefter findes 1. orden afledede

$FOC_1: \frac{\partial TR}{\partial Q_1} = 202{,}433 - 0{,}61624Q_1 - 0{,}15406Q_2$

$FOC_2: \frac{\partial TR}{\partial Q_2} = 239{,}414 - 0{,}15406Q_1 - 0{,}4902Q_2$

Sættes begge 1. orden afledede funktioner lig med 0 og løses simultant, fås

$$\begin{pmatrix} 202{,}433 \\ 239{,}414 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}61624 & 0{,}15406 \\ 0{,}15406 & 0{,}4902 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}61624 & 0{,}15406 \\ 0{,}15406 & 0{,}4902 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 202{,}433 \\ 239{,}414 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}761115 & -0{,}55348 \\ -0{,}55348 & 2{,}213932 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 202{,}433 \\ 239{,}414 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = (1{,}761115)(202{,}433) + (-0{,}55348)(239{,}414) = 223{,}9962$$

$$Q_2 = (-0{,}55348)(202{,}433) + (2{,}213932)(239{,}414) = 418{,}0031$$

Ved indsættelse fås

$$P_1 = 202{,}433 - 0{,}30812(223{,}9962) - 0{,}05602(418{,}0031) = 110$$

$$P_2 = 239{,}414 - 0{,}09804(223{,}9962) - 0{,}2451(418{,}0031) = 115$$

Test af løsning

2. orden betingelserne giver

$$SOC_1: \ \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_1^2} = -0{,}61624 < 0$$

$$SOC_2: \ \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_2^2} = -0{,}4902 < 0$$

og

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -0{,}15406$$

Husk, da vi har 2 produkter, er 2. orden betingelsen, at

$$\left(\frac{\partial^2 TR}{\partial P_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 TR}{\partial P_2^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 TR}{\partial P_1 \partial P_2}\right)^2$$

Ved indsættelse, fås

$$(-0{,}61624)(-0{,}4902) = 0{,}302081 > 0{,}0237345 = (-0{,}15306)^2 = \left(\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2$$

Dvs. vi har et maksimum.

Tolkning

Med priserne P_1=110 og P_2=115 finder vi de efterspurgte mængder ved indsættelse til

$$Q_1 = 517 - 3{,}5(110) + 0{,}8(115) = 224$$

$$Q_2 = 770 - 4{,}4(115) + 1{,}4(110) = 418$$

Dette giver totalomsætningen

$$TR_1 = 110(224) = 24.640$$

$$TR_2 = 115(418) = 48.070$$

$$Max\ TR = 24.640 + 48.070 = 72.710$$

Eksempel 2

En virksomhed sælger 2 produkter med følgende efterspørgselsfunktioner:

$$Q_1 = 100 - 2P_1 + 1P_2$$

$$Q_2 = 120 - 5P_2 + 3P_1$$

hvor

P_1 angiver prisen på produkt 1 og P_2 angiver prisen på produkt 2.

Virksomhedens omkostningsfunktion er givet ved

$$TC = 50 + 10Q_1 + 20Q_2$$

Hvad skal prisen være på det 2 produkter, når virksomheden ønsker at maksimere profitten.

Benytter vi Den Erhvervsøkonomiske Metode til at udarbejde rapporten har vi følgende forslag til løsning.

Formulering

Virksomhedens målsætning

Vi antager, at virksomheden ønsker at maksimere profitten.

Opstilling af model

Virksomheden sælger 2 produkter der er delvis substitutter for hinanden. Dvs. der eksisterer en sammenhæng mellem de 2 produkter.

Virksomheden ønsker at maksimere profitten, dvs. vi betragter modellen:

$$\underset{Q_1,Q_2\geq 0}{\text{Max}}\ \Pi = TR_1 + TR_2 - TC$$

$$TR_1 = P_1 \times Q_1$$

$$TR_2 = P_2 \times Q_2$$

Analytisk løsning af model

Med angivelse af de 2 efterspørgselsfunktioner, betragtes de inverse efterspørgselsfunktioner.

$$Q_1 = 100 - 2P_1 + 1P_2$$

$$Q_2 = 120 - 5P_2 + 3P_1$$

$$\Longrightarrow$$

$$Q_1 - 100 = -2P_1 + 1P_2$$

$$Q_2 - 120 = +3P_1 - 5P_2$$

Anvendes algebra kan det løses således:

$$\begin{pmatrix} Q_1 - 100 \\ Q_2 - 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ +3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ +3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q_1 - 100 \\ Q_2 - 120 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}71428571 & -0{,}14285714 \\ -0{,}42857143 & -0{,}28571429 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 - 100 \\ Q_2 - 120 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$P_1 = (-0{,}71428571)(Q_1 - 100) + (-0{,}14285714)(Q_2 - 120)$

$P_2 = (-0{,}42857143)(Q_1 - 100) + (-0{,}28571429)(Q_2 - 120)$

$\Leftrightarrow$

$P_1 = 88{,}5714 - 0{,}714286Q_1 - 0{,}142857Q_2$

$P_2 = 77{,}1429 - 0{,}428571Q_1 - 0{,}285714Q_2$

De 2 TR funktioner

$TR_1 = (88{,}5714 - 0{,}714286Q_1 - 0{,}142857Q_2)Q_1$

$TR_2 = (77{,}1429 - 0{,}428571Q_1 - 0{,}285714Q_2)Q_2$

Samlet TR funktion

$TR = -0{,}714286Q_1^2 + 88{,}5714Q_1 - 0{,}571429Q_1Q_2 + 77{,}1429Q_2 - 0{,}285714Q_2^2$

Med TC lig

$TC = 50 + 10Q_1 + 20Q_2$

fås profit funktionen lig

$$\Pi = -0{,}714286Q_1^2 + 88{,}5714Q_1 - 0{,}571429Q_1Q_2 + 77{,}1429Q_2 - 0{,}285714Q_2^2 - 50 - 10Q_1 - 20Q_2$$

$\Rightarrow$

$$\Pi = -0{,}714286Q_1^2 + 78{,}5714Q_1 - 0{,}571429Q_1Q_2 + 57{,}1429Q_2 - 0{,}285714Q_2^2 - 50$$

Herefter findes 1. orden afledede

$$FOC_1\colon \frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 78{,}5714 - 1{,}42857Q_1 - 0{,}571429Q_2$$

$$FOC_2\colon \frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 57{,}1429 - 0{,}571429Q_1 - 0{,}571429Q_2$$

Sættes begge 1. orden afledede funktioner lig med 0 og løses simultant, fås

$$\begin{pmatrix} 78{,}5714 \\ 57{,}1429 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}42857 & 0{,}571429 \\ 0{,}571429 & 0{,}571429 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}42857 & 0{,}571429 \\ 0{,}571429 & 0{,}571429 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 78{,}5714 \\ 57{,}1429 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1667 & -1{,}1667 \\ -1{,}1667 & 2{,}91667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 78{,}5714 \\ 57{,}1429 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$Q_1 = (1{,}1667)(78{,}5714) + (-1{,}1667)(57{,}1429) = 25$$

$$Q_2 = (-1{,}1667)(78{,}5714) + (2{,}91667)(57{,}1429) = 75$$

Ved indsættelse fås

$$P_1 = 88{,}5714 - 0{,}714286(25) - 0{,}142857(75) = 60$$

$$P_2 = 77{,}1429 - 0{,}428571(25) - 0{,}285714(75) = 45$$

Test af løsning

2. orden betingelserne giver

$$SOC_1:\ \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_1^2} = -0{,}61624 < 0$$

$$SOC_2:\ \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_2^2} = -0{,}4902 < 0$$

og

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -0{,}15406$$

Husk, da vi har 2 produkter, er 2. orden betingelsen, at

$$\left(\frac{\partial^2 TR}{\partial P_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 TR}{\partial P_2^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 TR}{\partial P_1 \partial P_2}\right)^2$$

Ved indsættelse, fås

$$(-0{,}61624)(-0{,}4902) = 0{,}302081 > 0{,}0237345 = (-0{,}15306)^2 = \left(\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2$$

Dvs. vi har et maksimum.

Tolkning

Med priserne P_1=110 og P_2=115 finder vi de efterspurgte mængder ved indsættelse til

$$Q_1 = 517 - 3{,}5(110) + 0{,}8(115) = 224$$

$$Q_2 = 770 - 4{,}4(115) + 1{,}4(110) = 418$$

Dette giver totalomsætningen

$$TR_1 = 110(224) = 24.640$$

$$TR_2 = 115(418) = 48.070$$

$$Max\ TR = 24.640 + 48.070 = 72.710$$

Eksempel 3

En virksomhed sælger et produkt på hjemmemarkedet og i udlandet. De 2 efterspørgselsfunktioner er givet ved

$Q_1 = 100 - P_1$

$Q_2 = 40 - 0{,}5P_2$

hvor

P_1 angiver prisen på hjemmemarkedet og P_2 angiver prisen i udlandet.

Virksomhedens omkostningsfunktion er givet ved

$TC = (Q_1 + Q_2)^2$

Hvad skal prisen være på produktet på de 2 markeder, når virksomheden ønsker at maksimere profitten.

Benytter vi Den Erhvervsøkonomiske Metode til at udarbejde rapporten har vi følgende forslag til løsning.

Formulering

Virksomhedens målsætning

Vi antager, at virksomheden ønsker at maksimere profitten.

Desuden, at virksomheden kan undgå arbitrage mellem de 2 markeder.

Opstilling af model

Virksomheden ønsker at maksimere profitten, dvs. vi betragter modellen:

$$\underset{Q_1,Q_2 \geq 0}{\text{Max}}\ \Pi = TR_1 + TR_2 - TC$$

$$TR_1 = P_1 \times Q_1$$

$$TR_2 = P_2 \times Q_2$$

$$TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Analytisk løsning af model

Med angivelse af de 2 efterspørgselsfunktioner, betragtes de inverse efterspørgselsfunktioner.

$$P_1 = 100 - Q_1$$

$$P_2 = 80 - 2Q_2$$

Vi danner Lagrange funktionen

$$\mathcal{L} = 100Q_1 + 80Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2 - Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

$$\mathcal{L} = 100Q_1 + 80Q_2 - 2Q_1^2 - 3Q_2^2 - 2Q_1Q_2$$

Herefter findes 1. orden afledede

$$FOC_1: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 100 - 4Q_1 - 2Q_2$$

$$FOC_2: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = 80 - 6Q_2 - 2Q_1$$

Sættes begge 1. orden afledede funktioner lig med 0 og løses simultant, fås

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$Q_1 = (0{,}3)(100) + (-0{,}1)(80) = 22$$

$$Q_2 = (-0{,}1)(100) + (0{,}2)(80) = 6$$

Ved indsættelse fås

$$P_1 = 100 - (22) = 78$$

$$P_2 = 80 - 2(6) = 68$$

Dette giver totalomsætningen

$$TR_1 = 78(22) = 1.716$$

$$TR_2 = 68(6) = 408$$

$$TC = (22 + 6)^2 = 784$$

$$Max\ \Pi = 1.716 + 408 - 784 = 1.340$$

Test af løsning

2. orden betingelserne giver

$$SOC_1: \ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q_1^2} = -4 < 0$$

$$SOC_2: \ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q_2^2} = -6 < 0$$

og

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2$$

Husk, da vi har 2 produkter, er 2. orden betingelsen, at

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q_2^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2$$

Ved indsættelse, fås

$$24 > 4$$

Dvs. vi har et maksimum.

Tolkning

Det er værd at bemærke, at priselasticiteten på udlandet er større end på hjemmemarkedet i optimum.

$$\mathrm{e_p} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{P}} \times \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$$

$\mathrm{e_{hjemmemarkedet}} = -1 \times \frac{78}{22} = -3{,}55$ og $\mathrm{e_{udlandet}} = -0{,}5 \times \frac{68}{6} = -5{,}66$

Eksempel 4

Lad der være givet en total omkostningsfunktion lig

$$TC = 4 + 97Q - 8{,}5Q^2 + \frac{Q^3}{3}$$

og totalomsætningsfunktion lig

$$TR = 58Q - 0{,}5Q^2$$

Virksomheden ønsker at maksimere den samlede profit. Benyt de 2 funktioner, og find frem til de optimale værdier af P og Q, TR, TC samt profit.

Benytter vi Den Erhvervsøkonomiske Metode til at udarbejde rapporten har vi følgende forslag til løsning.

Formulering

Opstilling af model

Virksomheden ønsker at maksimere profitten.

Modellen er følgende:

$$\max_{Q \geq 0} \Pi = TR - TC$$

Ved indsættelse giver det

$$\Pi = 58Q - 0{,}5Q^2 - (4 + 97Q - 8{,}5Q^2 + \frac{Q^3}{3})$$

$$\Pi = -4 - 39Q + 8Q^2 - \frac{Q^3}{3}$$

Analytisk løsning af model

Vi beregner 1. orden afledede således:

FOC: $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{Q}} = -39 + 16\mathrm{Q} - \mathrm{Q}^2$

Sættes FOC = 0 fås

$$-39 + 16\mathrm{Q} - \mathrm{Q}^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Q} = \begin{cases} 3 \\ 13 \end{cases}$$

Vi finder 2. orden afledede lig med:

SOC: $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathrm{Q}^2} = 16 - 2\mathrm{Q} < 0$ for $\mathrm{Q} > 8$

Dvs. med 2. afledede har vi fundet et maksimum for Q > 8. Med 1. afledede fandt vi Q = 3 eller Q = 13. For Q = 13 har vi et maksimum.

Betragtes

$$MR = \frac{\partial TR}{\partial Q} = 58 - Q$$

Og

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Q} = 97 - 17Q + Q^2$$

Så vil skæringspunktet mellem MR og MC betyde, at vi har fundet en optimal værdi. Men denne optimale værdi skal samtidig opfylde 2. orden betingelsen for at vi har fundet et maksimum. Derfor vil skæringspunktet for MR = MC ved værdien af Q = 13 netop opfylde 2. orden betingelsen. Den optimale værdi vil derfor være hvor MC skærer MR nedefra.

Dette kan ses ved at finde

hældningen på MC = $\frac{\partial MC}{\partial Q} = -17 + 2Q$

hældningen på MR = $\frac{\partial MR}{\partial Q} = -1$

Når Q = 3 er hældningen på $MC = -17 + 2(3) = -17 + 6 = -11 < -1$

Dvs. en stejlere negativ hældning end MR

Når Q = 13 er hældningen på $MC = -17 + 2(13) = 9$

Dvs. en positiv hældning, der er større end MR.

Det betyder, når Q = 3, har MC en stejlere negativ hældning end MR og vil derfor skære denne ovenfra. Når Q = 13, har MC en positiv hældning og vil skære MR ovenfra.

Eksempel 5

En virksomhed benytter 3 input faktorer K, L og R til at producere Q enheder. Virksomheden har produktionsfunktionen

$Q = 50K^{0,4}L^{0,2}R^{0.2}$

Virksomheden har et budget på €24.000 og indkøbsprisen pr enhed er K = €80, L = €12 og R = €10. Bestem hvilken kombination af K, L og R vil maksimere det samlede output af Q.

Benytter vi Den Erhvervsøkonomiske Metode til at udarbejde rapporten har vi følgende forslag til løsning.

Formulering

Opstilling af model

Med en produktionsfunktion givet ved

$Q = 50K^{0,4}L^{0,2}R^{0.2}$

hvor K = kapital og L = arbejdskraft og R =

Ønsker virksomheden at maksimere denne produktionsfunktion under hensyntagen til en budget begrænsning lig

$80K + 12L + 10R = 24.000$

Dvs. vi får Lagrange funktionen

$\mathcal{L} = 50K^{0,4}L^{0,2}R^{0.2} + \lambda(24.000 - 80K - 12L - 10R)$

Analytisk løsning af model

Vi beregner 1. orden partielle afledede og sætter lig med nul, således:

$$FOC_K:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 20K^{-0,6}L^{0,2}R^{0,2} - 80\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,25K^{-0,6}L^{0,2}R^{0,2} \qquad (1)$$

$$FOC_L:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 10K^{0,4}L^{-0,8}R^{0,2} - 12\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{10}{12}K^{0,4}L^{-0,8}R^{0,2} \qquad (2)$$

$$FOC_R:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 10K^{0,4}L^{0,2}R^{-0,8} - 10\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = K^{0,4}L^{0,2}R^{-0,8} \qquad (3)$$

$$FOC_\lambda:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 24.000 - 80K - 12L - 10R = 0 \qquad (4)$$

Sættes (1) lig (2) elimineres R:

$$0,25K^{-0,6}L^{0,2}R^{0,2} = \frac{10}{12}K^{0,4}L^{-0,8}R^{0,2} \Leftrightarrow K = 0,3L \tag{5}$$

Sættes (2) lig (3) elimineres K:

$$\frac{10}{12}K^{0,4}L^{-0,8}R^{0,2} = K^{0,4}L^{0,2}R^{-0,8} \Leftrightarrow R = 1,2L \tag{6}$$

Ved substitution af (5) og (6) i (4), fås

$$24.000 - 80(0,3L) - 12L - 10(1,2L) = 0 \Leftrightarrow L = 500$$

Ved substitution af L = 500 i (5) og (6) giver det

$$K = 0,3(500) = 150$$

$$R = 1,2(500) = 600$$

Benyttes de 3 resultater, fås

$$Q = 50(150)^{0,4}(500)^{0,2}(600)^{0,2} = 4.622$$

Kontrol af budget restriktion,

$$80(150) + 12(500) + 10(600) = 24.000$$

Test af løsning

De 2. orden partielle afledede er lig med:

$$SOC_K: \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K^2} = -\frac{12L^{0,2}R^{0,2}}{K^{1,6}} < 0 \ \text{ for } K, L, R > 0$$

$$SOC_L: \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial L^2} = -\frac{8K^{0,4}R^{0,2}}{L^{1,8}} < 0 \text{ for } K, L, R > 0$$

$$SOC_R: \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R^2} = -\frac{8K^{0,4}L^{0,2}}{R^{1,8}} < 0 \text{ for } K, L, R > 0$$

Dvs. vi har et maksimum.

Tolkning

Med de beregnede 2. orden betingelser kan vi fortsætte med.

Med en budgetrestriktion på 24.000 vil produktionsfunktionen være maksimeret til

Q = 4,622 med anvendelse af

L = 500, K = 150 og R = 600.

Eksempel 6

En konsulent er blevet bedt om at hjælpe en kommune med planlægning af bekæmpelse af forurening af et vandområde.

Konsulenten har beregnet 2 væsentlige forureningskilder og har opgjort disse i form af følgende 2 funktioner for forureningsniveau

$$Z_1 = 478 - 2C_1^{0,5}$$

$$Z_2 = 600 - 3C_2^{0,5}$$

hvor C_1 og C_2 angiver omkostningerne i €1.000 ved bekæmpelse af forurening.

For at sikre et acceptabelt kvalitet af vandet i vandområdet, ønsker kommunen at reducere den samlede forurening til et niveau 1.000 ved den billigste metode.

Benytter vi Den Erhvervsøkonomiske Metode til at udarbejde rapporten har vi følgende forslag til løsning.

Formulering

Konsulenten ønsker minimere de samlede omkostninger under hensyntagen til de 2 forureningskilder.

Opstilling af model

Konsulenten betragter følgende model

$$\underset{C_1, C_2 \geq 0}{\text{Min}}\ TC$$

$$Z_1 + Z_2 = 1.000$$

hvor $TC = C_1 + C_2$

Analytisk løsning af model

Opstilles Lagrange funktionen, fås

$$\mathcal{L} = C_1 + C_2 + \lambda(1.000 - Z_1 - Z_2)$$

$$\mathcal{L} = C_1 + C_2 + \lambda(1.000 - \left(478 - 2C_1^{0,5}\right) - \left(600 - 3C_2^{0,5}\right))$$

$$\mathcal{L} = C_1 + C_2 + \lambda(-78 + 2C_1^{0,5} + 3C_2^{0,5}))$$

Vi beregner 1. orden partielle afledede og sætter lig med nul, således:

$$FOC_{C_1}:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 1 + \lambda C_1^{-0,5} = 0 \Rightarrow \lambda = -C_1^{0,5} \quad (1)$$

$$FOC_{C_2}:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 1 + \lambda 1{,}5C_2^{-0,5} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-C_2^{0,5}}{1{,}512} \quad (2)$$

$$FOC_{\lambda}:\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -78 + 2C_1^{0,5} + 3C_2^{0,5} = 0 \quad (3)$$

Sættes (1) lig (2) fås

$$-C_1^{0,5} = \frac{-C_2^{0,5}}{1{,}5}$$

$$1{,}5C_1^{0,5} = C_2^{0,5} \quad (4)$$

Ved substitution af (4) i (3), fås

$$-78 + 2C_1^{0,5} + 3\left(1{,}5C_1^{0,5}\right) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 144 \quad (5)$$

Ved substitution af (5) i (4), fås

$$C_2^{0,5} = 1{,}5(12) = 18 \Rightarrow C_2 = 324$$

Ved indsættelse af C_1 = 144 i (1) fås

$$\lambda = -(144^{0,5}) = -12$$

Kontrol af restriktion,

$$Z_1 + Z_2 = 478 - 2(144^{0,5}) + 600 - 3(324^{0,5}) = 1.000$$

Test af løsning

De 2. orden partielle afledede er lig med:

$$SOC_{C_1}: \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial {C_1}^2} = -\frac{0.5\lambda}{C_1^{0,5}} < 0$$

$$SOC_{C_2}: \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial {C_2}^2} = -\frac{0,75\lambda}{C_2^{1,5}} < 0$$

Dvs. vi har et minimum.

Tolkning

Med de beregnede 2. orden betingelser kan vi fortsætte med.

Med en restriktion til forureningsniveau 1.000 vil man skulle bruge €144.000 til reduktion af den første forureningskilde, og €324.000 til reduktion af den anden forureningskilde.

Eksempel 7

En virksomhed har monopol og den har 2 produktionsfabrikker. Marginalomkostningerne på de 2 fabrikker er

$MC_1 = 2 + 0,2Q_1$

$MC_2 = 6 + 0,04Q_2$

Efterspørgselsfunktionen er givet ved

$Q = 660 - 10P$

hvor Q angiver den samlede produktion, dvs. $Q = Q_1 + Q_2$

Hvordan skal virksomheden producere på de 2 fabrikker, hvad skal prisen være, når virksomheden ønsker at maksimere sit dækningsbidrag.

Formulering

Vi udleder den horisontale summation af marginalomkostningerne, MC, og sætter denne lig MR.

Opstilling af model

Den generelle fremgangsmåde er givet ved

$\max_{Q \geq 0} \mathrm{DB} = TR - TC$

Vi foretager følgende for at finde frem til den optimale løsning.

Lad

$P = 66 - 0,1Q$

$MR = 66 - 0,2Q$

Summation af de 2 MC funktioner, giver

$MC_1 = 2 + 0{,}2Q_1$

$MC_2 = 6 + 0{,}04Q_2$

$\Longrightarrow$

$MC_1 - 2 = 0{,}2Q_1$

$MC_2 - 6 = 0{,}04Q_2$

$5MC_1 - 10 = Q_1$

$25MC_2 - 150 = Q_2$

Idet, $Q = Q_1 + Q_2$ og $MC = MC_1 = MC_2$, fås

$Q = (5MC_1 - 10) + (25MC_2 - 150)$

$Q = 30MC - 160$

$\Longrightarrow$

$$MC = \frac{Q + 160}{30}$$

Sættes MR = MC, fås

$$\frac{Q + 160}{30} = 66 - 0{,}2Q \Leftrightarrow Q = 260$$

Ved substitution af den aggregerede værdi, Q, giver det

$$MC = \frac{Q + 160}{30} = \frac{260 + 160}{30} = 14$$

$\Longrightarrow$

$MC_1 = MC_2 = MC = 14$

Og ved indsættelse, fås

$Q_1 = 5(14) - 10 = 60$

$Q_2 = 25(14) - 150 = 200$

$Q = Q_1 + Q_2 = 60 + 200 = 260$

Prisen bliver herefter

$P = 66 - 0{,}1Q = 66 - 0{,}1260) = 40$

	1	2	I alt
P	40	40	40
Q	60	200	260
TR	2.400	8.000	10.400
TVC	840	2.800	3.640
DB	1.560	5.200	6.760

Eksempel 8

En produktionsfunktion er en funktion der angiver sammenhængen mellem forskellige input variable og output. Fx vil produktionen af vindmøller (VM), hvor der benyttes råvarer (RV), arbejdskraft (AK), maskiner (MA) og andre produktions faciliteter (ANDET), kunne beskrives med

$\mathrm{VM} = \mathcal{F}(\mathrm{VM}, \mathrm{RV}, \mathrm{AK}, \mathrm{MA}, \mathrm{ANDET})$

I det følgende betragtes en Cobb-Douglas produktionsfunktion med 2 input faktorer, dvs. maskiner (K) og arbejdskraft (L) og antal producerede enheder (q):

$q = aK^{\beta_1}L^{\beta_2}$

I modellen forventes parametrene $a, \beta_1\ og\ \beta_2$ alle at være positive.

Tolkning af modellens parametre er:

1) Constant returns to Scale hvis $\beta_1 + \beta_2 = 1$

   Med Constant returns to Scale gælder det, at når kapital og arbejdskraft forøges med en faktor z, så vil output også forøges med en faktor z.

2) Increasing returns to scale hvis $\beta_1 + \beta_2 > 1$

   Med Increasing returns to Scale gælder det, at når kapital og arbejdskraft forøges med en faktor z, så vil output forøges med en faktor der er større end z.

3) Decreasing returns to scale hvis $\beta_1 + \beta_2 < 1$

   Med Decreasing returns to Scale gælder det, at når kapital og arbejdskraft forøges med en faktor z, så vil output blive forøget med en faktor der er mindre end z.

Lad der være givet produktions funktionen

$Q = 45K^{0,4}L^{0,5}$

Find de 2 afledede.

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 45(0,4)K^{0,4-1}L^{0,5} = 18K^{-0,6}L^{0,5}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 45(0,5)K^{0,4}L^{0,5-1} = 22,5K^{0,4}L^{-0,5}$$

Hældningen på de 2 MP funktioner ved stigende værdier af K og L bliver

$$\frac{\partial MP_K}{\partial K} = 18(-0,6)K^{-0,6-1}L^{0,5} = -10,8K^{-1,6}L^{0,5} < 0$$

$$\frac{\partial MP_L}{\partial L} = 18(-0,5)K^{0,4}L^{0,5-1} = -10,8K^{0,4}L^{-0,5} < 0$$

Dette stemmer godt overens med summen af de 2 eksponenter = 0,4 + 0,5 = 0,9

Med en værdi 0,9 < 1 er der tale om Decreasing return to scale.

Eksempel 9

En virksomhed producerer et produkt, og virksomheden har 2 produktionsfabrikker (1 og 2).

Marginalomkostningerne på de 2 fabrikker er

$MC_1 = 8 + 0{,}2Q_1$

$MC_2 = 10 + 0{,}05Q_2$

hvor Q_1 angiver hvor meget der produceres på fabrik 1, og Q_2 angiver hvor meget der produceres på fabrik 2.

Virksomheden har monopol og kan gennemføre pris diskrimination på 3 markeder.

Inverse efterspørgselsfunktioner er lig

$P_A = 150 - 0{,}1875Q_A$

$P_B = 80 - 0{,}15Q_B$

$P_C = 80 - 0{,}1Q_C$

hvor Q_A angiver hvor meget der sælges på marked A, Q_B angiver hvor meget der sælges på marked B, og Q_C angiver hvor meget der sælges på marked C.

Hvis virksomheden ønske at maksimere det samlede dækningsbidrag, hvor meget skal der produceres på de 2 fabrikker, og hvad skal prisen være på de 3 markeder.

Formulering

Vi maksimerer dækningsbidraget under hensyntagen til, at MR = MC.

$$\underset{Q_A,Q_B\geq 0}{\text{Max}}\ DB = TR - TVC$$

Vi foretager følgende for at finde frem til den optimale løsning.

Vi summerer de 3 MR funktioner til en fælles MR funktion.

Lad

$$P_A = 150 - 0{,}1875Q_A$$

$$P_B = 80 - 0{,}15Q_B$$

$$P_C = 80 - 0{,}1Q_C$$

$$\Longrightarrow$$

$$MR_A = 150 - 0{,}375Q_A$$

$$MR_B = 80 - 0{,}3Q_B$$

$$MR_C = 80 - 0{,}2Q_C$$

$$\Longrightarrow$$

$$Q_A = \frac{150 - MR_A}{0{,}375}$$

$$Q_B = \frac{80 - MR_B}{0{,}3}$$

$$Q_C = \frac{80 - MR_C}{0{,}2}$$

Det samlede MR bliver:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C$$

$$Q = \frac{150 - MR}{0{,}375} + \frac{80 - MR}{0{,}3} + \frac{80 - MR}{0{,}2}$$

Dvs

$$Q = 1.066{,}67 - 11MR \Rightarrow$$

$$MR = \frac{1{,}066{,}67 - Q}{11}$$

Summation af de 2 MC funktioner, giver

$$MC_1 = 8 + 0{,}2Q_1$$

$$MC_2 = 10 + 0{,}05Q_2$$

$$\Longrightarrow$$

$$Q_1 = 5MC_1 - 40$$

$$Q_2 = 20MC_2 - 200$$

Idet, $Q = Q_1 + Q_2$ findes den samlede MC

$$Q = (5MC - 40) + (20MC - 200)$$

$$Q = 25MC - 240$$

$$\Longrightarrow$$

$$MC = \frac{Q + 240}{25}$$

Sættes MR = MC, fås

$$\frac{1{,}066{,}67 - Q}{11} = \frac{Q + 240}{25} \Leftrightarrow$$

$$Q = 667{,}4074$$

Ved substitution af den aggregerede værdi, Q, giver det

$$MR = \frac{1{,}066{,}67 - 667{,}4074}{11} = 36{,}28$$

Ved indsættelse fås

$$Q_A = \frac{150 - MR_A}{0{,}375} = \frac{150 - 36{,}28}{0{,}375} = 303{,}2533$$

$$Q_B = \frac{80 - MR_B}{0{,}3} = \frac{80 - 36{,}28}{0{,}3} = 145{,}7333$$

$$Q_C = \frac{80 - MR_C}{0{,}2} = \frac{80 - 36{,}28}{0{,}2} = 218{,}6$$

Med beregning af de 3 mængder, fås ved indsættelse prisen på de 3 markeder

$$P_A = 150 - 0{,}1875(303{,}2533) = 93{,}14$$

$$P_B = 80 - 0{,}15(145{,}7333) = 58{,}14$$

$$P_C = 80 - 0{,}1(218{,}6) = 58{,}14$$

Med MR = MC = 36,28 fås ved indsættelse mængden der produceres på de 2 produktionssteder

$Q_1 = 5(36,28) - 40 = 141,4$

$Q_2 = 20(36,28) - 200 = 525,6$

Herefter kan vi udfylde nedenstående oversigt:

	Q	P	TR	TVC	DB	MR	MC
Produktion							
Fabrik 1	141,4			3.130,60			36,28
Fabrik 2	525,6			12.162,38			36,28
I alt	667			15.292,98			36,28
Efterspørgsel							
Marked A	303,25	93,14	28.245,01			36,28	
Marked B	145,73	58,14	8.472,93			36,28	
Marked C	218,60	58,14	12.709,40			36,28	
I alt	667		49.427,35				
Total	667		49.427,35	15.292,98	34.134,37	36,28	36,28

Eksempel 10

En virksomhed har 4 produktionsfabrikker (1, 2, 3 og 4), og marginalomkostningerne ved produktion af et produkt på de 4 fabrikker er

$MC_1 = 20 + Q_1$

$MC_2 = 40 + 0{,}5Q_2$

$MC_3 = 40 + Q_3$

$MC_4 = 60 + 0{,}5Q_4$

hvor Q_1 angiver hvor meget der produceres på fabrik 1, Q_2 angiver hvor meget der produceres på fabrik 2, Q_3 angiver hvor meget der produceres på fabrik 3, og Q_4 angiver hvor meget der produceres på fabrik 4.

Virksomheden har monopol og den inverse efterspørgselsfunktion er lig

$P = 580 - 0{,}3Q$

hvor P angiver prisen og Q angiver den samlede mængde, dvs.
$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

Hvis virksomheden ønske at maksimere det samlede dækningsbidrag, hvor meget skal der produceres på de 4 fabrikker, og hvad skal prisen være.

Formulering

Vi maksimerer dækningsbidraget under hensyntagen til, at MR = MC.

Max $DB = TR - TVC$

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \geq 0$

Når virksomheden ønsker at maksimere det samlede dækningsbidrag, gælder det, at

$MR = MC$

Marginalomsætningen vil blive forøget indtil den er lig marginalomkostningen. Her er marginalomkostningen angivet som den samlede marginalomkostning. Dvs. den horisontale summation af de enkelte marginalomkostnings funktioner.

Opstilling af model

Vi foretager følgende for at finde frem til den optimale løsning.

Horisontal summation af marginalomkostnings funktionerne:

$MC_1 = 20 + Q_1$

$MC_2 = 40 + 0{,}5Q_2$

$MC_3 = 40 + Q_3$

$MC_4 = 60 + 0{,}5Q_4$

$\Longrightarrow$

$Q_1 = MC_1 - 20$

$Q_2 = 2MC_2 - 80$

$Q_3 = MC_3 - 40$

$Q_4 = 2MC_4 - 120$

Med

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

fås

$Q = (MC - 20) + (2MC - 80) + (MC - 40) + (2MC - 120)$

$Q = 6MC - 260$

$\Longrightarrow$

$MC = \frac{Q + 260}{6}$

Den inverse efterspørgselsfunktion er lig

$P = 580 - 0{,}3Q$

$\Longrightarrow$

$TR = P \times Q = (580 - 0{,}3Q) \times Q$

$MR = \frac{\partial TR}{\partial Q} = 580 - 0{,}6Q$

Sættes MR = MC, fås

$\frac{Q + 260}{6} = 580 - 0{,}6Q \Leftrightarrow$

$Q + 3{,}6Q = 3.480 - 260 \Leftrightarrow$

$Q = \frac{3.220}{4{,}6} = 700$

Med Q = 700 fås ved indsættelse, at

$MC = 580 - 0{,}6(700) = 160$

Vi har her fundet, at

$$MC = MC_1 = MC_2 = MC_3 = MC_{¤} = 160$$

Med MC = 160 kan vi fordele mængden Q = 700 ud på de 4 fabrikker.

$$Q_1 = 160 - 20 = 140$$

$$Q_2 = 320 - 80 = 240$$

$$Q_3 = 160 - 40 = 120$$

$$Q_4 = 320 - 120 = 200$$

Prisen findes ved indsættelse.

$$P = 580 - 0{,}3(700) = 370$$

TVC findes ved integration af hver MC-funktion

$$TVC_1 = \int MC_1 dQ_1 = 20Q_1 + \frac{Q_1^2}{2}$$

$$TVC_2 = \int MC_2 dQ_2 = 40Q_2 + 0{,}25Q_2^2$$

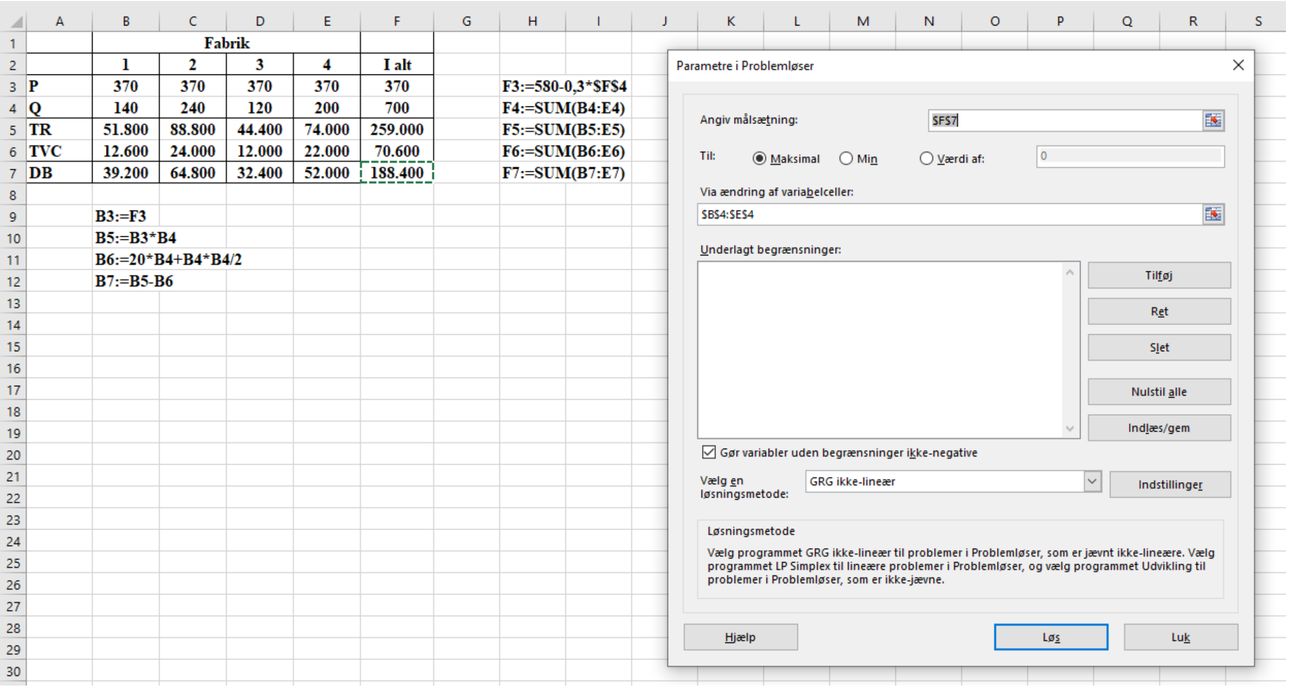
$$TVC_3 = \int MC_3\, dQ_3 = 40Q_3 + \frac{Q_3^2}{2}$$

$$TVC_4 = \int MC_4\, dQ_4 = 60Q_4 + 0{,}25Q_4^2$$

Samlet oversigt:

	Fabrik				
	1	2	3	4	I alt
P	370	370	370	370	370
Q	140	240	120	200	700
TR	51.800	88.800	44.400	74.000	259.000
TVC	12.600	24.000	12.000	22.000	70.600
DB	39.200	64.000	32.400	52.000	188.400

Excel:



Eksempel 11

En virksomhed sælger sit produkt på et marked til en pris på 200 kroner pr enhed. Virksomheden benytter 2 input faktorer K og L til priserne K = 42 kroner pr enhed og L = 5 kroner pr enhed.

Virksomheden har følgende produktionsfunktion:

$Q = 3{,}1K^{0{,}3}L^{0{,}25}$

Hvilken kombination af K og L skal virksomheden vælge for at maksimere sin profit.

$TR = P \times Q = 200(3{,}1K^{0{,}3}L^{0{,}25}) = 620K^{0{,}3}L^{0{,}25}$

$TC = 42K + 5L$

$\max_{K,L\geq 0} \Pi = TR - TC = 620K^{0{,}3}L^{0{,}25} - 42K - 5L$

Vi finder 1. orden afledede

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{K}} = 186\mathrm{K}^{-0{,}7}L^{0{,}25} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{L}} = 155\mathrm{K}^{0{,}3}L^{-0{,}75} = 0$$

Løses de 2 ligninger simultant mht K og L, fås

$K = 80{,}471179 \; og \; L = 563{,}29822$

Undersøges 2. orden afledede, fås

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial K^2} = (-0,7)186K^{-0,7-1}L^{0,25} = -130,2(80,47)^{-1,7}(563,3)^{0,25} = -0,365376 < 0$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial L^2} = (-0,75)155K^{0,3}L^{-0,75-1} = -116.25(80,47)^{0,3}(563,3)^{-1,75} = -0,0066572 < 0$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial K\,\partial L} = (0,25)186K^{-0,7}L^{-0,75} = 46,5(80,47)^{-0,7}(563,3)^{-0,75} = 0,0186404$$

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial K^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial L^2}\right) = (-0,3653575)(-0,0066572) = 0,0024323$$

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial K\,\partial L}\right)^2 = (-0,0186404)^2 = 0,0003475$$

Derfor, når

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial K^2} \times \frac{\partial^2\Pi}{\partial L^2} > \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial K\,\partial L}\right)^2$$

Vil alle 2. orden afledede betingelser for maksimum være opfyldt for K = 80,47 og L = 563,3.

Profit bliver

$$\Pi = 620K^{0,3}L^{0,25} - 42L - 5L$$

$$\Pi = 620(80,47)^{0,3}(563,3)^{0,25} - 42(80,47) - 5(563,3) = 5.069,68$$

Eksempel 12

En virksomhed benytter 4 input faktorer K, L, R og M til priserne pr enhed på K = 50 kroner, L = 30 kroner, R = 25 kroner og M = 20 kroner.

Virksomheden har følgende produktionsfunktion:

$Q = 160K^{0,3}L^{0,25}R^{0,2}M^{0,25}$

Virksomheden har et budget på 300.000 kroner.

Hvis virksomheden ønsker at maksimere Q, hvilken kombination af K, L, R og M skal virksomheden vælge når budgettet er på 300.000 kroner.

Lagrange funktionen skrives til

$\mathcal{L} = 160K^{0,3}L^{0,25}R^{0,2}M^{0,25} + \lambda(300.000 - 50K - 30L - 25R - 20M)$

Vi finder 1. orden afledede

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{K}} = 48\mathrm{K}^{-0,7}L^{0,25}M^{0,25}R^{0,2} - 50\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{L}} = 40\mathrm{K}^{0,3}L^{-0,75}M^{0,25}R^{0,2} - 30\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{R}} = 32\mathrm{K}^{0,3}L^{0,25}M^{0,25}R^{-0,8} - 25\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{M}} = 40\mathrm{K}^{0,3}L^{0,25}M^{-0,75}R^{0,2} - 20\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 300.000 - 50\mathrm{K} - 30\mathrm{L} - 20\mathrm{M} - 25\mathrm{R} = 0$$

Løses ovenstående simultant fås løsningsværdierne

$K = 1.800, L = 2.500, R = 2.400, M = 3.750, \lambda = 1{,}32622$

Ved indsættelse giver det

$Q = 160(1.800^{0,3})(2.500^{0,25})(2.400^{0,2})(3.750^{0,25}) = 397.866\ stk$

Undersøges 2. orden afledede, fås

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathrm{K}^2} = -33{,}6\mathrm{K}^{-1,7}\mathrm{L}^{0,25}R^{0,2}M^{0,25} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathrm{L}^2} = -30\mathrm{K}^{0,3}\mathrm{L}^{-1,75}R^{0,2}M^{0,25} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathrm{R}^2} = -25{,}6\mathrm{K}^{0,3}\mathrm{L}^{0,25}R^{-1,8}M^{0,25} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathrm{M}^2} = -30\mathrm{K}^{0,3}\mathrm{L}^{0,25}R^{0,2}M^{-1,75} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} = 0$$

Er alle 2. orden afledede betingelser for maksimum være opfyldt for $K = 1.800, L = 2.500, R = 2.400, M = 3.750$.

Oplysninger er identisk med ovenstående.

Hvad er den billigste produktion man kan gennemføre, hvis man netop skal producere 120.000 enheder.

Begrænsningen er nu

$Q = 160K^{0,3}L^{0,25}R^{0,2}M^{0,25} = 120.000$

Og kriteriefunktionen bliver

$TC = 50K + 30L + 25R + 20M$

Lagrange funktionen bliver

$\mathcal{L} = 50K + 30L + 25R + 20M + \lambda(120.000 - 160K^{0,3}L^{0,25}R^{0,2}M^{0,25})$

Vi finder 1. orden afledede

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{K}} = 50 - 48\lambda \mathrm{K}^{-0,7}L^{0,25}M^{0,25}R^{0,2} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{L}} = 30 - 40\lambda \mathrm{K}^{0,3}L^{-0,75}M^{0,25}R^{0,2} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{R}} = 25 - 32\lambda \mathrm{K}^{0,3}L^{0,25}M^{0,25}R^{-0,8} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{M}} = 20 - 40\lambda \mathrm{K}^{0,3}L^{0,25}M^{-0,75}R^{0,2} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 120.000 - 160\mathrm{K}^{0,3}\mathrm{L}^{0,25}\mathrm{R}^{0,2}\mathrm{M}^{0,25} = 0$$

Løses ovenstående simultant fås løsningsværdierne

$K = 542,896, L = 754,023, R = 723,862, M = 1.131,03, \lambda = 0,754023$

Ved indsættelse giver det $\mathrm{Q} = 120.000$ stk